Національна академія наук України

Фізико-технічний інститут низьких температур ім. Б.І. Вєркіна

На правах рукопису

Фардигола Лариса Василівна

УДК 517.98: 517.95

ОПЕРАТОРИ ПЕРЕТВОРЕННЯ ТА ОПЕРАТОРИ ВПЛИВУ В ЗАДАЧАХ КЕРУВАННЯ

01.01.01 — математичний аналіз

Дисертація на здобуття наукового ступеня

доктора фізико-математичних наук

Харків — 2016

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність теми. Оператори перетворення для рівнянь Штурма–Ліувілля є потужним інструментом для дослідження різноманітних проблем теорії диференціальних рівнянь і математичної фізики (див., наприклад, [99], [54]–[56], [120]).

Нехай $T_r : L^2(0,+\infty) \to L^2(0,+\infty)$, $D(T_r) = L^2(0,+\infty)$, є добре відомим оператором перетворення, який зберігає асимптотику функцій на нескінченності, і такий, що

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} - r(x)\right) T_r g = T_r \frac{d^2}{d\xi^2} g, \qquad g \in H^2(0,+\infty), \tag{0.1}$$

за умов

$$r \in C^1[0,+\infty), \qquad \int_0^\infty x|r(x)|\,dx < \infty, \tag{0.2}$$

де $H^2(0,+\infty)$ — простір Соболєва. Оскільки цей оператор є оборотним: $T_r^{-1} : L^2(0,+\infty) \to L^2(0,+\infty)$, $D(T_r^{-1}) = L^2(0,+\infty)$, то для кожного $\lambda \in \mathbb{C}$ він взаємно однозначно відображає множину розв'язків рівняння

$$-v'' = \lambda^2 v, \qquad x > 0, \tag{0.3}$$

на множину розв'язків рівняння

$$-y'' + r(x)y = \lambda^2 y, \qquad x > 0, \tag{0.4}$$

до того ж

$$\frac{y(x,\lambda)}{v(x,\lambda)} \to 1, \quad \text{коли } x \to +\infty, \tag{0.5}$$

якщо $y(\cdot,\lambda) = T_r v(\cdot,\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Це дає можливість застосувати цей оператор (і формулу (0.1)) для розв'язання різноманітних проблем для хвильового рівняння на півосі

$$w_{tt} = w_{xx} - r(x)w, \qquad x > 0,\ t > 0. \tag{0.6}$$

Проте, формула (0.1) справедлива лише для функцій $g \in H^2(0,+\infty)$, але задачі для рівняння (0.6) деколи доводиться розглядати в просторах функцій, ширших за $H^2(0,+\infty)$, наприклад, задачі керування для такого рівняння, як правило, розглядаються для $w(\cdot,t) \in H^0(0,+\infty)$ або $w(\cdot,t) \in H^1(0,+\infty)$, $t > 0$. Тому виникає проблема продовження цього оператора, щонайменше, на $H^{-1}(0,+\infty)$.

Крім того, досить цікавою є проблема побудови оператора, подібного до оператора перетворення, для трансформації розв'язків рівняння (0.3) на розв'язки рівняння

$$-y'' + q^2 y = \lambda^2 y, \qquad x > 0, \tag{0.7}$$

за умови (0.5), де $q > 0$ є сталою. Нажаль, такий оператор не є взаємно однозначним, але він відіграє важливу роль в розв'язанні проблем керованості для хвильового рівняння

$$w_{tt} = w_{xx} - q^2 w, \qquad x > 0,\ t > 0, \tag{0.8}$$

тому від також вартий на увагу. Його названо оператором впливу тому, що він, зокрема, описує вплив керування на кінцевий стан керованої системи.

Наступним кроком у розгляді оператора перетворення є узагальнення його на диференціальні оператори другого порядку зі змінними коефіцієнтами. А саме, побудова для заданого $m = -2, -1$ бієктивного оператора $\mathbb{T} : H^m(0, +\infty) \to \mathbb{H}^m(0, +\infty)$, $D(\mathbb{T}) = L^2(0, +\infty)$, який відображає множину розв'язків рівняння (0.7) на множину розв'язків рівняння

$$-\frac{1}{\rho(x)}\left(k(x)y'\right)' - \gamma(x)w = \lambda^2 y, \qquad x > 0, \tag{0.9}$$

за деякого аналога умови (0.5), де $\rho, k, \gamma \in C^1[0, +\infty)$, ρ та k є додатними на $[0, +\infty)$. Тут $\mathbb{H}^m(0, +\infty)$ є деяким новим простором соболєвського типу, який слід побудувати з урахуванням коефіцієнтів ρ і k. Такий оператор дає можливість зведення вивчення властивостей хвильового рівняння

$$w_{tt} = \frac{1}{\rho(x)}\left(k(x)w_x\right)_x + \gamma(x)w, \qquad x > 0,\ t > 0, \tag{0.10}$$

до властивостей рівняння (0.7). Добре відомо [88], що простори Соболєва $H^m(\mathbb{R})$ є "природним оточенням" для гіперболічних рівнянь зі сталими коефіцієнтами, зокрема, хвильових рівнянь зі сталими коефіцієнтами. Тому побудова оператора перетворення $\mathbb{T}$ і просторів $\mathbb{H}^m$ соболєвського типу, пов'язаних з ними, дає можливість знайти таке "природне оточення" для хвильових рівнянь зі змінними коефіцієнтами.

Таким чином, побудова операторів перетворення для операторів другого порядку зі змінними коефіцієнтами і просторів соболєвського типу, пов'язаних з ними, а також теорії їх застосування до проблем теорії керування і теорії крайових задач є актуальною та сучасною галуззю математичних досліджень.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконана в математичному відділенні Фізико-технічного інституту низьких температур ім. Б.І.Вєркіна НАН України. Результати дисертації є складовою частиною держбюджетних науково-дослідних робіт "Методи комплексного аналізу та їх застосування в теорії операторів, теорії ймовірностей і математичній статистиці" (номер державної реєстрації 0102U000320), "Методи комплексного аналізу та їх застосування в спектральній теорії, математичній статистиці, теорії диференціальних рівнянь та проблемі моментів" (номер державної реєстрації 0102U000321), "Теорія функцій та її застосування в спектральній теорії, аналітичних питаннях математичної статистики, теорії диференційних рівнянь, ергодичній теорії" (номер державної реєстрації 0105U001053), "Теорія функцій та її застосування в теорії операторів, аналітичних питаннях теорії ймовірностей, теорії диференціальних та функціональних рівнянь, ергодичній теорії" (номер державної реєстрації 0108U000053) та "Нові методи теорії функцій та їх застосування в спектральній теорії, характеризаційних задачах математичної статистики, теорії керування та ергодичній теорії" (номер державної реєстрації 0113U001130).

Мета і задачі дослідження. Метою дослідження є побудова нових типів операторів перетворення для диференціальних операторів другого порядку, зокрема, операторів із змінними коефіцієнтами, та просторів, породжених ними, і побудова теорії застосування цих операторів до проблем теорії керування та теорії крайових задач.

Об'єктом дослідження є диференціальні оператори другого порядку, оператори перетворення для них, простори соболєвського типу, керовані системи та нелокальні крайові задачі для хвильових рівнянь на необмежених областях.

Предметом дослідження є властивості операторів перетворення для диференціальних операторів другого порядку, властивості просторів соболєвського типу, пов'язаних з ними, властивості операторів впливу, а також властивості керованості, стабілізовності та коректності нелокальних крайових задач для хвильових рівнянь на необмежених областях.

Задачі дослідження:

- побудувати і дослідити оператори перетворення для диференціальних операторів другого порядку зі змінними коефіцієнтами на півосі та простори соболєвського типу, пов'язані з ними;

- побудувати і дослідити оператори перетворення для двовимірного оператора Лапласа, визначеного на радіально симетричних розподілах, та простори соболєвського типу, пов'язані з ними та застосувати одержані результати для вивчення керованості хвильового рівняння зі сталими коефіцієнтами на півплощині;

- побудувати і дослідити оператори впливу, що виникають в задачах керованості для хвильового рівняння зі сталими коефіцієнтами на півосі та застосувати одержані результати для вивчення керованості цього рівняння;

- вивчити проблеми стабілізовності та властивості коректності нелокальних крайових задач для хвильового рівняння.

- застосовуючи побудовані оператори перетворення для диференціальних операторів другого порядку зі змінними коефіцієнтами на півосі та властивості просторів соболєвського типу, пов'язаних з ними, дослідити проблеми керованості, стабілізовності та коректності нелокальних крайових задач для хвильового рівняння зі змінними коефіцієнтами на півосі.

Методи дослідження. У дисертаційній роботі використовуються методи математичного і функціонального аналізу, теорії диференціальних рівнянь та теорії керування.

Наукова новизна одержаних результатів. У роботі побудовано нові типи операторів перетворення для деяких диференціальних операторів другого порядку та нові простори соболєвського типу, пов'язані з ними, і розроблено теорію застосування цих операторів до проблем теорії керування та теорії крайових задач. Зокрема одержано наступні результати:

- уперше введено і досліджено оператори впливу (які є подібними до операторів перетворення), що виникають в задачах керованості для хвильового рівняння зі сталими коефіцієнтами на півосі, керованого крайовою умовою Діріхле або Неймана;

- уперше введено і досліджено оператори перетворення для диференціального оператора другого порядку зі змінними коефіцієнтами та нові простори $\mathbb{H}^m$, $m = \overline{-2, 2}$, соболєвського типу, пов'язані з ними;

- уперше введено та досліджено оператори перетворення для двовимірного оператора Лапласа, визначеного на радіально симетричних розподілах і нові простори $H_0^{s[1/2]}$ та $H_{s[1/2]}^0$, $s \in \mathbb{R}$, соболєвського типу, пов'язані з ними;

- застосовуючи оператори впливу та їх властивості, одержано нові критерії керованості за заданий і вільний час для хвильового рівняння зі сталими коефіцієнтами на півосі, керованого крайовими умовами Діріхле або Неймана;

- застосовуючи оператори перетворення для двовимірного оператора Лапласа, визначеного на радіально симетричних розподілах та властивості просторів $H_0^{s[1/2]}$ та $H_{s[1/2]}^0$, $s \in \mathbb{R}$, одержано нові критерії керованості за заданий і вільний час для хвильового рівняння зі сталими коефіцієнтами на півплощині, керованого крайовими умовами Діріхле або Неймана імпульсного типу;

- розв'язано проблему стабілізовності для хвильового рівняння зі сталими коефіцієнтами на півосі;

- одержано критерії коректності для нелокальних крайових задач для хвильового рівняння зі сталими коефіцієнтами;

- застосовуючи оператори перетворення для диференціального оператора другого порядку зі змінними коефіцієнтами та властивості просторів $\mathbb{H}^m$, $m = \overline{-2, 2}$, одержано нові критерії керованості, розв'язано проблему стабілізовності і одержано нові критерії коректності нелокальних крайових задач для хвильового рівняння зі змінними коефіцієнтами на півосі.

Практичне значення одержаних результатів. У дисертації проведено фундаментальні теоретичні дослідження, які поглиблюють наші знання про диференціальні оператори другого порядку зі сталими і змінними коефіцієнтами та їх зв'язок з формуванням нових операторів перетворення і нових просторів соболєвського типу. Вони можуть бути використані в теорії диференціальних рівнянь, математичній фізиці, теорії просторів соболєвського типу та інших розділах математики.

Особистий внесок здобувача. Усі результати дисертації одержано автором особисто. Зі спільних праць до дисертації включено лише ті результати, які належать автору. У розділі 1 дисертації розповідається про внесок співавторів до цих робіт.

Апробація результатів дисертації. Основні результати досліджень, наведені в дисертації, доповідалися та обговорювалися на таких міжнародних конференціях та семінарах:

- "Boundary-Value Problems, Special Functions and Fractional Calculus", Мінськ, Білорусь, 1996;
- "2nd European Congress of Mathematics", Будапешт, Угорщина, 1996;
- "Theory of Functions and Mathematical Physics", Харків, 2001;
- "Inverse Problems and Nonlinear Equations", Харків, 2002;

- “Mathematical Analysis and Economics”, Суми, 2003;
- “Nonlinear Partial Differential Equations” , Алушта, 2003, 2005;
- “First Karazin Scientific Readings”, Харків, 2004;
- “International Conference on Differential Equations”, Львів, 2006;
- “Differential Equations and Related Topics” dedicated to I.G.Petrovskii, Москва, Росія, 2007;
- “Lyapunov Memorial Conference”, Харків, 2007;
- “Further Progress in Analysis”, 6th International ISAAC Congress, Анкара, Туреччина, 2007;
- “International V.Ya.Skorobohatko Mathematical Conference”, Дрогобич, 2011, 2015;
- “Complex Analysis and its Applications”, Харків, 2011;
- “Spectral Theory and Differential Equations”, Харків, 2012;
- “Mathematical Analysis and Mathematical Physics”, Харків, 2015;
- семінар з теорії функцій в Інституті математики Мюнхенського університету, Німеччина (керівник Г. Зайдентоп);
- семінар з теорії функцій і функціонального аналізу в Харківському національному університеті ім. В.Н. Каразіна (керівник А.П. Гришин);

- семінар математичного відділення Фізико-технічного інституту ім. Б.І.Вєркіна НАН України (керівник Є.Я. Хруслов);
- семінар кафедри прикладної математики в Харківському національному університеті ім. В.Н.Каразіна (керівник В.І. Коробов)
- семінар відділу нелінійного аналізу в Інституті математики НАН України, Київ (керівник В.А. Михайлець).

Публікації. Результати дисертації опубліковано в 45 наукових публікаціях, в тому числі в 23 наукових статтях у вітчизняних та закордонних фахових наукових виданнях: [15]–[26], [71], [72], [107]–[115] та в 22 тезах доповідей на наукових конференціях: [27]–[45] , [93], [116], [117].

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається зі вступу, семи розділів, висновків та списку використаних джерел, що містить 120 найменувань та займає 20 сторінок. Загальний обсяг роботи становить 295 сторінок, основна частина становить 270 сторінок.

У *розділі 1* зроблено огляд літератури за темою дисертації, наведено деякі попередні результати та зроблено вибір напрямку дослідження.

У *розділі 2* в класичних просторах Соболєва введено та досліджено оператори впливу, що виникають в задачах керування для хвильового рівняння зі сталими коефіцієнтами.

У *розділі 3* введено і досліджено оператори перетворення та простори соболєвського типу для диференціальних операторів другого порядку зі змінними коефіцієнтами.

У *розділі 4* введено і досліджено оператори перетворення та простори соболєвського типу для двовимірного оператора Лапласа зі сталими коефіцієнтами, визначеного на радіально симетричних функціях.

У *розділі 5* на основі результатів, одержаних у розділі 2, одержано критерії керованості для хвильового рівняння зі сталими коефіцієнтами на півосі, керованого крайовою умовою Діріхле або крайовою умовою Неймана. Застосовуючи результати розділу 4, одержано також критерії керованості хвильового рівняння зі сталими коефіцієнтами на півплощині, керованого крайовою умовою Діріхле або крайовою умовою Неймана імпульсного типу. У цьому ж розділі доведено стабілізовність хвильового рівняння зі сталими коефіцієнтами за допомогою позиційного керування без запізнення або за допомогою такого керування із запізненням. Крім того, одержано критерії коректності нелокальної крайової задачі для хвильового рівняння зі сталими коефіцієнтами.

У *розділі 6*, застосовуючи результати одержані у розділі 3, основні результати розділу 5 узагальнено на хвильові рівняння зі змінними коефіцієнтами на півосі. А саме, для цього рівняння одержано критерії керованості крайовою умовою Діріхле або крайовою умовою Неймана, доведено стабілізовність за допомогою позиційного керування та одержано критерії коректності нелокальної крайової задачі.

У *розділі 7* наведено приклади, що ілюструють та доповнюють результати попередніх розділів.

РОЗДІЛ 1.

ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ, ПОПЕРЕДНІ РЕЗУЛЬТАТИ ТА ВИБІР НАПРЯМКУ ДОСЛІДЖЕННЯ

1.1. Огляд літератури

Оператори перетворення для рівняння Штурма–Ліувілля є потужними інструментами сучасної математики, які застосовуються для розв'язання різноманітних проблем теорії диференціальних рівнянь, математичної фізики та інших галузей математики. Вони виникли в 40-і роки минулого сторіччя в теорії операторів узагальненого зсуву, побудованої Ж. Дезартом та Б.М. Левітаном [96]. Далі оператори перетворення досліджувалися і застосовувалися багатьма математиками (див., наприклад, [54]–[56], [90], [95], [96], [99], [104], [120]).

Оператори перетворення для рівняння Штурма–Ліувілля, які зберігають початкові умови, було застосовано в задачах керування для хвильового рівняння на скінченному за просторовою змінною відрізку та для цього рівняння на півосі але з фінітними початковими даними в роботах [57], [58], [118].

Оператори перетворення, для двовимірного оператора Лапласа, визначеного на радіально симетричних розподілах, було введено і досліджено в [25], [115]. Разом з цими операторами введено та досліджено деякі модифіковані простори соболєвського типу, породжені ними.

Одним з добре вивчених є оператор перетворення для рівняння Штурма–Ліувілля на півосі, який зберігає асимптотику розв'зків на нескінченності, тобто оператор, що трансформує розв'язки рівняння (0.3) у розв'язки рівняння (0.4) за умови (0.5). Але оператори перетворення досліджувалися і для інших складніших рівнянь, наприклад, для рівняння

$$y'' + \varphi_1(x)y' + \varphi_2(x)y + i\lambda\varphi_3(x)y + \lambda^2 y = 0, \qquad \xi > 0, \tag{1.1}$$

для $\lambda \in \mathbb{C}$ і різноманітних $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ (у тому числі і матричних) [54]–[56], [120]. Ці оператори визначено на сім'ях розв'язків рівнянь, що розглядаються. Нажаль, не всі з цих операторів перетворення можливо розповсюдити на весь простір $L^2(0, +\infty)$, тим паче, на ширші простори. У деяких задачах, наприклад, в задачах теорії розсіювання, застосування цих операторів дає бажаний результат. Але для дослідження інших, наприклад, задач теорії керування, потрібні оператори, які відображають нормовані простори, у яких розглядаються ці задачі, цілком.

Оператор перетворення $T_r : L^2(0, +\infty) \to L^2(0, +\infty)$, $D(T_r) = L^2(0, +\infty)$ є взаємно однозначним оборотним оператором, $R(T_r) = L^2(0, +\infty)$, який відображає розв'язки рівняння (0.3) на розв'язки рівняння (0.4) за умови (0.5), задовольняє ще й умову (0.1), якщо для потенціала r виконано (0.2). У роботі [23] цей оператор вперше був застосований для дослідження керованості хвильового рівняння рівняння зі змінним потенціалом за додаткової умови на потенціал: $|r(x)| \le \beta e^{-\alpha x}$, $x > 0$. У цій роботі оператор T_r було продовжено на простори Соболєва до оператора $\widetilde{\mathbf{T}}_r : \widetilde{H}^{-2} \to \widetilde{H}^{-2}$, $D(\widetilde{\mathbf{H}}_r) = \widetilde{H}^{-2}$, де $\widetilde{H}^m = \{\varphi \in H^m \mid \varphi \text{ є непарним}\}$, $H^m = H^m(\mathbb{R})$ є простором Соболєва, $m \in \mathbb{Z}$. Цей продовжений оператор є взаємно однозначним оборотним обмеженим оператором, обернений до якого є також обмеженим. Тому він дозволяє звести проблему крайової керованості умовами Діріхле для хвильового рівняння вигляду (0.6) зі змінним потенціалом $p(x) = q^2 + r(x)$, $x > 0$, до тієї ж проблеми для хвильового рівняння зі сталим потенціалом (0.7). У роботі [119] більшість властивостей оператора $\widetilde{\mathbf{T}}_r$ було перенесено на випадок потенціала r, який задовольняє умову (0.2), тобто, удалося позбутися умови експоненційного спадання потенціала. У роботі [59] було побудовано продовження оператора T_r на простори $\widehat{H}^m = \{\varphi \in H^m(\mathbb{R}) \mid \varphi \text{ є парним}\}$. Деякі додаткові властивості цього продовження було одержано в [26]. Таке продовження дало можливість звести проблему крайової керованості умовами Неймана для хвильового рівняння вигляду (0.6) зі змінним потенціалом $p(x) = q^2 + r(x)$, $x > 0$, до тієї ж проблеми для хвильового рівняння зі сталим потенціалом (0.7).

Подальші вдосконалення операторів перетворення, що використовуються в теорії керування, стосуються рівнянь зі змінними коефіцієнтами (0.9). У роботі [24] побудовано оператор перетворення $\widetilde{\mathbb{T}} : \widetilde{H}^{-2} \to \widetilde{\mathbb{H}}^{-2}$, $D(\widetilde{\mathbb{T}}) = \widetilde{H}^{-2}$, який перетворює розв'язки рівняння (0.7) з деяким $q \ge 0$

на розв'язки рівняння (0.9) за деяких додаткових умов на коефіцієнти ρ, k, γ. Тут q визначається за ρ, k, γ. У цій роботі, також, уведено та досліджено оператор $\mathbf{S} : \widetilde{H}^{-2} \to \widetilde{\mathbb{H}}^{-2}$, $D(\mathbf{S}) = \widetilde{H}^{-2}$, що є оператором перетворення, який відображає розв'язки рівняння (0.6) зі змінним потенціалом $p(x) = q^2 + r(x)$, $x > 0$, на розв'язки рівняння (0.9) за вже згаданих додаткових умов на коефіцієнти ρ, k, γ. Тут r і q визначаються за ρ, k, γ. Разом з оператором $\mathbf{S}$ введено спеціальні модифіковані простори соболєвського типу $\mathbb{H}^m$, $m = \overline{-2, 2}$, в яких простір $L^2(\mathbb{R})$ замінено на ваговий простір $L^2_\rho(\mathbb{R})$ з вагою $\sqrt{\rho}$, а диференціальні оператори d/dx замінено на "лінійно деформовані" оператори $\sqrt{k/\rho}\Big(d/dx + \big(\rho'/\rho + k'/k\big)/4\Big)$, де замість k і ρ ми розглядаємо їх парні продовження. Цей оператор $\mathbf{S}$ є ізометричним ізоморфізмом H^m_0 і $\mathbb{H}^m$, зокрема, $\mathbf{S}(H^m_0) = \mathbb{H}^m$, $m = \overline{-2, 2}$. Оператор $\mathbf{S}$ зберігає значення функцій в нулі, але не зберігає їх асимптотику на нескінченності. Зростання розподілів з $\mathbb{H}^m$ залежить від даних ρ and k рівняння (0.9), $m = \overline{-2, 2}$. У цій роботі доведено, що $\mathcal{D} \subset \mathbb{H}^m \subset \mathbb{H}^n \subset \mathcal{D}'$ є вкладеннями, $-2 \le n \le m \le 2$. Тут $\mathcal{D}$ є простором нескінченно диференційовних функцій з компактними носіями. Крім того, там також доведено, що $\mathcal{D}$ є щільним в $\mathbb{H}^m$, $\mathbb{H}^m$ є щільним в $\mathbb{H}^n$ та $\mathbb{H}^n$ є щільним в $\mathcal{D}'$, $-2 \le n \le m \le 2$. До того ж показано, що співвідношення між простором Шварца $\mathcal{S}$ швидко спадних функцій і простором $\mathbb{H}^m$ залежить від ρ і k, $m = \overline{-2, 2}$. Доведено, що $\widetilde{\mathbb{T}} = \mathbf{S}\widetilde{\mathbf{T}}_r$, де $\widetilde{\mathbf{T}}_r$ є вже згаданим продовженням оператора перетворення для рівняння Штурма–Ліувілля на півосі, який зберігає асимптотику розв'зків на нескінченності. Застосовуючи оператор $\widetilde{\mathbb{T}}$ у роботі [24] проблему крайової керованості умовою Діріхле для рівняння (0.9) зведено до тієї ж проблеми для рівняння (0.7) з деяким $q \geq 0$, що визначається за ρ, k, γ. Аналогічний оператор $\widehat{\mathbb{T}} = \mathbf{S}\widehat{\mathbf{T}}_r$, який породжуються проблемою крайової керованості умовою Неймана, введено та досліджено в роботі [26].

Класичні простори Соболєва $H^m(\mathbb{R})$ та їх застосування в теорії еволюційних рівнянь викладено в [88]. Вони є "природним оточенням" для гіперболічних рівнянь зі сталими коефіцієнтами, зокрема, хвильових рівнянь зі сталими коефіцієнтами. Тому побудова операторів перетворення $\widetilde{\mathbb{T}} = \mathbf{S}\widetilde{\mathbf{T}}_r$ та $\widehat{\mathbb{T}} = \mathbf{S}\widehat{\mathbf{T}}_r$ і просторів $\mathbb{H}^m$ соболєвського типу, пов'язаних з ними, дає можливість знайти таке "природне оточення" для хвильових рівнянь зі змінними коефіцієнтами.

Класичні простори Соболєва є універсальним інструментом, за допомоги якого можна вивчати диференціальні рівняння різних типів. Але при дослідженні багатьох спеціальних властивостей цих рівнянь потрібні простори, які точніше відповідають властивостям досліджуваних рівнянь. Різноманітні модифікації просторів Соболєва досліджено та застосовано до задач теорії диференціальних рівнянь, математичної фізики, теорії керування та інших розділів математики в роботах багатьох науковців (див., наприклад, [11]–[13], [24]–[26], [47], [48], [53], [73], [79], [100], [115]).

У цій дисертаційній роботі вивчаються задачі керованості, задачі стабілізовності та нелокальні крайові задачі для хвильового рівняння на півосі, а також задачі керованості для цього рівняння на півплощині. Загальні питання керованості, спостережуваності та стабілізовності досліджено в [6], [10], [61], [63], [68], [75], [78], [80] та інших.

Відмітимо, що задачі керованості для хвильового рівняння зі сталими та зі змінними коефіцієнтами в обмежених областях вивчені досить добре (див, наприклад, [3], [7], [14], [20], [50]– [52], [57], [58], [62], [65], [66], [70], [77], [81], [92], [101], [113] та багато інших). На відміну від цього, задачі керованості для цього рівняння в необмежених областях досліджені набагато гірше. Наведемо деякі роботи, присвячені цьому питанню: [18], [19], [21]–[26], [59], [60], [71], [72], [82], [114], [115], [118], [119]. Це пов'язано, насамперед, з тим, що поводження розв'язків хвильового рівняння на півосі або півплощині істотно відрізняється від поводження розв'язків цього рівняння у скінченних областях (див., наприклад, [86]). Зокрема, добре відомо, що для рівняння скінченної струни, керованої своїм лівим кінцем і закріпленої на правому кінці, кожний стан такої керованої системи є 0-керованим за час удвічі більший за довжину струни [92]. На відміну від цього, якщо стан $\begin{pmatrix} w(\cdot,0) \\ w_t(\cdot,0) \end{pmatrix}$ хвильового рівняння на півосі, керованого крайовою умовою на межі цієї півосі, є наближено 0-керованим за заданий час, то функції, що задають початковий стан, мають обмежені носії, більш того, $w_t(\cdot,0)$ залежить від $w(\cdot,0)$ [19], [21], [71], [72], [114]. Таким чином, для хвильового рівняння на півплощині актуальною не тільки проблема (наближеної) 0-керованості за заданий час, але й така проблема за вільний час. Центральними методами дослідження проблем керованості є HUM (Hilbert Uniqueness Method) [6], [63], теорія двоїстості [10], [78] та метод C_0-півгруп [61], [68], [75], [80]. Перші два метода подібні один до одного і можуть бути застосованими лише для дослідження керованості за заданий час. Оскільки для задач керованості для хвильового рівняння на півосі та на півплощині актуальною є проблема керованості за вільний час, то ми застосовуємо C_0-півгрупи для постановки задач та їх дослідження (див. нижче підрозділ 1.4).

Коротко переглянемо роботи, у яких досліджено проблеми керованості в необмежених областях. У роботі [82] досліджено проблеми керованості для хвильового рівняння в $\mathbb{R}^3$. У роботах [18], [25] і [115] вивчено проблеми керованості для хвильового рівняння на півплощині, керованого крайовою умовою Діріхле або крайовою умовою Неймана імпульсного типу в класичних просторах Соболєва. За допомоги операторів перетворення для оператора Лапласа, заданого на радіально симетричних розподілах, одержано критерії керованості для цього рівняння за заданий та вільний час. Деякі допоміжні результати щодо керованості хвильового рівняння зі сталими коефіцієнтами опубліковано в роботах [20], [113]. У роботі [113] Л.В. Фардиголі належать результати щодо керованості за час $T \geq \pi$, а К.С. Халіної — результати щодо керованості за час $T < \pi$.

Для хвильового рівняння (0.8) зі сталими коефіцієнтами і сталим потенціалом $q \geq 0$, керованого крайовою умовою Діріхле, проблеми L^∞-керованості та наближеної L^∞-керованості було досліджено в [71], [72] для $q = 0$ і в [21] для $q > 0$, а ці проблеми для того самого рівняння, керованого крайовою умовою Неймана, було одержано в [114] для $q = 0$ і в [19], [22] для $q > 0$. У цих роботах розв'язки було знайдено в явному вигляді, а проблеми керованості було розв'язано (одержано критерії керованості) за допомоги операторів впливу. Було доведено, що властивості керованості рівняння (0.8) за заданий час у випадках $q = 0$ і $q > 0$ подібні. На відміну від цього, властивості керованості рівняння (0.8) за вільний час у випадках $q = 0$ і $q > 0$ істотно різні. Зокрема, якщо $q > 0$, то кожний початковий стан цього рівняння є наближено L^∞-керованим за вільний час, а, якщо $q = 0$, то початковий стан цього рівняння $\begin{pmatrix} w(\cdot, 0) \\ w_t(\cdot, 0) \end{pmatrix}$ є наближено L^∞-керованим за вільний час тоді і лише тоді, коли $w_t(\cdot, 0) = w_x(\cdot, 0)$. Подібне співвідношення між компонентами початкової умови є необхідним для L^∞-керованості та наближеної L^∞-керованості за заданий час в обох випадках: $q = 0$ і $q > 0$. Зазначимо, що в роботі [71] Л.В. Фардиголі належать результати підрозділу 1 та приклади з підрозділу 2, а Г.М. Скляру належать результати підрозділу 2 за виключенням прикладів; в роботі [72] Л.В. Фардиголі належать результати підрозділу 1 та теорема 2.1 з підрозділу 2, а Г.М. Скляру належать результати підрозділу 2 за виключенням теореми 2.1.

Для хвильового рівняння $w_{tt} = w_{xx} - p(x)w$, $x > 0$, $t > 0$ зі сталими коефіцієнтами і сталим потенціалом $p(x) = q^2 - r(x)$, керованого крайовою умовою Діріхле, проблеми L^∞-керованості та наближеної L^∞-керованості було досліджено в [119] для $q = 0$ і в [23] для $q \ge 0$, а ці проблеми для того самого рівняння, керованого крайовою умовою Неймана, було одержано в [59] для $q = 0$. Це рівняння розглянуто в класичних просторах Соболєва. У роботі [23] за умов $r \in C^1[0, +\infty)$ і $|r(x)| \le \beta e^{-\alpha x}$, $x > 0$ ($\alpha > 0$ і $\beta > 0$ є деякими сталими) оператор перетворення T_r було продовжено до згаданого вище оператора $\widetilde{\mathbf{T}}_r$ і саме застосування цього оператора дало можливість довести у цій роботі, що зазначене хвильове рівняння, кероване крайовою умовою Діріхле, відтворює властивості керованості хвильового рівняння (0.8) зі сталими коефіцієнтами і сталим потенціалом $q \geq 0$. Тому критерії керованості у цьому випадку одержано з відповідних критеріїв керованості для (0.8), які було одержано в [21]. У роботах [59] і [119] більшість властивостей продовженого оператора $\widetilde{\mathbf{T}}_r$ і його аналога для парних розподілів перенесено на випадок $r \in C^1[0, +\infty) \cap L^\infty(0, +\infty)$, $\int_0^\infty x|r(x)|\,dx < \infty$, тобто, експоненційну оцінку для r замінено на інтегральну умову. Застосування цих операторів та результатів роботи [118], дозволило одержати критерії L^∞-керованості та наближеної L^∞-керованості за заданий час для зазначеного на початку цього абзацу рівняння з $q = 0$. Але, нажаль, у роботах [59] і [119] за цих умов на r вдалося довести лише достатні умови наближеної L^∞-керованості за вільний час для цього рівняння.

Проблеми керованості для хвильового рівняння (0.9) зі змінними коефіцієнтами і нульовим потенціалом γ, керованого нелокальними крайовими умовами, у просторах $W^{1,2} \times W^{1,1}$ досліджено в [60]. У цій роботі на розв'язки цього рівняння накладаються ще додаткові умови на нескінченності. Нарешті, для хвильового рівняння (0.9) зі змінними коефіцієнтами і змінним потенціалом γ, керованого крайовою умовою Діріхле, проблеми L^∞-керованості та наближеної L^∞-керованості було досліджено в [24], а ці проблеми для того самого рівняння, керованого крайовою умовою Неймана, було одержано в [26]. Тут $\rho, k, \gamma \in C^1[0, +\infty)$, ρ та k є додатними на $[0, +\infty)$ та задовольняють деякі додаткові умови (див. умови (6.1), (6.2), (6.3) в розділі 6). Це рівняння розглянуто в модифікованих просторах $\mathbb{H}^m$ соболєвського типу, пов'язаних з операторами перетворення $\widetilde{\mathbb{T}}$ і $\widehat{\mathbb{T}}$, введеними і дослідженими в роботах [24] і [26]. Застосовуючи оператори перетворення $\widetilde{\mathbb{T}}$ і $\widehat{\mathbb{T}}$, доведено що хвильове рівняння (0.9) відтворює властивості керованості хвильового рівняння (0.8) зі сталими коефіцієнтами і деяким сталим потенціалом $q \geq 0$, який визначається за ρ, k та γ. Тому критерії керованості у цьому випадку одержано в [24] і [26] з відповідних критеріїв керованості для (0.8), які було одержано в [21], [19], [22], [71], [72], [114]. Зокрема, якщо $q > 0$, то кожний початковий стан хвильового рівняння (0.9) зі змінними коефіцієнтами ρ, k і змінним потенціалом γ є наближено L^∞-керованим за вільний час, а, якщо $q = 0$, то початковий стан цього рівняння $\begin{pmatrix} w(\cdot, 0) \\ w_t(\cdot, 0) \end{pmatrix}$ є наближено L^∞-керованим за вільний час тоді і лише тоді, коли його компоненти $w(\cdot, 0)$ і $w_t(\cdot, 0)$ пов'язані деяким співвідношенням. Подібне співвідношення між компонентами початкової умови є необхідним для L^∞-керованості та наближеної L^∞-керованості за заданий час в обох випадках: $q = 0$ і $q > 0$.

Ще однією проблемою теорії керування, яка вивчається багатьма математиками, є проблема стабілізовності. Загальні питання та постановки задач стабілізовності розглянуто в [5], [67], [68], [74]–[76], [94]. Стабілізовність хвильового рівняння було досліджено в [1], [9], [15]–[17], [46], [49], [64], [111], [112]. Відмітимо, що в роботах [15], [111], [112] одержано критерії стабілізовності загальних еволюційних рівнянь та систем за допомоги позиційних керувань без запізнення, а в [16], [17] — умови стабілізовності таких рівнянь за допомоги позиційних керувань із запізненням. У роботі [112] твердження 3 і приклади належать Л.В. Фардиголі, а твердження 1 і 2 — Ю.В. Шевелевій. У роботі [16] результати підрозділів 1 та 2 належать Л.В. Фардиголі, а результати підрозділів 3 та 4 — М.В. Лобановій.

Проблеми коректної розв'язності крайових задач для еволюційних рівнянь та систем також є актуальними та досліджуваними багатьма математиками (див., наприклад, [83]–[85], [91], [97], [98], [102], [103], [105]–[110]). Серед цих проблем особливо виділяється проблема коректної розв'язності нелокальних крайових задач у необмежених областях [83]–[85], [97], [102], [103], [106]–[110]. У роботах [107]–[110] було одержано критерії коректності нелокальних крайових задач з диференціальними операторами в крайових умовах для загальних еволюційних рівнянь та систем, окремим випадком яких є хвильове рівняння.

1.2. Простори Соболєва

У $\mathbb{R}^n$ та $\mathbb{C}^n$ через $|x|$ позначимо евклідову норму вектора x, а через (x, y) — скалярний (ермітів) добуток векторів x та y. Позначимо $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$ для вектора $x \in \mathbb{R}^n$ та мультиіндекса $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, де $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \bigcup \{0\}$. Крім того, позначимо $D = (-i\partial/\partial x_1, \dots, -i\partial/\partial x_n)$. Також позначимо $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$.

Позначимо через

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \left\{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \mid \forall\alpha \in \mathbb{N}_0^n \ \forall\beta \in \mathbb{N}_0^n \ \sup\left\{\left|x^\alpha D^\beta\varphi\right| \mid x \in \mathbb{R}^n\right\} < \infty\right\}$$

простір швидко спадних функцій із наступною збіжністю: $s_k \to 0$, коли $k \to \infty$, якщо $\forall\alpha \in \mathbb{N}_0^n \ \forall\beta \in \mathbb{N}_0^n \ x^\alpha D^\beta s_k \rightrightarrows 0$ на $\mathbb{R}^n$, коли $k \to \infty$. Через $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ позначимо двоїстий простір помірних розподілів (тобто, простір неперервних лінійних функціоналів на $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$) із слабкою топологією.

Далі, для топологічного простору Ψ завжди позначатимемо через Ψ' спряжений (двоїстий) простір із слабкою топологією, а через Ψ^* — спряжений простір із сильною топологією. Через $\langle f, \varphi\rangle$ позначатимемо значення розподілу f на тестовій функції φ.

Для $s, l \in \mathbb{R}$ позначимо

$$H_l^s(\mathbb{R}^n) = \left\{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \mid \left(1 + |x|^2\right)^{l/2}\left(1 + |D|^2\right)^{s/2} f \in L^2(\mathbb{R}^n)\right\}$$

з нормою

$$\|f\|_l^s = \left\|\left(1 + |x|^2\right)^{l/2}\left(1 + |D|^2\right)^{s/2} f\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Простір $H_l^s(\mathbb{R}^n)$ є рефлексивним, $H_{-l}^{-s}(\mathbb{R}^n) = (H_l^s(\mathbb{R}^n))^*$ та

$$\|f\|_{-l}^{-s} = \sup\left\{\frac{|\langle f, \varphi\rangle|}{\|\varphi\|_l^s} \mid 0 \neq \varphi \in H_l^s(\mathbb{R}^n)\right\}, \qquad s, l \in \mathbb{R}$$

(див. [88, гл. 1]). Простори $H_l^s(\mathbb{R}^n)$, $l, s \in \mathbb{R}$, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ та $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ є повними відносно введеної топології.

Теорема 1.1 [88, гл. 1]. *Нехай $s, s', l, l' \in \mathbb{R}$. Тоді мають місце наступні щільні вкладення:*

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset H_l^s(\mathbb{R}^n) \subset H_{l'}^{s'}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n), \qquad s' \leq s, \quad l' \leq l,$$

зокрема,

$$\|f\|_{l'}^{s'} \leq \|f\|_{l}^{s}, \qquad f \in H_l^s, \quad s' \leq s, \quad l' \leq l.$$

Теорема 1.2 [88, гл. 1]. *Кожна функція $f \in H_l^s(\mathbb{R}^n)$ є неперервною на $\mathbb{R}$ для $s > n/2$ та $l \in \mathbb{R}$.*

Позначимо через $\mathcal{F}$ оператор перетворення Фур'є: $\mathcal{F} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, $D(\mathcal{F}) = \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$,

$$\mathcal{F}\varphi = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i(\sigma,x)} \varphi(x)\, dx \qquad \text{для } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

та

$$\langle \mathcal{F}f, \varphi \rangle = \langle f, \mathcal{F}^{-1}\varphi \rangle \qquad \text{для } f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n), \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Теорема 1.3 [88, гл. 1]. *Справедливі наступні твердження:*

(i) *Оператор $\mathcal{F}$ є автоморфізмом простору $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ та автоморфізмом простору $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.*

(ii) *Оператор $\mathcal{F}$ є ізоморфізмом просторів $H_l^s(\mathbb{R}^n)$ та $H_s^l(\mathbb{R}^n)$, $s, l \in \mathbb{R}^n$.*

(iii) *Оператор $\mathcal{F}$ є ізометричним ізоморфізмом просторів $H_0^s(\mathbb{R}^n)$ та $H_s^0(\mathbb{R}^n)$, $s \in \mathbb{R}^n$.*

Для $s, l \in \mathbb{R}$ позначимо через $\widetilde{H}_l^s(\mathbb{R}^n)$ підпростір усіх непарних розподілів простору $H_l^s(\mathbb{R}^n)$, а через $\widehat{H}_l^s(\mathbb{R}^n)$ підпростір усіх парних розподілів простору $H_l^s(\mathbb{R}^n)$. Зрозуміло, що простори $\widetilde{H}_l^s(\mathbb{R}^n)$ та $\widehat{H}_l^s(\mathbb{R}^n)$ є повними відносно топології, індукованої $H_l^s(\mathbb{R}^n)$. Позначимо $\widetilde{\mathbf{H}}_0^s(\mathbb{R}^n) = \widetilde{H}_0^s(\mathbb{R}^n) \times \widetilde{H}_0^{s-1}(\mathbb{R}^n)$ та $\widehat{\mathbf{H}}_0^s(\mathbb{R}^n) = \widehat{H}_0^s(\mathbb{R}^n) \times \widehat{H}_0^{s-1}(\mathbb{R}^n)$ з нормою $|||\cdot|||_0^s$, і позначимо $\widetilde{\mathbf{H}}_l(\mathbb{R}^n) = \widetilde{H}_l(\mathbb{R}^n) \times \widetilde{H}_{l-1}(\mathbb{R}^n)$ та $\widehat{\mathbf{H}}_l(\mathbb{R}^n) = \widehat{H}_l(\mathbb{R}^n) \times \widehat{H}_{l-1}(\mathbb{R}^n)$ з нормою $|||\cdot|||_l$.

Нехай Ω — це область (тобто, відкрита зв'язна множина) в $\mathbb{R}^n$. Позначимо через $C^m(\Omega)$ множину функцій m-разів неперервно диференційовних на Ω, $n \in \mathbb{N}_0$, а через $C^\infty(\Omega) = \bigcap_{m\in\mathbb{N}_0} C^m(\Omega)$ множину функцій нескінченно диференційовних на Ω.

Розглянемо простір

$$C_0^m(\Omega) = \{\varphi \in C^m(\Omega) \mid \operatorname{supp}\varphi \subset \Omega \wedge \operatorname{supp}\varphi \text{ є обмеженим}\}$$

з нормою $|\varphi|_\Omega^m = \sup\{|D^\alpha\varphi(x)| \mid x \in \Omega \wedge |\alpha| \le m\}$ та простір $\mathcal{D}(\Omega) = C_0^\infty(\Omega) = \bigcap_{m\in\mathbb{N}_0} C_0^m(\Omega)$ із наступною збіжністю: $s_k \to 0$, коли $k \to \infty$, якщо існує обмежена підобласть Ω' така, що $\overline{\Omega} \subset \Omega'$, $s_k \in C_0^m(\Omega')$, $k \in \mathbb{N}$, та $|s_k|_{\Omega'}^m \to 0$, коли $k \to \infty$, для всіх $m \in \mathbb{N}_0$. Розглянемо також двоїсті простори $(C_0^m(\Omega))'$ та $\mathcal{D}'(\Omega)$ (із слабкою топологією), $m \in \mathbb{N}_0$.

Для $m \in \mathbb{N}_0$ розглянемо простір

$$H^m(\Omega) = \left\{\varphi \in L^2(\Omega) \mid \forall\alpha \in (\mathbb{N}_0)^n\ |\alpha| \le m \Rightarrow D^\alpha\varphi \in L^2(\Omega)\right\}$$

з нормою

$$\|\varphi\|_\Omega^m = \left(\sum_{|\alpha|\le m} \left(\|D^\alpha\varphi\|_{L^2(\Omega)}\right)^2\right)^{1/2}$$

та спряжений до нього простір $H^{-m}(\Omega) = (H^m(\Omega))^*$ з нормою

$$\|f\|_\Omega^m = \sup\left\{\frac{|\langle f,\varphi\rangle|}{\|\varphi\|_\Omega^m} \mid 0 \ne \varphi \in H^m(\Omega)\right\}.$$

Добре відомо (див., напр., [53, Chap. 1–4, 7]), що простори $C_0^m(\Omega)$, $(C_0^m(\Omega))'$, $\mathcal{D}(\Omega)$, $\mathcal{D}'(\Omega)$ та $H^m(\Omega)$, $m \in \mathbb{Z}$ є повними відносно введеної топології.

Теорема 1.4 [88, гл. 1]. *Для будь-якого* $m \in \mathbb{Z}$ *маємо* $H^m(\mathbb{R}^n) = H_0^m(\mathbb{R}^n)$, *і тотожне вкладення є ізоморфізмом цих просторів. Зокрема,*

$$\frac{1}{K_m}\|f\|_{\mathbb{R}^n}^m \le \|f\|_0^m \le K_m\|f\|_{\mathbb{R}^n}^m, \qquad f \in H^m(\mathbb{R}^n),$$

де $K_m > 0$ *є деякою сталою.*

Ми будемо використовувати наступне означення значення розподілу в точці, що є модифікацією означення даного в [2, п. 3.4.2].

Означення 1.5. *Нехай* $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+)$. *Будемо вважати, що існує* $f(+0) = f_0 \in \mathbb{R}$, *якщо для кожного* $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+)$ *маємо*

$$\langle f(\alpha(\cdot)), \varphi\rangle \to \langle f_0, \varphi\rangle, \qquad \text{коли } \alpha \to +0.$$

Тут $\langle f(\alpha(\cdot)), \varphi\rangle = \left\langle f, \frac{1}{\alpha}\varphi\left(\frac{(\cdot)}{\alpha}\right)\right\rangle$.

З [2, п. 3.4.3] випливає, що для локально інтегровної на $\mathbb{R}_+$ функції f, неперервної справа в точці 0, значення цієї функції в точці 0 в сенсі означення 1.5 збігається зі значенням $f(0)$.

Далі, до кінця цього розділу розглядатимемо $n = 1$.

Позначимо $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\mathcal{D}' = \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $\mathcal{S}' = \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, $C_0^m = C_0^m(\mathbb{R})$, $(C_0^m)' = (C_0^m(\mathbb{R}))'$ $H_l^s = H_l^s(\mathbb{R})$, $\widetilde{H}_l^s = \widetilde{H}_l^s(\mathbb{R})$, $\widehat{H}_l^s = \widehat{H}_l^s(\mathbb{R})$, $\widetilde{\mathbf{H}}_0^s = \widetilde{\mathbf{H}}_0^s(\mathbb{R})$, $\widehat{\mathbf{H}}_0^s = \widehat{\mathbf{H}}_0^s(\mathbb{R})$, $\widetilde{\mathbf{H}}_l = \widetilde{\mathbf{H}}_l(\mathbb{R})$, $\widehat{\mathbf{H}}_l = \widehat{\mathbf{H}}_l(\mathbb{R})$, $m \in \mathbb{N}_0$, $s, l \in \mathbb{R}^n$. Позначимо також $H^m = H^m(\mathbb{R})$ та $\|\cdot\|^m = \|\cdot\|_{\mathbb{R}}^m$.

Добре відомо (див., напр., [53, Chap. 1]), що $\mathcal{D} \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{S}' \subset \mathcal{D}'$ є щільними вкладеннями. З теорем 1.1 та 1.4 випливає

Висновок 1.6. *Мають місце наступні щільні вкладення:*

$$\mathcal{D} \subset H^m \subset H^n \subset \mathcal{D}', \qquad -\infty < n \le m < +\infty.$$

Нехай $\Omega = (a, b)$, $-\infty < a < b < +\infty$.

Теорема 1.7. *Мають місце наступні щільні вкладення:*

$$\mathcal{D}(a,b) \subset C_0^m(a,b) \subset H^0(a,b) \subset (C_0^m(a,b))' \subset \mathcal{D}'(a,b), \qquad m \in \mathbb{N}_0.$$

Теорема 1.8. *Нехай* $-\infty < n \le m < +\infty$. *Тоді*

$$\|\varphi\|^n_{(a,b)} \le \|\varphi\|^m_{(a,b)}, \qquad \varphi \in H^m(a,b).$$

та $H^m(a,b) \subset H^n(a,b)$ *є вкладенням.*

Нехай $m \in \mathbb{Z}$. Позначимо через $\widetilde{H}^m$ підпростір усіх непарних розподілів простору H^m, а через $\widehat{H}^m$ — підпростір усіх парних розподілів простору H^m. Очевидно, що простори $\widetilde{H}^m$ та $\widehat{H}^m$ є повними відносно топології, індукованої H^m. Позначимо $\widetilde{\mathbf{H}}^m = \widetilde{H}^m \times \widetilde{H}^{m-1}$ та $\widehat{\mathbf{H}}^m = \widehat{H}^m \times \widehat{H}^{m-1}$ з нормою $|||\cdot|||^m$. За теоремою 1.4 маємо $\widetilde{\mathbf{H}}^m = \widetilde{\mathbf{H}}^m_0$ та $\widehat{\mathbf{H}}^m = \widehat{\mathbf{H}}^m_0$ і тотожні вкладення є ізоморфізмами для обох пар просторів.

1.3. Оператори перетворення для оператора Штурма—Ліувілля

Оператори перетворення для оператора Штурма—Ліувілля є потужним інструментом для дослідження різних проблем в теорії диференціальних рівнянь і математичній фізиці. Зокрема, цей оператор може бути використаний для дослідження проблеми керованості для хвильового рівняння із змінними коефіцієнтами.

Спочатку розглянемо класичний оператор перетворення для оператора Штурма—Ліувілля на півосі, який зберігає асимптотику на нескінченності. Скрізь у цьому розділі ми вважаємо, що виконано наступні умови:

$$r \in C^1[0,+\infty) \cap L^\infty(\mathbb{R}_+) \quad \text{та} \quad \int_0^\infty \lambda\,|r(\lambda)|\,d\lambda < \infty. \tag{1.2}$$

Нехай K є розв'язком системи

$$\begin{cases} K_{y_1y_1}(y) - K_{y_2y_2}(y) = r(y_1)K(y), & y_2 > y_1 > 0, \\ K(y_1,y_1) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{y_1}^\infty r(\xi)\,d\xi, & y_1 > 0 \\ \lim\limits_{y_1+y_2\to\infty} K_{y_1}(y) = \lim\limits_{y_1+y_2\to\infty} K_{y_2}(y) = 0, & y_2 > y_1 > 0. \end{cases} \tag{1.3}$$

За [99, гл. 3] система (1.3) має єдиний розв'язок K, і справджується наступна теорема.

Теорема 1.9. *Нехай K є розв'язком системи* (1.3)*. Тоді $K \in C^2\{y \in \mathbb{R}^2 \mid y_2 > y_1 > 0\}$ і*

$$|K(y)| \le M_0\sigma_0\left(\frac{y_1+y_2}{2}\right), \qquad y_2 > y_1 > 0 \tag{1.4}$$

$$\begin{aligned} \left|K_{y_j}(y)\right| \le &\frac{1}{4}\left|r\left(\frac{y_1+y_2}{2}\right)\right| \\ &+ M_1\sigma_0\left(\frac{y_1+y_2}{2}\right), \qquad y_2 > y_1 > 0,\ j = 1,2. \end{aligned} \tag{1.5}$$

де $M_0 > 0$, $M_1 > 0$ та $\sigma_0(\lambda) = \int_\lambda^\infty |r(\xi)|\,d\xi$, $\lambda > 0$.

Далі ми скрізь позначатимемо через $D(A)$, $N(A)$ та $R(A)$ область визначення, ядро та образ оператора A, відповідно.

Розглянемо оператор $\mathrm{T}_0 : L^2(\mathbb{R}_+) \to L^2(\mathbb{R}_+)$, $D\left(\mathrm{T}_0\right) = L^2(\mathbb{R}_+)$,

$$\left(\mathrm{T}_0 g\right)(\lambda) = g(\lambda) + \int_\lambda^\infty K(\lambda,\xi) g(\xi)\, d\xi, \quad \lambda > 0,\ g \in D(\mathrm{T}_0).$$

Бачимо, що цей оператор зберігає асимптотику функцій на нескінченності, але не зберігає їх початкові значення. Крім того (див. [99, гл. 3]), справедлива формула

$$\left(\frac{d^2}{d\lambda^2} - r(\cdot)\right) \mathrm{T}_0 g = \mathrm{T}_0 \frac{d^2}{d\xi^2} g, \quad g \in \cap H^2(\mathbb{R}_+). \tag{1.6}$$

У [99, гл. 3] також доведено, що оператор T_0 є оборотним, T_0^{-1} : $L^2(\mathbb{R}_+) \to L^2(\mathbb{R}_+)$, $D\left(\mathrm{T}_0^{-1}\right) = L^2(\mathbb{R}_+)$,

$$\left(\mathrm{T}_0^{-1} f\right)(\xi) = f(\xi) + \int_\xi^\infty L(\xi,\lambda) f(\lambda)\, d\lambda, \quad \xi > 0,\ f \in D(\mathrm{T}_0^{-1}),$$

де ядро $L \in C^2\{y \in \mathbb{R}^2 \mid y_2 > y_1 > 0\}$ визначається співвідношенням

$$L(y) + K(y) + \int_{y_1}^{y_2} L(y_1,\xi) K(\xi, y_2)\, d\xi = 0, \qquad y_2 > y_1 > 0, \tag{1.7}$$

або

$$L(y) + K(y) + \int_{y_1}^{y_2} K(y_1,\xi) L(\xi, y_2)\, d\xi = 0, \qquad y_2 > y_1 > 0, \tag{1.8}$$

та для ядра L справедлива наступна теорема.

Теорема 1.10. *Нехай K є розв'язком системи* (1.3), *а $L \in C^2\{y \in \mathbb{R}^2 \mid y_2 > y_1 > 0\}$ задовольняє умову* (1.7) *або* (1.8). *Тоді*

$$|L(y)| \le N_0 \sigma_0 \left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right), \qquad y_2 > y_1 > 0 \tag{1.9}$$

$$\left|L_{y_j}(y)\right| \le \frac{1}{4} \left| r\left(\frac{y_1+y_2}{2}\right)\right| + N_1 \sigma_0 \left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right), \qquad y_2 > y_1 > 0,\ j = 1,2, \tag{1.10}$$

де $N_0 > 0$, $N_1 > 0$ *та* $\sigma_0(\lambda) = \int_\lambda^\infty |r(\xi)|\, d\xi$, $\lambda > 0$.

Для дослідження проблем керованості для хвильового рівняння на півосі не достатньо мати формулу (1.6) на $L^2(\mathbb{R}_+)\cap H^2(\mathbb{R}_+)$. Добре було б мати аналог цієї формули для функцій, похідні яких не належать $L^2(\mathbb{R}_+)$. Тому далі ми розглянемо продовження оператора T_0 на $\widetilde{H}^{-2}$ та $\widehat{H}^{-1}$.

Продовження оператора T_0 на $\widetilde{H}^{-2}$ було спочатку розглянуто і досліджено для деяких спеціальних потенціалів r в роботі [23], а вже потім узагальнено на випадок, коли потенціал r задовольняє умову (1.2), в [24] та [119]. Продовження цього оператора на $\widehat{H}^{-1}$ було розглянуто і досліджено в [26] та [59].

Усі результати, що наводяться нижче до кінця цього підрозділу, одержано в щойно згаданих роботах.

Позначимо через $\widetilde{\mathrm{T}}_0$ продовження оператора T_0 на $\widetilde{H}^0$. Маємо $\widetilde{\mathrm{T}}_0 : \widetilde{H}^0 \to \widetilde{H}^0$, $D\left(\widetilde{\mathrm{T}}_0\right) = \widetilde{H}^0$,

$$\left(\widetilde{\mathrm{T}}_0 g\right)(\lambda) = g(\lambda) + \operatorname{sgn}\lambda \int_{|\lambda|}^{\infty} K(|\lambda|,\xi)g(\xi)\,d\xi, \quad \lambda\in\mathbb{R},\ g\in D(\widetilde{\mathrm{T}}_0).$$

Очевидно, що цей оператор є оборотним і $\widetilde{\mathrm{T}}_0^{-1} : \widetilde{H}^0 \to \widetilde{H}^0$, $D(\widetilde{\mathrm{T}}_0^{-1}) = \widetilde{H}^0$,

$$\left(\widetilde{\mathrm{T}}_0^{-1} f\right)(\xi) = f(\xi) + \operatorname{sgn}\xi \int_{|\xi|}^{\infty} L(|\xi|,\lambda)f(\lambda)\,d\lambda, \quad \xi\in\mathbb{R},\ f\in D(\widetilde{\mathrm{T}}_0^{-1}).$$

Для того, щоб продовжити оператор $\widetilde{\mathrm{T}}_0$ на $\widetilde{H}^{-2}$, розглянемо спряжений до нього оператор. Маємо $\widetilde{\mathrm{T}}_0^* : \widetilde{H}^0 \to \widetilde{H}^0$, $D(\widetilde{\mathrm{T}}_0^*) = \widetilde{H}^0$,

$$\left(\widetilde{\mathrm{T}}_0^* \varphi\right)(\xi) = \varphi(\xi) + \operatorname{sgn}\xi \int_0^{|\xi|} K(\lambda,|\xi|)\varphi(\lambda)\,d\lambda, \qquad \xi\in\mathbb{R},\ \varphi\in D(\widetilde{\mathrm{T}}_0^*),$$

та $(\widetilde{\mathrm{T}}_0^{-1})^* = (\widetilde{\mathrm{T}}_0^*)^{-1} : \widetilde{H}^0 \to \widetilde{H}^0$, $D\big((\widetilde{\mathrm{T}}_0^*)^{-1}\big) = \widetilde{H}^0$,

$$\left((\widetilde{\mathrm{T}}_0^*)^{-1}\psi\right)(\lambda) = \psi(\lambda) + \operatorname{sgn}\lambda \int_0^{|\lambda|} L(\xi,|\lambda|)\psi(\xi)\,d\xi,\ \lambda\in\mathbb{R},\ \psi\in D\big((\widetilde{\mathrm{T}}_0^*)^{-1}\big).$$

Справедлива наступна теорема.

Теорема 1.11. *Оператор* $\widetilde{\mathrm{T}}_0^*$ *є автоморфізмом простору* $\widetilde{H}^m$, $m = 0, 1, 2$.

Позначимо $\widetilde{\mathbf{T}}_r = \left(\widetilde{\mathrm{T}}_0^*|_{\widetilde{H}^2}\right)^*$. Маємо $\widetilde{\mathbf{T}}_r : \widetilde{H}^{-2} \to \widetilde{H}^{-2}$, $D(\widetilde{\mathbf{T}}_r) = \widetilde{H}^{-2}$,

$$\left\langle \widetilde{\mathbf{T}}_r g, \varphi \right\rangle = \left\langle g, \widetilde{\mathrm{T}}_0^* \varphi \right\rangle, \qquad g \in D(\widetilde{\mathbf{T}}_r),\ \varphi \in D(\widetilde{\mathrm{T}}_0^*) \cap \widetilde{H}^2 = \widetilde{H}^2.$$

Тоді $\widetilde{\mathbf{T}}_r^{-1} = \left(\left(\widetilde{\mathrm{T}}_0^*\right)^{-1}|_{\widetilde{H}^2}\right)^*$ і $\widetilde{\mathbf{T}}_r^{-1} : \widetilde{H}^{-2} \to \widetilde{H}^{-2}$, $D(\widetilde{\mathbf{T}}_r^{-1}) = \widetilde{H}^{-2}$,

$$\left\langle \widetilde{\mathbf{T}}_r^{-1} f, \psi \right\rangle = \left\langle g, \left(\widetilde{\mathrm{T}}_0^*\right)^{-1} \psi \right\rangle, \quad f \in D(\widetilde{\mathbf{T}}_r^{-1}),\ \psi \in D\big((\widetilde{\mathrm{T}}_0^*)^{-1})\big) \cap \widetilde{H}^2 = \widetilde{H}^2.$$

Справедлива також теорема.

Теорема 1.12. *Оператор* $\widetilde{\mathbf{T}}_r$ *є автоморфізмом простору* $\widetilde{H}^m$, $m = -2, -1, 0$.

Крім того для операторів $\widetilde{\mathbf{T}}_r$ та $\widetilde{\mathbf{T}}_r^{-1}$ мають місце аналоги формули (1.6).

Теорема 1.13. *Якщо* $g \in \widetilde{H}^0$ *та існує* $g(+0)$, *то то існує* $\left(\widetilde{\mathbf{T}}_r g\right)(+0)$ *і*

$$\left(\frac{d^2}{d\lambda^2} - r(|\cdot|)\right) \widetilde{\mathbf{T}}_r g - 2\left(\widetilde{\mathbf{T}}_r g\right)(+0)\delta' = \widetilde{\mathbf{T}}_r \left(\frac{d^2}{d\xi^2} g - 2g(+0)\delta'\right).$$

Теорема 1.14. *Якщо* $f \in \widetilde{H}^0$ *та існує* $f(+0)$, *то то існує* $\left(\widetilde{\mathbf{T}}_r^{-1} f\right)(+0)$ *і*

$$\frac{d^2}{d\xi^2} \widetilde{\mathbf{T}}_r^{-1} f - 2\left(\widetilde{\mathbf{T}}_r^{-1} f\right)(+0)\delta' = \widetilde{\mathbf{T}}_r^{-1} \left(\left(\frac{d^2}{d\lambda^2} - r(|\cdot|)\right) f - 2f(+0)\delta'\right).$$

Наступна теорема також є корисною при дослідженні проблем керованості.

Теорема 1.15. *Маємо* $\widetilde{\mathbf{T}}_r\,(\delta') = \delta'$.

Позначимо через $\widehat{\mathrm{T}}_0$ продовження оператора T_0 на $\widehat{H}^0$. Маємо $\widehat{\mathrm{T}}_0 : \widehat{H}^0 \to \widehat{H}^0$, $D\left(\widehat{\mathrm{T}}_0\right) = \widehat{H}^0$,

$$\left(\widehat{\mathrm{T}}_0 g\right)(\lambda) = g(\lambda) + \int_{|\lambda|}^{\infty} K(|\lambda|,\xi) g(\xi)\, d\xi, \quad \lambda \in \mathbb{R},\ g \in D(\widehat{\mathrm{T}}_0).$$

Очевидно, що цей оператор є оборотним і $\widehat{\mathrm{T}}_0^{-1} : \widehat{H}^0 \to \widehat{H}^0$, $D(\widehat{\mathrm{T}}_0^{-1}) = \widehat{H}^0$,

$$\left(\widehat{\mathrm{T}}_0^{-1} f\right)(\xi) = f(\xi) + \int_{|\xi|}^{\infty} L(|\xi|,\lambda) f(\lambda)\, d\lambda, \quad \xi \in \mathbb{R},\ f \in D(\widehat{\mathrm{T}}_0^{-1}).$$

Для того, щоб продовжити оператор $\widehat{\mathrm{T}}_0$ на $\widehat{H}^{-1}$, розглянемо спряжений до нього оператор. Маємо $\widehat{\mathrm{T}}_0^* : \widehat{H}^0 \to \widehat{H}^0$, $D(\widehat{\mathrm{T}}_0^*) = \widehat{H}^0$,

$$\left(\widehat{\mathrm{T}}_0^* \varphi\right)(\xi) = \varphi(\xi) + \int_0^{|\xi|} K(\lambda,|\xi|) \varphi(\lambda)\, d\lambda, \qquad \xi \in \mathbb{R},\ \varphi \in D(\widehat{\mathrm{T}}_0^*),$$

та $(\widehat{\mathrm{T}}_0^{-1})^* = (\widehat{\mathrm{T}}_0^*)^{-1} : \widehat{H}^0 \to \widehat{H}^0$, $D\big((\widehat{\mathrm{T}}_0^*)^{-1}\big) = \widehat{H}^0$,

$$\left((\widehat{\mathrm{T}}_0^*)^{-1} \psi\right)(\lambda) = \psi(\lambda) + \int_0^{|\lambda|} L(\xi,|\lambda|) \psi(\xi)\, d\xi,\ \lambda \in \mathbb{R},\ \psi \in D\big((\widehat{\mathrm{T}}_0^*)^{-1}\big).$$

Справедлива наступна теорема.

Теорема 1.16. *Оператор* $\widehat{\mathrm{T}}_0^*$ *є автоморфізмом простору* $\widehat{H}^m$, $m = 0, 1$.

Позначимо $\widehat{\mathbf{T}}_r = \left(\widehat{\mathrm{T}}_0^*|_{\widehat{H}^1}\right)^*$. Маємо $\widehat{\mathbf{T}}_r : \widehat{H}^{-1} \to \widehat{H}^{-1}$, $D(\widehat{\mathbf{T}}_r) = \widehat{H}^{-1}$,

$$\left\langle \widehat{\mathbf{T}}_r g, \varphi \right\rangle = \left\langle g, \widehat{\mathrm{T}}_0^* \varphi \right\rangle, \qquad g \in D(\widehat{\mathbf{T}}_r),\ \varphi \in D(\widehat{\mathrm{T}}_0^*) \cap \widehat{H}^2 = \widehat{H}^2.$$

Тоді $\widehat{\mathbf{T}}_r^{-1} = \left(\left(\widehat{\mathrm{T}}_0^*\right)^{-1}|_{\widehat{H}^1}\right)^*$ і $\widehat{\mathbf{T}}_r^{-1} : \widehat{H}^{-1} \to \widehat{H}^{-1}$, $D(\widehat{\mathbf{T}}_r^{-1}) = \widehat{H}^{-1}$,

$$\left\langle \widehat{\mathbf{T}}_r^{-1} f, \psi \right\rangle = \left\langle g, \left(\widehat{\mathrm{T}}_0^*\right)^{-1} \psi \right\rangle, \quad f \in D(\widehat{\mathbf{T}}_r^{-1}),\ \psi \in D\big((\widehat{\mathrm{T}}_0^*)^{-1}\big) \cap \widehat{H}^2 = \widehat{H}^2.$$

Справедлива також теорема.

Теорема 1.17. *Оператор* $\widehat{\mathbf{T}}_r$ *є автоморфізмом простору* $\widehat{H}^m$, $m = -1, 0, 1$.

Крім того для операторів $\widehat{\mathbf{T}}_r$ та $\widehat{\mathbf{T}}_r^{-1}$ мають місце аналоги формули (1.6).

Теорема 1.18. *Якщо* $g \in \widehat{H}^1$ *та існує* $g'(+0)$, *то існує* $\left(\widehat{\mathbf{T}}_r g\right)'(+0)$ *і*

$$\left(\frac{d^2}{d\lambda^2} - r(|\cdot|)\right)\widehat{\mathbf{T}}_r g - 2\left(\widehat{\mathbf{T}}_r g\right)'(+0)\delta = \widehat{\mathbf{T}}_r\left(\frac{d^2}{d\xi^2}g - 2g'(+0)\delta\right).$$

Теорема 1.19. *Якщо* $f \in \widehat{H}^1$ *та існує* $f'(+0)$, *то існує* $\left(\widehat{\mathbf{T}}_r^{-1} f\right)'(+0)$ *і*

$$\frac{d^2}{d\xi^2}\widehat{\mathbf{T}}_r^{-1} f - 2\left(\widehat{\mathbf{T}}_r^{-1} f\right)'(+0)\delta = \widehat{\mathbf{T}}_r^{-1}\left(\left(\frac{d^2}{d\lambda^2} - r(|\cdot|)\right)f - 2f'(+0)\delta\right).$$

Наступна теорема також є корисною при дослідженні проблем керованості.

Теорема 1.20. *Маємо* $\widehat{\mathbf{T}}_r\delta = \delta$.

1.4. Вибір напрямку досліджень

1.4.1. Проблеми керованості. Нехай H_0, H_1, H_2 є банаховими просторами, а $H_0 \subset H_1 \subset H_2$ є щільними вкладеннями, оператори $\mathcal{A} : H_2 \to H_2$, $D(\mathcal{A}) = H_0$, та $\mathcal{B} : \mathbb{R} \to H_2$, $D(\mathcal{B}) = \mathbb{R}$, є лінійними.

Розглянемо керовану систему

$$\mathrm{w}'' = \mathcal{A}\mathrm{w} + \mathcal{B}u, \qquad t \in (0, T), \tag{1.11}$$

$$\mathrm{w}(0) = \mathrm{w}_0^0, \quad \mathrm{w}'(0) = \mathrm{w}_1^0, \tag{1.12}$$

де $\mathrm{w}^{(j)} : [0,T] \to H_j$, $j = 0,1,2$, $\mathrm{w}_0^0 \in H_0$, $\mathrm{w}_1^0 \in H_1$, $u \in L^\infty(0,T)$ є керуванням. Позначивши

$$\mathrm{W} = \begin{pmatrix} \mathrm{w} \\ \mathrm{w}' \end{pmatrix}, \quad \mathrm{W}^0 = \begin{pmatrix} \mathrm{w}_0^0 \\ \mathrm{w}_1^0 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{H} = H_1 \times H_2, \quad \mathbf{H} = H_0 \times H_1,$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{Id} \\ \mathcal{A} & 0 \end{pmatrix} : \mathrm{H} \to \mathrm{H},\ D(\mathbf{A}) = \mathbf{H},\ \ \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathcal{B} \end{pmatrix} : \mathbb{R} \to \mathrm{H},\ D(\mathbf{B}) = \mathbb{R},$$

де Id є тотожнім оператором, бачимо що система (1.11), (1.12) еквівалентна керованій системі

$$\mathrm{W}' = \mathbf{A}\mathrm{W} + \mathbf{B}u, \qquad t \in (0,T), \tag{1.13}$$

$$\mathrm{W}(0) = \mathrm{W}^0, \tag{1.14}$$

де $\mathrm{W} : [0,T] \to \mathbf{H}$, $\mathrm{W}' : [0,T] \to \mathrm{H}$, $\mathrm{W}^0 \in \mathbf{H}$, $u \in L^\infty(0,T)$ є керуванням.

Нехай $T > 0$. Для $\mathrm{W}^0 \in \mathbf{H}$ позначимо через $\mathcal{R}_T(\mathrm{W}^0)$ множину тих $\mathrm{W}^T = \begin{pmatrix} \mathrm{w}_0^T \\ \mathrm{w}_1^T \end{pmatrix} \in \mathbf{H}$, для яких існує керування $u \in L^\infty(0,T)$ таке, що кожен розв'язок задачі Коші (1.11), (1.12) (або (1.13), (1.14)) задовольняє умову $\mathrm{W}(T) = \begin{pmatrix} \mathrm{w}(T) \\ \mathrm{w}'(T) \end{pmatrix} = \mathrm{W}^T$. Позначимо також $\mathcal{R}(\mathrm{W}^0) = \bigcup_{T>0} \mathcal{R}_T(\mathrm{W}^0)$.

Означення 1.21. *Стан* $\mathrm{W}^0 \in \mathbf{H}$ *керованої системи* (1.11), (1.12) *(або* (1.13), (1.14)*) називається* L^∞*-керованим за заданий час* $T > 0$, *якщо* $0 \in \mathcal{R}_T(\mathrm{W}^0)$.

Означення 1.22. *Стан* $\mathrm{W}^0 \in \mathbf{H}$ *керованої системи* (1.11), (1.12) *(або*

(1.13), (1.14)) *називається наближено* L^∞*-керованим за заданий час* $T > 0$*, якщо* $0 \in \overline{\mathcal{R}_T(\mathrm{W}^0)}$ *(замикання розглядається в* $\mathbf{H}$*).*

Означення 1.23. *Стан* $\mathrm{W}^0 \in \mathbf{H}$ *керованої системи* (1.11), (1.12) *(або* (1.13), (1.14)) *називається наближено* L^∞*-керованим за вільний час, якщо* $0 \in \overline{\mathcal{R}(\mathrm{W}^0)}$ *(замикання розглядається в* $\mathbf{H}$*).*

Нехай оператор $\mathbf{A}$ є інфінітезимальним генератором C_0-групи $\mathbb{S} : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(\mathrm{H})$, де $\mathcal{L}(\mathrm{H})$ є простором лінійних обмежених операторов, що визначені на всьому H і діють в H. Тоді єдиним розв'язком (1.13), (1.14) є

$$\mathrm{W}(t) = \mathbb{S}(t)\left(\mathrm{W}^0 + \int_0^t \mathbb{S}(-\xi)\mathbf{B}u(\xi)\,d\xi\right), \qquad t \in [0,T]. \tag{1.15}$$

Тому для $\mathrm{W}^0 \in \mathbf{H}$ маємо

$$\mathcal{R}_T(\mathrm{W}^0) = \left\{\mathrm{W}^T \in \mathbf{H} \mid \exists u \in L^\infty(0,T) \quad \mathbb{S}(-T)\mathrm{W}^T - \mathrm{W}^0 = \int_0^T \mathbb{S}(-\xi)\mathbf{B}u(\xi)\,d\xi\right\}$$

Позначимо через

$$\mathcal{L}_T = \left\{\mathrm{W}^0 \in \mathbf{H} \mid 0 \in \mathcal{R}_T(\mathrm{W}^0)\right\},$$
$$\overline{\mathcal{L}}_T = \left\{\mathrm{W}^0 \in \mathbf{H} \mid 0 \in \overline{\mathcal{R}_T(\mathrm{W}^0)}\right\},$$
$$\mathcal{L} = \left\{\mathrm{W}^0 \in \mathbf{H} \mid 0 \in \overline{\mathcal{R}(\mathrm{W}^0)}\right\}.$$

Розглянемо інтегральний оператор $\mathbf{\Lambda} : L^2(\mathbb{R}_+) \to \mathrm{H}$,

$$\mathbf{\Lambda} f = \lim_{T\to\infty} \int_0^T \mathbb{S}(-\xi)\mathbf{B}f(\xi)\,d\xi,$$

визначений для тих $f \in L^2(\mathbb{R}_+)$, для яких існує відповідна границя. Цей оператор було названо оператором впливу [21], [22], тому що він, фактично, описує вплив керування на кінцевий стан керованої системи (1.13), (1.14).

Позначимо

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_T =& \big\{ \mathrm{W}^0 \in \mathbf{H} \mid \exists u \in L^\infty(\mathbb{R}_+) \left(\operatorname{supp} u \in [0,T] \wedge \mathrm{W}^0 + \mathbf{\Lambda} u = 0 \right) \big\}, \\
\overline{\mathcal{M}}_T =& \big\{ \mathrm{W}^0 \in \mathbf{H} \mid \exists \{u_n\}_{n=1}^\infty \subset L^\infty(\mathbb{R}_+) \\
& \qquad \left(\forall n \in \mathbb{N} \ \operatorname{supp} u_n \in [0,T] \wedge \mathrm{W}^0 + \mathbf{\Lambda} u_n \to 0, \text{ коли } n \to \infty \right) \big\}, \\
\mathcal{M} =& \big\{ \mathrm{W}^0 \in \mathbf{H} \mid \exists \{T_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}_+ \ \{u_n\}_{n=1}^\infty \subset L^\infty(\mathbb{R}_+) \\
& \qquad \left(\forall n \in \mathbb{N} \ \operatorname{supp} u_n \in [0,T_n] \wedge \mathrm{W}^0 + \mathbf{\Lambda} u_n \to 0, \text{ коли } n \to \infty \right) \big\}
\end{aligned}$$

Зрозуміло, що справедливе наступне твердження

Твердження 1.24. *Нехай* $\mathrm{W}^0 \in \mathbf{H}$. *Тоді*

(i) *стан* $\mathrm{W}^0 \in \mathbf{H}$ *є* L^∞*-керованим за заданий час* $T > 0$ *тоді і лише тоді, коли* $\mathrm{W}^0 \in \mathcal{L}_T$*;*

(ii) *стан* $\mathrm{W}^0 \in \mathbf{H}$ *є наближено* L^∞*-керованим за заданий час* $T > 0$ *тоді і лише тоді, коли* $\mathrm{W}^0 \in \overline{\mathcal{L}}_T$*;*

(iii) *стан* $\mathrm{W}^0 \in \mathbf{H}$ *є наближено* L^∞*-керованим за вільний час тоді і лише тоді, коли* $\mathrm{W}^0 \in \mathcal{L}$.

Аналізуючи означення керованості, множин $\mathcal{L}_T$, $\overline{\mathcal{L}}_T$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}_T$, $\overline{\mathcal{M}}_T$, $\mathcal{M}$ та формулу (1.15), одержуємо

$$\mathcal{L}_T \subset \overline{\mathcal{L}}_T \subset \mathcal{L}, \quad \mathcal{M}_T \subset \overline{\mathcal{M}}_T \subset \mathcal{M}, \qquad T > 0, \tag{1.16}$$

$$\mathcal{L} = \bigcup_{T>0} \mathcal{L}_T, \quad \mathcal{M} = \bigcup_{T>0} \mathcal{M}_T, \qquad\qquad T > 0, \tag{1.17}$$

$$\mathcal{L}_T \subset \mathcal{L}_{T'},\ \overline{\mathcal{L}}_T \subset \overline{\mathcal{L}}_{T'}, \quad \mathcal{M}_T \subset \mathcal{M}_{T'},\ \overline{\mathcal{M}}_T \subset \overline{\mathcal{M}}_{T'}, \qquad T' \geq T > 0, \tag{1.18}$$

$$\overline{\mathcal{L}}_T = \overline{\mathcal{M}_T}, \quad \mathcal{L}_T = \mathcal{M}_T, \qquad\qquad T > 0. \tag{1.19}$$

і бачимо, що має місце

Твердження 1.25. *Нехай оператори групи $\mathbb{S}$ є рівномірно відносно $t \in \mathbb{R}$ обмеженими, тобто, $\|\mathbb{S}(t)\| \leq C$, $t \in \mathbb{R}$, для деякого $C > 0$, незалежного від t. Тоді $\mathcal{L} = \mathcal{M}$.*

Таким чином, у більшості випадків дослідження (наближеної) L^∞-керованості системи (1.11), (1.12) (або (1.13), (1.14)) зводиться до дослідження множин $\mathcal{M}_T$, $\overline{\mathcal{M}}_T$ та $\mathcal{M}$, які описуються оператором впливу $\boldsymbol{\Lambda}$. Отже, дослідження граничного переходу

$$\mathrm{W}^0 + \boldsymbol{\Lambda} u_n \to 0, \qquad \text{коли } n \to \infty \tag{1.20}$$

і побудова послідовностей $\{T_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}_+$ та $\{u_n\}_{n=1}^\infty \subset L^\infty(\mathbb{R}_+)$, $\operatorname{supp} u_n \subset [0, T_n]$, $n \in \mathbb{N}$, для яких виконується (1.20) для заданого $\mathrm{W}^0 \in \mathbf{H}$, є центральною проблемою у вивченні (наближеної) L^∞-керованості цієї системи.

Оператори впливу для хвильового рівняння зі сталими коефіцієнтами на півосі, керованого крайовою умовою Діріхле або Неймана, вивчаються в розділі 2. Результати цього розділу дають можливість одержати критерії керованості для цього рівняння в підрозділі 5.1.

1.4.2. Проблеми стабілізації. Нехай H_0, H_1, H_2 є банаховими просторами, а $H_0 \subset H_1 \subset H_2$ є щільними вкладеннями, оператори $\mathcal{A} : H_2 \to H_2$, $D(\mathcal{A}) = H_0$, та $\mathcal{B} : \mathbb{R} \to H_2$, $D(\mathcal{B}) = \mathbb{R}$, є лінійними.

Розглянемо керовану систему

$$\mathrm{w}'' = \mathcal{A}\mathrm{w} + \mathrm{u} + f, \qquad t > 0, \tag{1.21}$$

за умов (1.12), де $\mathrm{w}^{(j)} : [0, +\infty) \to H_j$, $j = 0, 1, 2$, $w_0^0 \in H_0$, $\mathrm{w}_1^0 \in H_1$, $f \in \mathfrak{F}$ є заданими, а $\mathrm{u} \in L^2(\mathbb{R}_+)$ є керуванням вигляду

$$\mathrm{u} = b_0\mathrm{w} + b_1\mathrm{w}', \tag{1.22}$$

де $b_0 \in \mathbb{R}$ та $b_1 \in \mathbb{R}$ є сталими, що визначають керування. Тут $\mathfrak{F}$ є деяким лінійним простором функцій функцій $f : [0, +\infty) \to H_2$. Позначивши

$$\mathrm{W} = \begin{pmatrix} \mathrm{w} \\ \mathrm{w}' \end{pmatrix}, \quad \mathrm{W}^0 = \begin{pmatrix} \mathrm{w}_0^0 \\ \mathrm{w}_1^0 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{H} = H_1 \times H_2, \quad \mathbf{H} = H_0 \times H_1,$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{Id} \\ \mathcal{A} & 0 \end{pmatrix} : \mathrm{H} \to \mathrm{H}, \qquad D(\mathbf{A}) = \mathbf{H},$$

бачимо що система (1.21), (1.12) еквівалентна керованій системі

$$\mathrm{W}' = \mathbf{A}\mathrm{W} + \mathrm{U} + \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}, \qquad t > 0, \tag{1.23}$$

де $\mathrm{W} : [0, +\infty) \to \mathbf{H}$, $\mathrm{W}' : [0, T] \to \mathrm{H}$, $\mathrm{W}^0 \in \mathbf{H}$, U є керуванням вигляду

$$\mathrm{U} = B\mathrm{W}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b_0 & b_1 \end{pmatrix}. \tag{1.24}$$

Означення 1.26. *Система* (1.21), (1.12) *(або* (1.23), (1.14)*) називається стабілізовною, якщо існують* $b_0, b_1 \in \mathbb{R}$ *такі, що для кожної функції* $f \in \mathfrak{F}$ *і кожного стану* $\mathrm{W}^0 \in \mathbf{H}$ *розв'язок* W *цієї системи задовольняє умову* $\|\mathrm{W}(t)\|_{\mathbf{H}} \to 0$, *коли* $t \to +\infty$.

Підставляючи керування U вигляду (1.24) в систему (1.23), одержуємо

$$\mathrm{W}' = (\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathrm{W} + \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}, \qquad t > 0, \tag{1.25}$$

де $\mathbf{B} : \mathbf{H} \to \mathrm{H}$ є оператором множення на матрицю B.

Припустимо, що оператор $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ є інфінітезимальним генератором C_0-групи $\mathbb{S}_b : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(\mathrm{H})$. Тоді єдиним розв'язком (1.25), (1.14) є

$$\mathrm{W}(t) = \mathbb{S}_b(t)\mathrm{W}^0 + \int_0^t \mathbb{S}_b(t - \xi) \begin{pmatrix} 0 \\ f(\xi) \end{pmatrix} d\xi, \qquad t > 0. \tag{1.26}$$

Тому

$$\|\mathrm{W}(t)\|_{\mathbf{H}} \le \|\mathbb{S}_b\|_{\mathbf{H}} \left\|\mathrm{W}^0\right\|_{\mathbf{H}} + \|\mathbf{\Lambda}_b(t) f\|_{\mathbf{H}}, \quad t > 0, \tag{1.27}$$

де

$$\mathbf{\Lambda}_b(t) f = \int_0^t \mathbb{S}_b(t - \xi) \begin{pmatrix} 0 \\ f(\xi) \end{pmatrix} d\xi, \qquad t > 0.$$

Зрозуміло, що справедливе наступне твердження

Твердження 1.27. *Якщо існують значення* $b_0, b_1 \in \mathbb{R}$, *для яких виконано умови*

$$\|\mathbb{S}_b\|_{\mathbf{H}} \to 0, \quad t \to +\infty, \tag{1.28}$$

$$\|\mathbf{\Lambda}_b(t) f\|_{\mathbf{H}} \to 0, \quad t \to +\infty, \tag{1.29}$$

то система (1.21), (1.12) *(і* (1.23), (1.14)*) є стабілізовною.*

Оператори $\mathbb{S}_b$ і $\mathbf{\Lambda}_b(t)$ для хвильового рівняння зі сталими коефіцієнтами на півосі за умови Діріхле або Неймана, вивчаються в розділі 5.1. У цьому ж розділі доведено стабілізовність цих рівнянь. Далі, у розділі 6 за допомогою операторів перетворення, які вивчено в розділі 3, одержано умови стабілізовності для хвильового рівняння зі змінними коефіцієнтами на півосі за умови Діріхле або Неймана.

Далі розглянемо проблеми стабілізації за допомоги позиційного керування із запізненням. Розглянемо керовану систему

$$\mathrm{W}' = \mathbf{A}\mathrm{W} + \mathrm{U}, \qquad t > h, \tag{1.30}$$

$$\mathrm{W}(t) = \mathrm{W}^0(t), \qquad t \in [0, h], \tag{1.31}$$

де $\mathbf{A} : \mathrm{H} \to \mathrm{H}$ є інфінітезимальним оператором з областю визначення $D(\mathbf{A}) = \mathbf{H}$, $\mathrm{W} : [0, +\infty) \to \mathbf{H}$, $\mathrm{W}' : [0, T] \to \mathrm{H}$, $\mathrm{W}^0 \in \mathbf{H}$, U є керуванням вигляду

$$\mathrm{U}(t) = B\mathrm{W}(t - h), \qquad t > h, \tag{1.32}$$

де $\mathbf{A} : \mathrm{H} \to \mathrm{H}$ є лінійним оператором з областю визначення $D(\mathbf{A}) = \mathbf{H}$. Нехай $\mathfrak{B}$ є деяким класом допустних операторів.

Означення 1.28. *Система* (1.30), (1.31) *називається стабілізовною за допомогою позиційного керування із запізненням, якщо існує оператор* $B \in \mathfrak{B}$ *такий, що для кожного стану* $\mathrm{W}^0 \in C([0, h]; \mathbf{H})$ *розв'язок* W *цієї системи задовольняє умову* $\|\mathrm{W}(t)\|_{\mathbf{H}} \to 0$, *коли* $t \to +\infty$.

Підставляючи керування (1.32) в рівняння (1.30), одержуємо диференціально-різницеве рівняння, для вивчення якого в пункті 5.3.3 буде використано результати роботи [4].

1.4.3. Крайові задачі. Зафіксуємо $T > 0$. Нехай H_j, $j = \overline{0,4}$ є банаховими просторами, а $H_0 \subset H_1 \subset H_2$ та $H_3 \subset H_4$ є щільними вкладеннями, оператори $\mathcal{A} : H_2 \to H_2$, $D(\mathcal{A}) = H_0$, $\mathcal{B} : \mathbb{R} \to H_2$, $D(\mathcal{B}) = \mathbb{R}$, $\mathbf{P}^0 : H_0 \times H_1 \to H_3 \times H_4$, $D(\mathbf{P}^0) = H_0 \times H_1$ та $\mathbf{P}^T : H_0 \times H_1 \to H_3 \times H_4$, $D(\mathbf{P}^T) = H_0 \times H_1$, є лінійними.

Розглянемо крайову задачу

$$\mathrm{w}'' = \mathcal{A}\mathrm{w} + \mathcal{B}f, \qquad t \in (0,T), \tag{1.33}$$

$$\mathbf{P}^0 \begin{pmatrix} \mathrm{w}(0) \\ \mathrm{w}'(0) \end{pmatrix} + \mathbf{P}^T \begin{pmatrix} \mathrm{w}(T) \\ \mathrm{w}'(T) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{w}_0^0 \\ \mathrm{w}_1^0 \end{pmatrix}, \tag{1.34}$$

де $\mathrm{w}^{(j)} : [0,T] \to H_j$, $j = 0,1,2$, $\mathrm{w}_0^0 \in H_3$, $\mathrm{w}_1^0 \in H_4$, $f \in L^2(0,T)$. Позначивши

$$\mathrm{W} = \begin{pmatrix} \mathrm{w} \\ \mathrm{w}' \end{pmatrix}, \ \mathrm{W}^0 = \begin{pmatrix} \mathrm{w}_0^0 \\ \mathrm{w}_1^0 \end{pmatrix}, \ \mathrm{H} = H_1 \times H_2, \ \mathbf{H} = H_0 \times H_1, \ \mathcal{H} = H_3 \times H_4,$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{Id} \\ \mathcal{A} & 0 \end{pmatrix} : \mathrm{H} \to \mathrm{H}, \ D(\mathbf{A}) = \mathbf{H}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathcal{B} \end{pmatrix} : \mathbb{R} \to \mathrm{H}, \ D(\mathbf{B}) = \mathbb{R},$$

бачимо що задача (1.33), (1.34) еквівалентна задачі

$$\mathrm{W}' = \mathbf{A}\mathrm{W} + \mathbf{B}f, \qquad t \in (0,T), \tag{1.35}$$

$$\mathbf{P}_0\mathrm{W}(0) + \mathbf{P}_T\mathrm{W}(T) = \mathrm{W}^0, \tag{1.36}$$

де $\mathrm{W} : [0,T] \to \mathbf{H}$, $\mathrm{W}' : [0,T] \to \mathrm{H}$, $\mathrm{W}^0 \in \mathcal{H}$, $f \in L^2(0,T)$.

Означення 1.29. *Задача* (1.35), (1.36) *(або* (1.33), (1.34)*) називається коректною, якщо існує $N > 0$ таке, що для кожного $f \in L^2(0,T)$ і кожного $\mathrm{W}^0 \in \mathcal{H}$ існує єдиний розв'язок* W *задачі* (1.35), (1.36) *(або* (1.33), (1.34), *відповідно), який задовольняє умову*

$$\|\mathrm{W}(t)\|_{\mathbf{H}} \leq N \left(\left\|\mathrm{W}^0\right\|_{\mathcal{H}} + \|f\|_{L^2(0,T)} \right), \qquad t \in [0,T].$$

Нехай оператор $\mathbf{A}$ є інфінітезимальним генератором C_0-групи $\mathbb{S} : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(\mathrm{H})$, де $\mathcal{L}(\mathrm{H})$ є простором лінійних обмежених операторов, що визначені на всьому H і діють в H. Тоді єдиним розв'язком (1.35), (1.36) є

$$\mathrm{W}(t) = \mathbb{S}(t)\left(\mathbf{P}_0 + \mathbf{P}_T\mathbb{S}(T)\right)^{-1}\left(\mathrm{W}^0 + \int_0^T \mathbb{S}(T-\xi)\mathbf{B}f(\xi)\,d\xi\right) + \int_0^t \mathbb{S}(t-\xi)\mathbf{B}f(\xi)\,d\xi, \qquad t \in [0,T], \tag{1.37}$$

якщо оператор $\mathbf{P}_0 + \mathbf{P}_T\mathbb{S}(T)$ є оборотним, а обернений до нього є обмеженим. Основна проблема у вивченні коректності задач (1.33), (1.34) та (1.35), (1.36) полягає в дослідженні оператора $\mathbf{P}_0 + \mathbf{P}_T\mathbb{S}(T)$. Крайові задачи для хвильового рівняння зі сталими коефіцієнтами вивчено в підрозділі 5.4, а для таких рівнянь зі змінними коефіцієнтами — у підрозділі 6.3.

РОЗДІЛ 2.

ОПЕРАТОРИ ВПЛИВУ ТА ПРОСТОРИ СОБОЛЄВСЬКОГО ТИПУ, ЩО ВИНИКАЮТЬ В ЗАДАЧАХ КЕРУВАННЯ ДЛЯ ХВИЛЬОВОГО РІВНЯННЯ ЗІ СТАЛИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

2.1. Простори $\widetilde{H}^m_+$, $\widehat{H}^m_+$ та $H^m_\oplus$

Нехай $m \in \mathbb{N}_0$. Позначимо через $\widetilde{H}^m_+$ підпростір простору $H^m(\mathbb{R}_+)$, що містить усі звуження на $\mathbb{R}_+$ функцій з простору $\widetilde{H}^m$, а через $\widehat{H}^m_+$ — підпростір простору $H^m(\mathbb{R}_+)$, що містить усі звуження на $\mathbb{R}_+$ функцій з простору $\widehat{H}^m$. Для функції $\varphi \in H^m$ будемо позначати через φ_+ її звуження на $\mathbb{R}_+$. Зрозуміло, що відображення $\varphi \mapsto \varphi_+$ є ізоморфізмом просторів $\widetilde{H}^m$ та $\widetilde{H}^m_+$ і просторів $\widehat{H}^m$ та $\widehat{H}^m_+$ тому, що

$$\|\varphi\|^m = \sqrt{2}\,\|\varphi_+\|^m_{\mathbb{R}_+} = \sqrt{2}\,\|\varphi_+\|^m_+\,,$$

де $\|\cdot\|^m_+$ є нормою просторів $\widetilde{H}^m_+$ та $\widehat{H}^m_+$. Отже, простори $\widetilde{H}^m_+$ та $\widehat{H}^m_+$ є повними відносно топології, індукованої $H^m(\mathbb{R}_+)$. Враховуючи терему

1.2, одержуємо, що

$$\widetilde{H}^m_+ = \Big\{ g \in H^m(\mathbb{R}_+) \mid \forall k = \overline{0, m-1}\ g^{(k)}(+0) \in \mathbb{R}$$
$$\wedge (g^{(k)}(+0) = 0,\ \text{якщо } k \text{ є парним}) \Big\},$$
$$\widehat{H}^m_+ = \Big\{ g \in H^m(\mathbb{R}_+) \mid \forall k = \overline{0, m-1}\ g^{(k)}(+0) \in \mathbb{R}$$
$$\wedge (g^{(k)}(+0) = 0,\ \text{якщо } k \text{ є непарним}) \Big\}.$$

Позначимо через $\mathbf{I}^m_{\text{odd}} : \widetilde{H}^m_+ \to \widetilde{H}^m$, $D(\mathbf{I}^m_{\text{odd}}) = \widetilde{H}^m_+$, оператор непарного продовження, а через $\mathbf{I}^m_{\text{even}} : \widehat{H}^m_+ \to \widehat{H}^m$, $D(\mathbf{I}^m_{\text{even}}) = \widehat{H}^m_+$ — оператор парного продовження. Очевидно, маємо $R(\mathbf{I}^m_{\text{odd}}) = \widetilde{H}^m$ та $R(\mathbf{I}^m_{\text{even}}) = \widehat{H}^m$. Зрозуміло, що оберненими до операторів $\mathbf{I}^m_{\text{odd}}$ та $\mathbf{I}^m_{\text{even}}$ будуть звуження оператора $(\cdot)_+$ на $\widetilde{H}^m$ та $\widehat{H}^m$, відповідно. Таким чином, оператор $\mathbf{I}^m_{\text{odd}}$ є ізоморфізмом $\widetilde{H}^m_+$ та $\widetilde{H}^m$, і оператор $\mathbf{I}^m_{\text{even}}$ є ізоморфізмом $\widehat{H}^m_+$ та $\widehat{H}^m$, зокрема,

$$\|\mathbf{I}^m_{\text{odd}}\varphi\|^m = \sqrt{2}\,\|\varphi\|^m_+ = \sqrt{2}\,\|\varphi\|^m_{\mathbb{R}_+}, \qquad \varphi \in \widetilde{H}^m_+, \tag{2.1}$$
$$\|\mathbf{I}^m_{\text{even}}\varphi\|^m = \sqrt{2}\,\|\varphi\|^m_+ = \sqrt{2}\,\|\varphi\|^m_{\mathbb{R}_+}, \qquad \varphi \in \widehat{H}^m_+. \tag{2.2}$$

Зауважимо, що норми в просторах $\widetilde{H}^m_+$ та $\widehat{H}^m_+$ позначені одним символом. Оскільки одночасно парною і непарною може бути лише функція, що тотожно дорівнює нулю, то це не призводить до плутанини.

Позначимо $\widetilde{H}^{-m}_+ = \left(\widetilde{H}^m_+\right)^*$ і $\widehat{H}^{-m}_+ = \left(\widehat{H}^m_+\right)^*$ з нормою

$$\|f\|^{-m}_+ = \sup\left\{ \frac{|\langle f, \varphi\rangle_+|}{\|\varphi\|^m_+} \mid 0 \neq \varphi \in H^m_+ \right\}, \quad f \in (H^m_+)^*,$$

де $\langle f, \varphi\rangle_+$ є значенням розподілу $f \in (H^m_+)^*$ на тестовій функції $\varphi \in H^m_+$, H^m_+ є простором $\widetilde{H}^m_+$ або простором $\widehat{H}^m_+$. Позначимо через $\mathbf{I}^{-m}_{\text{odd}} : \widetilde{H}^{-m}_+ \to$

$\widetilde{H}^{-m}$, $D(\mathbf{I}_{\text{odd}}^{-m}) = \widetilde{H}_{+}^{-m}$, оператор непарного продовження, який діє за правилом

$$\langle \mathbf{I}_{\text{odd}}^{-m} f, \varphi \rangle = 2\langle f, (\mathbf{I}_{\text{odd}}^{m})^{-1} \varphi \rangle, \quad f \in \widetilde{H}_{+}^{-m},\ \varphi \in \widetilde{H}^{m}.$$

а через $\mathbf{I}_{\text{even}}^{m} : \widehat{H}_{+}^{-m} \to \widehat{H}^{-m}$, $D(\mathbf{I}_{\text{even}}^{-m}) = \widehat{H}_{+}^{-m}$ — оператор парного продовження, який діє за правилом

$$\langle \mathbf{I}_{\text{even}}^{-m} f, \varphi \rangle = 2\langle f, (\mathbf{I}_{\text{even}}^{m})^{-1} \varphi \rangle, \quad f \in \widehat{H}_{+}^{-m},\ \varphi \in \widehat{H}^{m}.$$

Очевидно, маємо $R(\mathbf{I}_{\text{odd}}^{-m}) = \widetilde{H}^{-m}$ та $R(\mathbf{I}_{\text{even}}^{-m}) = \widehat{H}^{-m}$. Крім того, оператор $\mathbf{I}_{\text{odd}}^{-m}$ є ізоморфізмом $\widetilde{H}_{+}^{-m}$ та $\widetilde{H}^{-m}$, і оператор $\mathbf{I}_{\text{even}}^{-m}$ є ізоморфізмом $\widehat{H}_{+}^{-m}$ та $\widehat{H}^{-m}$, зокрема,

$$\left\| \mathbf{I}_{\text{odd}}^{-m} f \right\|^{-m} = \sqrt{2}\, \|f\|_{+}^{-m} \le \sqrt{2}\, \|f\|_{\mathbb{R}_+}^{-m}, \qquad \varphi \in \widetilde{H}_{+}^{-m}, \tag{2.3}$$

$$\left\| \mathbf{I}_{\text{even}}^{-m} f \right\|^{-m} = \sqrt{2}\, \|f\|_{+}^{-m} \le \sqrt{2}\, \|f\|_{\mathbb{R}_+}^{-m}, \qquad \varphi \in \widehat{H}_{+}^{-m}. \tag{2.4}$$

Розглянемо також простір

$$H_{\oplus}^{m} = \left\{ \varphi \in H^{m}(\mathbb{R}_+) \mid \forall k = \overline{0, m-1}\ \varphi^{(k)}(+0) = 0 \right\}$$

з нормою

$$\|\varphi\|_{\oplus}^{m} = \|\varphi\|_{+}^{m}, \qquad \varphi \in H_{\oplus}^{m}, \tag{2.5}$$

та простір $H_{\oplus}^{-m} = (H_{\oplus}^{m})^{*}$ з нормою

$$\|f\|_{\oplus}^{-m} = \sup \left\{ \frac{|\langle f, \varphi \rangle_{\oplus}|}{\|\varphi\|_{\oplus}^{m}} \mid 0 \neq \varphi \in H_{\oplus}^{m} \right\}, \quad f \in (H_{\oplus}^{m})^{*},$$

де $\langle f, \varphi \rangle_{\oplus}$ є значенням розподілу $f \in H_{\oplus}^{-m}$ на тестовій функції $\varphi \in H_{\oplus}^{m}$. Оскільки $H_{\oplus}^{m}$ є підпростором простору $\widetilde{H}_{+}^{m}$ і підпростором простору $\widehat{H}_{+}^{m}$, то і

$$\|f\|_{\oplus}^{-m} \le \|f\|_{+}^{-m}, \qquad f \in H_{\oplus}^{-m}. \tag{2.6}$$

Бачимо, що будь-яка функція з $H^m_\oplus$ після продовження нулем на $\mathbb{R}_-$ буде належати H^m і навпаки: звуження будь-якої функції з H^m, носій якої міститься в $\mathbb{R}_+$, на належатиме $H^m_\oplus$. Крім того,

$$\|\overline{\varphi}\|^m = \|\varphi\|^m_\oplus, \quad \text{де } \overline{\varphi} \text{ є продовженням нулем на } \mathbb{R} \text{ функції } \varphi \in H^m_\oplus.$$

Тобто, ми маємо ізометричний ізоморфізм просторів $H^m_\oplus$ та $\{\varphi \in H^m \mid \operatorname{supp}\varphi \in [0, +\infty)\}$. Оскільки останній простір є повним, то і $H^m_\oplus$ є повним. Крім того, $H^{-m}_\oplus$ також є повним простором. Таким чином ми маємо низку банахових просторів $H^k(\mathbb{R}_+)$, $\widetilde{H}^k_+$, $\widehat{H}^k_+$, $H^k_\oplus$, $k \in \mathbb{Z}$. Зазначимо, що для $m = 0$ маємо

$$\|\varphi\|^0_\oplus = \|\varphi\|^0_+ = \|\varphi\|^0_{\mathbb{R}_+} = \|\varphi\|^0_{L^2(\mathbb{R}_+)}$$

та

$$H^0_\oplus = \widetilde{H}^0_+ = \widehat{H}^0_+ = H^0(\mathbb{R}_+) = L^2(\mathbb{R}_+).$$

Тому

$$\left(H^0_\oplus\right)^* = \left(\widetilde{H}^0_+\right)^* = \left(\widehat{H}^0_+\right)^* = \left(H^0(\mathbb{R}_+)\right)^* = L^2(\mathbb{R}_+).$$

Аналізуючи означення просторів $\widetilde{H}^k_+$, $\widehat{H}^k_+$, $H^k_\oplus$, $k \in \mathbb{Z}$, та, враховуючи (2.1)–(2.6) і висновок 1.6, одержуємо наступні дві теореми.

Теорема 2.1. *Для $m \in \mathbb{N}$ мають місце наступні вкладення*

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}_+) \subset H^m_\oplus \subset \widetilde{H}^m_+ \subset \widetilde{H}^{-m}_+ \subset H^{-m}_\oplus \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+),$$
$$\mathcal{D}(\mathbb{R}_+) \subset H^m_\oplus \subset \widehat{H}^m_+ \subset \widehat{H}^{-m}_+ \subset H^{-m}_\oplus \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+),$$

Теорема 2.2. *Мають місце наступні вкладення*

$$H^k_\oplus \subset H^n_\oplus, \quad \widetilde{H}^k_+ \subset \widetilde{H}^n_+, \quad \widehat{H}^k_+ \subset \widehat{H}^n_+, \qquad -\infty < n \le k < +\infty.$$

Крім того, наступні вкладення є щільними:

$$\widetilde{H}^k_+ \subset \widetilde{H}^n_+, \quad \widehat{H}^k_+ \subset \widehat{H}^n_+, \qquad -\infty < n \le k < +\infty.$$

Зрозуміло, що

$$\langle f', \varphi \rangle_\oplus = -\langle f, \varphi' \rangle_\oplus, \qquad f \in H^{-m}_\oplus,\ \varphi \in H^{m+1}_\oplus,\ m \in \mathbb{N}_0, \tag{2.7}$$

але аналоги цього співвідношення не виконуються в просторах $H^{-m}(\mathbb{R}_+)$, $\widetilde{H}^{-m}_+$, $\widehat{H}^{-m}_+$. Деякі властивості похідних в цих просторах досліджено в наступних двох теоремах і у висновку.

Теорема 2.3. *Нехай* $f \in \widetilde{H}^0_+ = H^0_\oplus$ *та існує* $f(+0) \in \mathbb{R}$. *Тоді* $f'' \in H^{-2}_\oplus$ *і цей розподіл може бути продовжений до розподілу з* $\widetilde{H}^{-2}_+$ *(а, отже, і до розподілу з* $\widetilde{H}^{-2}$*) за правилом*

$$\mathbf{I}^{-2}_{\text{odd}} f'' = \big(\mathbf{I}^0_{\text{odd}} f\big)'' - 2f(+0)\delta'. \tag{2.8}$$

Доведення. Для доведення (2.8) ми, фактично, маємо довести, що розподіл f'' може бути продовжений за правилом

$$\langle f'', \varphi \rangle_+ = \frac{1}{2}\langle \big(\mathbf{I}^0_{\text{odd}} f\big)'', \mathbf{I}^2_{\text{odd}}\varphi \rangle + f(+0)\varphi'(+0), \quad \varphi \in \widetilde{H}^2_+. \tag{2.9}$$

Припустимо, що існує послідовність $\{f_p\}_{p=0}^\infty \subset C^2[0, +\infty)$ така, що $\operatorname{supp} f_p$ є обмеженим, $p \in \mathbb{N}$, та

$$\|f - f_p\|^0_+ = \|f - f_p\|^0_\oplus \to 0 \quad \text{i} \quad f_p(+0) \to f(+0), \qquad \text{коли } p \to \infty. \tag{2.10}$$

Для кожного $p \in \mathbb{N}$ і кожного $\varphi \in \widetilde{H}^2_+$ маємо

$$\langle f''_p, \varphi \rangle_+ = \int_0^\infty f''_p(x)\varphi(x)\,dx = f_p(+0)\varphi'(+0) + \int_0^\infty f_p(x)\varphi''(x)\,dx$$

$$= f_p(+0)\varphi'(+0) + \langle f_p, \varphi''\rangle_+ = f_p(+0)\varphi'(+0) + \frac{1}{2}\langle \mathbf{I}^0_{\mathrm{odd}} f_p, \mathbf{I}^0_{\mathrm{odd}}\varphi''\rangle.$$

Оскільки $\mathbf{I}^0_{\mathrm{odd}}\varphi'' = \big(\mathbf{I}^2_{\mathrm{odd}}\varphi\big)''$, то застосовуючи (2.10), звідси одержуємо

$$\begin{aligned}\langle f_p'', \varphi\rangle_+ \to & f(+0)\varphi'(+0) + \frac{1}{2}\langle \mathbf{I}^0_{\mathrm{odd}} f, \big(\mathbf{I}^2_{\mathrm{odd}}\varphi\big)''\rangle \\ = & f(+0)\varphi'(+0) + \frac{1}{2}\langle \big(\mathbf{I}^0_{\mathrm{odd}} f\big)'', \mathbf{I}^2_{\mathrm{odd}}\varphi\rangle, \quad \text{коли } p \to \infty, \quad \varphi \in \widetilde{H}^2_+.\end{aligned}$$

Оскільки результат граничного переходу не залежить від вибору послідовності, що задовольняє (2.10), то для завершення доведення залишилось побудувати будь-яку послідовність $\{f_p\}_{p=0}^{\infty} \subset C^2[0, +\infty)$ таку, що $\operatorname{supp} f_p$ є обмеженим, $p \in \mathbb{N}$, і для якої виконано (2.10).

Побудуємо її. Для кожного $n \in \mathbb{N}$ позначимо $F(x) = H(x)f(x)$, $F_n(x) = (H(x) - H(x-n))f(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Тоді $F \in H^0$ та $F_n \in H^0$, $n \in \mathbb{N}$, і

$$\|F - F_n\|^0 \to 0, \quad \text{коли } n \to \infty. \tag{2.11}$$

Нехай $\psi \in \mathcal{D}$ — невід'ємна на $\mathbb{R}$ функція, $\operatorname{supp}\psi \subset [0,1]$, $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)\,dx$. Позначимо $\psi_k = k\psi(-k(\cdot))$, $F_n^k = F_n * \psi_k$, $n, k \in \mathbb{N}$. Тоді $F_n^k \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp} F_n^k \in [-\frac{1}{k}, n]$, $n, k \in \mathbb{N}$, і

$$\left\|F_n - F_n^k\right\|^0 \to 0, \qquad \text{коли } k \to \infty, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2.12}$$

Порівнюючи (2.11) і (2.11), бачимо, що існують зростаючи послідовності $\{n_p\}_{p=0}^{\infty}$ і $\{k_p\}_{p=0}^{\infty}$ такі, що

$$\left\|F - F_{n_p}^{k_p}\right\|^0 \to 0, \qquad \text{коли } p \to \infty.$$

Позначивши через f_p звуження $F_{n_p}^{k_p}$ на $\mathbb{R}_+$, звідси одержуємо, що $f_p \in$

$C^\infty[0,+\infty)$, $\operatorname{supp} f_p$ є обмеженим, $p \in \mathbb{N}$, і

$$\|f - f_p\|_+^0 \to 0, \qquad \text{коли } p \to \infty. \tag{2.13}$$

Скориставшись означенням значення розподілу в точці 0 (див. означення 1.5), одержуємо

$$f_p(+0) = F_{n_p}^{k_p}(0) = \int_0^{n_p} f(x) k_p \psi(k_p x)\, dx \tag{2.14}$$

$$= \langle f, k_p \psi(k_p(\cdot))\rangle_+ \to f(+0) \quad \text{коли } p \to \infty. \tag{2.15}$$

З (2.13) і (2.14) випливає (2.10). Теорему доведено. □

Теорема 2.4. *Нехай $f \in \widetilde{H}_+^0 = H_\oplus^0$ та існує $f(+0) \in \mathbb{R}$. Тоді $f' \in H_\oplus^{-1}$ і цей розподіл може бути продовжений до розподілу з $\widehat{H}_+^{-1}$ (а, отже, і до розподілу з $\widehat{H}^{-1}$) за правилом*

$$\mathbf{I}_{\text{even}}^{-1} f' = \big(\mathbf{I}_{\text{odd}}^0 f\big)' - 2f(+0)\delta. \tag{2.16}$$

Доведення. Для доведення (2.16) ми, фактично, маємо довести, що розподіл f' може бути продовжений за правилом

$$\langle f', \varphi\rangle_+ = \frac{1}{2}\langle \big(\mathbf{I}_{\text{odd}}^0 f\big)', \mathbf{I}_{\text{even}}^1 \varphi\rangle + f(+0)\varphi(+0), \quad \varphi \in \widehat{H}_+^1. \tag{2.17}$$

З доведення теореми 2.3 випливає, що існує послідовність $\{f_p\}_{p=0}^\infty \subset C^1[0,+\infty)$ таку, що $\operatorname{supp} f_p$ є обмеженим, $p \in \mathbb{N}$, і для якої виконано (2.10). Для кожного $p \in \mathbb{N}$ і кожного $\varphi \in \widehat{H}_+^1$ маємо

$$\begin{aligned}\langle f_p', \varphi\rangle_+ = \int_0^\infty f_p'(x)\varphi(x)\, dx = -f_p(+0)\varphi(+0) - \int_0^\infty f_p(x)\varphi'(x)\, dx \\ = -f_p(+0)\varphi(+0) - \langle f_p, \varphi'\rangle_+ = -f_p(+0)\varphi(+0) - \frac{1}{2}\langle \mathbf{I}_{\text{odd}}^0 f_p, \mathbf{I}_{\text{odd}}^0 \varphi'\rangle.\end{aligned}$$

Оскільки $\mathbf{I}^0_{\text{odd}}\varphi' = \left(\mathbf{I}^1_{\text{even}}\varphi\right)'$, то застосовуючи (2.10), звідси одержуємо

$$\begin{aligned}\langle f_p', \varphi\rangle_+ &\to - f(+0)\varphi(+0) - \frac{1}{2}\langle \mathbf{I}^0_{\text{odd}} f, \left(\mathbf{I}^1_{\text{even}}\varphi\right)'\rangle \\ &= - f(+0)\varphi(+0) - \frac{1}{2}\langle \left(\mathbf{I}^0_{\text{odd}} f\right)', \mathbf{I}^1_{\text{even}}\varphi\rangle, \quad \text{коли } p \to \infty, \quad \varphi \in \widehat{H}^1_+.\end{aligned}$$

Оскільки результат граничного переходу не залежить від вибору послідовності, що задовольняє (2.10), то ми одержали шукане продовження розподілу f' (див. (2.17)). Теорему доведено. □

Висновок 2.5. *Нехай $g \in \widehat{H}^1_+$ та існує $g'(+0) \in \mathbb{R}$. Тоді $g'' \in H^{-1}_\oplus$ і цей розподіл може бути продовжений до розподілу з $\widehat{H}^{-1}_+$ (а, отже, і до розподілу з $\widehat{H}^{-1}$) за правилом*

$$\mathbf{I}^{-1}_{\text{even}} g'' = \left(\mathbf{I}^1_{\text{even}} g\right)'' - 2g'(+0)\delta. \tag{2.18}$$

Доведення. Позначивши $f = g'$, одержуємо $f \in \widetilde{H}^0_+ = H^0_\oplus$ і $f(+0) = g'(+0)$. З теореми 2.4 випливає, що розподіл $g'' = f' \in H^{-1}_\oplus$ може бути продовжений до розподілу з $\widehat{H}^{-1}_+$ (а, отже, і до розподілу з $\widehat{H}^{-1}$) за правилом

$$\mathbf{I}^{-1}_{\text{even}} g'' = \left(\mathbf{I}^0_{\text{odd}} g'\right)' - 2g'(+0)\delta.$$

Оскільки $\mathbf{I}^0_{\text{odd}} g' = \left(\mathbf{I}^1_{\text{even}} g\right)'$, то звідси одержуємо (2.18). □

2.2. Оператор впливу, пов'язаний із задачею Діріхле

У пункті 5.1.1 (див. (5.17)) показано, що, введений в підрозділі 1.4 оператор впливу $\mathbf{\Lambda} : L^2(\mathbb{R}_+) \to \widetilde{H}^0_0 \times \widetilde{H}^{-1}_0$, для хвильового рівняння зі сталими коефіцієнтами на півосі, керованого крайовими умовами Діріхле, набуває вигляду

$$\mathbf{\Lambda} f = -\begin{pmatrix} \Psi \mathbf{I}^0_{\mathrm{odd}} f \\ \widehat{\Psi} \mathbf{I}^0_{\mathrm{odd}} f \end{pmatrix}, \qquad f \in D(\mathbf{\Lambda}) = L^2(\mathbb{R}_+),$$

де Ψ та $\widehat{\Psi}$ визначені нижче. Оператори впливу Ψ та $\widehat{\Psi}$ було введено та досліджено в роботі [21]. У підрозділі 1.4 було показано, що оператор $\mathbf{\Lambda}$, а, в наслідок цього, і оператори Ψ та $\widehat{\Psi}$, є центральним об'єктом при дослідженні керованості згаданого хвильового рівняння. Тому тут ми досліджуємо оператори Ψ і $\widehat{\Psi}$ та їх властивості, що будуть використані в пункті 5.1.1. Ці оператори залежать від параметра q, який ми вважатимемо невід'ємною сталою.

Нехай $\Psi : \widetilde{H}^0_0 \to \widetilde{H}^0_0$, $D(\Psi) = \widetilde{H}^0_0$,

$$\Psi g = \mathcal{F}^{-1}_{\sigma\to x}\left(\frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2+q^2}}\left(\mathcal{F} g\right)\left(\sqrt{\sigma^2+q^2}\right)\right), \qquad g \in D(\Psi). \tag{2.19}$$

Якщо $q = 0$, то $\Psi = \mathrm{Id}$.

Нехай $\widehat{\Psi} : \widetilde{H}^0_0 \to \widetilde{H}^{-1}_0$, $D(\widehat{\Psi}) = D(\Psi) = \widetilde{H}^0_0$,

$$\widehat{\Psi} g = \frac{d}{dx}\mathcal{F}^{-1}_{\sigma\to x}\left(\left(\mathcal{F}\left(\operatorname{sgn}(\cdot)\, g\right)\right)\left(\sqrt{\sigma^2+q^2}\right)\right), \qquad g \in D(\widehat{\Psi}). \tag{2.20}$$

Якщо $q = 0$, то $\widehat{\Psi} = \frac{d}{dx}\operatorname{sgn}(\cdot)$, тобто, $\left(\widehat{\Psi} g\right)(x) = (\operatorname{sgn} x\, g(x))'$.

Дослідимо оператори Ψ та $\widehat{\Psi}$.

Теорема 2.6. *Нехай $q > 0$. Тоді справедливі наступні твердження:*

(i) $R(\Psi) = \left\{ f \in \widetilde{H}^0_0 \mid \exists \widetilde{f} \in H^{1/2}_0\ \mathcal{F} f = \sqrt{|\cdot|}\mathcal{F}\widetilde{f}\right\}$, $\overline{R(\Psi)} = \widetilde{H}^0_0$;

(ii) Ψ *є обмеженим і* $\|\Psi\| \le 1$;

(iii) $N(\Psi) = \{g \in D(\Psi) \mid \operatorname{supp} \mathcal{F}g \subset [-q, q]\}$;

(iv) $$(\Psi g)(x) = -\frac{d}{dx} \int_{|x|}^{\infty} J_0\left(q\sqrt{t^2 - x^2}\right) g(t)\, dt$$
$$= g(x) - qx \int_{|x|}^{\infty} \frac{J_1\left(q\sqrt{t^2 - x^2}\right)}{\sqrt{t^2 - x^2}} g(t)\, dt,\ g \in D(\Psi).$$

Тут $J_\nu(\xi)$ є функцією Бесселя.

Доведення. (i) З означення Ψ одержуємо $R(\Psi) \subset \{f \in \widetilde{H}_0^0 \mid \exists \widetilde{f} \in H_0^{1/2}\ \mathcal{F}f = \sqrt{|\cdot|}\mathcal{F}\widetilde{f}\}$. Припустимо, що для $f \in \widetilde{H}_0^0$ існує $\widetilde{f} \in H_0^{1/2}$ таке, що $\mathcal{F}f = \sqrt{|\cdot|}\mathcal{F}\widetilde{f}$. Позначимо

$$g = \mathcal{F}^{-1}_{\mu \to t}\left(\frac{\mu H(\mu^2 - q^2)}{\sqrt[4]{\mu^2 - q^2}}\left(\mathcal{F}\widetilde{f}\right)\left(\sqrt{\mu^2 - q^2}\right)\right).$$

Маємо $\|g\|_0^0 \le \sqrt[4]{1 + q^2}\left\|\widetilde{f}\right\|_0^{1/2}$. Тому $g \in D(\Psi)$. До того ж $\Psi g = \mathcal{F}^{-1}\left(\sqrt{|\cdot|}\mathcal{F}\widetilde{f}\right) = f$. Отже, $R(\Psi) = \left\{f \in \widetilde{H}_0^0 \mid \exists \widetilde{f} \in H_0^{1/2}\ \mathcal{F}f = \sqrt{|\cdot|}\mathcal{F}\widetilde{f}\right\}$.

Нехай тепер $f \in \widetilde{H}_0^0 \backslash R(\Psi)$. Позначимо $f_n(x) = H(n^2 - x^2) f(x)$. Очевидно, що $\|f - f_n\|_0^0 \to 0$, коли $n \to \infty$. З теореми Пелі—Вінера випливає, що $\mathcal{F}f_n$ може бути продовжена до цілої функції. Тому $\frac{1}{\sqrt{|\cdot|}}\mathcal{F}f_n \in H_{1/2}^0$. Отже, $f_n \in R(\Psi)$. Таким чином, $f \in \overline{R(\Psi)}$. Отже, (i) доведено.

(ii) Нехай $f = \Psi g$, $g \in D(\Psi) = \widetilde{H}_0^0$. Позначивши $F = \mathcal{F}f$ $G = \mathcal{F}g$ та скориставшись теоремою 1.3, одержуємо

$$\|f\|_0^0 = \|F\|_0^0 = \left(2\int_q^{\infty} |G(\mu)|^2 \frac{\sqrt{\mu^2 - q^2}}{\mu}\, d\mu\right)^{1/2} \le \|G\|_0^0 = \|g\|_0^0.$$

Отже, (ii) виконано.

Твердження (iii) одразу випливає з означення Ψ.

Оскільки (див. [19, формула (3.11)])

$$\mathcal{F}^{-1}_{\sigma\to x}\left(\frac{\sin\left(t\sqrt{\sigma^2+q^2}\right)}{\sqrt{\sigma^2+q^2}}\right)(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}J_0\left(q\sqrt{t^2-x^2}\right)H\left(t^2-x^2\right)\operatorname{sgn} t, \tag{2.21}$$

то (iv) також виконується. □

Аналогічно одержуємо властивості $\widehat{\Psi}$.

Теорема 2.7. *Нехай $q>0$. Тоді справедливі наступні твердження:*

(i) $R(\widehat{\Psi})=\left\{f\in\widetilde{H}_0^{-1}\mid \exists\widetilde{f}\in H_0^{-1/2}\ \mathcal{F}f=\sqrt{|\cdot|}\mathcal{F}\widetilde{f}\right\}$, $\overline{R(\widehat{\Psi})}=\widetilde{H}_0^{-1}$;

(ii) $\widehat{\Psi}$ *є обмеженим і* $\left\|\widehat{\Psi}\right\|\leq 1$;

(iii) $N(\widehat{\Psi})=\left\{g\in D(\widehat{\Psi})\mid \operatorname{supp}\mathcal{F}\left(\operatorname{sgn}(\cdot)\,g\right)\subset[-q,q]\right\}$;

(iv) $\left(\widehat{\Psi}g\right)(x)=\dfrac{d}{dx}\left(\operatorname{sgn} x\, g(x)-q\displaystyle\int_{|x|}^{\infty}\frac{tJ_1\left(q\sqrt{t^2-x^2}\right)}{\sqrt{t^2-x^2}}g(t)\,dt\right)$, $g\in D(\widehat{\Psi})$.

Далі дослідимо звуження цих операторів на функції з компактними носіями. Властивості цих звужень однакові для всіх $q\geq 0$.

Нехай $m=-2,-1,0$, $\alpha>0$. Позначимо через $\widetilde{H}_0^m[-\alpha,\alpha]$ підпростір усіх розподілів в $\widetilde{H}_0^m$, носії яких лежать в $[-\alpha,\alpha]$. Очевидно, що простір $\widetilde{H}_0^m[-\alpha,\alpha]$ є повним відносно топології, індукованої $\widetilde{H}_0^m$. Позначимо через Ψ_α звуження оператора Ψ на $\widetilde{H}_0^0[-\alpha,\alpha]$, а через $\widehat{\Psi}_\alpha$ звуження оператора $\widehat{\Psi}$ на $\widetilde{H}_0^0[-\alpha,\alpha]$. Очевидно, що $\widehat{\Psi}_\alpha g=\Psi_\alpha(\operatorname{sgn}(\cdot)g)'$, $g\in D(\Psi_\alpha)$.

Теорема 2.8. *Оператор Ψ_α є автоморфізмом $\widetilde{H}_0^0[-\alpha,\alpha]$.*

Доведення. Нехай $f = \Psi_\alpha g$, $g \in D(\Psi_\alpha) = \widetilde{H}_0^0[-\alpha, \alpha]$. Позначивши $F = \mathfrak{F} f$ $G = \mathfrak{F} g$, одержуємо

$$F(\sigma) = \frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2 + q^2}} G\left(\sqrt{\sigma^2 + q^2}\right) \quad \text{та} \quad G(\mu) = \frac{\mu}{\sqrt{\mu^2 - q^2}} F\left(\sqrt{\mu^2 - q^2}\right).$$

Застосовуючи теорему Пелі—Вінера, бачимо що $g \in \widetilde{H}_0^0[-\alpha, \alpha]$ в тому і лише тому випадку, коли $f \in \widetilde{H}_0^0[-\alpha, \alpha]$. Крім того, оператор Ψ_α є бієктивним. За теоремою 2.6 він також є обмеженим. Таким чином, Ψ_α є взаємно однозначним обмеженим оператором, що відображує простір $\widetilde{H}_0^0[-\alpha, \alpha]$ в себе. З теореми Банаха про обернений оператор випливає, що Ψ_α^{-1} також є обмеженим. Теорему доведено. □

При доведенні цієї теореми, фактично, було одержано формулу для оператора Ψ_α^{-1}. Маємо $D(\Psi_\alpha^{-1}) = R(\Psi_\alpha) = \widetilde{H}_0^0[-\alpha, \alpha]$:

$$\left(\Psi_\alpha^{-1} f\right) = \mathfrak{F}_{\mu \to t}^{-1} \left(\frac{\mu}{\sqrt{\mu^2 - q^2}} (\mathfrak{F} f)(\sqrt{\mu^2 - q^2}) \right), \qquad f \in D(\Psi_\alpha^{-1}). \quad (2.22)$$

З формули (2.21) випливає

$$\mathfrak{F}_{\mu \to t}^{-1} \left(\frac{\sin\left(x\sqrt{\mu^2 - q^2}\right)}{\sqrt{\mu^2 - q^2}} \right)(t) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} I_0\left(q\sqrt{x^2 - t^2}\right) H\left(x^2 - t^2\right) \operatorname{sgn} x, \tag{2.23}$$

де $I_\nu(\xi)$ є модифікованою функцією Бесселя, отже,

$$\begin{aligned} \left(\Psi_\alpha^{-1} f\right)(t) &= -\frac{d}{dt} \int_{|t|}^{\infty} I_0\left(q\sqrt{x^2 - t^2}\right) f(x)\, dx \\ &= f(x) + qt \int_{|x|}^{\infty} \frac{I_1\left(q\sqrt{x^2 - t^2}\right)}{\sqrt{t^2 - x^2}} f(x)\, dx, \qquad f \in D(\Psi_\alpha^{-1}). \end{aligned} \tag{2.24}$$

Теорема 2.9. *Нехай $g \in D(\Psi_\alpha)$. Тоді $g \in L^\infty(\mathbb{R})$ в тому і лише тому випадку, коли $\Psi_\alpha g \in L^\infty(\mathbb{R})$.*

Доведення. Нехай $g \in D(\Psi_\alpha) \bigcap L^\infty(\mathbb{R})$. Застосовуючи теорему 2.6: (iv), одержуємо $\|\Psi_\alpha g\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \le (1+qT)\,\|g\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$. Нехай тепер $g \in D(\Psi_\alpha)$ та $f = \Psi_\alpha g \in L^\infty(\mathbb{R})$. Тоді з формули (2.24) випливає $\|g\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = \left\|\Psi_\alpha^{-1} f\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \le (1 + I_0(qT))\,\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$. $\square$

Застосовуючи узагальнену теорему Пелі—Вінера [89, гл. 3] та теорему 2.7 замість теорем Пелі—Вінера та 2.6, відповідно, аналогічно доведенню теореми 2.8 доводимо наступне твердження.

Теорема 2.10. *Оператор $\widehat{\Psi}_\alpha$ є ізоморфізмом $\widetilde{H}_0^0[-\alpha,\alpha]$ та $\widetilde{H}_0^{-1}[-\alpha,\alpha]$.*

Маємо також

$$\left(\widehat{\Psi}_\alpha^{-1} g\right)(t) = \operatorname{sgn} t \left(\mathcal{F}^{-1}_{\mu\to t}\left(\frac{-i}{\sqrt{\mu^2-q^2}}(\mathcal{F}g)(\sqrt{\mu^2-q^2})\right)\right)(t)$$
$$= -\int_{|t|}^{\infty} I_0\left(q\sqrt{x^2-t^2}\right) f(x)\,dx, \qquad g \in R(\widehat{\Psi}_\alpha^{-1}). \tag{2.25}$$

Як показано в пункті 5.1.1, оператор $\widehat{\Psi}_\alpha \Psi_\alpha^{-1}$ визначає множини $\mathcal{L}_T = \mathcal{M}_T$ та $\widetilde{\mathcal{L}}_T = \widetilde{\mathcal{M}}_T$ тих початкових станів хвильового рівняння зі сталими коефіцієнтами на півосі, керованого крайовими умовами Діріхле, з яких можливо влучити в нуль або будь-який окіл нуля за заданий час T. Далі дослідимо властивості $\widehat{\Psi}_\alpha \Psi_\alpha^{-1}$. Скориставшись лемою 2.44, для $f \in D(\Psi_\alpha^{-1})$ одержуємо формулу

$$\left(\widehat{\Psi}_\alpha \Psi_\alpha^{-1} f\right)(x) = (\operatorname{sgn} x\, f(x))' + q \operatorname{sgn} x \int_{|x|}^{\infty} f(\xi) \frac{I_1\left(q(|x|-\xi)\right)}{|x|-\xi}\, d\xi$$

$$= (\operatorname{sgn} x f(x))' + \frac{q}{2} \operatorname{sgn} x \left(f(x) * (I_1(qx) H(-x)) \right) (|x|). \tag{2.26}$$

Далі ми вивчаємо множини $N(\Psi)$ та $\widehat{\Psi}(N(\Psi))$. Оскільки для $q = 0$ маємо $N(\Psi) = \widehat{\Psi}(N(\Psi)) = \{0\}$, то ми досліджуємо ці множини лише у випадку $q > 0$.

Застосовуючи теорему Пелі—Вінера, теорему 2.6 та означення Ψ, одержуємо наступну теорему.

Теорема 2.11. *Нехай $q > 0$. Наступні твердження є еквівалентними*

(i) $g \in N(\Psi)$;

(ii) $\forall n = \overline{0, \infty}$ $g^{(n)} \in N(\Psi)$.

(iii) $g \in \widetilde{H}_0^0$ *та* $\operatorname{supp} \mathcal{F} g \subset [-q, q]$;

(iv) $g \in \widetilde{H}_0^0$ *і* g *можливо продовжити до цілої функції порядку* ≤ 1 *та типу* $\leq q$.

Теорема 2.12. *Нехай $q > 0$. Наступні твердження є еквівалентними*

(i) $g \in N(\widehat{\Psi})$;

(ii) $\forall n = 0, 1$ $g^{(n)} \in N(\widehat{\Psi})$.

(iii) $g \in \widetilde{H}_0^0$ *та* $\operatorname{supp} \mathcal{F}(\operatorname{sgn}(\cdot)\, g) \subset [-q, q]$;

(iv) $g \in \widetilde{H}_0^0$ *і* $\operatorname{sgn}(\cdot)\, g$ *можливо продовжити до цілої функції порядку* ≤ 1 *та типу* $\leq q$.

Наступні дві теореми дають нам властивості $\widehat{\Psi}(N(\Psi))$ та $\Psi(N(\widehat{\Psi}))$.

Теорема 2.13. *Нехай* $q > 0$, $f \in \widetilde{H}_0^{-1}$. *Тоді* $f \in \widehat{\Psi}(N(\Psi))$ *у тому і лише тому випадку, коли існує функція* γ *така, що*

(i) $\operatorname{supp}\gamma \subset [0, q]$;

(ii) $(\cdot)^{-1/2}\left(q^2 - (\cdot)^2\right)^{-1/4}\gamma \in H_0^0$;

(iii) $f = \dfrac{2}{\pi}\mathcal{F}^{-1}_{\sigma\to x}\left(\sigma\displaystyle\int_0^q \frac{\gamma(\xi)\,d\xi}{\sigma^2+\xi^2}\right) = i\operatorname{sgn} x\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^q \gamma(\xi)e^{-\xi|x|}\,d\xi.$

Крім того, за умов (i)–(iii) *для*

$$g = \mathcal{F}^{-1}_{\xi\to t}\operatorname{sgn}\xi\,\gamma(\sqrt{q^2-\xi^2})/\sqrt{q^2-\xi^2}) \in N(\Psi)$$

маємо $\widehat{\Psi}g = f$.

Доведення. Достатність (i)–(iii). Враховуючи (i) та (ii), одержуємо $\operatorname{supp} G \subset [-q, q]$ and $G \in \widetilde{H}_0^0$ для $G(\xi) = \operatorname{sgn}\xi\,\gamma\left(\sqrt{q^2-\xi^2}\right)/\sqrt{q^2-\xi^2}$. З теореми 2.11 випливає $g = \mathcal{F}G \in N(\Psi)$. Використовуючи (2.20), одержуємо

$$\begin{aligned}\widehat{\Psi}g &= \frac{1}{\pi}\mathcal{F}^{-1}_{\sigma\to x}\left(\sigma\left(G(\nu) * \mathcal{P}\frac{1}{\nu}\right)\Bigg|_{\sqrt{\sigma^2+q^2}}\right)\\ &= \frac{2}{\pi}\mathcal{F}^{-1}_{\sigma\to x}\left(\sigma\int_0^q \frac{\xi G\left(\sqrt{q^2-\xi^2}\right)}{\sigma^2+\xi^2}\,d\xi\right) \qquad (2.27)\end{aligned}$$

Тому з (iii)випливає $f \in \widehat{\Psi}\left(N(\Psi)\right)$.

Необхідність (i)–(iii). Якщо $f \in \widehat{\Psi}\left(N(\Psi)\right)$, то існує $g \in N(\Psi)$ таке, що $f = \widehat{\Psi}g$. Позначаючи $G = \mathcal{F}g$ та застосовуючи теорему 2.11, ми бачимо, що $\operatorname{supp} G \subset [-q, q]$, $G \in \widetilde{H}_0^0$. Враховуючи (2.27), одержуємо

$$f = \widehat{\Psi}g = \frac{2}{\pi}\mathcal{F}^{-1}_{\sigma\to x}\left(\sigma\int_0^q \frac{\mu G(\mu)\,d\mu}{\sigma^2+q^2-\mu^2}\right).$$

Позначимо $\gamma(\xi) = H(\xi)\xi G\left(\sqrt{q^2-\xi^2}\right)$. Тоді (i)–(iii) справджуються. Теорему доведено. $\square$

Аналогічно одержуємо наступну теорему.

Теорема 2.14. *Нехай* $q > 0$, $f \in \widetilde{H}^0_0$. *Тоді* $f \in \Psi(N(\widehat{\Psi}))$ *у тому і лише тому випадку, коли існує функція* γ *така, що*

(i) $\operatorname{supp}\gamma \subset [0,q]$;

(ii) $(\cdot)^{-1/2}\left(q^2-(\cdot)^2\right)^{1/4}\gamma \in H^0_0$;

(iii) $f = \dfrac{2}{\pi}\mathcal{F}^{-1}_{\sigma\to x}\left(\sigma\displaystyle\int_0^q \frac{\gamma(\xi)\,d\xi}{\sigma^2+\xi^2}\right) = i\operatorname{sgn} x\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\displaystyle\int_0^q \gamma(\xi)e^{-\xi|x|}\,d\xi.$

Крім того, за умов (i)–(iii) *для*

$$g = \operatorname{sgn} t\mathcal{F}^{-1}_{\xi\to t}(i|\xi|\gamma(\sqrt{q^2-\xi^2})/\sqrt{q^2-\xi^2}) \in N(\widehat{\Psi})$$

маємо $\Psi g = f$.

Зауваження 2.15. *Умова* (iii) *теореми 2.13 набирає вигляду* $(\mathcal{F}f)(\sigma) = \frac{1}{\pi}\langle\gamma,\nu(\sigma,\cdot)\rangle$, *де* $\nu(\sigma,\xi) = \frac{2\sigma}{\sigma^2+\xi^2}$, $\sigma\in\mathbb{R}$, $\xi\in\mathbb{R}$.

Зважаючи на теорему 2.13, ми бачимо, що наступна теорема є корисною для дослідження$(\Psi N(\widehat{\Psi}))$. Враховуючи [88, глава 2], теорему Пелі—Вінера та лему 2.45, ми одержуємо теорему.

Теорема 2.16. *Нехай* $q > 0$, $\gamma \in H^0_0$ *і* $\operatorname{supp}\gamma \in [0,q]$. *Тоді*

$$f(x) = i\operatorname{sgn} x\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^q \gamma(\xi)e^{-\xi|x|}\,d\xi, \qquad x > 0,$$

в тому і лише тому випадку, коли

(i) $f \in L^2(0,+\infty)$;

(ii) f *може бути продовженою до цілої функції* $e^{-zq/2}f(z)$ *порядку* ≤ 1 *та типу* $\leq q/2$;

(iii) $\forall x > 0$ $f_{ⓧ} \in H_0^0$, *де* $f_{ⓧ}(y) = f(x+iy)$, $y \in \mathbb{R}$;

(iv) $\sup\left\{\|f_{ⓧ}\|_0^0 \mid x > 0\right\} \leq \|f_{⓪}\|_0^0$.

За умов (i)–(iv) *маємо* $f_{⓪} = 2i\mathcal{F}_{\xi\to y}\gamma$.

Наступні дві теореми характеризують $\overline{\widehat{\Psi}(N(\Psi))}$.

Теорема 2.17. *Нехай* $q > 0$, $n = \overline{0,\infty}$, $f(x) = \operatorname{sgn} x\,|x|^n e^{-q|x|}$, $x \in \mathbb{R}$. *Тоді* $f \in \overline{\widehat{\Psi}(N(\Psi))}$ *(замикання розглядається в* H_0^{-1}*).*

Доведення. Позначимо $F = \mathcal{F}f$, $\nu(\sigma,\xi) = \frac{2\sigma}{\sigma^2+\xi^2}$, $\sigma, \xi \in \mathbb{R}$. Маємо

$$\begin{aligned} F(\sigma) =& \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(-\frac{d}{dq}\right)^n \frac{i\sigma}{\sigma^2+q^2} \\ =& \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\langle i\delta^{(n)}((\cdot)-q), \nu(\sigma,\cdot)\right\rangle, \quad \sigma \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{2.28}$$

Нехай $\mu \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp}\mu \subset [-1,1]$, $\int_{-1}^1 \mu(\xi)\,d\xi = 1$ та $\mu \geq 0$, $\xi \in \mathbb{R}$. Позначимо $\mu_m = m\mu(m(\xi-q)+2)$, $\xi \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$. Тоді $\mu_m \in C^\infty(\mathbb{R})$ і $\operatorname{supp}\mu_m \subset [q-3/m, q-1/m]$, $m \in \mathbb{N}$. Для $m \in \mathbb{N}$ позначимо

$$F_m(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\langle i\mu_m^{(n)}, \nu(\sigma,\cdot)\rangle, \qquad \sigma \in \mathbb{R}.$$

Враховуючи теорему 2.13, одержуємо $f_m = \mathcal{F}^{-1}F_m \in \widehat{\Psi}\,(N(\Psi))$, $m \in \mathbb{N}$. Позначимо

$$\widehat{\mu}(\xi) = \int_{-\infty}^{\xi} \mu(u)\,du, \qquad \xi \in \mathbb{R}.$$

Тоді $0 \leq \widehat{\mu}(\xi) \leq 1$ для $\xi \in \mathbb{R}$, $\widehat{\mu}(\xi) = 0$ для $\xi \leq -1$ і $\widehat{\mu}(\xi) = 1$ для $\xi \geq 1$. Позначимо також

$$\widehat{\mu}_m(\xi) = \widehat{\mu}(m(\xi - q) + 2), \qquad \xi \in \mathbb{R}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Зрозуміло, $(\widehat{\mu}_m)' = \mu_m$, $m \in \mathbb{N}$. Маємо

$$\|H((\cdot) - q) - \widehat{\mu}_m\|_0^0 \leq \left(\int_{q-3/m}^{q-1/m} \widehat{\mu}_m(\xi)\, d\xi \right)^{1/2} \leq \sqrt{\frac{2}{m}}, \qquad m \in \mathbb{N}.$$

Тоді

$$\left\| \delta^{(n)}((\cdot) - q) - \mu_m^{(n)} \right\|_0^{-2n-2} \leq \sqrt{\frac{2}{m}},$$

отже,

$$\left\| \xi^{-2n-2} \left(\mu_m^{(n)} - \delta^{(n)}((\cdot) - q) \right) \right\|_{2n+2}^{-2n-2} \leq \sqrt{\frac{2}{m}} \left(1 + \frac{1}{(q - 3/m)^2} \right)^{n+1}, \ m \in \mathbb{N}.$$

Застосовуючи леми 2.45 та (2.28), одержуємо

$$\|F - F_m\|_0^0 \leq L_{2n+2} \sqrt{\frac{2}{m}} \left(1 + \frac{1}{(q - 3/m)^2} \right)^{n+1} \to 0 \text{ коли } m \to \infty, \quad (2.29)$$

отже, $f_m \to f$ as $m \to \infty$ in H_0^{-1}. Оскільки $f_m = \mathcal{F}^{-1} F_m \in \widehat{\Psi}\,(N(\Psi))$, $m \in \mathbb{N}$, то f належить замиканню $\widehat{\Psi}\,(N(\Psi))$ в H_0^{-1}. Теорему доведено. □

Теорема 2.18. *Нехай $q > 0$. Тоді $\widetilde{H}_0^{-1}$ є замиканням множини $\widehat{\Psi}\,(N(\Psi))$ за нормою $\|\cdot\|_0^{-1}$.*

Доведення. Нехай $f \in \widetilde{H}_0^{-1}$. За теоремою 1.1 простір $\widetilde{H}_0^{-1}$ є замиканням простору $\widetilde{H}_0^0$ за нормою $\|\cdot\|_0^{-1}$. Нехай $\varphi_n(x) = \operatorname{sgn} x\, |x|^n e^{-q|x|}$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Оскільки система функцій $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ є повною у просторі $\widetilde{H}_0^0$, то f може бути наближеною в $\widetilde{H}_0^{-1}$ функціями $f_N = \sum_{n=0}^{N} f_n^N \varphi_n$, де $f_n^N \in \mathbb{R}$, $n = \overline{0, N}$, $N = \overline{0, \infty}$. З теореми 2.17 випливає, що f належить замиканню $\widehat{\Psi}\,(N(\Psi))$ за нормою $\|\cdot\|_0^{-1}$. Теорему доведено. □

Аналогічно одержуємо властивості $\overline{\Psi(N(\widehat{\Psi}))}$.

Теорема 2.19. *Нехай* $q > 0$, $n = \overline{0, \infty}$, $f(x) = \operatorname{sgn} x\, |x|^n e^{-q|x|}$, $x \in \mathbb{R}$. *Тоді* $f \in \overline{\Psi(N(\widehat{\Psi}))}$ *(замикання розглядається в* H_0^0*).*

Теорема 2.20. *Нехай* $q > 0$. *Тоді* $\widetilde{H}_0^0$ *є замиканням множини* $\Psi(N(\widehat{\Psi}))$ *за нормою* $\|\cdot\|_0^0$.

2.2.1. Зв'язок оператора впливу Ψ з операторами перетворення. Оператор Ψ, заданий формулою (2.19), може бути продовженим до оператора $\Psi^{[q]} : \widetilde{H}_0^{-2} \to \widetilde{H}_0^{-2}$, $D(\Psi^{[q]}) = \widetilde{H}_0^{-2}$, що діє за цією ж формулою. Зрозуміло, що для $q = 0$ маємо $\Psi^{[q]} = \mathrm{Id}$. Для цього оператора виконано аналог теореми 2.6.

Теорема 2.21. *Нехай* $q > 0$. *Тоді справедливі наступні твердження:*

(i) $R(\Psi^{[q]}) = \left\{ f \in \widetilde{H}_0^{-2} \mid \exists \widetilde{f} \in H_0^{-3/2}\ \mathcal{F}f = \sqrt{|\cdot|}\mathcal{F}\widetilde{f} \right\}$, $\overline{R(\Psi^{[q]})} = \widetilde{H}_0^{-2}$;

(ii) $\Psi^{[q]}$ *є обмеженим;*

(iii) $N(\Psi^{[q]}) = \{g \in D(\Psi) \mid \operatorname{supp} \mathcal{F}g \subset [-q, q]\}$.

Крім того, для $\Psi^{[q]}$ мають місце наступні дві теореми.

Теорема 2.22. *Маємо* $\left(\dfrac{d^2}{dx^2} - q^2\right) \Psi^{[q]} g = \Psi^{[q]} \dfrac{d^2}{d\xi^2} g$, $g \in D(\Psi^{[q]} \cap \widetilde{H}_0^0)$.

Теорема 2.23. *Маємо* $\Psi^{[q]} \delta' = \delta'$.

Таким чином, оператор $\Psi^{[q]}$ має властивості, подібні до властивостей оператора $\widetilde{\mathbf{T}}_r$, описаних в теоремах 1.13, 1.13, до властивостей оператора

$\widetilde{\mathbb{T}}$, описаних в теоремах 3.14, 3.16, і до властивостей оператора $\boldsymbol{\Psi}$, описаних в теоремах 4.12, 4.13. Але, на відміну від операторів перетворення $\widetilde{\mathbf{T}}_r$, $\widetilde{\mathbb{T}}$ та $\boldsymbol{\Psi}$, оператор $\Psi^{[q]}$ не є оборотним (див. теорему 2.21).

За аналогією до оператора Ψ_α розглянемо оператор $\Psi_\alpha^{[q]}$, який є звуженням $\Psi^{[q]}$ на $\widetilde{H}_0^{-2}[-\alpha,\alpha]$. Не складно побачити, що для $\Psi_\alpha^{[q]}$ виконується аналог теореми 2.8, а саме,

Теорема 2.24. *Оператор* $\Psi_\alpha^{[q]}$ *є автоморфізмом простору* $\widetilde{H}_0^m[-\alpha,\alpha]$, $m=-2,-1,0$.

2.3. Оператор впливу, пов'язаний із задачею Неймана

У пункті 5.1.3 (див. (5.52)) показано, що введений в підрозділі 1.4 оператор впливу $\boldsymbol{\Lambda} : L^2(\mathbb{R}_+) \to \widehat{\mathbf{H}}_0^1$ для хвильового рівняння зі сталими коефіцієнтами на півосі, керованого крайовими умовами Неймана, набуває вигляду

$$\boldsymbol{\Lambda} f = -\begin{pmatrix} \Phi \mathbf{I}_{\mathrm{odd}}^0 f \\ \widehat{\Phi} \mathbf{I}_{\mathrm{odd}}^0 f \end{pmatrix}, \qquad f \in D(\boldsymbol{\Lambda}) = D(\Phi) \cap D(\widehat{\Phi}),$$

де Φ та $\widehat{\Phi}$ визначені нижче. Оператори впливу Φ та $\widehat{\Phi}$ було введено та досліджено в роботі [22]. У підрозділі 1.4 було показано, що оператор $\boldsymbol{\Lambda}$, а, в наслідок цього, і оператори Φ та $\widehat{\Phi}$, є центральним об'єктом при дослідженні керованості згаданого хвильового рівняння. Тому тут ми досліджуємо оператори Φ і $\widehat{\Phi}$ та їх властивості, що будуть використані в пункті 5.1.3. Ці оператори залежать від параметра q, який ми вважатимемо невід'ємною сталою.

Нехай $\Phi : \widetilde{H}_0^0 \to \widehat{H}_0^1$, $D(\Phi) = \{g \in \widetilde{H}_0^0 \mid \frac{\sqrt{|\cdot| H((\cdot)^2 - q^2)}}{\sqrt[4]{(\cdot)^2 - q^2}} \mathcal{F}g \in H_0^0\}$ для $q > 0$ і $D(\Phi) = \{g \in \widetilde{H}_0^0 \mid \frac{\mathcal{F}g}{(\cdot)} \in H_0^0\}$ для $q = 0$,

$$\Phi g = \mathcal{F}^{-1}_{\sigma \to x} \left(\frac{-i}{\sqrt{\sigma^2 + q^2}} (\mathcal{F}g) \left(\sqrt{\sigma^2 + q^2} \right) \right), \qquad g \in D(\Phi). \tag{2.30}$$

Якщо $q = 0$, то $\Phi = \partial^{-1}$, де $\partial = d/dx$. Відмітимо, що якщо для $g \in \widetilde{H}_0^0$ існує $\widetilde{g} \in \widehat{H}_0^1$ така, що $g = \widetilde{g}'$, то $\partial^{-1} g$ визначається однозначно: $\partial^{-1} g = \widetilde{g}$. Тому, що функція, що тотожно дорівнює сталій належить $\widehat{H}_0^1$ тоді і лише тоді, коли ця стала нульова.

Нехай $\widehat{\Phi} : \widetilde{H}_0^0 \to \widehat{H}_0^0$, $D(\widehat{\Phi}) = \{g \in \widetilde{H}_0^0 \mid \frac{\sqrt{|\cdot| H((\cdot)^2 - q^2)}}{\sqrt[4]{(\cdot)^2 - q^2}} \mathcal{F}(g \operatorname{sgn}(\cdot)) \in H_0^0\}$ для $q > 0$ і $D(\widehat{\Phi}) = \widetilde{H}_0^0$ для $q = 0$,

$$\widehat{\Phi} g = \mathcal{F}^{-1}_{\sigma \to x} \left((\mathcal{F} (\operatorname{sgn}(\cdot)\, g)) \left(\sqrt{\sigma^2 + q^2} \right) \right), \qquad g \in D(\widehat{\Phi}). \tag{2.31}$$

Якщо $q = 0$, то $\widehat{\Phi} = \operatorname{sgn}(\cdot)$, тобто, $(\Phi g)(x) = \operatorname{sgn} x g(x)$.

Дослідимо оператори Φ та $\widehat{\Phi}$.

Теорема 2.25. *Нехай $q > 0$. Тоді справедливі наступні твердження:*

(i) $\overline{D(\Phi)} = \widetilde{H}_0^0$;

(ii) $R(\Phi) = \widehat{H}_0^1$;

(iii) Φ *не є обмеженим;*

(iv) $N(\Phi) = \{g \in D(\Phi) \mid \operatorname{supp} \mathcal{F}g \subset [-q, q]\}$;

(v) $(\Phi g)(x) = -\displaystyle\int_{|x|}^{\infty} J_0 \left(q\sqrt{t^2 - x^2} \right) g(t)\, dt$, $g \in D(\Phi)$.

Тут $J_\nu(\xi)$ є функцією Бесселя.

Доведення. (i) Нехай $g \in \widetilde{H}_0^0$. Позначимо $g_n(t) = H(n^2 - t^2)g(t)$, $t \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Тоді, $g_n \in \widetilde{H}_1^0$, $n \in \mathbb{N}$. З леми 2.49 випливає, що $g_n \in D(\Phi)$, $n \in \mathbb{N}$. Зрозуміло, що, $\|g - g_n\|_0^0 \to 0$, коли $n \to \infty$. Отже, $\overline{D(\Phi)} = \widetilde{H}_0^0$.

(ii) Нехай $f \in \widehat{H}_0^1$ та

$$g = \mathcal{F}^{-1}_{\mu \to t} \left(i\mu H(\mu^2 - q^2)\, (\mathcal{F}f) \left(\sqrt{\mu^2 - q^2} \right) \right).$$

За теоремою 1.3 маємо $\mathcal{F}f \in \widehat{H}_1^0$. Враховуючи (2.30), одержуємо

$$\|g\|_0^0 = \left(2 \int_q^\infty \left| \mu\, (\mathcal{F}f) \left(\sqrt{\mu^2 - q^2} \right) \right|^2 d\mu \right)^{1/2} \leq \sqrt[4]{1 + q^2}\, \|\mathcal{F}f\|_1^0. \quad (2.32)$$

Отже, $g \in \widetilde{H}_0^0$. Позначимо $\widetilde{G}(\mu) = \frac{H(\mu^2 - q^2)}{\sqrt{|\mu|}\sqrt[4]{\mu^2 - q^2}} (\mathcal{F}g)(\mu)$, $\mu \in \mathbb{R}$. Маємо

$$\left\| \widetilde{G} \right\|_1^0 = \left(2 \int_q^\infty \left| \mu (\mathcal{F}f) \left(\sqrt{\mu^2 - q^2} \right) \right|^2 \frac{\mu^2 + 1}{\mu \sqrt{\mu^2 - q^2}}\, d\mu \right)^{1/2} \leq (q^2 + 1)\, \|\mathcal{F}f\|_1^0.$$

Тому, $\widetilde{G} \in H_1^0$ та $g \in D(\Phi)$. Таким чином, $R(\Phi) = \widehat{H}_0^0$.

Твердження (iii) та (iv) випливають з означення Φ. Твердження (v) одразу одержуємо з (2.21). □

Аналогічно одержуємо властивості $\widehat{\Phi}$.

Теорема 2.26. *Нехай $q > 0$. Тоді справедливі наступні твердження:*

(i) $\overline{D(\widehat{\Phi})} = \widetilde{H}_0^0$;

(ii) $R(\widehat{\Phi}) = \widetilde{H}_0^0$;

(iii) $\widehat{\Phi}$ *не є обмеженим;*

(iv) $N(\widehat{\Phi}) = \left\{ g \in D(\widehat{\Phi}) \mid \operatorname{supp} \mathcal{F}\left(\operatorname{sgn}(\cdot)\, g\right) \subset [-q, q] \right\}$;

(v) $\left(\widehat{\Phi} g\right)(x) = \operatorname{sgn} x\, g(x) - q \displaystyle\int_{|x|}^{\infty} \frac{t J_1\left(q\sqrt{t^2 - x^2}\right)}{\sqrt{t^2 - x^2}} g(t)\, dt,\ g \in D(\widehat{\Phi})$.

Далі дослідимо звуження цих операторів на функції з компактними носіями. Властивості цих звужень однакові для всіх $q \geq 0$.

Нехай $m = -1, 0, 1$, $\alpha > 0$. Позначимо через $\widehat{H}_0^m[-\alpha, \alpha]$ підпростір усіх розподілів в $\widehat{H}_0^m$, носії яких лежать в $[-\alpha, \alpha]$. Очевидно, що простір $\widehat{H}_0^m[-\alpha, \alpha]$ є повним відносно топології, індукованої $\widehat{H}_0^m$. Позначимо через Φ_α звуження оператора Φ на $\widetilde{H}_0^0[-\alpha, \alpha]$, а через $\widehat{\Phi}_\alpha$ звуження оператора $\widehat{\Phi}$ на $\widetilde{H}_0^0[-\alpha, \alpha]$. Очевидно, що $\widehat{\Phi}_\alpha g = \Phi_\alpha(\operatorname{sgn}(\cdot) g)'$, $g \in D(\Phi_\alpha)$. Скориставшись теоремою Пелі—Вінера, одержуємо $D(\Phi_\alpha) = D(\Phi) \bigcap \widetilde{H}_0^0[-\alpha, \alpha] = \widetilde{H}_0^0[-\alpha, \alpha]$.

Цілком аналогічно доведенню теорем 2.8–2.10 і формул (2.22), (2.25) для обернених операторів одержуємо теореми 2.27–2.29 і формули (2.33), (2.34).

Теорема 2.27. *Оператор Φ_α є ізоморфізмом $\widetilde{H}_0^0[-\alpha, \alpha]$ та $\widehat{H}_0^1[-\alpha, \alpha]$.*

Для оператора Φ_α^{-1} маємо $D(\Phi_\alpha^{-1}) = R(\Phi_\alpha) = \widehat{H}_0^1[-\alpha, \alpha]$:

$$\begin{aligned}\left(\Phi_\alpha^{-1} f\right)(t) &= \left(\mathcal{F}_{\mu \to t}^{-1}\left(i\mu (\mathcal{F} f)(\sqrt{\mu^2 - q^2})\right)\right)(t) \\ &= f'(t) + qt \int_{|t|}^{\infty} \frac{I_1\left(\sqrt{x^2 - t^2}\right)}{\sqrt{x^2 - t^2}} f'(x)\, dx, \quad f \in D(\Phi_\alpha^{-1}). \quad (2.33)\end{aligned}$$

Теорема 2.28. *Нехай $g \in D(\Phi_\alpha)$. Тоді $g \in L^\infty(\mathbb{R})$ в тому і лише тому випадку, коли $(\Phi_\alpha g)' \in L^\infty(\mathbb{R})$.*

Теорема 2.29. *Оператор $\widehat{\Phi}_\alpha$ є ізоморфізмом $\widetilde{H}_0^0[-\alpha, \alpha]$ та $\widehat{H}_0^0[-\alpha, \alpha]$.*

Маємо також

$$\left(\widehat{\Phi}_\alpha^{-1} g\right)(t) = \operatorname{sgn} t \left(\mathcal{F}_{\mu\to t}^{-1}\left((\mathcal{F}g)(\sqrt{\mu^2-q^2})\right)\right)(t)$$
$$= \operatorname{sgn} t \left(f(t) + \int_{|t|}^{\infty} qx \frac{I_1\left(\sqrt{x^2-t^2}\right)}{\sqrt{x^2-t^2}} f(x)\,dx\right),\ g \in R(\widehat{\Phi}_\alpha^{-1}). \tag{2.34}$$

Як показано в пункті 5.1.3, оператор $\widehat{\Phi}_\alpha \Phi_\alpha^{-1}$ визначає множини $\mathcal{L}_T = \mathcal{M}_T$ та $\widetilde{\mathcal{L}}_T = \widetilde{\mathcal{M}}_T$ тих початкових станів хвильового рівняння зі сталими коефіцієнтами на півосі, керованого крайовими умовами Діріхле, з яких можливо влучити в нуль або будь-який окіл нуля за заданий час T. Далі дослідимо властивості $\widehat{\Phi}_\alpha \Phi_\alpha^{-1}$. Скориставшись лемою 2.48, для $f \in D(\Phi_\alpha^{-1})$ одержуємо формулу

$$\left(\widehat{\Phi}_\alpha \Phi_\alpha^{-1} f\right)(x) = \operatorname{sgn} x f'(x) + q\int_{|x|}^{\infty} f(\xi)\frac{I_1\left(q(|x|-\xi)\right)}{|x|-\xi}\,d\xi$$
$$= \operatorname{sgn} x f'(x) + \frac{q}{2}\left(f(x) * \left(I_1(qx)H(-x)\right)\right)(|x|). \tag{2.35}$$

Далі дослідимо області визначення операторів Φ, $\widehat{\Phi}$ та $\mathbf{\Lambda}$. Нехай $q > 0$, $g \in D(\Phi)$, $g = g_1 + g_2$, де $g_1 \in (N(\Phi))^\perp$, $g_2 \in \overline{N(\Phi)}$. Тоді

$$\left(\mathcal{F}\widehat{\Phi} g\right)(\sigma) = -\frac{i}{\pi}\left(\mathcal{P}\frac{1}{\xi} * (\mathcal{F}g)(\xi)\right)\Bigg|_{\xi=\sqrt{\sigma^2+q^2}} = -\frac{2i}{\pi}\int_0^\infty \frac{\mu\,(\mathcal{F}g)(\mu)\,d\mu}{\sigma^2+q^2-\mu^2}$$
$$= -\frac{2i}{\pi}\ \text{V. P.}\ \int_0^\infty \frac{\xi\,(\mathcal{F}g_1)\left(\sqrt{q^2+\xi^2}\right)}{\sigma^2-\xi^2}\,d\xi$$
$$-\frac{2i}{\pi}\int_0^q \frac{\xi\,(\mathcal{F}g_2)\left(\sqrt{q^2-\xi^2}\right)}{\sigma^2+\xi^2}\,d\xi$$
$$= -\frac{i}{\pi}\left(\operatorname{sgn}\sigma\,(\mathcal{F}g_1)\left(\sqrt{q^2+\sigma^2}\right)\right) * \mathcal{P}\frac{1}{\sigma}$$
$$-\frac{2i}{\pi}\int_0^q \frac{\xi\,(\mathcal{F}g_2)\left(\sqrt{q^2-\xi^2}\right)}{\sigma^2+\xi^2}\,d\xi$$

Аналогично модифікованій функції Бесселя

$$I_p(x) = \frac{x^p}{2^{p-1}\Gamma(1/2)\Gamma(p+1/2)} \int_0^1 \left(1-\xi^2\right)^{p-1/2} \cosh(\xi x)\, d\xi,\ p \geq 0, \tag{2.36}$$

вводиться модифікована функція Штруве (Struve)

$$L_p(x) = \frac{x^p}{2^{p-1}\Gamma(1/2)\Gamma(p+1/2)} \int_0^1 \left(1-\xi^2\right)^{p-1/2} \sinh(\xi x)\, d\xi,\ p \geq 0. \tag{2.37}$$

Оскільки

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi}\int_0^q \frac{e^{-|x|\mu}}{\sqrt{q^2-\mu^2}}\, d\mu =& I_0(qx) - L_0(q|x|) \\ =& -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{sgn} x\, \mathcal{F}^{-1}_{\sigma\to x} \frac{i \operatorname{sgn}\sigma}{\sqrt{\sigma^2+q^2}}, \end{aligned} \tag{2.38}$$

ми одержуємо $\widehat{\Phi} g = \widehat{\Phi} g_1 + \widehat{\Phi} g_2$, де

$$\begin{aligned} \left(\widehat{\Phi} g_1\right)(x) &= \operatorname{sgn} x\, \mathcal{F}^{-1}_{\sigma\to x}\left(\operatorname{sgn}\sigma\, (\mathcal{F} g_1)\left(\sqrt{q^2+\sigma^2}\right)\right) \\ &= \frac{1}{2}\operatorname{sgn} x \left(\left(\frac{d}{dx}\right)^2 - q^2\right) \left(\left(\operatorname{sgn} x\, I_0(qx) - L_0(qx)\right) * (\Phi g_1)(x)\right) \\ &= \frac{q}{2}\operatorname{sgn} x \left(\frac{I_1(q|x|) - L_0(qx)}{x} * (\Phi g_1)(x)\right), \end{aligned} \tag{2.39}$$

$$\begin{aligned} \left(\widehat{\Phi} g_2\right)(x) &= -\frac{2i}{\pi}\mathcal{F}^{-1}_{\sigma\to x} \int_0^q \frac{\xi\, (\mathcal{F} g_2)\left(\sqrt{q^2-\xi^2}\right)}{\sigma^2+\xi^2}\, d\xi \\ &= -i\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^q (\mathcal{F} g_2)\left(\sqrt{q^2-\xi^2}\right) e^{-\xi|x|}\, d\xi. \end{aligned} \tag{2.40}$$

Отже, для $q > 0$ звідси одержуємо

$$\begin{aligned} D(\mathbf{\Lambda}) = D(\Phi) \cap D(\widehat{\Phi}) = \Bigg\{ & g \in \widetilde{H}^0_0 \mid \frac{\sqrt{|\cdot|}H((\cdot)^2-q^2)}{\sqrt[4]{(\cdot)^2-q^2}}\mathcal{F} g \in H^0_0 \\ & \wedge \int_0^q (\mathcal{F} g)\left(\sqrt{q^2-\mu^2}\right) \frac{\mu\, d\mu}{(\cdot)^2+\mu^2} \Bigg\}. \end{aligned} \tag{2.41}$$

Зрозуміло, що для $q=0$ маємо

$$D(\mathbf{\Lambda}) = D(\Phi) \cap D(\widehat{\Phi}) = D(\Phi). \tag{2.42}$$

З леми 2.49 одразу випливає

Теорема 2.30. *Для кожного $q \geq 0$ маємо $D(\Phi) \cap \widetilde{H}^0_1 = D(\widehat{\Phi}) \cap \widetilde{H}^0_1 = \widetilde{H}^0_1$. Крім того, звуження операторів Φ та $\widehat{\Phi}$ на $\widetilde{H}^0_1$ є обмеженими операторами з $\widetilde{H}^0_1$ в $\widehat{H}^1_0$ та $\widehat{H}^0_0$ відповідно.*

Далі ми вивчаємо множини $N(\Phi)$, $N(\widehat{\Phi})$, $\Phi(N(\widehat{\Phi}))$ та $\widehat{\Phi}(N(\Phi))$. Оскільки для $q=0$ маємо $N(\Phi) = \widehat{\Phi}(N(\Phi)) = \{0\}$, то ми досліджуємо ці множини лише у випадку $q>0$.

Застосовуючи теорему Пелі—Вінера, теорему 2.25 та означення Φ, одержуємо наступні дві теореми.

Теорема 2.31. *Нехай $q>0$. Наступні твердження є еквівалентними*

(i) $g \in N(\Phi)$;

(ii) $\forall n = \overline{0,\infty}\ g^{(n)} \in N(\Phi)$.

(iii) $g \in \widetilde{H}^0_0$ *та* $\operatorname{supp} \mathfrak{F}g \subset [-q,q]$;

(iv) $g \in \widetilde{H}^0_0$ *і g можливо продовжити до цілої функції порядку ≤ 1 та типу $\leq q$.*

Теорема 2.32. *Нехай $q>0$. Наступні твердження є еквівалентними*

(i) $g \in N(\widehat{\Phi})$;

(ii) $\forall n = 0,1\ g^{(n)} \in N(\widehat{\Phi})$.

(iii) $g \in D(\widehat{\Phi})$ *та* $\operatorname{supp} \mathcal{F}(\operatorname{sgn}(\cdot)\, g) \subset [-q, q]$;

(iv) $g \in D(\widehat{\Phi})$ *і* $\operatorname{sgn}(\cdot)\, g$ *можливо продовжити до цілої функції порядку* ≤ 1 *та типу* $\leq q$.

Аналогічно доведенню теорем 2.13 та 2.14 одержуємо наступні дві теореми.

Теорема 2.33. *Нехай* $q > 0$, $f \in \widetilde{H}_0^0$. *Тоді* $f \in \widehat{\Phi}(N(\Phi))$ *у тому і лише тому випадку, коли існує функція* γ *така, що*

(i) $\operatorname{supp} \gamma \subset [0, q]$;

(ii) $\big(q^2 - (\cdot)^2\big)^{-1/4} \gamma \in H_0^0$;

(iii) $f = \dfrac{2}{\pi} \mathcal{F}^{-1}_{\sigma \to x} \left(\displaystyle\int_0^q \frac{i\xi\gamma(\xi)\, d\xi}{\sigma^2 + \xi^2} \right) = i \operatorname{sgn} x \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^q \gamma(\xi) e^{-\xi|x|}\, d\xi.$

Крім того, за умов (i)–(iii) *для*

$$g = -\mathcal{F}^{-1}_{\xi \to t} \gamma(\sqrt{q^2 - \xi^2}) \in N(\Phi)$$

маємо $\widehat{\Phi} g = f$.

Теорема 2.34. *Нехай* $q > 0$, $f \in \widehat{H}_0^1$. *Тоді* $f \in \Phi(N(\widehat{\Phi}))$ *у тому і лише тому випадку, коли існує функція* γ *така, що*

(i) $\operatorname{supp} \Psi \subset [0, q]$;

(ii) $\big(q^2 - (\cdot)^2\big)^{1/4} \gamma \in H_0^0$;

(iii) $f = \dfrac{2}{\pi} \mathcal{F}^{-1}_{\sigma \to x} \displaystyle\int_0^q \frac{i\xi\gamma(\xi)\, d\xi}{\sigma^2 + \xi^2} = i \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^q \gamma(\xi) e^{-\xi|x|}\, d\xi.$

Крім того, за умов (i)–(iii) *для*

$$g = -\operatorname{sgn}(\cdot) \mathcal{F}^{-1}_{\xi \to t} \Big(|\xi| \gamma(\sqrt{q^2 - \xi^2}) \Big) \in N(\widehat{\Psi})$$

маємо $\Phi g = f$.

Зауваження 2.35. *Умова* (iii) *теореми 2.33 набирає вигляду* $(\mathcal{F}f)(\sigma) = \frac{1}{\pi}\langle\gamma, \nu(\sigma, \cdot)\rangle$, *де* $\nu(\sigma, \xi) = \frac{2i\xi}{\sigma^2+\xi^2}$, $\sigma \in \mathbb{R}$, $\xi \in \mathbb{R}$.

Наступні дві теореми характеризують $\overline{\widehat{\Phi}(N(\Phi))}$.

Теорема 2.36. *Нехай* $q > 0$, $n = \overline{0, \infty}$, $f(x) = |x|^n e^{-q|x|}$, $x \in \mathbb{R}$. *Тоді* $f \in \overline{\widehat{\Phi}(N(\Phi) \cap \widetilde{H}_1^0)}$ *(замикання розглядається в* H_0^0*).*

Доведення. Позначимо $\nu(\sigma, \xi) = \frac{2i\xi}{\sigma^2+\xi^2}$, $\sigma, \xi \in \mathbb{R}$, $F = \mathcal{F}f$. Маємо

$$\begin{aligned} F(\sigma) =& \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(-\frac{d}{dq}\right)^n \frac{q}{\sigma^2 + q^2} \\ =& \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\langle i\delta^{(n)}(\xi - q), \nu(\sigma, \xi)\right\rangle, \ \sigma \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{2.43}$$

Порівнюючи формули (2.43) та (2.28), ми бачимо, що вони подібні. Тому, використовуючи лему 2.46 замість леми 2.45 в доведенні теореми 2.17, одержуємо $f \in \overline{\widehat{\Phi}(N(\Phi) \cap \widetilde{H}_1^0)}$, де замикання розглядається в H_0^0. Теорему доведено. □

Звідси одержуємо наступну теорему.

Теорема 2.37. *Нехай* $q > 0$. *Тоді* $\widehat{H}_0^0$ *є замиканням множини* $\widehat{\Phi}(N(\Phi) \cap \widetilde{H}_1^0)$ *за нормою* $\|\cdot\|_0^0$.

Доведення. Нехай $f \in \widehat{H}_0^0$. Позначимо $\varphi_n = |x|^n e^{-q|x|}$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Оскільки система функцій $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ є повною у просторі $\widehat{H}_0^0$, то f може бути наближеною функціями $f_N = \sum_{n=0}^{N} f_n^N \varphi_n$ в $\widehat{H}_0^0$, де $f_n^N \in \mathbb{R}$, $n = \overline{0, N}$, $N = \overline{0, \infty}$. З теореми 2.36 випливає, що f належить замиканню $\widehat{\Phi}(N(\Phi) \cap \widetilde{H}_1^0)$ за нормою $\|\cdot\|_0^0$. Теорему доведено. □

Аналогічно, скориставшись висновком 2.47 замість леми 2.46, одержуємо наступні дві теореми, що характеризують $\overline{\Phi(N(\widehat{\Phi}) \cap \widetilde{H}_1^0)}$.

Теорема 2.38. *Нехай* $q > 0$, $n = \overline{0, \infty}$, $f(x) = |x|^n e^{-q|x|}$, $x \in \mathbb{R}$. *Тоді* $f \in \overline{\Phi(N(\widehat{\Phi}) \cap \widetilde{H}_1^0)}$ *(замикання розглядається в* H_0^0*).*

Теорема 2.39. *Нехай* $q > 0$. *Тоді* $\widehat{H}_0^0$ *є замиканням множини* $\Phi(N(\widehat{\Phi}) \cap \widetilde{H}_1^0)$ *за нормою* $\|\cdot\|_0^1$.

2.3.1. Зв'язок оператора впливу Φ з операторами перетворення. Оператор Φ, заданий формулою (2.30), може бути продовженим до оператора $\Phi^{[q]} : \widetilde{H}_0^{-2} \to \widehat{H}_0^{-1}$, $D(\Phi^{[q]}) = \{g \in \widetilde{H}_0^{-2} \mid \frac{\sqrt{|\cdot|}H((\cdot)^2-q^2)}{\sqrt[4]{(\cdot)^2-q^2}}\mathcal{F}g \in H_{-2}^0\}$ для $q > 0$ і $D(\Phi^{[q]}) = \{g \in \widetilde{H}_0^{-2} \mid \frac{\mathcal{F}g}{(\cdot)} \in H_{-2}^0\}$ для $q = 0$, що діє за цією ж формулою. Зрозуміло, що для $q = 0$ маємо $\Phi^{[q]} = \partial^{-1}$, де $\partial = d/dx$. . Для цього оператора виконано аналог теореми 2.25.

Теорема 2.40. *Нехай* $q > 0$. *Тоді справедливі наступні твердження:*

(i) $\overline{D(\Phi^{[q]})} = \widetilde{H}_0^{-2}$;

(ii) $R(\Phi^{[q]}) = \widehat{H}_0^{-1}$;

(iii) $\Phi^{[q]}$ *не є обмеженим;*

(iv) $N(\Phi^{[q]}) = \{g \in D(\Phi) \mid \operatorname{supp} \mathcal{F}g \subset [-q, q]\}$.

Крім того, для $\Phi^{[q]}$ мають місце наступні дві теореми.

Теорема 2.41. *Маємо* $\left(\dfrac{d^2}{dx^2} - q^2\right) \Phi^{[q]} g = \Phi^{[q]} \dfrac{d^2}{d\xi^2} g$, $g \in D(\Phi^{[q]} \cap \widehat{H}_0^1)$.

Теорема 2.42. *Маємо* $\Phi^{[q]}\delta' = \delta$.

Таким чином, оператор $\Phi^{[q]}$ має властивості, подібні до властивостей оператора $\widehat{\mathbf{T}}_r$, описаних в теоремах 1.18, 1.18, до властивостей оператора $\widehat{\mathbb{T}}$, описаних в теоремах 3.18, 3.20, і до властивостей оператора $\mathbf{\Phi}$, описаних в теоремах 4.18, 4.19. Але, на відміну від операторів перетворення $\widehat{\mathbf{T}}_r$, $\widehat{\mathbb{T}}$ та $\mathbf{\Phi}$, оператор $\Phi^{[q]}$ не є оборотним (див. теорему 2.40).

За аналогією до оператора Φ_α розглянемо оператор $\Phi_\alpha^{[q]}$, який є звуженням $\Phi^{[q]}$ на $\widetilde{H}_0^{-2}[-\alpha,\alpha]$. Не складно побачити, що для $\Phi_\alpha^{[q]}$ виконується аналог теореми 2.27, а саме,

Теорема 2.43. *Оператор $\Phi_\alpha^{[q]}$ є ізоморфізмом просторів $\widetilde{H}_0^m[-\alpha,\alpha]$ і $\widehat{H}_0^{m+1}[-\alpha,\alpha]$, $m=-2,-1,0$.*

2.4. Допоміжні твердження до розділу 2

Лема 2.44. *Нехай $\alpha>0$. Тоді для $f\in R(\Psi_\alpha)=\widetilde{H}_0^0[-\alpha,\alpha]$ маємо*

$$\left(\widehat{\Psi}_\alpha\Psi_\alpha^{-1}f\right)(x)=(\operatorname{sgn}x\,f(x))'+q\operatorname{sgn}x\int_{|x|}^\infty f(\xi)\frac{I_1\left(q(|x|-\xi)\right)}{|x|-\xi}\,d\xi. \quad (2.44)$$

Доведення. Нехай $f\in\mathcal{D}(-\alpha,\alpha)$ є непарною, $h=\widehat{\Psi}_\alpha\Psi_\alpha^{-1}f$. Маємо

$$G=\frac{1}{i\xi}\mathcal{F}_{t\to\xi}\left(\frac{d}{dt}\left(\operatorname{sgn}t(\Psi_\alpha^{-1}f)(t)\right)\right)=\frac{-i}{\pi}\mathcal{P}\frac{1}{\xi}*\frac{\xi(\mathcal{F}f)\left(\sqrt{\xi^2-q^2}\right)}{\sqrt{\xi^2-q^2}}$$
$$=\frac{-2i}{\pi}\text{V.p.}\int_0^\infty\frac{(\mathcal{F}\Delta_q f)\left(\sqrt{\mu^2-q^2}\right)}{(\xi^2-\mu^2)\sqrt{\mu^2-q^2}}\,d\mu$$

де $\Delta_q=-\left(\frac{d}{dx}\right)^2-q^2$. Отже,

$$h=\frac{d}{dx}\mathcal{F}^{-1}_{\sigma\to x}G\left(\sqrt{\sigma^2+q^2}\right)$$

$$= -i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{d}{dx}\left(\int_0^q \frac{e^{-|x|\sqrt{q^2-\mu^2}}}{\sqrt{q^2-\mu^2}}\frac{(\mathcal{F}\Delta_q f)\left(\sqrt{\mu^2-q^2}\right)}{\sqrt{\mu^2-q^2}}\,d\mu\right.$$

$$\left.-\int_q^\infty \frac{\sin\left(|x|\sqrt{\mu^2-q^2}\right)}{\sqrt{\mu^2-q^2}}\frac{(\mathcal{F}\Delta_q f)\left(\sqrt{\mu^2-q^2}\right)}{\sqrt{\mu^2-q^2}}\,d\mu\right)$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\operatorname{sgn} x\left(\int_0^\infty f(\nu)\int_0^q \frac{e^{-|x|\sqrt{q^2-\mu^2}}\sinh\left(\nu\sqrt{q^2-\mu^2}\right)}{\sqrt{q^2-\mu^2}}\,d\mu\right.$$

$$\left.+\int_0^\infty f(\nu)\int_q^\infty \frac{\cos\left(x\sqrt{\mu^2-q^2}\right)\sin\left(\nu\sqrt{\mu^2-q^2}\right)}{\sqrt{\mu^2-q^2}}\,d\mu\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\operatorname{sgn} x\left(\int_{-\infty}^\infty f(\nu)\int_0^q \frac{e^{-(|x|-\nu)\mu}}{\sqrt{q^2-\mu^2}}\,d\mu\,d\nu\right.$$

$$\left.-\int_{-\infty}^\infty f(\nu)\int_q^\infty \frac{\sin\left((x-\nu)\sqrt{\mu^2-q^2}\right)}{\sqrt{\mu^2-q^2}}\,d\mu\,d\nu\right) \qquad (2.45)$$

Враховуючи (2.36) та (2.37), одержуємо

$$\frac{2}{\pi}\int_0^q \frac{e^{-\xi\mu}}{\sqrt{q^2-\mu^2}}\,d\mu = I_0(q\xi) - L_0(q\xi), \qquad \xi\in\mathbb{R}. \qquad (2.46)$$

Також маємо

$$\mathcal{F}\left(\operatorname{sgn}\xi\left(I_0(q|\xi|)-L_0(q|\xi|)\right)\right) = \frac{2}{\pi}\mathcal{F}\left(\operatorname{sgn}\xi\int_0^q \frac{e^{-u|\xi|}}{\sqrt{q^2-u^2}}\,du\right)$$

$$= \left(\frac{2}{\pi}\right)^{3/2}\int_0^q \frac{(-i\sigma)}{(\sigma^2+u^2)\sqrt{q^2-u^2}}\,du = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{(-i\operatorname{sgn}\sigma)}{\sqrt{\sigma^2+q^2}}.$$

Тому

$$\frac{2}{\pi}\int_q^\infty \frac{\sin\left(\xi\sqrt{\mu^2-q^2}\right)}{\sqrt{\mu^2-q^2}} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\sigma\xi}{\sqrt{\sigma^2+q^2}}\,d\sigma = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\mathcal{F}^{-1}\frac{i\operatorname{sgn}\sigma}{\sqrt{\sigma^2+q^2}}$$

$$= \operatorname{sgn}\xi\left(I_0(q|\xi|)-L_0(q|\xi|)\right). \qquad (2.47)$$

Порівнюючи (2.45)–(2.47), одержуємо

$$\begin{aligned} h = &\frac{1}{2}\operatorname{sgn} x \left((\Delta_q f) * (I_0(qx) - L_0(qx)) (|x|) \right. \\ &\left. - ((\Delta_q f) * (\operatorname{sgn} x (I_0(qx) - L_0(q|x|)))) (x) \right) \\ = &\operatorname{sgn} x \left(f * (\Delta_q (H(-x) I_0(qx))) \right) (|x|) \\ = &\operatorname{sgn} x \left(f'(x) + f * (H(-x)\Delta_q I_0(qx)) \right). \end{aligned}$$

Оскільки $\Delta_q I_0(q\xi) = \left(q^2/2\right)(I_0(q\xi) - I_2(q\xi)) = qI_1(q\xi)/\xi$, ми бачимо, що (2.44) виконано для $f \in R(\Psi_\alpha) \cap \mathcal{D}(-\alpha, \alpha)$. Поширимо цю формулу на $R(\Psi_\alpha)$. Нехай $f \in R(\Psi_\alpha)$. За теоремою 1.7 існує така послідовність непарних функцій $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(-\alpha, \alpha)$, що $\|f - f_n\|_0^0 \to \infty$ as $n \to \infty$. Маємо

$$\begin{aligned} &\left| \int_{|x|}^{\infty} \frac{I_1(q(|x| - \xi))}{|x| - \xi} (f(\xi) - f_n(\xi))\, d\xi \right| \\ &\le e^{-q|x|} \left(\int_0^\infty e^{2q\xi} |f(\xi) - f_n(\xi)|^2\, d\xi \right)^{1/2} \left(\int_0^\infty e^{-2q\xi} \left| \frac{I_1(q\xi)}{\xi} \right|^2 d\xi \right)^{1/2} \\ &\qquad = 2qKe^{-q|x|} \|f - f_n\|_0^0, \qquad x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

де $K = \frac{e^{q\alpha}}{2q} \left(\int_0^\infty e^{-2q\xi} \left| \frac{I_1(q\xi)}{\xi} \right|^2 d\xi \right)^{1/2}$. Тому

$$\left\| \int_{|x|}^{\infty} \frac{I_1(q(|x| - \xi))}{|x| - \xi} (f(\xi) - f_n(\xi))\, d\xi \right\|_0^0 \le K \|f - f_n\|_0^0. \tag{2.48}$$

Оскільки $\|(\operatorname{sgn} x(f - f_n))'\|_0^{-1} \le \|f - f_n\|_0^0$, то з (2.48) випливає (2.44) for $f \in R(\Psi_\alpha)$. Лему доведено. □

Лема 2.45. *Нехай $q > 0$, $m \in \mathbb{N}$, $\xi^{-2m}\gamma \in H_{2m}^{-2m}$, $\operatorname{supp}\gamma \subset [-q, q]$, $\nu(\sigma, \xi) = \frac{2\sigma}{\sigma^2 + \xi^2}$ and $F(\sigma) = \langle \gamma, \nu(\sigma, \cdot) \rangle$. Тоді*

$$\|F\|_0^0 \le L_m \left\| \xi^{-2m}\gamma \right\|_{2m}^{-2m}, \tag{2.49}$$

де $L_m > 0$.

Доведення. Маємо $\frac{1}{\sigma - i\xi} \in H^{2m}_{-2m}$ (відносно ξ), $\sigma \in \mathbb{R}$, та

$$F(\sigma) = \frac{1}{\pi}\left\langle \gamma(\xi) + \gamma(-\xi), \frac{1}{\sigma - i\xi}\right\rangle$$
$$= \frac{1}{\pi}\left\langle \gamma_1, (1+\xi^2)^{-m}\big(1+|D|^2\big)^m \frac{\xi^{2m}}{\sigma - i\xi}\right\rangle$$
$$= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \gamma_1(\xi)(1+\xi^2)^{-m}\left(1+|D|^2\right)^m \frac{\xi^{2m}\sigma}{\sigma^2+\xi^2}\,d\xi, \qquad \sigma \in \mathbb{R},$$

де $\gamma_1(\xi) = (1+\xi^2)^m\left(1+|D|^2\right)^{-m}\left(\xi^{-2m}\left(\gamma(\xi)+\gamma(-\xi)\right)\right) \in H^0_0$ і γ_1 є парним. Тоді

$$\left(\|F\|^0_0\right)^2 = \frac{4}{\pi^2}\int_0^\infty \gamma_1(\xi)\int_0^\infty \overline{\gamma_1(\mu)}(1+\xi^2)^{-m}(1+\mu^2)^{-m}$$
$$\times\big(1+|D_\xi|^2\big)^m\big(1+|D_\mu|^2\big)^m \xi^{2m}\mu^{2m}\int_0^\infty \frac{\sigma^2\,d\sigma}{(\sigma^2+\xi^2)(\sigma^2+\mu^2)}\,d\mu\,d\xi$$
$$= \frac{4}{\pi^2}\int_0^\infty \gamma_1(\xi)\int_0^\infty \overline{\gamma_1(\mu)}(1+\xi^2)^{-m}(1+\mu^2)^{-m}$$
$$\times\left(1+|D_\xi|^2\right)^m\left(1+|D_\mu|^2\right)^m \frac{\xi^{2m}\mu^{2m}}{\xi+\mu}\,d\mu\,d\xi. \tag{2.50}$$

Для $\xi > 0$, $\mu > 0$ маємо

$$\left(1+|D_\xi|^2\right)^m\left(1+|D_\mu|^2\right)^m \frac{\xi^{2m}\mu^{2m}}{\xi+\mu}$$
$$= \sum_{k=0}^m\sum_{p=0}^m \binom{m}{k}\binom{m}{p}(-1)^{k+p}\frac{d^{2(k+p)}}{d\xi^{2k}d\mu^{2p}}\frac{\xi^{2m}\mu^{2m}}{\xi+\mu}$$
$$= \sum_{k=0}^m\sum_{p=0}^m\sum_{s=0}^{2k}\sum_{l=0}^{2p}\binom{m}{k}\binom{m}{p}\binom{2k}{s}\binom{2p}{l}\frac{\left((2m)!\right)^2(s+l)!}{(2k-s)!(2p-l)!}$$
$$\times(-1)^{k+p+s+l}\frac{\xi^{2(m-k)+s}\mu^{2(m-p)+l}}{(\xi+\mu)^{s+l+1}}.$$

Отже, для $\xi > 0$, $\mu > 0$ маємо

$$\left|(1+\xi^2)^{-m}(1+\mu^2)^{-m}\left(1+|D_\xi|^2\right)^m\left(1+|D_\mu|^2\right)^m\frac{\xi^{2m}\mu^{2m}}{\xi+\mu}\right| \le \frac{\pi^2\left(L_m\right)^2}{2(\xi+\mu)},$$

де

$$L_m = \frac{1}{\pi}\left(\sum_{k=0}^{m}\sum_{p=0}^{m}\sum_{s=0}^{2k}\sum_{l=0}^{2p}\binom{m}{k}\binom{m}{p}\binom{2k}{s}\binom{2p}{l}\frac{\left((2m)!\right)^2(s+l)!}{(2k-s)!(2p-l)!}\right)^{1/2}$$
$$\leq \frac{2}{\pi}(2m)!\sqrt{(4m)!}5^m. \tag{2.51}$$

Враховуючи (2.50), одержуємо

$$\left(\|F\|_0^0\right)^2 = 2\left(L_m\right)^2\left\langle\left|\gamma_1(\xi)H(\xi)\right|, \left|\gamma_1(-\xi)H(-\xi)\right| * \frac{1}{\xi}\right\rangle$$
$$\leq 2\left(L_m\right)^2\left(\|\gamma_1(\xi)H(\xi)\|_0^0\right)^2 = \frac{1}{2}\left(L_m\right)^2\left(\|\gamma_1\|_0^0\right)^2$$
$$\leq \left(L_m\right)^2\left(\left\|\xi^{-2m}\gamma\right\|_{2m}^{-2m}\right)^2.$$

Лему доведено. □

Лема 2.46. *Нехай* $q > 0$, $m = \overline{0,\infty}$, $\xi^{-2m}\gamma \in H_{2m}^{-2m}$, $\operatorname{supp}\gamma \subset [0,q]$, $\nu(\sigma,\xi) = \frac{2i\xi}{\sigma^2+\xi^2}$ *and* $F(\sigma) = \frac{1}{\pi}\langle\gamma, \nu(\sigma,\cdot)\rangle$, $\sigma,\xi \in \mathbb{R}$. *Тоді*

$$\|F\|_0^0 \leq L_m\left\|\xi^{-2m}\gamma\right\|_{2m}^{-2m}, \tag{2.52}$$

де $L_m > 0$ *визначено формулою* (2.49)

Доведення. Маємо $\frac{1}{\sigma - i\xi} \in H_{-2m}^{2m}$ (за ξ), $\sigma \in \mathbb{R}$, і

$$F(\sigma) = \frac{1}{\pi}\left\langle\gamma(\xi)-\gamma(-\xi), \frac{1}{\sigma-i\xi}\right\rangle$$
$$= \frac{1}{\pi}\left\langle\gamma_1, (1+\xi^2)^{-m}\left(1+|D|^2\right)^m\frac{\xi^{2m}}{\sigma-i\xi}\right\rangle$$
$$= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty\gamma_1(\xi)(1+\xi^2)^{-m}\left(1+|D|^2\right)^m\frac{\xi^{2m}\sigma}{\sigma^2+\xi^2}\,d\xi, \qquad \sigma \in \mathbb{R},$$

де $\gamma_1(\xi) = (1+\xi^2)^m\left(1+|D|^2\right)^{-m}\left(\xi^{-2m}\left(\gamma(\xi)-\gamma(-\xi)\right)\right) \in H_0^0$ і γ_1 є непарним. Тоді

$$\left(\|F\|_0^0\right)^2 = \frac{4}{\pi^2}\int_0^\infty\gamma_1(\xi)\int_0^\infty\overline{\gamma_1(\mu)}(1+\xi^2)^{-m}(1+\mu^2)^{-m}$$

$$\times \left(1+|D_\xi|^2\right)^m \left(1+|D_\mu|^2\right)^m \xi^{2m}\mu^{2m} \int_0^\infty \frac{\sigma^2\, d\sigma}{(\sigma^2+\xi^2)\,(\sigma^2+\mu^2)}\, d\mu\, d\xi$$
$$= \frac{4}{\pi^2}\int_0^\infty \gamma_1(\xi)\int_0^\infty \overline{\gamma_1(\mu)}(1+\xi^2)^{-m}(1+\mu^2)^{-m}$$
$$\times \left(1+|D_\xi|^2\right)^m \left(1+|D_\mu|^2\right)^m \frac{\xi^{2m}\mu^{2m}}{\xi+\mu}\, d\mu\, d\xi.$$

Таким чином, ми одержали такий самий результат, як і в формулі (2.50). Повторюючи доведення леми 2.45 після (2.50), ми бачимо, що (2.52) виконується. Лему доведено. □

Висновок 2.47. *Нехай* $q>0$, $m=\overline{0,\infty}$, $\xi^{-2m}\gamma\in H_{2m}^{-2m}$, $\operatorname{supp}\gamma\subset[0,q]$, $\nu(\sigma,\xi)=\frac{2i\xi}{\sigma^2+\xi^2}$ *і* $F(\sigma)=\frac{1}{\pi}\langle\gamma,\nu(\sigma,\cdot)\rangle$, $\sigma,\xi\in\mathbb{R}$. *Тоді*

$$\|F\|_1^0 \le 2L_m \left\|\xi^{-2m}\gamma\right\|_{2m}^{-2m}, \tag{2.53}$$

де $L_m>0$ *визначено формулою* (2.49).

Доведення. Позначимо $\gamma_1=\xi\gamma$. Тоді $\xi^{-2m}\gamma_1\in H_{2m}^{-2m}$, $\operatorname{supp}\gamma_1\subset[0,q]$. Враховуючи лему 2.45, одержуємо

$$\|\sigma F\|_0^0 \le L_m\left\|\xi^{-2m}\gamma_1\right\|_{2m}^{-2m} \le L_m\left\|\xi^{-2m}\gamma\right\|_{2m}^{-2m}.$$

З леми 2.46 випливає

$$\|F\|_1^0 \le \|F\|_0^0 + \|\sigma F\|_0^0 \le 2L_m\left\|\xi^{-2m}\gamma\right\|_{2m}^{-2m}.$$

Лему доведено. □

Лема 2.48. *Нехай* $q>0$, $f\in\widetilde{H}_0^1[-T,T]$, $h=\widehat{\Phi}_T\Phi_T^{-1}f$. *Тоді*

$$h(x)=\operatorname{sgn}x\, f'(x)+q\int_{|x|}^\infty f(\xi)\frac{I_1\left(q(\xi-|x|)\right)}{\xi-|x|}\, d\xi. \tag{2.54}$$

Доведення. Нехай $F = \mathcal{F}f$,

$$G(\xi) = \frac{1}{i\xi}\mathcal{F}_{t\to\xi}\left(\frac{d}{dt}\left(\operatorname{sgn} t(\Phi_T^{-1}f)(t)\right)\right)(\xi).$$

Тоді

$$\begin{aligned} G &= \left(\mathcal{F}_{t\to\xi}\left(\operatorname{sgn} t(\Phi_T^{-1}f)(t)\right)\right) = \frac{1}{\pi}\mathcal{P}\frac{1}{\xi} * \xi F\left(\sqrt{\xi^2 - q^2}\right) \\ &= \frac{2}{\pi}\text{V.p.}\int_0^\infty \frac{1}{\xi^2 - \mu^2}\mu^2 F\left(\sqrt{\mu^2 - q^2}\right)\,d\mu. \end{aligned}$$

Отже,

$$h = -\Delta_q \mathcal{F}^{-1}_{\sigma\to x}\frac{G\left(\sqrt{\sigma^2 + q^2}\right)}{\sigma^2 + q^2} = -\frac{1}{2}\Delta_q\left(\frac{e^{-q|x|}}{q} * \left(\mathcal{F}^{-1}_{\sigma\to x}G\left(\sqrt{\sigma^2 + q^2}\right)\right)\right),$$

де $\Delta_q = \left(\frac{d}{dx}\right)^2 - q^2$. Тому

$$\begin{aligned} h &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\Delta_q\int_0^\infty\left(\left(\frac{e^{-q|x|}}{q} * \frac{\sin\left(|x|\sqrt{\mu^2 - q^2}\right)}{\sqrt{\mu^2 - q^2}}\right)H\left(\mu^2 - q^2\right)\right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{e^{-q|x|}}{q} * \frac{e^{|x|\sqrt{q^2 - \mu^2}}}{\sqrt{q^2 - \mu^2}}\right)H\left(q^2 - \mu^2\right)\right)\mu^2 F\left(\sqrt{\mu^2 - q^2}\right)\,d\mu \\ &= \frac{2}{\pi}\Delta_q\left(-\frac{e^{-q|x|}}{q}\int_0^\infty f'(\nu)\int_0^\infty \frac{\sin\left(\nu\sqrt{\mu^2 - q^2}\right)}{\sqrt{\mu^2 - q^2}}\,d\mu\,d\nu\right. \\ &\quad + \int_0^\infty f(\nu)\int_0^\infty \frac{\cos\left(\nu\sqrt{\mu^2 - q^2}\right)\sin\left(|x|\sqrt{\mu^2 - q^2}\right)}{\sqrt{\mu^2 - q^2}}\,d\mu\,d\nu \\ &\quad \left. - \int_0^\infty f(\nu)\int_0^q \frac{\cosh\left(\nu\sqrt{q^2 - \mu^2}\right)\cosh\left(x\sqrt{q^2 - \mu^2}\right)}{\sqrt{q^2 - \mu^2}}\,d\mu\,d\nu\right). \end{aligned}$$

Враховуючи (2.21) і $\frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{\cosh(\xi t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = I_0(\xi)$, одержуємо

$$h(x) = \frac{1}{2}\Delta_q\left(\left(f'(x) * (I_0(qx)\operatorname{sgn} x)\right)\big|_{x=0}\frac{e^{-q|x|}}{q}\right.$$

$$+\operatorname{sgn} x\,(f(x)*(I_0(qx)\operatorname{sgn} x))-f(x)*I_0(qx)\Big)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\operatorname{sgn} x\,\Delta_q\,(f(x)*(\operatorname{sgn} x\,I_0(qx)))-\Delta_q\,(f(x)*I_0(qx))\right)$$
$$=\operatorname{sgn} x\,f'(x)+\frac{1}{2}\operatorname{sgn} x\,\left(f(x)*(\operatorname{sgn} x\,(\Delta_q I_0(qx)))\right)$$
$$-\frac{1}{2}f(x)*(\Delta_q I_0(qx))$$
$$=\operatorname{sgn} x\,f'(x)-\int_0^\infty f(\xi+|x|)\,(\Delta_q I_0(q\xi))\,d\xi.$$

Оскільки $\Delta_q I_0(q\xi)=\left(q^2/2\right)(I_2(q\xi)-I_0(q\xi))=-qI_1(q\xi)/\xi$, то (2.54) виконано. Лему доведено. □

Лема 2.49. *Нехай $q>0$, $g\in\widetilde{H}_1^0$. Тоді $g\in D(\Phi)\cap D(\widehat{\Phi})$ та*

$$\|\Phi g\|_0^1\le 2\frac{(1+q^2)^{3/4}}{q}\,\|g\|_1^0\,, \tag{2.55}$$

$$\left\|\widehat{\Phi} g\right\|_0^0\le 2(1+q^2)^{1/4}\,\|g\|_1^0\,. \tag{2.56}$$

Доведення. Якщо $g\in\widetilde{H}_1^0$, то $g\operatorname{sgn}(\cdot)\in\widehat{H}_1^0$ та $\|g\operatorname{sgn}(\cdot)\|_1^0=\|g\|_1^0$. Позначимо $G=\mathcal{F}g$ та $G=\mathcal{F}(g\operatorname{sgn}(\cdot))$. Оскільки

$$|G(\xi)|\le\sqrt{\frac{\pi}{2}}\int_0^\infty|g(x)|\,\sqrt{1+x^2}\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}\le\|g\|_1^0\,,\quad \xi\in\mathbb{R},$$

то

$$\int_q^\infty|G(\xi)|^2\,\frac{\xi\,d\xi}{\sqrt{\xi^2-q^2}}=\int_q^{\sqrt{2}q}|G(\xi)|^2\,\frac{\xi\,d\xi}{\sqrt{\xi^2-q^2}}+\int_{\sqrt{2}q}^\infty|G(\xi)|^2\,\frac{\xi\,d\xi}{\sqrt{\xi^2-q^2}}$$
$$\le\left(\|g\|_1^0\right)^2\int_q^{\sqrt{2}q}\frac{\xi\,d\xi}{\sqrt{\xi^2-q^2}}+2\int_{\sqrt{2}q}^\infty|G(\xi)|^2\,d\xi$$
$$\le(q+1)\left(\|g\|_1^0\right)^2\le 2\sqrt{q^2+1}\left(\|g\|_1^0\right)^2. \tag{2.57}$$

Цілком аналогічно одержуємо оцінку

$$\int_q^\infty\left|\widehat{G}(\xi)\right|^2\frac{\xi\,d\xi}{\sqrt{\xi^2-q^2}}\le 2\sqrt{q^2+1}\left(\|g\|_1^0\right)^2. \tag{2.58}$$

Тому $g \in D(\Phi) \cap D(\widehat{\Phi})$. Крім того, враховуючи оцінку $(1+q^2)(\sigma^2+q^2) \geq q^2(\sigma^2+1)$, $\sigma \in \mathbb{R}$, з (2.57) та (2.58) одержуємо (2.55) та (2.56), відповідно. Лему доведено. $\square$

Висновки до розділу 2

У цьому розділі вивчено деякі модифікації просторів типу Соболєва і оператори впливу, пов'язані із задачею Діріхле та задачею Неймана для хвильового рівняння із сталими коефіцієнтами на півосі. Результати цього розділу застосовано в розділі 5.

РОЗДІЛ 3.

ОПЕРАТОРИ ПЕРЕТВОРЕННЯ ТА ПРОСТОРИ СОБОЛЄВСЬКОГО ТИПУ ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ ОПЕРАТОРІВ ДРУГОГО ПОРЯДКУ ЗІ ЗМІННИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

3.1. Оператор перетворення S і простори $\mathbb{H}^m$

Нехай $\eta \in C^2(\mathbb{R})$ і $\theta \in C^1(\mathbb{R})$ є парними додатніми на $\mathbb{R}$ функціями. Крім того, вважаємо

$$\int_0^x \frac{d\mu}{\theta^2(\mu)} \to +\infty, \quad \text{коли} \quad x \to +\infty. \tag{3.1}$$

Далі розглянемо аналог соболєвського простору H^p, у якому звичайну похідну $\frac{d}{dx}$ замінено на "лінійно деформовану" похідну $\mathcal{D}_{\eta\theta} = \theta^2 \left(\frac{d}{dx} + \frac{\eta'}{\eta}\right)$, а звичайні простори $L^2(\mathbb{R})$ — на відповідні вагові простори з вагою $\frac{\eta^2}{\theta^2}$. А саме, для $p = 0, 1, 2$ позначимо

$$\mathbb{H}^p = \left\{\varphi \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}) \mid \forall m = \overline{0,p} \ \left(\frac{\eta}{\theta}\left(\mathcal{D}^m_{\eta\theta}\varphi\right)\right) \in H^0\right\}$$

з нормою

$$[\![\varphi]\!]^p = \left(\sum_{m=0}^{p} \left(\left\| \frac{\eta}{\theta} \left(\mathcal{D}_{\eta\theta}^m \varphi \right) \right\|^0 \right)^2 \right)^{1/2}, \qquad \varphi \in \mathbb{H}^p,$$

і позначимо $\mathbb{H}^{-p} = (\mathbb{H}^p)^*$ з нормою

$$[\![f]\!]^{-p} = \sup \left\{ \frac{|\langle\!\langle f, \varphi \rangle\!\rangle|}{[\![\varphi]\!]^p} \mid 0 \neq \varphi \in \mathbb{H}^p \right\}, \qquad f \in \mathbb{H}^{-p},$$

де $\langle\!\langle f, \varphi \rangle\!\rangle$ є значенням розподілу $f \in \mathbb{H}^{-p}$ на тестовій функції $\varphi \in \mathbb{H}^p$. Зокрема, маємо $\mathbb{H}^0 = \left(\mathbb{H}^0\right)^*$ та

$$\langle\!\langle f, \varphi \rangle\!\rangle = \left\langle \frac{\eta}{\theta} f, \frac{\eta}{\theta} \varphi \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x) \frac{\eta^2(x)}{\theta^2(x)}\, dx, \quad f, \varphi \in \mathbb{H}^0.$$

Операція диференціювання в $\mathbb{H}^p$ визначається наступною формулою

$$\langle\!\langle \mathcal{D}_{\eta\theta} f, \varphi \rangle\!\rangle = - \langle\!\langle f, \mathcal{D}_{\eta\theta} \varphi \rangle\!\rangle, \qquad f \in \mathbb{H}^{-p}, \quad \varphi \in \mathbb{H}^{p+1}, \quad p \neq 2.$$

Позначимо

$$\sigma(x) = \int_0^x \frac{d\mu}{\theta^2(\mu)}. \tag{3.2}$$

Зрозуміло, що σ є непарною зростаючою на $\mathbb{R}$ функцією. Крім того, $\sigma(x) \to \infty$, коли $x \to \infty$ (див. (3.1)).

Разом з просторами $\mathbb{H}^m$ розглянемо оператор $\mathbf{S}$. Спочатку розглянемо допоміжний оператор $\mathrm{S}_0 : H^0 \to \mathbb{H}^0$, $D(\mathrm{S}_0) = H^0$,

$$\mathrm{S}_0 \psi = \frac{\psi \circ \sigma}{\eta}, \quad \psi \in D(\mathrm{S}_0),$$

де $\psi \circ \sigma$ є композицією ψ і σ, тобто, $(\psi \circ \sigma)(x) = \psi(\sigma(x))$, $x \in \mathbb{R}$. За побудовою, оператор S_0 є оборотним, $\mathrm{S}_0^{-1} : \mathbb{H}^0 \to H^0$, $D(\mathrm{S}_0^{-1}) = \mathbb{H}^0$,

$$\mathrm{S}_0^{-1} \varphi = (\eta\varphi) \circ \sigma^{-1}, \quad \varphi \in D(\mathrm{S}_0^{-1}).$$

Крім того, справедлива теорема.

Теорема 3.1. *Мають місце наступні твердження:*

(i) $\mathcal{D}_{\eta\theta}\mathrm{S}_0\psi = \mathrm{S}_0\frac{d}{d\lambda}\psi$, $\psi \in H^1$,

(ii) *Оператор* S_0 *є ізометричним ізоморфізмом* H^p *і* $\mathbb{H}^p$.

Доведення. Твердження (i) випливає з означень операторів S_0 і $\mathcal{D}_{\eta\theta}$. Доведемо (ii). Маємо

$$(\llbracket \mathrm{S}_0\psi \rrbracket^p)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\psi(\sigma(x))}{\eta(x)} \right|^2 \frac{\eta^2(x)}{\theta^2(x)}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(\lambda)|^2 \, d\lambda = (\|\psi\|^p)^2,$$
$$\left(\left\|\mathrm{S}_0^{-1}\varphi\right\|^p\right)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \left|(\eta\varphi)(\sigma^{-1}(\lambda))\right|^2 d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)|^2 \frac{\eta^2(x)}{\theta^2(x)}\, dx = (\llbracket\varphi\rrbracket^p)^2$$

для $\psi \in H^p$ і $\varphi \in \mathbb{H}^p$. Теорему доведено. □

Скориставшись цією теоремою, ми продовжуємо оператор S_0 на H^{-2}. Позначимо це продовження через $\mathbf{S}$. Маємо $\mathbf{S} : H^{-2} \to \mathbb{H}^{-2}$, $D(\mathbf{S}) = H^{-2}$,

$$\langle\langle \mathbf{S}g, \varphi \rangle\rangle = \langle g, \mathrm{S}_0^{-1}\varphi \rangle, \qquad g \in D(\mathbf{S}),\ \varphi \in D(\mathrm{S}_0^{-1}) \cap \mathbb{H}^2 = \mathbb{H}^2.$$

Зрозуміло, що $\mathbf{S}$ є також оборотним оператором, $\mathbf{S}^{-1} : \mathbb{H}^{-2} \to H^{-2}$, $D(\mathbf{S}^{-1}) = \mathbb{H}^{-2}$,

$$\langle \mathbf{S}^{-1}f, \psi \rangle = \langle\langle f, S_0\psi \rangle\rangle, \qquad f \in D(\mathbf{S}^{-1}),\ \psi \in D(\mathrm{S}_0) \cap H^2 = H^2.$$

Беручи до уваги конструкцію $\mathbf{S}$ та теорему 3.1, одержуємо наступну теорему

Теорема 3.2. *Для* $m = \overline{-2, 2}$ *мають місце наступні твердження:*

(i) $\mathcal{D}_{\eta\theta}\mathbf{S}\psi = \mathbf{S}\frac{d}{d\lambda}\psi$, $\psi \in H^m$, $m \neq -2$,

(ii) *Оператор* $\mathbf{S}$ *є ізометричним ізоморфізмом* H^m *і* $\mathbb{H}^m$,

(iii) $\langle\langle f, \varphi \rangle\rangle = \langle \mathbf{S}^{-1} f, \mathbf{S}^{-1}\varphi \rangle$, $f \in \mathbb{H}^{-m}$, $\varphi \in \mathbb{H}^{m}$.

Також нам будуть потрібні наступні дві теореми.

Теорема 3.3. *Маємо* $\mathbf{S}\delta = \eta(0)\delta$.

Доведення. Нехай $\varphi \in \mathbb{H}^1$. Скориставшись теоремою 3.2, одержуємо

$$\langle\langle \mathbf{S}\delta, \varphi \rangle\rangle = \langle\langle \mathbf{S}\delta, \varphi \rangle\rangle = \langle \delta, \mathbf{S}^{-1}\varphi \rangle = \eta(0)\varphi(0) = \langle\langle \eta(0)\delta, \varphi \rangle\rangle .$$

Теорему доведено. □

Теорема 3.4. *Мають місце наступні щільні вкладення:*

$$\mathcal{D} \subset \mathbb{H}^m \subset \mathbb{H}^n \subset \mathcal{D}', \qquad -2 \le n \le m \le 2.$$

Доведення. З теореми 3.2 і висновку 1.6 випливає, що $\mathbb{H}^m \subset \mathbb{H}^n$ є щільним неперервним вкладенням, $-2 \le n \le m \le 2$.

Доведемо тепер, що $\mathcal{D} \subset \mathbb{H}^m$ є щільним вкладенням, $m = \overline{-2, 2}$. Враховуючи щойно доведене твердження, досить довести це для $m = 2$. Нехай $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}$ та $\varphi_n \to 0$, коли $n \to \infty$ в $\mathcal{D}$, тобто, існує $a > 0$ таке, що для кожного $m \in \mathbb{N}$ маємо $\varphi_n \in C^m(-a, a)$, $n \in \mathbb{N}$, і $|\varphi|_{(-a,a)}^m \to 0$, коли $n \to \infty$ (див. підрозділ 1.2). Оскільки $\eta \in C^2(\mathbb{R})$ і $\theta \in C^1(\mathbb{R})$ є додатніми на $\mathbb{R}$, то

$$[\![\varphi_n]\!]^2 = \left(\sum_{m=0}^{2} \left(\left\| \frac{\eta}{\theta} \mathcal{D}_{\eta\theta}^m \varphi_n \right\| \right)^2 \right)^{1/2} \le C \left|\varphi_n\right|_{(-a,a)}^2 \to 0, \qquad \text{коли } n \to \infty,$$

де $C > 0$ є сталою, що залежить від функцій η, η', η'', θ та θ' on $[-a, a]$. Отже, $\varphi_n \to 0$, коли $n \to \infty$ в $\mathbb{H}^2$. $\mathcal{D} \subset \mathbb{H}^m$ є вкладенням. Далі доведемо, що $\mathcal{D}$ є щільним в $\mathbb{H}^2$. Доведемо спочатку, що для кожного $\varphi \in \mathbb{H}^2$ існує послідовність $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{H}^2$ така, що $\operatorname{supp}\varphi_n$ є обмеженим, $n = \overline{1,\infty}$ і $[\![\varphi - \varphi_n]\!]^2 \to 0$, коли $n \to \infty$. Позначимо $\psi = \mathbf{S}^{-1}\varphi$. Тоді $\psi \in H_0^2$. За висновком 1.6 $\mathcal{D}$ є щільним в H^2. Отже, існує послідовність $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}$ така, що $\|\psi - \psi_n\|_0^2 \to 0$, коли $n \to \infty$. Позначимо $\varphi_n = \mathbf{S}\psi_n$, $n = \overline{1,\infty}$. Тоді $\varphi_n \in \mathbb{H}^2$, $n = \overline{1,\infty}$ і $[\![\varphi - \varphi_n]\!]^m \to 0$, коли $n \to \infty$. Нажаль, ми не можемо гарантувати, що $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}$. Тепер припустимо, що $\varphi \in \mathbb{H}^2$ і $\operatorname{supp}\varphi$ є обмеженим. Тоді $\varphi \in H_0^2$. За висновком 1.6 $\mathcal{D}$ є щільним в H^2. Тому існує послідовність $\{\widehat{\varphi}_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}$ така, що $\|\varphi - \widehat{\varphi}_n\|_0^2 \to 0$, коли $n \to \infty$. Отже, існує $a > 0$ таке, що$\operatorname{supp}\varphi \subset [-a, a]$ і $\operatorname{supp}\varphi_n \subset [-a, a]$, $n = \overline{1,\infty}$. Тоді $[\![\varphi - \widehat{\varphi}_n]\!]^2 \to 0$, коли $n \to \infty$. Таким чином, $\mathcal{D}$ є щільним в $\mathbb{H}^2$.

Оскільки $\mathcal{D}$ є щільним в $\mathcal{D}'$, то $\mathbb{H}^m$ є щільним в $\mathcal{D}'$, $m = \overline{-2,2}$. З того, що $\mathcal{D} \subset \mathbb{H}^m$ є вкладенням випливає, що $\mathbb{H}^m \subset \mathcal{D}'$ є вкладенням, $m = \overline{-2,2}$. Теорему доведено. □

З теорем 1.2 і 3.2 одержуємо теорему, що є аналогом теореми 1.2.

Теорема 3.5. *Кожна функція $\varphi \in \mathbb{H}^1$ є неперервною на $\mathbb{R}$.*

Зауваження 3.6. *Беручи до уваги приклади 7.7–7.10, бачимо, що для деяких η та θ простір $\mathcal{S}$ є підпростором $\mathbb{H}^m$, але для деяких інших η та θ простір $\mathcal{S}$ не є підпростором $\mathbb{H}^m$, $m = \overline{-2,2}$. Аналогічно, для деяких η та θ простір $\mathbb{H}^m$ є підпростором $\mathcal{S}'$, але для деяких інших η та θ простір $\mathbb{H}^m$ не є підпростором $\mathcal{S}'$, $m = \overline{-2,2}$.*

Для $p = 0, 1, 2$ позначимо

$$\mathbb{H}^p(\mathbb{R}_+) = \left\{ \varphi \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+) \mid \forall m = \overline{0,p} \ \left(\frac{\eta}{\theta}\left(\mathcal{D}^m_{\eta\theta}\varphi\right)\right) \in H^0(\mathbb{R}_+) \right\}$$

з нормою

$$[\![\varphi]\!]^p_{\mathbb{R}_+} = \left(\sum_{m=0}^{p} \left(\left\| \frac{\eta}{\theta} \left(\mathcal{D}^m_{\eta\theta} \varphi \right) \right\|^0_{\mathbb{R}_+} \right)^2 \right)^{1/2}, \qquad \varphi \in \mathbb{H}^p(\mathbb{R}_+),$$

і позначимо $\mathbb{H}^{-p}(\mathbb{R}_+) = (\mathbb{H}^p(\mathbb{R}_+))^*$ з нормою

$$[\![f]\!]^{-p}_{\mathbb{R}_+} = \sup \left\{ \frac{\left| \langle\!\langle f, \varphi \rangle\!\rangle_{\mathbb{R}_+} \right|}{[\![\varphi]\!]^p_{\mathbb{R}_+}} \mid 0 \neq \varphi \in \mathbb{H}^p(\mathbb{R}_+) \right\}, \qquad f \in \mathbb{H}^{-p}(\mathbb{R}_+),$$

де $\langle\!\langle f, \varphi \rangle\!\rangle_{\mathbb{R}_+}$ є значенням розподілу $f \in \mathbb{H}^{-p}(\mathbb{R}_+)$ на тестовій функції $\varphi \in \mathbb{H}^p(\mathbb{R}_+)$. Зокрема, маємо $\mathbb{H}^0 = \left(\mathbb{H}^0\right)^*$ та

$$\langle\!\langle f, \varphi \rangle\!\rangle_{\mathbb{R}_+} = \left\langle \frac{\eta}{\theta} f, \frac{\eta}{\theta} \varphi \right\rangle_{\mathbb{R}_+} = \int_0^\infty f(x)\varphi(x) \frac{\eta^2(x)}{\theta^2(x)}\, dx, \quad f, \varphi \in \mathbb{H}^0(\mathbb{R}_+).$$

Операція диференціювання в $\mathbb{H}^p$ визначається наступною формулою

$$\langle\!\langle \mathcal{D}_{\eta\theta} f, \varphi \rangle\!\rangle_{\mathbb{R}_+} = -\langle\!\langle f, \mathcal{D}_{\eta\theta} \varphi \rangle\!\rangle_{\mathbb{R}_+}, \quad f \in \mathbb{H}^{-p}(\mathbb{R}_+),\ \varphi \in \mathbb{H}^{p+1}(\mathbb{R}_+),\ p \neq 2.$$

Нехай $k = \overline{-2, 2}$. Позначимо через $\widetilde{\mathbb{H}}^k$ підпростір усіх непарних розподілів простору $\mathbb{H}^k$, а через $\widehat{\mathbb{H}}^k$ — підпростір усіх парних розподілів простору $\mathbb{H}^k$. Очевидно, що простори $\widetilde{\mathbb{H}}^k$ та $\widehat{\mathbb{H}}^k$ є повними відносно топології, індукованої $\mathbb{H}^k$. Позначимо $\widetilde{\mathbb{H}\mathbb{H}}^k = \widetilde{\mathbb{H}}^k \times \widetilde{\mathbb{H}}^{k-1}$ та $\widehat{\mathbb{H}\mathbb{H}}^k = \widehat{\mathbb{H}}^k \times \widehat{\mathbb{H}}^{k-1}$ з нормою $[\![\![\cdot]\!]\!]^k$. З теореми 3.2 одразу одержуємо

Висновок 3.7. *Оператор* $\mathbf{S}$ *є ізометричним ізоморфізмом* $\widetilde{H}^k$ *та* $\widetilde{\mathbb{H}}^k$, *а також ізометричним ізоморфізмом* $\widehat{H}^k$ *та* $\widehat{\mathbb{H}}^k$, $k = \overline{-2, 2}$.

Нехай $m = 0, 1, 2$. Позначимо через $\widetilde{\mathbb{H}}^m_+$ підпростір простору $\mathbb{H}^m(\mathbb{R}_+)$, що містить усі звуження на $\mathbb{R}_+$ функцій з простору $\widetilde{\mathbb{H}}^m$, а через $\widehat{\mathbb{H}}^m_+$ — підпростір простору $\mathbb{H}^m(\mathbb{R}_+)$, що містить усі звуження на $\mathbb{R}_+$ функцій з простору $\widehat{\mathbb{H}}^m$. Для функції $\varphi \in \mathbb{H}^m$ будемо позначати через φ_+ її звуження на $\mathbb{R}_+$. Зрозуміло, що відображення $\varphi \mapsto \varphi_+$ є ізоморфізмом просторів $\widetilde{\mathbb{H}}^m$ та $\widetilde{\mathbb{H}}^m_+$ і просторів $\widehat{\mathbb{H}}^m$ та $\widehat{\mathbb{H}}^m_+$ тому, що

$$[\![\varphi]\!]^m = \sqrt{2}\,[\![\varphi_+]\!]^m_{\mathbb{R}_+} = \sqrt{2}\,[\![\varphi_+]\!]^m_+ ,$$

де $[\![\cdot]\!]^m_+$ є нормою просторів $\widetilde{\mathbb{H}}^m_+$ та $\widehat{\mathbb{H}}^m_+$. Отже, простори $\widetilde{\mathbb{H}}^m_+$ та $\widehat{\mathbb{H}}^m_+$ є повними відносно топології, індукованої $\mathbb{H}^m(\mathbb{R}_+)$. Враховуючи терему враховуючи терему 3.5, одержуємо, що

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathbb{H}}^m_+ = \big\{ g \in \mathbb{H}^m(\mathbb{R}_+) \mid \forall k = \overline{0, m-1}\ \mathcal{D}^k_{\eta\theta} g(+0) \in \mathbb{R} \\ \wedge (\mathcal{D}^k_{\eta\theta} g(+0) = 0,\ \text{якщо } k \text{ є парним}) \big\} ,\\ \widehat{\mathbb{H}}^m_+ = \big\{ g \in \mathbb{H}^m(\mathbb{R}_+) \mid \forall k = \overline{0, m-1}\ \mathcal{D}^k_{\eta\theta} g(+0) \in \mathbb{R} \\ \wedge (\mathcal{D}^k_{\eta\theta} g(+0)(+0) = 0,\ \text{якщо } k \text{ є непарним}) \big\} .\end{aligned}$$

Позначимо через $\mathbb{I}^m_{\text{odd}} : \widetilde{\mathbb{H}}^m_+ \to \widetilde{\mathbb{H}}^m$, $D(\mathbb{I}^m_{\text{odd}}) = \widetilde{\mathbb{H}}^m_+$, оператор непарного продовження, а через $\mathbb{I}^m_{\text{even}} : \widehat{\mathbb{H}}^m_+ \to \widehat{\mathbb{H}}^m$, $D(\mathbb{I}^m_{\text{even}}) = \widehat{\mathbb{H}}^m_+$ — оператор парного продовження. Очевидно, маємо $R(\mathbb{I}^m_{\text{odd}}) = \widetilde{\mathbb{H}}^m$ та $R(\mathbb{I}^m_{\text{even}}) = \widehat{\mathbb{H}}^m$. Зрозуміло, що оберненими до операторів $\mathbb{I}^m_{\text{odd}}$ та $\mathbb{I}^m_{\text{even}}$ будуть звуження оператора $(\cdot)_+$ на $\widetilde{\mathbb{H}}^m$ та $\widehat{\mathbb{H}}^m$, відповідно. Таким чином, оператор $\mathbb{I}^m_{\text{odd}}$ є ізоморфізмом $\widetilde{\mathbb{H}}^m_+$ та $\widetilde{\mathbb{H}}^m$, і оператор $\mathbb{I}^m_{\text{even}}$ є ізоморфізмом $\widehat{\mathbb{H}}^m_+$ та $\widehat{\mathbb{H}}^m$, зокрема,

$$[\![\mathbb{I}^m_{\text{odd}}\varphi]\!]^m = \sqrt{2}\,[\![\varphi]\!]^m_+ = \sqrt{2}\,[\![\varphi]\!]^m_{\mathbb{R}_+} , \qquad \varphi \in \widetilde{\mathbb{H}}^m_+, \tag{3.3}$$

$$[\![\mathbb{I}^m_{\text{even}}\varphi]\!]^m = \sqrt{2}\,[\![\varphi]\!]^m_+ = \sqrt{2}\,[\![\varphi]\!]^m_{\mathbb{R}_+} , \qquad \varphi \in \widehat{\mathbb{H}}^m_+. \tag{3.4}$$

Зауважимо, що норми в просторах $\widetilde{\mathbb{H}}^m_+$ та $\widehat{\mathbb{H}}^m_+$ позначені одним символом. Оскільки одночасно парною і непарною може бути лише функція, що тотожно дорівнює нулю, то це не призводить до плутанини.

Позначимо $\widetilde{\mathbb{H}}_{+}^{-m} = \left(\widetilde{\mathbb{H}}_{+}^{m}\right)^{*}$ і $\widehat{\mathbb{H}}_{+}^{-m} = \left(\widehat{\mathbb{H}}_{+}^{m}\right)^{*}$ з нормою

$$[\![f]\!]_{+}^{-m} = \sup \left\{ \frac{\left| \langle\!\langle f, \varphi \rangle\!\rangle_{+} \right|}{[\![\varphi]\!]_{+}^{m}} \mid 0 \neq \varphi \in \mathbb{H}_{+}^{m} \right\}, \quad f \in (\mathbb{H}_{+}^{m})^{*},$$

де $\langle\!\langle f, \varphi \rangle\!\rangle_{+}$ є значенням розподілу $f \in (\mathbb{H}_{+}^{m})^{*}$ на тестовій функції $\varphi \in \mathbb{H}_{+}^{m}$, $\mathbb{H}_{+}^{m}$ є простором $\widetilde{\mathbb{H}}_{+}^{m}$ або простором $\widehat{\mathbb{H}}_{+}^{m}$. Позначимо через $\mathbb{I}_{\mathrm{odd}}^{-m} : \widetilde{\mathbb{H}}_{+}^{-m} \to \widetilde{\mathbb{H}}^{-m}$, $D(\mathbb{I}_{\mathrm{odd}}^{-m}) = \widetilde{\mathbb{H}}_{+}^{-m}$, оператор непарного продовження, який діє за правилом

$$\left\langle\!\left\langle \mathbb{I}_{\mathrm{odd}}^{-m} f, \varphi \right\rangle\!\right\rangle = 2 \left\langle\!\!\left\langle f, \left(\mathbb{I}_{\mathrm{odd}}^{m}\right)^{-1} \varphi \right\rangle\!\!\right\rangle, \quad f \in \widetilde{\mathbb{H}}_{+}^{-m},\ \varphi \in \widetilde{\mathbb{H}}^{m}.$$

а через $\mathbb{I}_{\mathrm{even}}^{m} : \widehat{\mathbb{H}}_{+}^{-m} \to \widehat{\mathbb{H}}^{-m}$, $D(\mathbb{I}_{\mathrm{even}}^{-m}) = \widehat{\mathbb{H}}_{+}^{-m}$ — оператор парного продовження, який діє за правилом

$$\left\langle\!\left\langle \mathbb{I}_{\mathrm{even}}^{-m} f, \varphi \right\rangle\!\right\rangle = 2 \left\langle\!\!\left\langle f, \left(\mathbb{I}_{\mathrm{odd}}^{m}\right)^{-1} \varphi \right\rangle\!\!\right\rangle, \quad f \in \widehat{\mathbb{H}}_{+}^{-m},\ \varphi \in \widehat{\mathbb{H}}^{m}.$$

Очевидно, маємо $R(\mathbb{I}_{\mathrm{odd}}^{-m}) = \widetilde{\mathbb{H}}^{-m}$ та $R(\mathbb{I}_{\mathrm{even}}^{-m}) = \widehat{\mathbb{H}}^{-m}$. Крім того, оператор $\mathbb{I}_{\mathrm{odd}}^{-m}$ є ізоморфізмом $\widetilde{\mathbb{H}}_{+}^{-m}$ та $\widetilde{\mathbb{H}}^{-m}$, і оператор $\mathbb{I}_{\mathrm{even}}^{-m}$ є ізоморфізмом $\widehat{\mathbb{H}}_{+}^{-m}$ та $\widehat{\mathbb{H}}^{-m}$, зокрема,

$$\left[\!\!\left[\mathbb{I}_{\mathrm{odd}}^{-m} f \right]\!\!\right]^{-m} = \sqrt{2}\, [\![f]\!]_{+}^{-m} \leq \sqrt{2}\, [\![f]\!]_{\mathbb{R}_{+}}^{-m}, \qquad \varphi \in \widetilde{\mathbb{H}}_{+}^{-m}, \tag{3.5}$$

$$\left[\!\!\left[\mathbb{I}_{\mathrm{even}}^{-m} f \right]\!\!\right]^{-m} = \sqrt{2}\, [\![f]\!]_{+}^{-m} \leq \sqrt{2}\, [\![f]\!]_{\mathbb{R}_{+}}^{-m}, \qquad \varphi \in \widehat{\mathbb{H}}_{+}^{-m}. \tag{3.6}$$

Розглянемо також простір

$$\mathbb{H}_{\oplus}^{m} = \left\{ \varphi \in \mathbb{H}^{m}(\mathbb{R}_{+}) \mid \forall k = \overline{0, m-1}\ \mathcal{D}_{\eta\theta}^{k} \varphi(+0) = 0 \right\}$$

з нормою

$$[\![\varphi]\!]_{\oplus}^{m} = [\![\varphi]\!]_{+}^{m}, \qquad \varphi \in \mathbb{H}_{\oplus}^{m}, \tag{3.7}$$

та простір $\mathbb{H}^{-m}_{\oplus} = (\mathbb{H}^{m}_{\oplus})^*$ з нормою

$$[\![f]\!]^{-m}_{\oplus} = \sup\left\{ \frac{\left|\langle\!\langle f,\varphi\rangle\!\rangle_{\oplus}\right|}{[\![\varphi]\!]^{m}_{\oplus}} \mid 0 \neq \varphi \in \mathbb{H}^{m}_{\oplus} \right\}, \quad f \in (\mathbb{H}^{m}_{\oplus})^*,$$

де $\langle\!\langle f,\varphi\rangle\!\rangle_{\oplus}$ є значенням розподілу $f \in \mathbb{H}^{-m}_{\oplus}$ на тестовій функції $\varphi \in \mathbb{H}^{m}_{\oplus}$. Оскільки $\mathbb{H}^{m}_{\oplus}$ є підпростором простору $\widetilde{\mathbb{H}}^{m}_{+}$ і підпростором простору $\widehat{\mathbb{H}}^{m}_{+}$, то

$$[\![f]\!]^{-m}_{\oplus} \leq [\![f]\!]^{-m}_{+}, \qquad f \in \mathbb{H}^{-m}_{\oplus}. \tag{3.8}$$

Бачимо, що будь-яка функція з $\mathbb{H}^{m}_{\oplus}$ після продовження нулем на $\mathbb{R}_-$ буде належати $\mathbb{H}^m$ і навпаки: звуження будь-якої функції з $\mathbb{H}^m$, носій якої міститься в $\mathbb{R}_+$, на належатиме $\mathbb{H}^{m}_{\oplus}$. Крім того,

$$[\![\overline{\varphi}]\!]^{m} = [\![\varphi]\!]^{m}_{\oplus}, \quad \text{де } \overline{\varphi} \text{ є продовженням нулем на } \mathbb{R} \text{ функції } \varphi \in \mathbb{H}^{m}_{\oplus}.$$

Тобто, ми маємо ізометричний ізоморфізм просторів $\mathbb{H}^{m}_{\oplus}$ та $\{\varphi \in \mathbb{H}^m \mid \operatorname{supp}\varphi \in [0,+\infty)\}$. Оскільки останній простір є повним, то і $\mathbb{H}^{m}_{\oplus}$ є повним. Крім того, $\mathbb{H}^{-m}_{\oplus}$ також є повним простором. Таким чином ми маємо низку банахових просторів $\mathbb{H}^k(\mathbb{R}_+)$, $\widetilde{\mathbb{H}}^{k}_{+}$, $\widehat{\mathbb{H}}^{k}_{+}$, $\mathbb{H}^{k}_{\oplus}$, $k = \overline{-2,2}$. Зазначимо, що для $m = 0$ маємо $\mathbb{H}^{0}_{\oplus} = \widetilde{\mathbb{H}}^{0}_{+} = \widehat{\mathbb{H}}^{0}_{+} = \mathbb{H}^0(\mathbb{R}_+) = L^2_{\frac{\eta^2}{\theta^2}}(\mathbb{R}_+)$ і $[\![\varphi]\!]^{0}_{\oplus} = [\![\varphi]\!]^{0}_{+} = [\![\varphi]\!]^{0}_{\mathbb{R}_+} = [\![\frac{\eta}{\theta}\varphi]\!]^{0}_{L^2(\mathbb{R}_+)}$. Тому $\left(\mathbb{H}^{0}_{\oplus}\right)^* = \left(\widetilde{\mathbb{H}}^{0}_{+}\right)^* = \left(\widehat{\mathbb{H}}^{0}_{+}\right)^* = \left(\mathbb{H}^0(\mathbb{R}_+)\right)^* = L^2_{\frac{\eta^2}{\theta^2}}(\mathbb{R}_+)$.

Аналізуючи означення просторів $\widetilde{\mathbb{H}}^{k}_{+}$, $\widehat{\mathbb{H}}^{k}_{+}$, $\mathbb{H}^{k}_{\oplus}$, $k = \overline{-2,2}$, та, враховуючи (3.3)–(3.8) і теорему 3.4, одержуємо наступні дві теореми.

Теорема 3.8. *Для $m = 0,1,2$ мають місце наступні вкладення*

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}_+) \subset \mathbb{H}^{m}_{\oplus} \subset \widetilde{\mathbb{H}}^{m}_{+} \subset \widetilde{\mathbb{H}}^{-m}_{+} \subset \mathbb{H}^{-m}_{\oplus} \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+),$$

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}_+) \subset \mathbb{H}^m_\oplus \subset \widehat{\mathbb{H}}^m_+ \subset \widehat{\mathbb{H}}^{-m}_+ \subset \mathbb{H}^{-m}_\oplus \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+),$$

Теорема 3.9. *Мають місце наступні вкладення*

$$\mathbb{H}^k_\oplus \subset \mathbb{H}^n_\oplus, \quad \widetilde{\mathbb{H}}^k_+ \subset \widetilde{\mathbb{H}}^n_+, \quad \widehat{\mathbb{H}}^k_+ \subset \widehat{\mathbb{H}}^n_+, \qquad -2 < n \le k < 2.$$

Крім того, наступні вкладення є щільними:

$$\widetilde{\mathbb{H}}^k_+ \subset \widetilde{\mathbb{H}}^n_+, \quad \widehat{\mathbb{H}}^k_+ \subset \widehat{\mathbb{H}}^n_+, \qquad -2 < n \le k < 2.$$

Зрозуміло, що

$$\langle\langle \mathcal{D}_{\eta\theta} f, \varphi\rangle\rangle_\oplus = -\langle\langle f, \mathcal{D}_{\eta\theta}\varphi\rangle\rangle_\oplus, \qquad f \in \mathbb{H}^{-m}_\oplus,\ \varphi \in \mathbb{H}^{m+1}_\oplus,\ m = 0, 1, \quad (3.9)$$

але аналоги цього співвідношення не виконуються в просторах $\mathbb{H}^{-m}(\mathbb{R}_+)$, $\widetilde{\mathbb{H}}^{-m}_+$, $\widehat{\mathbb{H}}^{-m}_+$. Деякі властивості похідних в цих просторах досліджено в наступних двох теоремах і у висновку.

Теорема 3.10. *Нехай $f \in \widetilde{\mathbb{H}}^0_+ = \mathbb{H}^0_\oplus$ та існує $f(+0) \in \mathbb{R}$. Тоді $\mathcal{D}^2_{\eta\theta} f \in \mathbb{H}^{-2}_\oplus$ і цей розподіл може бути продовжений до розподілу з $\widetilde{\mathbb{H}}^{-2}_+$ (а, отже, і до розподілу з $\widetilde{\mathbb{H}}^{-2}$) за правилом*

$$\mathbb{I}^{-2}_{\mathrm{odd}} \mathcal{D}^2_{\eta\theta} f = \mathcal{D}^2_{\eta\theta} \mathbb{I}^0_{\mathrm{odd}} f - 2\eta^2(0) f(+0)\delta'. \qquad (3.10)$$

Доведення. Для доведення (3.10) ми, фактично, маємо довести, що розподіл $D^2 f'$ може бути продовжений за правилом

$$\begin{aligned}\left\langle\left\langle \mathcal{D}^2_{\eta\theta} f, \varphi\right\rangle\right\rangle_+ = &\frac{1}{2}\left\langle\left\langle \mathcal{D}^2_{\eta\theta}\mathbb{I}^0_{\mathrm{odd}} f, \mathbb{I}^2_{\mathrm{odd}}\varphi\right\rangle\right\rangle \\ &+ \eta^2(0) f(+0)\mathcal{D}_{\eta\theta}\varphi(+0), \qquad \varphi \in \widetilde{\mathbb{H}}^2_+. \end{aligned} \qquad (3.11)$$

Припустимо, що існує послідовність $\{f_p\}_{p=0}^{\infty} \subset C^2[0,+\infty)$ така, що $\operatorname{supp} f_p$ є обмеженим, $p \in \mathbb{N}$, та

$$[\![f - f_p]\!]_+^0 = [\![f - f_p]\!]_\oplus^0 \to 0 \quad \text{і} \quad f_p(+0) \to f(+0), \qquad \text{коли } p \to \infty. \tag{3.12}$$

Для кожного $p \in \mathbb{N}$ і кожного $\varphi \in \widetilde{\mathbb{H}}_+^2$ маємо

$$\begin{aligned} \left\langle\!\left\langle \mathcal{D}_{\eta\theta}^2 f_p, \varphi \right\rangle\!\right\rangle_+ &= \int_0^\infty \left(\eta^2 \left((\mathcal{D}_{\eta\theta} f_p)' + \frac{\eta'}{\eta} \mathcal{D}_{\eta\theta} f_p \right) \right)(x) \varphi(x)\, dx \\ &= \eta^2(0) f_p(+0) \mathcal{D}_{\eta\theta}\varphi(+0) + \left\langle\!\left\langle f_p, \mathcal{D}_{\eta\theta}^2 \varphi \right\rangle\!\right\rangle_+ \\ &= \eta^2(0) f_p(+0) \mathcal{D}_{\eta\theta}\varphi(+0) + \frac{1}{2} \left\langle\!\left\langle \mathbb{I}_{\mathrm{odd}}^0 f_p, \mathbb{I}_{\mathrm{odd}}^0 \mathcal{D}_{\eta\theta}^2 \varphi \right\rangle\!\right\rangle. \end{aligned}$$

Оскільки $\mathbb{I}_{\mathrm{odd}}^0 \mathcal{D}_{\eta\theta}^2 \varphi = \mathcal{D}_{\eta\theta}^2 \mathbb{I}_{\mathrm{odd}}^2 \varphi$, то застосовуючи (2.10), звідси одержуємо

$$\begin{aligned} \left\langle\!\left\langle \mathcal{D}_{\eta\theta} f_p, \varphi \right\rangle\!\right\rangle_+ \to &\eta^2(0) f(+0) \mathcal{D}_{\eta\theta}\varphi(+0) + \frac{1}{2} \left\langle\!\left\langle \mathbb{I}_{\mathrm{odd}}^0 f, \mathcal{D}_{\eta\theta}^2 \mathbb{I}_{\mathrm{odd}}^2 \varphi \right\rangle\!\right\rangle \\ = &\eta^2(0) f(+0) \mathcal{D}_{\eta\theta}\varphi(+0) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left\langle\!\left\langle \mathcal{D}_{\eta\theta}^2 \mathbb{I}_{\mathrm{odd}}^0 f, \mathbb{I}_{\mathrm{odd}}^2 \varphi \right\rangle\!\right\rangle, \quad \text{коли } p \to \infty, \quad \varphi \in \widetilde{\mathbb{H}}_+^2. \end{aligned}$$

Оскільки результат граничного переходу не залежить від вибору послідовності, що задовольняє (3.12), то для завершення доведення залишилось побудувати будь-яку послідовність $\{f_p\}_{p=0}^{\infty} \subset C^2[0,+\infty)$ таку, що $\operatorname{supp} f_p$ є обмеженим, $p \in \mathbb{N}$, і для якої виконано (3.12).

Побудуємо її. Для кожного $n \in \mathbb{N}$ позначимо $F(x) = H(x) f(x)$, $F_n(x) = (H(x) - H(x-n)) f(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Тоді $F \in \mathbb{H}^0$ та $F_n \in \mathbb{H}^0 \cap H^0$, $n \in \mathbb{N}$, і

$$[\![F - F_n]\!]^0 \to 0, \quad \text{коли } n \to \infty. \tag{3.13}$$

Нехай $\psi \in \mathcal{D}$ — невід'ємна на $\mathbb{R}$ функція, $\operatorname{supp}\psi \subset [0,1]$, $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)\, dx$. Позначимо $\psi_k = k\psi(-k(\cdot))$, $F_n^k = F_n * \psi_k$, $n, k \in \mathbb{N}$. Тоді $F_n^k \in C^\infty(\mathbb{R})$,

$\operatorname{supp} F_n^k \in [-\frac{1}{k}, n]$, $n, k \in \mathbb{N}$, і

$$\left[\!\left] F_n - F_n^k \right[\!\right]^0 \leq \left\| F_n - F_n^k \right\|^0 \to 0, \qquad \text{коли } k \to \infty, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{3.14}$$

Порівнюючи (3.13) і (3.13), бачимо, що існують зростаючи послідовності $\{n_p\}_{p=0}^{\infty}$ і $\{k_p\}_{p=0}^{\infty}$ такі, що

$$\left[\!\left] F - F_{n_p}^{k_p} \right[\!\right]^0 \to 0, \qquad \text{коли } p \to \infty.$$

Позначивши через f_p звуження $F_{n_p}^{k_p}$ на $\mathbb{R}_+$, звідси одержуємо, що $f_p \in C^{\infty}[0, +\infty)$, $\operatorname{supp} f_p$ є обмеженим, $p \in \mathbb{N}$, і

$$[\![f - f_p]\!]_+^0 \to 0, \qquad \text{коли } p \to \infty. \tag{3.15}$$

Скориставшись означенням значення розподілу в точці 0 (див. означення 1.5), одержуємо

$$f_p(+0) = F_{n_p}^{k_p}(0) = \int_0^{n_p} f(x) k_p \psi(k_p x)\, dx \tag{3.16}$$

$$= \langle f, k_p \psi(k_p(\cdot)) \rangle_+ \to f(+0) \quad \text{коли } p \to \infty. \tag{3.17}$$

З (3.15) і (3.16) випливає (3.12). Теорему доведено. □

Теорема 3.11. *Нехай* $f \in \widetilde{\mathbb{H}}_+^0 = H_{\oplus}^0$ *та існує* $f(+0) \in \mathbb{R}$. *Тоді* $\mathcal{D}_{\eta\theta} f \in \mathbb{H}_{\oplus}^{-1}$ *і цей розподіл може бути продовжений до розподілу з* $\widehat{\mathbb{H}}_+^{-1}$ *(а, отже, і до розподілу з* $\widehat{\mathbb{H}}^{-1}$*) за правилом*

$$\mathbb{I}_{\text{even}}^{-1} \mathcal{D}_{\eta\theta} f = \mathcal{D}_{\eta\theta} \mathbb{I}_{\text{odd}}^0 f - 2\eta^2(0) f(+0) \delta. \tag{3.18}$$

Доведення. Для доведення (3.18) ми, фактично, маємо довести, що розподіл $\mathcal{D}_{\eta\theta} f$ може бути продовжений за правилом

$$\langle\!\langle \mathcal{D}_{\eta\theta} f, \varphi \rangle\!\rangle_+ = \frac{1}{2} \langle \mathcal{D}_{\eta\theta} \mathbb{I}_{\text{odd}}^0 f, \mathbb{I}_{\text{even}}^1 \varphi \rangle + \eta^2(0) f(+0) \varphi(+0), \quad \varphi \in \widehat{\mathbb{H}}_+^1. \tag{3.19}$$

З доведення теореми 3.10 випливає, що існує послідовність $\{f_p\}_{p=0}^{\infty} \subset C^1[0,+\infty)$ таку, що $\operatorname{supp} f_p$ є обмеженим, $p \in \mathbb{N}$, і для якої виконано (3.12). Для кожного $p \in \mathbb{N}$ і кожного $\varphi \in \widehat{\mathbb{H}}^1_+$ маємо

$$\begin{aligned}\langle\langle \mathcal{D}_{\eta\theta} f_p, \varphi\rangle\rangle_+ &= \int_0^\infty \left(\eta^2\left(f_p' + \frac{\eta'}{\eta} f_p\right)\right)(x)\varphi(x)\,dx \\ &= -\eta^2(0) f_p(+0)\varphi(+0) - \langle\langle f_p, \mathcal{D}_{\eta\theta}\varphi\rangle\rangle_+ \\ &= -\eta^2(0) f_p(+0)\varphi(+0) - \frac{1}{2}\langle \mathbb{I}^0_{\text{odd}} f_p, \mathbb{I}^0_{\text{odd}}\mathcal{D}_{\eta\theta}\varphi\rangle.\end{aligned}$$

Оскільки $\mathbb{I}^0_{\text{odd}}\mathcal{D}_{\eta\theta}\varphi = \mathcal{D}_{\eta\theta}\mathbb{I}^1_{\text{even}}\varphi$, то застосовуючи (3.12), звідси одержуємо

$$\begin{aligned}\langle\langle \mathcal{D}_{\eta\theta} f_p, \varphi\rangle\rangle_+ \to &-\eta^2(0) f(+0)\varphi(+0) - \frac{1}{2}\left\langle\left\langle \mathbb{I}^0_{\text{odd}} f, \mathcal{D}_{\eta\theta}\mathbb{I}^1_{\text{even}}\varphi\right\rangle\right\rangle \\ = &-\eta^2(0) f(+0)\varphi(+0) \\ &- \frac{1}{2}\left\langle\left\langle \mathcal{D}_{\eta\theta}\mathbb{I}^0_{\text{odd}} f, \mathbb{I}^1_{\text{even}}\varphi\right\rangle\right\rangle, \quad \text{коли } p \to \infty, \quad \varphi \in \widehat{\mathbb{H}}^1_+.\end{aligned}$$

Оскільки результат граничного переходу не залежить від вибору послідовності, що задовольняє (3.12), то ми одержали шукане продовження розподілу $\mathcal{D}_{\eta\theta} f$ (див. (3.19)). Теорему доведено. □

Висновок 3.12. *Нехай $g \in \widehat{\mathbb{H}}^1_+$ та існує $\mathcal{D}_{\eta\theta} g(+0) \in \mathbb{R}$. Тоді $\mathcal{D}^2_{\eta\theta} g \in \mathbb{H}^{-1}_\oplus$ і цей розподіл може бути продовжений до розподілу з $\widehat{\mathbb{H}}^{-1}_+$ (а, отже, і до розподілу з $\widehat{\mathbb{H}}^{-1}$) за правилом*

$$\mathbb{I}^{-1}_{\text{even}}\mathcal{D}^2_{\eta\theta} g = \mathcal{D}^2_{\eta\theta}\mathbb{I}^1_{\text{even}} g - 2\eta^2(0)\mathcal{D}_{\eta\theta} g(+0)\delta. \tag{3.20}$$

Доведення. Позначивши $f = \mathcal{D}_{\eta\theta} g$, одержуємо $f \in \widetilde{\mathbb{H}}^0_+ = \mathbb{H}^0_\oplus$ і $f(+0) = \mathcal{D}_{\eta\theta} g(+0)$. З теореми 3.11 випливає, що розподіл $\mathcal{D}^2_{\eta\theta} g' = \mathcal{D}_{\eta\theta} f \in \mathbb{H}^{-1}_\oplus$ може бути продовжений до розподілу з $\widehat{\mathbb{H}}^{-1}_+$ (а, отже, і до розподілу з $\widehat{\mathbb{H}}^{-1}$) за правилом

$$\mathbb{I}_{\text{even}}^{-1}\mathcal{D}_{\eta\theta}^2 g = \mathcal{D}_{\eta\theta}\mathbb{I}_{\text{odd}}^0\mathcal{D}_{\eta\theta}g - 2\eta^2(0)\mathcal{D}_{\eta\theta}g(+0)\delta.$$

Оскільки $\mathbb{I}_{\text{odd}}^0\mathcal{D}_{\eta\theta}g = \mathcal{D}_{\eta\theta}\mathbb{I}_{\text{even}}^1 g$, то звідси одержуємо (3.20). $\square$

3.2. Оператори перетворення для диференціальних операторів другого порядку зі змінними коефіцієнтами

Нехай, як і в підрозділі 3.1, $\eta \in C^2(\mathbb{R})$ і $\theta \in C^1(\mathbb{R})$ є парними додатніми на $\mathbb{R}$ функціями, що задовольняють умову (3.1). Нехай також r є парною функцією, для якої виконано умову (1.2).

Для дослідження хвильового рівняння зі змінними коефіцієнтами, керованого крайовою умовою Діріхле у підрозділі 6.1 буде використано оператор $\widetilde{\mathbb{T}} = \mathbf{S}\widetilde{\mathbf{T}}_r$. Дослідимо його.

З теореми 1.12 та висновку 3.7 одержуємо наступну теорему.

Теорема 3.13. *Оператор $\widetilde{\mathbb{T}}$ є ізоморфізмом просторів $\widetilde{H}^m$ та $\widetilde{\mathbb{H}}^m$, $m = -2, -1, 0$.*

З теорем 1.13–1.15, 3.2 та 3.3 випливають наступні три теореми

Теорема 3.14. *Якщо $g \in \widetilde{H}^0$ і існує $g(+0) \in \mathbb{R}$, то існує $(\widetilde{\mathbb{T}}g)(+0)$ і*

$$\left(\mathcal{D}_{\eta\theta}^2 - r \circ \sigma\right)\widetilde{\mathbb{T}}g - 2\eta^2(0)(\widetilde{\mathbb{T}}g)(+0)\mathcal{D}_{\eta\theta}\delta = \widetilde{\mathbb{T}}\left(\frac{d^2}{d\xi^2}g - 2g(+0)\delta'\right).$$

Теорема 3.15. *Якщо* $f \in \widetilde{\mathbb{H}}^0$ *і існує* $f(+0) \in \mathbb{R}$, *то існує* $(\widetilde{\mathbb{T}}^{-1} f)(+0)$ *і*

$$\frac{d^2}{d\xi^2}\widetilde{\mathbb{T}}^{-1} f - 2\left(\widetilde{\mathbb{T}}^{-1} f\right)(+0)\delta' \\ = \widetilde{\mathbb{T}}^{-1}\left(\left(\mathcal{D}^2_{\eta\theta} - r\circ\sigma\right) f - 2\eta^2(0) f(+0)\mathcal{D}_{\eta\theta}\delta\right).$$

Теорема 3.16. *Маємо* $\widetilde{\mathbb{T}}\delta' = \eta(0)\mathcal{D}_{\eta\theta}\delta$.

Для дослідження хвильового рівняння зі змінними коефіцієнтами, керованого крайовою умовою Неймана у підрозділі 6.1 буде використано оператор $\widehat{\mathbb{T}} = \mathbf{S}\widehat{\mathbf{T}}_r$. Дослідимо його.

З теореми 1.17 та висновку 3.7 одержуємо наступну теорему.

Теорема 3.17. *Оператор* $\widehat{\mathbb{T}}$ *є ізоморфізмом просторів* $\widehat{H}^m$ *та* $\widehat{\mathbb{H}}^m$, $m = -1, 0, 1$.

З теорем 1.18–1.20, 3.2 та 3.3 випливають наступні три теореми

Теорема 3.18. *Якщо* $g \in \widehat{H}^1$ *і існує* $g'(+0) \in \mathbb{R}$, *то існує* $(\widehat{\mathbb{T}} g)'(+0)$ *і*

$$\left(\mathcal{D}^2_{\eta\theta} - r\circ\sigma\right)\widehat{\mathbb{T}} g - 2\eta^2(0)(\mathcal{D}_{\eta\theta}\widehat{\mathbb{T}} g)(+0)\delta = \widehat{\mathbb{T}}\left(\frac{d^2}{d\xi^2} g - 2g'(+0)\delta\right).$$

Теорема 3.19. *Якщо* $f \in \widehat{\mathbb{H}}^1$ *і існує* $f'(+0) \in \mathbb{R}$, *то існує* $(\widehat{\mathbb{T}}^{-1} f)(+0)$ *і*

$$\frac{d^2}{d\xi^2}\widehat{\mathbb{T}}^{-1} f - 2\left(\widehat{\mathbb{T}}^{-1} f\right)'(+0)\delta \\ = \widehat{\mathbb{T}}^{-1}\left(\left(\mathcal{D}^2_{\eta\theta} - r\circ\sigma\right) f - 2\eta^2(0)\mathcal{D}_{\eta\theta} f(+0)\delta\right).$$

Теорема 3.20. *Маємо* $\widehat{\mathbb{T}}\delta = \eta(0)\delta$.

Висновки до розділу 3

У цьому розділі введено та вивчено модифіковані простори Соболєва $\mathbb{H}^m$, $m = \overline{-2, 2}$, і оператори перетворення, пов'язані із задачею Діріхле та задачею Неймана для хвильового рівняння із змінними коефіцієнтами на півосі. Результати цього розділу застосовано в розділі 6.

РОЗДІЛ 4.

ОПЕРАТОРИ ПЕРЕТВОРЕННЯ ТА ПРОСТОРИ СОБОЛЄВСЬКОГО ТИПУ ДЛЯ ДВОВИМІРНОГО ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА, ВИЗНАЧЕНОГО НА РАДІАЛЬНО СИМЕТРИЧНИХ РОЗПОДІЛАХ

4.1. Простори $\widetilde{H}^s_+(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$, $\widehat{H}^s_+(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$, $H^s_\oplus(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$

Нехай $s \geq 0$. Позначимо через $\widetilde{H}^s_+(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ простір функцій, який містить усі звуження на $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ функцій з простору $\widetilde{H}^s_0(\mathbb{R}^2)$, а через $\widehat{H}^s_+(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ — простір функцій, який містить усі звуження на $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ функцій з простору $\widehat{H}^s_0(\mathbb{R}^2)$. Для функції $\varphi \in H^s(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ будемо позначати через φ^+ її звуження на $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$. У цих просторах розглядатимемо таку норму:

$$\|\varphi_+\|^s_+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \|\varphi\|^s_0 .$$

Зауважимо, що норми в просторах $\widetilde{H}^s_+(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ та $\widehat{H}^s_+(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ позначені одним символом. Оскільки одночасно парною і непарною може бути лише функція, що тотожно дорівнює нулю, то це не призводить до плутанини.

Зрозуміло, що відображення $\varphi \mapsto \varphi^+$ є ізоморфізмом просторів $\widetilde{H}^s_0(\mathbb{R}^2)$ та $\widetilde{H}^s_+(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})$ і просторів $\widehat{H}^s_0(\mathbb{R}^2)$ та $\widehat{H}^s_+(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})$. Отже, простори $\widetilde{H}^s_+(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})$ та $\widehat{H}^s_+(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})$ є повними відносно введеної норми.

Позначимо через $\mathcal{I}^s_{\text{odd}} : \widetilde{H}^s_+(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}) \to \widetilde{H}^s_0(\mathbb{R}^2)$, $D(\mathcal{I}^s_{\text{odd}}) = \widetilde{H}^s_+(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})$, оператор непарного продовження, а через $\mathcal{I}^s_{\text{even}} : \widehat{H}^s_+(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}) \to \widehat{H}^s_0(\mathbb{R}^2)$, $D(\mathcal{I}^s_{\text{even}}) = \widehat{H}^s_+(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})$ — оператор парного продовження. Очевидно, маємо $R(\mathcal{I}^s_{\text{odd}}) = \widetilde{H}^s_0(\mathbb{R}^2)$ та $R(\mathcal{I}^s_{\text{even}}) = \widehat{H}^s_0(\mathbb{R}^2)$. Зрозуміло, що оберненими до операторів $\mathcal{I}^s_{\text{odd}}$ та $\mathcal{I}^s_{\text{even}}$ будуть звуження оператора $(\cdot)^+$ на $\widetilde{H}^s_0(\mathbb{R}^2)$ та $\widehat{H}^s_0(\mathbb{R}^2)$, відповідно. Таким чином, оператор $\mathcal{I}^s_{\text{odd}}$ є ізоморфізмом $\widetilde{H}^s_+(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})$ та $\widetilde{H}^s_0(\mathbb{R}^2)$, і оператор $\mathcal{I}^s_{\text{even}}$ є ізоморфізмом $\widehat{H}^s_+(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})$ та $\widehat{H}^s_0(\mathbb{R}^2)$, зокрема,

$$\|\mathcal{I}^s_{\text{odd}}\varphi\|^s_0 = \sqrt{2}\,\|\varphi\|^s_+\,, \qquad \varphi \in \widetilde{H}^s_+(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}), \tag{4.1}$$

$$\|\mathcal{I}^s_{\text{even}}\varphi\|^s_0 = \sqrt{2}\,\|\varphi\|^s_+\,, \qquad \varphi \in \widehat{H}^s_+(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}). \tag{4.2}$$

Позначимо $\widetilde{H}^{-s}_+(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}) = \Big(\widetilde{H}^s_+(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})\Big)^*$ і $\widehat{H}^{-s}_+(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}) = \Big(\widehat{H}^s_+(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})\Big)^*$ з нормою

$$\|f\|^{-s}_+ = \sup\left\{\frac{|\langle f,\varphi\rangle_+|}{\|\varphi\|^s_+} \mid 0 \neq \varphi \in H^s_+\right\}, \quad f \in (H^s_+)^*\,,$$

де $\langle f,\varphi\rangle_+$ є значенням розподілу $f \in (H^s_+)^*$ на тестовій функції $\varphi \in H^s_+$, H^s_+ є простором $\widetilde{H}^s_+(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})$ або простором $\widehat{H}^s_+(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})$. Позначимо через $\mathcal{I}^{-s}_{\text{odd}} : \widetilde{H}^{-s}_+(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}) \to \widetilde{H}^{-s}(\mathbb{R}^2)$, $D(\mathcal{I}^{-s}_{\text{odd}}) = \widetilde{H}^{-s}_+(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})$, оператор непарного продовження, який діє за правилом

$$\langle \mathcal{I}_{\mathrm{odd}}^{-s} f, \varphi\rangle = 2\langle f, (\mathcal{I}_{\mathrm{odd}})^{s})^{-1}\varphi\rangle, \quad f \in \widetilde{H}_{+}^{-s}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}),\ \varphi \in \widetilde{H}_{0}^{s}(\mathbb{R}^2).$$

а через $\mathcal{I}_{\mathrm{even}}^{m} : \widehat{H}_{+}^{-s}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}) \to \widehat{H}^{-s}(\mathbb{R}^2)$, $D(\mathcal{I}_{\mathrm{even}}^{-s}) = \widehat{H}_{+}^{-s}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ — оператор парного продовження, який діє за правилом

$$\langle \mathcal{I}_{\mathrm{even}}^{-s} f, \varphi\rangle = 2\langle f, (\mathcal{I}_{\mathrm{even}}^{s})^{-1}\varphi\rangle, \quad f \in \widehat{H}_{+}^{-s}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}),\ \varphi \in \widehat{H}_{0}^{s}(\mathbb{R}^2).$$

Очевидно, маємо $R(\mathcal{I}_{\mathrm{odd}}^{-s}) = \widetilde{H}_{0}^{-s}(\mathbb{R}^2)$ та $R(\mathcal{I}_{\mathrm{even}}^{-s}) = \widehat{H}_{0}^{-s}(\mathbb{R}^2)$. Крім того, оператор $\mathcal{I}_{\mathrm{odd}}^{-s}$ є ізоморфізмом $\widetilde{H}_{+}^{-s}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ та $\widetilde{H}_{0}^{-s}(\mathbb{R}^2)$, і оператор $\mathcal{I}_{\mathrm{even}}^{-s}$ є ізоморфізмом $\widehat{H}_{+}^{-s}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ та $\widehat{H}_{0}^{-s}(\mathbb{R}^2)$, зокрема,

$$\left\|\mathcal{I}_{\mathrm{odd}}^{-s} f\right\|_{0}^{-s} = \sqrt{2}\, \|f\|_{+}^{-s}, \qquad \varphi \in \widetilde{H}_{+}^{-s}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}), \tag{4.3}$$

$$\left\|\mathcal{I}_{\mathrm{even}}^{-s} f\right\|_{0}^{-s} = \sqrt{2}\, \|f\|_{+}^{-s}, \qquad \varphi \in \widehat{H}_{+}^{-s}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}). \tag{4.4}$$

Для функції $\varphi \in H_0^0(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ позначимо через $\mathcal{O}\varphi$ її продовження нулем на $(-\infty, 0) \times \mathbb{R}$).Розглянемо також простір

$$H_{\oplus}^{s}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}) = \left\{\varphi \in H^{s}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}) \mid \mathcal{O}\varphi \in H_0^{s}(\mathbb{R}^2)\right\}$$

з нормою

$$\|\varphi\|_{\oplus}^{s} = \|\varphi\|_{+}^{s}, \qquad \varphi \in H_{\oplus}^{s}, \tag{4.5}$$

та простір $H_{\oplus}^{-s}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}) = (H_{\oplus}^{s}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}))^{*}$ з нормою

$$\|f\|_{\oplus}^{-s} = \sup\left\{\frac{|\langle f, \varphi\rangle_{\oplus}|}{\|\varphi\|_{\oplus}^{s}} \mid 0 \neq \varphi \in H_{\oplus}^{s}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})\right\}, \quad f \in (H_{\oplus}^{s}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}))^{*},$$

де $\langle f, \varphi\rangle_{\oplus}$ є значенням розподілу $f \in H_{\oplus}^{-s}$ на тестовій функції $\varphi \in H_{\oplus}^{s}$. Оскільки $H_{\oplus}^{s}$ є підпростором простору $\widetilde{H}_{+}^{s}$ і підпростором простору $\widehat{H}_{+}^{s}$, то і

$$\|f\|_{\oplus}^{-s} \leq \|f\|_{+}^{-s}, \qquad f \in H_{\oplus}^{-s}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}). \tag{4.6}$$

За побудовою що будь-яка функція з $H^s_\oplus(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})$ після продовження нулем на $(-\infty,0)\times\mathbb{R})$ буде належати $H^s_0(\mathbb{R}^2)$ і навпаки: звуження будь-якої функції з $H^s_0(\mathbb{R}^2)$, носій якої міститься в $\mathbb{R}_+$, на належатиме $H^s_\oplus(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})$. Крім того,

$$\|\varphi\|^s = \|\varphi\|^s_\oplus, \qquad \varphi\in H^s_\oplus(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}).$$

Тобто, ми маємо ізометричний ізоморфізм просторів $H^s_\oplus(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})$ та $\{\varphi\in H^s_0(\mathbb{R}^2)\mid \operatorname{supp}\varphi\in[0,+\infty)\}$. Оскільки останній простір є повним, то і $H^s_\oplus(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})$ є повним. Крім того, $H^{-s}_\oplus(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})$ також є повним простором. Таким чином ми маємо низку банахових просторів $\widetilde{H}^k_+(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})$, $\widehat{H}^k_+(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})$, $H^k_\oplus(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})$, $k\in\mathbb{R}$. Зазначимо, що для $s=0$ маємо

$$\|\varphi\|^0_\oplus = \|\varphi\|^0_+ = \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}$$

та

$$H^0_\oplus(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}) = \widetilde{H}^0_+(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}) = \widehat{H}^0_+(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}) = L^2(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}).$$

Тому

$$\big(H^0_\oplus(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})\big)^* = \big(\widetilde{H}^0_+(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})\big)^* = \big(\widehat{H}^0_+(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})\big)^* = L^2(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}).$$

Аналізуючи означення просторів $\widetilde{H}^k_+$, $\widehat{H}^k_+$, $H^k_\oplus$, $k\in\mathbb{R}$, та, враховуючи (4.1)–(2.6) і висновок 1.6, одержуємо наступні дві теореми.

Теорема 4.1. *Для $s\geq 0$ мають місце наступні вкладення*

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}) \subset H^s_\oplus(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}) \subset \widetilde{H}^s_+(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}),$$
$$\widetilde{H}^{-s}_+(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}) \subset H^{-s}_\oplus(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}),$$

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}) \subset H^s_{\oplus}(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}) \subset \widehat{H}^s_+(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}),$$
$$\widehat{H}^{-s}_+(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}) \subset H^{-s}_{\oplus}(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}),$$

Теорема 4.2. *Мають місце наступні вкладення*

$$H^k_{\oplus}(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}) \subset H^n_{\oplus}(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}), \quad \widetilde{H}^k_+(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}) \subset \widetilde{H}^n_+(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}),$$
$$\widehat{H}^k_+(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}) \subset \widehat{H}^n_+(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}), \qquad -\infty < n \le k < +\infty.$$

Крім того, наступні вкладення є щільними:

$$\widetilde{H}^k_+(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}) \subset \widetilde{H}^n_+(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}),$$
$$\widehat{H}^k_+(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}) \subset \widehat{H}^n_+(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}), \qquad -\infty < n \le k < +\infty.$$

Зрозуміло, що для $f \in H^{-s}_{\oplus}(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})$, $\varphi \in H^{s+1}_{\oplus}(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})$ маємо

$$\langle f_{x_j}, \varphi\rangle_{\oplus} = -\langle f, \varphi_{x_j}\rangle_{\oplus}, \qquad j = 1, 2, \tag{4.7}$$

але аналоги цього співвідношення не виконуються в просторах $\widetilde{H}^{-s}_+(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})$, $\widehat{H}^{-s}_+(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})$. Деякі властивості похідних в цих просторах досліджено в наступних двох теоремах і у висновку.

Нам будуть потрібні наступні означення. Нехай $s \ge 0$, $l \ge 0$, $f \in H^{-s}_{-l}(\mathbb{R}^2)$, $\varphi \in H^{-s}_{-l} = H^{-s}_{-l}(\mathbb{R})$. Оскільки $1+|\xi|^2 \le \left(1+\xi_1^2\right)\left(1+\xi_2^2\right)$, то для

$$\widetilde{f}_1 = \left(1+|x_2|^2\right)^{-l/2}\left(1+|D_2|^2\right)^{-s/2}\left(1+|x_1|^2\right)^{-l/2}\left(1+|D_1|^2\right)^{-s/2} f,$$
$$\widetilde{f}_2 = \left(1+|x_1|^2\right)^{-l/2}\left(1+|D_1|^2\right)^{-s/2}\left(1+|x_2|^2\right)^{-l/2}\left(1+|D_2|^2\right)^{-s/2} f$$

маємо $\widetilde{f}_1 \in H^0_0(\mathbb{R}^2)$ та $\widetilde{f}_2 \in H^0_0(\mathbb{R}^2)$. Позначимо

$$\langle f, \varphi\rangle_{[1]}(x_2) = \left(1+|x_2|^2\right)^{l/2}\left(1+|D_2|^2\right)^{s/2} F_1(x_2),$$

$$\langle f,\varphi\rangle_{[2]}(x_1)=\left(1+|x_1|^2\right)^{l/2}\left(1+|D_1|^2\right)^{s/2}F_2(x_1),$$

де $D_1=-i\partial/\partial x_1$, $D_2=-i\partial/\partial x_2$,

$$F_1(x_2)=\int_{-\infty}^{\infty}\widetilde{f}_1(x_1,x_2)\left(1+|x_1|^2\right)^{l/2}\left(1+|D_1|^2\right)^{s/2}\varphi(x_1)\,dx_1,$$
$$F_2(x_1)=\int_{-\infty}^{\infty}\widetilde{f}_2(x_1,x_2)\left(1+|x_2|^2\right)^{l/2}\left(1+|D_2|^2\right)^{s/2}\varphi(x_2)\,dx_2.$$

Оскільки $F_1\in H_0^0$ і $F_2\in H_0^0$, то

$$\langle f,\varphi\rangle_{[1]}\in H_{-l}^{-s}\quad \text{і}\quad \langle f,\varphi\rangle_{[2]}\in H_{-l}^{-s},\qquad \varphi\in H_l^s.$$

Означення 4.3. *Нехай $s\ge 0$, $l\ge 0$. Будемо вважати, що розподіл $f\in H_{-l}^{-s}(\mathbb{R}^2)$ має значення f_0 на прямій $x_1=0$ (позначатимемо це $f(+0,x_2)=f_0(x_2)$), якщо існують $s'\in\mathbb{R}$ та $l'\in\mathbb{R}$ такі, що для кожного $\varphi\in H_{l'}^{s'}$ існує $\langle f,\varphi\rangle_{[2]}(+0)$ і відображення $\varphi\mapsto\langle f,\varphi\rangle_{[2]}(+0)$ є лінійним неперервним функціоналом над $H_{l'}^{s'}$, який визначає f_0 (а саме, $\langle f_0,\varphi\rangle=\langle f,\varphi\rangle_{[2]}(+0)$), тобто, $f_0\in H_{-l'}^{-s'}$.*

Для розподілу $f\in\widetilde{H}_+^{-s}$ позначимо $f(+0,x_2)=\left(\mathcal{I}_{\mathrm{odd}}^{-s}f\right)(+0,x_2)$.

Теорема 4.4. *Нехай $f\in\widetilde{H}_+^{-1/2}(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})$ та існує $f(+0,\cdot)\in H_0^{-5/4}$. Тоді $f_{x_1x_1}\in H_\oplus^{-5/2}(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})$ і цей розподіл може бути продовжений до розподілу з $\widetilde{H}_+^{-5/2}(\mathbb{R}^2)$ (а, отже, і до розподілу з $\widetilde{H}^{-5/2}$) за правилом*

$$\mathcal{I}_{\mathrm{odd}}^{-5/2}f''=\left(\mathcal{I}_{\mathrm{odd}}^{-1/2}f\right)_{x_1x_1}-2f(+0,\cdot)\delta_{[1]}',\tag{4.8}$$

де $\delta_{[1]}$ є розподілом Дірака за x_1.

Доведення. Для доведення (4.8) ми, фактично, маємо довести, що розподіл $f_{x_1x_1}$ може бути продовжений за правилом

$$\langle f_{x_1x_1}, \varphi\rangle_+ = \frac{1}{2}\left\langle \left(\mathcal{I}_{\mathrm{odd}}^{-1/2} f\right)_{x_1x_1}, \mathcal{I}_{\mathrm{odd}}^{5/2}\varphi\right\rangle + \langle f(+0,\cdot)\varphi_{x_1}(+0,\cdot)\rangle, \quad \varphi \in \widetilde{H}_+^{5/2}(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}). \qquad (4.9)$$

Зазначимо, що для $\varphi \in \widetilde{H}_+^{5/2}(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})$ $\varphi_{x_1} \in \widehat{H}_+^{3/2}$ і за теоремою 1.2 одержуємо $\varphi \in C([0,\infty)\times\mathbb{R})$, тому існує значення $\varphi_{x_1} \in C(\mathbb{R})$. Не важко перевірити, що $\varphi_{x_1} \in \widehat{H}_+^{5/4}$. Припустимо, що існує послідовність $\{f_p\}_{p=0}^{\infty} \subset C^{\infty}[0,+\infty)$ така, що $\operatorname{supp} f_p$ є обмеженим, $p\in\mathbb{N}$, та

$$f_p \rightharpoonup f \text{ в } \widetilde{H}_+^{-1/2}(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}) \text{ і } f_p(+0,\cdot) \rightharpoonup f(+0,\cdot) \text{ в } H_0^{-5/4}(\mathbb{R}), \text{ коли } p\to\infty, \qquad (4.10)$$

де $\rightharpoonup$ означає слабку збіжність. Для кожного $p\in\mathbb{N}$ і кожного $\varphi \in \widetilde{H}_+^{5/2}(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})$ маємо $\varphi(+0,\cdot) = 0$ (див. теорему 1.2) і

$$\begin{aligned}
\langle (f_p)_{x_1x_1}, \varphi\rangle_+ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty} (f_p)_{x_1x_1}(x_1,x_2)\varphi(x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2 \\
&= \langle f_p(+0,\cdot)\varphi_{x_1}(+0,\cdot)\rangle + \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty} f_p(x_1,x_2)\varphi_{x_1x_1}(x)\,dx_1\,dx_2 \\
&= \langle f_p(+0,\cdot)\varphi_{x_1}(+0,\cdot)\rangle + \langle f_p, \varphi_{x_1x_1}\rangle_+ \\
&= \langle f_p(+0,\cdot)\varphi_{x_1}(+0,\cdot)\rangle + \frac{1}{2}\left\langle \mathcal{I}_{\mathrm{odd}}^{-1/2} f_p, \mathcal{I}_{\mathrm{odd}}^{1/2}\varphi_{x_1x_1}\right\rangle.
\end{aligned}$$

Оскільки $\mathcal{I}_{\mathrm{odd}}^{1/2}\varphi_{x_1x_1} = \left(\mathcal{I}_{\mathrm{odd}}^{5/2}\varphi\right)_{x_1x_1}$, то застосовуючи (4.10), звідси одержуємо

$$\begin{aligned}
\langle (f_p)_{x_1x_1}, \varphi\rangle_+ \rightharpoonup & \langle f(+0,\cdot)\varphi_{x_1}(+0,\cdot)\rangle + \frac{1}{2}\left\langle \mathcal{I}_{\mathrm{odd}}^{-1/2} f, \left(\mathcal{I}_{\mathrm{odd}}^{1/2}\varphi\right)_{x_1x_1}\right\rangle \\
= & \langle f(+0,\cdot)\varphi_{x_1}(+0,\cdot)\rangle + \frac{1}{2}\left\langle \left(\mathcal{I}_{\mathrm{odd}}^{-1/2} f\right)_{x_1x_1}, \mathcal{I}_{\mathrm{odd}}^{5/2}\varphi\right\rangle,
\end{aligned}$$

$$\text{коли } p \to \infty, \quad \varphi \in \widetilde{H}_{+}^{5/2}(\mathbb{R}_{+} \times \mathbb{R}).$$

Оскільки результат граничного переходу не залежить від вибору послідовності, що задовольняє (4.10), то для завершення доведення залишилось побудувати будь-яку послідовність $\{f_p\}_{p=0}^{\infty} \subset C^2[0, +\infty)$ таку, що $\operatorname{supp} f_p$ є обмеженим, $p \in \mathbb{N}$, і для якої виконано (4.10).

Побудуємо її. Розглянемо $\mu \in C^1(\mathbb{R})$, яка є парною і такою, що $0 \leq \mu(\xi) \leq 1$, $\xi \in \mathbb{R}$; $\mu(\xi) = 1$, $|\xi| \leq 1/2$; $\mu(\xi) = 0$, $|\xi| \geq 1$. Для кожного $n \in \mathbb{N}$ позначимо $F = \mathcal{I}_{\text{odd}}^{-1/2} f$, $F_n(x) = f(x)\mu(x_1/n)$, $x \in \mathbb{R}^2$. Тоді $F \in \widetilde{H}_0^{-1/2}(\mathbb{R}^2)$ та $F_n \in \widetilde{H}_0^{-1/2}(\mathbb{R}^2)$, $\operatorname{supp} F_n \subset [-n, n]$ $n \in \mathbb{N}$, і за лемою 4.27

$$F_n \rightharpoonup F \text{ в } \widetilde{H}^{-1/2}(\mathbb{R}^2), \quad \text{коли } n \to \infty. \tag{4.11}$$

Нехай $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_{+} \times \mathbb{R})$ — невід'ємна на $\mathbb{R}$ функція, $\operatorname{supp} \psi \subset [0, 1]$, $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(\xi)\, d\xi$. Позначимо $\psi_k = k\psi(-k(\cdot))$, $F_n^k = F_n *_{[1]} \psi_k$, $n, k \in \mathbb{N}$. Тут $*_{[1]}$ означає згортку за x_1. Тоді для $\varphi \in H_0^{1/2}$ маємо $\langle F_n *_{[1]} \psi_k, \varphi \rangle_{[2]} = \langle F_n, \varphi \rangle_{[2]} *_{[1]} \psi_k \in C^{\infty}(\mathbb{R}^2)$, $\operatorname{supp} F_n^k \in [-n - 1/k, n]$, $n, k \in \mathbb{N}$, і

$$\left\| F_n - F_n^k \right\|_0^{-1/2} \to 0, \qquad \text{коли } k \to \infty, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{4.12}$$

Порівнюючи (4.11) і (4.11), бачимо, що існують зростаючи послідовності $\{n_p\}_{p=0}^{\infty}$ і $\{k_p\}_{p=0}^{\infty}$ такі, що

$$F_{n_p}^{k_p} \rightharpoonup F \text{ в } \widetilde{H}_0^{-1/2}(\mathbb{R}^2), \qquad \text{коли } p \to \infty.$$

Позначивши через f_p звуження $F_{n_p}^{k_p}$ на $\mathbb{R}_{+} \times \mathbb{R}$, звідси одержуємо, що $f_p \in C^{\infty}[0, +\infty)$, $\operatorname{supp} f_p$ є обмеженим, $p \in \mathbb{N}$, і

$$f_p \rightharpoonup f \text{ в } \widetilde{H}_{+}^{-1/2}(\mathbb{R}_{+} \times \mathbb{R}), \qquad \text{коли } p \to \infty \tag{4.13}$$

Скориставшись означенням значення розподілу на прямій $x_1 = 0$ (див. означення 4.3), одержуємо

$$\langle f_p, \varphi\rangle_{[2]}(+0) = \big(\langle F_n, \varphi\rangle_{[2]} *_{[1]} \psi_k\big)\,(0) = \int_0^{1/k_p} \langle f, \varphi\rangle_{[2]}(x_1) k_p \psi(k_p x_1)\, dx_1$$
$$= \langle\langle f, \varphi\rangle_{[2]}, k_p\psi(k_p(\cdot))\rangle_{[1]} \to \langle f, \varphi\rangle^{[2]}(+0), \quad \text{коли } p \to \infty. \tag{4.14}$$

З (4.13) і (4.14) випливає (4.10). Теорему доведено. □

Аналогічно тому, як доводяться теорема 2.4 і висновок 2.5 на основі доведення теореми 2.4 в розділі 2.1, використовуючи доведення теореми 4.4 замість 2.4, доводимо наступні теорему і висновок.

Теорема 4.5. *Нехай* $f \in \widetilde{H}_+^{-1/2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ *та існує* $f(+0, \cdot) \in H_0^{-5/4}$. *Тоді* $f_{x_1} \in H_\oplus^{-3/2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ *і цей розподіл може бути продовжений до розподілу з* $\widehat{H}_+^{-3/2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ *(а, отже, і до розподілу з* $\widehat{H}^{-3/2}(\mathbb{R}^2)$*) за правилом*

$$\mathcal{I}_{\text{even}}^{-1/2} f_{x_1} = \left(\mathcal{I}_{\text{odd}}^{-3/2} f\right)_{x_1} - 2f(+0, \cdot)\delta_{[1]}, \tag{4.15}$$

де $\delta_{[1]}$ *є розподілом Дірака за* x_1.

Висновок 4.6. *Нехай* $g \in \widehat{H}_+^{1/2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ *та існує* $g_{x_1}(+0, \cdot) \in H_0^{-5/4}$. *Тоді* $g_{x_1x_1} \in H_\oplus^{-3/2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ *і цей розподіл може бути продовжений до розподілу з* $\widehat{H}_+^{-3/2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ *(а, отже, і до розподілу з* $\widehat{H}^{-3/2}(\mathbb{R}^2)$*) за правилом*

$$\mathcal{I}_{\text{even}}^{-3/2} g_{x_1x_1} = \left(\mathcal{I}_{\text{even}}^{1/2} g\right)_{x_1x_1} - 2g_{x_1}(+0)\delta_{[1]}, \tag{4.16}$$

де $\delta_{[1]}$ *є розподілом Дірака за* x_1.

Нам також буде потрібна наступна теорема.

Теорема 4.7. *Нехай*

$$p(x,t) = \frac{\partial}{\partial x_1} \int_0^t \frac{H(\xi^2 - |x|^2)}{\sqrt{\xi^2 - |x|^2}} u(t-\xi)\, d\xi, \qquad x \in \mathbb{R}^2, \quad t > 0$$

$u \in L^\infty(\mathbb{R}_+)$. *Тоді* $p(+0, x_2, t) = \pi\delta(x_2)u(t)$.

Доведення. Маємо

$$p(x,t) = -\frac{x_1}{|x|^2} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 \int_0^t H(\xi^2 - |x|^2) \left(\sqrt{\xi^2 - |x|^2} - 2\xi\right) u(t-\xi)\, d\xi.$$

Позначимо $p_0(x) = \frac{x_1}{|x|^2}$, $x \in \mathbb{R}^2$. Скориставшись означенням 4.3, одержуємо

$$\left\langle \langle p_0, \varphi\rangle_{[2]}, \frac{1}{\alpha}\psi\left(\frac{(\cdot)}{\alpha}\right)\right\rangle = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} \varphi(x_2) \frac{1}{\alpha}\psi\left(\frac{x_1}{\alpha}\right) dx_2\, dx_1$$

$$= \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \frac{\xi_1}{\xi_1^2 + \xi_2^2} \varphi(\alpha\xi_2)\psi(\xi_1)\, d\xi_2\, d\xi_1 \to \varphi(0) \int_0^\infty \psi(\xi_1)\xi_1 \int_{-\infty}^\infty \frac{d\xi_2}{\xi_1^2 + \xi_2^2}\, d\xi_1$$

$$= \pi\varphi(0) \int_0^\infty \psi(\xi_1)\, d\xi, \quad \text{коли } \alpha \to +0, \qquad \varphi \in H_0^{5/4},\ \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+),$$

тобто $p_0(+0, \cdot) = \delta_{[2]}$. Тому маємо $p(+0, x_2, t) = \pi\delta(x_2)u(t)$. Теорему доведено. □

4.2. Простори $H_0^{s[1/2]}$ та $H_{s[1/2]}^0$

Нехай $s \in \mathbb{R}$. Розглянемо простір

$$H_{s[-1/2]}^0 = \left\{\psi \in H_{s-1/2}^0 \mid \exists \bar{\psi} \in H_s^0\ \psi = \sqrt{|\cdot|}\bar{\psi}\right\}$$

з нормою

$$|\psi|_{s[-1/2]}^0 = \left\|\psi/\sqrt{|\cdot|}\right\|_s^0, \qquad \psi \in H_{s[-1/2]}^0,$$

та двоїстий до нього простір $H_{-s[1/2]}^0 = \left(H_{s[-1/2]}^0\right)^*$ з нормою

$$|F|_{-s[1/2]}^0 = \sup\{|\langle F, \psi\rangle|/|\varphi|_{s[-1/2]}^0 \mid 0 \neq \psi \in H_{s[-1/2]}^0\}, \qquad F \in H_{-s[1/2]}^0.$$

Теорема 4.8. *Мають місце наступні щільні вкладення*

$$H^0_{s[-1/2]} \subset H^0_{s-1/2} \quad \text{та} \quad H^0_{-s+1/2} \subset H^0_{-s[1/2]}. \tag{4.17}$$

Крім того, якщо $F \in H^0_{-s[1/2]}$, *то* $F \in H^{-3/2}_{-s+1/2}$.

Доведення. Зрозуміло, що

$$|F|^0_{-s[1/2]} = \left\| \sqrt{|\cdot|} F \right\|^0_{-s}, \qquad F \in H^0_{-s[1/2]}.$$

Тому $H^0_{s[-1/2]}$ та $H^0_{-s[1/2]}$ є повними. Оскільки $\sqrt{|\lambda|} \le \sqrt[4]{1+\lambda^2}$, то

$$\|\psi\|^0_{s-1/2} \le |\psi|^0_{s[-1/2]}, \qquad \psi \in H^0_{s[-1/2]}, \tag{4.18}$$

$$|F|^0_{-s[1/2]} \le \|F\|^0_{-s+1/2}, \qquad F \in H^0_{-s+1/2}. \tag{4.19}$$

Тому $H^0_{s[-1/2]} \subset H^0_{s-1/2}$ та $H^0_{-s+1/2} \subset H^0_{-s[1/2]}$ є вкладеннями.

Доведемо, шо вони є щільними. Нехай $\psi \in H^0_{s-1/2}$. Позначимо $\psi_n(\lambda) = \psi(\lambda) H(\lambda^2 - 1/n^2)$. Тоді $\|\psi - \psi_n\|^0_{s-1/2} \to 0$, коли $n \to \infty$. Отже, $H^0_{s[-1/2]} \subset H^0_{s-1/2}$ є щільним вкладенням. Нехай тепер $F \in H^0_{-s[1/2]}$. Позначимо $F_n(\lambda) = F(\lambda) H(\lambda^2 - 1/n^2)$. Тоді $|F - F_n|^0_{-s[1/2]} \to 0$, коли $n \to \infty$. Тому $H^0_{-s+1/2} \subset H^0_{-s[1/2]}$ є щільним вкладенням.

Доведемо тепер, що якщо $F \in H^0_{-s[1/2]}$, то $F \in H^{-3/2}_{-s+1/2}$. Маємо $\lambda F \in H^0_{s-1/2}$. Позначимо $F_0 = (1+\lambda^2)^{s/2-1/4} F$, $f_0 = \mathcal{F}^{-1} F_0$. Тоді $\lambda F_0 \in H^0_0$ та $f_0' \in H^0_0$. Позначивши

$$g(\xi) = f_0'(\xi) \quad \text{та} \quad \partial^{-1} g(\xi) = \int_0^\xi g(\mu)\, d\mu, \qquad \xi \in \mathbb{R},$$

одержуємо

$$\left|\partial^{-1} g(\xi)\right| \le \|g\|^0_0 \sqrt{\int_0^{|\xi|} d\mu} = \sqrt{|\xi|}\, \|g\|^0_0, \qquad \xi \in \mathbb{R}.$$

Тому

$$\left\|\partial^{-1}g\right\|^{0}_{-3/2} \leq \|g\|^{0}_{0}\sqrt{2\int_{0}^{|\xi|}\frac{\mu\,d\mu}{(1+\mu^2)^{3/2}}} = \sqrt{2}\,\|g\|^{0}_{0}\,.$$

Отже,

$$\left\|\partial^{-1}g\right\|^{1}_{-3/2} \leq \left(\left(\left\|\partial^{-1}g\right\|^{0}_{-3/2}\right) + \left(\|g\|^{0}_{0}\right)^{2}\right)^{1/2} \leq \sqrt{3}\,\|g\|^{0}_{0}\,.$$

Оскільки існує стала $C_0 \in \mathbb{C}$ така, що $f_0 = \partial^{-1}g + C_0$, то $f_0 \in H^{1}_{-3/2}$, $F_0 \in H^{-3/2}_{1}$. Отже, $F = (1+\lambda^2)^{1/4-s/2} \in H^{-3/2}_{1/2}$. Теорему доведено. □

Розглянемо також простори

$$H^{s[-1/2]}_{0} = \mathcal{F}H^{0}_{s[-1/2]} \quad \text{з нормою} \quad |\varphi|^{s[-1/2]}_{0} = |\mathcal{F}\varphi|^{0}_{s[-1/2]},\ \varphi \in H^{s[-1/2]}_{0}0,$$

та

$$H^{-s[1/2]}_{0} = \mathcal{F}H^{0}_{-s[1/2]} \quad \text{з нормою} \quad |f|^{-s[1/2]}_{0} = |\mathcal{F}f|^{0}_{-s[1/2]},\ f \in H^{-s[1/2]}_{0}.$$

Зрозуміло, що $H^{-s[1/2]}_{0} = \left(H^{s[-1/2]}_{0}\right)'$. Бачимо, що $H^{s[-1/2]}_{0}$ та $H^{-s[1/2]}_{0}$ є повними. Беручи до уваги (4.18), одержуємо

$$\|\varphi\|^{s-1/2}_{0} \leq |\varphi|^{s[-1/2]}_{0}, \qquad \varphi \in H^{s[-1/2]}_{0}, \tag{4.20}$$

$$|f|^{-s[1/2]}_{0} \leq \|f\|^{-s+1/2}_{0}, \qquad f \in H^{-s+1/2}_{0}. \tag{4.21}$$

З теореми 4.8 одержуємо

Висновок 4.9. *Мають місце наступні щільні вкладення*

$$H^{s[-1/2]}_{0} \subset H^{s-1/2}_{0} \quad \text{та} \quad H^{-s+1/2}_{0} \subset H^{-s[1/2]}_{0}. \tag{4.22}$$

Крім того, якщо $f \in H^{-s[1/2]}_{0}$, *то* $f \in H^{-s+1/2}_{-3/2}$.

Для $f \in H_0^{-s[1/2]}$, позначаючи $F = \mathcal{F}f$ та $f_s = (1+|D|^2)^{s/2}f$, з [88, Гл. 1] одержуємо

$$
\begin{aligned}
|f|_0^{-s[1/2]} = |F|^0_{-s[1/2]} &= \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(1+\rho^2)^{-s}|F(\rho)|^2\frac{\left|e^{iz\rho}-1\right|^2}{z^2}\,du\,d\rho\right)^{1/2} \\
&= \left(\frac{1}{2\pi}\iint_{\mathbb{R}^2}\frac{|f_s(x+z)-f_s(x)|^2}{|z|^2}\,dx\,dz\right)^{1/2} \\
&= \left(\frac{1}{2\pi}\iint_{\mathbb{R}^2}\frac{|f_s(x)-f_s(y)|^2}{|x-y|^2}\,dy\,dx\right)^{1/2}. \qquad (4.23)
\end{aligned}
$$

При дослідженні проблем керованості нам буде потрібна наступна теорема.

Теорема 4.10. *Якщо* $f \in \widetilde{H}_0^{-1/2[1/2]}$, *то* $\operatorname{sgn}(\cdot)f \in \widehat{H}_0^{-1/2[1/2]}$ *і*

$$
|\operatorname{sgn}(\cdot)f|_0^{-1/2[1/2]} \le |f|_0^{-1/2[1/2]}. \qquad (4.24)
$$

Доведення. Нехай $\varphi \in \widehat{H}_0^{1/2[-1/2]}$. Маємо

$$
\langle \operatorname{sgn}(\cdot)f, \varphi\rangle = \langle f, \operatorname{sgn}(\cdot)\varphi\rangle. \qquad (4.25)
$$

Тому для доведення того, що $\operatorname{sgn}(\cdot)f \in \widehat{H}_0^{-1/2[1/2]}$ досить довести, що $\operatorname{sgn}(\cdot)\varphi \in \widetilde{H}_0^{1/2[-1/2]}$. За висновком 4.9 маємо $\varphi \in \widehat{H}_0^0$. Оскільки

$$
\frac{1}{\sqrt{2}}(1+\lambda) \le \sqrt{1+\lambda^2} \le 1+\lambda, \qquad \lambda \ge 0,
$$

то

$$
\begin{aligned}
&\sqrt{2}\int_0^{\infty}\frac{1+\lambda}{\lambda}\left|(\mathcal{F}\varphi)(\lambda)\right|^2 d\lambda \\
&\qquad \le 2\int_0^{\infty}\frac{\sqrt{1+\lambda^2}}{\lambda}\left|(\mathcal{F}\varphi)(\lambda)\right|^2 d\lambda = \left(|\varphi|_0^{1/2[-1/2]}\right)^2
\end{aligned}
$$

$$\leq 2\int_0^\infty \frac{1+\lambda}{\lambda}\left|(\mathcal{F}\varphi)(\lambda)\right|^2 d\lambda = \left(\|\varphi\|_0^0\right)^2 + \left(\left|\frac{\mathcal{F}\varphi}{(\cdot)}\right|_{0[1/2]}^0\right)^2.$$

Враховуючи теорему 1.3, звідси одержуємо

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\|\varphi\|_0^0 + \left|\partial^{-1}\varphi\right|_0^{0[1/2]}\right) \leq |\varphi|_0^{1/2[-1/2]} \leq \|\varphi\|_0^0 + \left|\partial^{-1}\varphi\right|_0^{0[1/2]}, \qquad (4.26)$$

де $\partial^{-1}\varphi = \mathcal{F}^{-1}_{\lambda\to\xi}\frac{(\mathcal{F}\varphi)(\lambda)}{i\lambda}$. Оскільки φ є парною функцією, то $\mathrm{sgn}(\cdot)\partial^{-1}\varphi = \partial^{-1}\left(\mathrm{sgn}(\cdot)\varphi\right)$. Тому з (4.26) випливає

$$\begin{aligned} |\mathrm{sgn}(\cdot)\varphi|_0^{1/2[-1/2]} &\leq \|\mathrm{sgn}(\cdot)\varphi\|_0^0 + \left|\partial^{-1}\left(\mathrm{sgn}(\cdot)\varphi\right)\right|_0^{0[1/2]} \\ &\leq \|\varphi\|_0^0 + \left|\mathrm{sgn}(\cdot)\partial^{-1}\varphi\right|_0^{0[1/2]}. \qquad (4.27) \end{aligned}$$

Оскільки $\partial^{-1}\varphi \in \widetilde{H}_0^{0[1/2]}$, то за формулою (4.23) одержуємо

$$\begin{aligned} \left(\left|\partial^{-1}\varphi\right|_0^{0[1/2]}\right)^2 &= \int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty \frac{|\partial^{-1}\varphi(x)-\partial^{-1}\varphi(y)|^2}{|x-y|^2}\,dy\,dx \\ &=2\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{|\partial^{-1}\varphi(x)-\partial^{-1}\varphi(y)|^2}{|x-y|^2}\,dy\,dx \\ &\quad + 2\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{|\partial^{-1}\varphi(x)+\partial^{-1}\varphi(y)|^2}{|x+y|^2}\,dy\,dx. \end{aligned}$$

Позначимо $\psi = \mathrm{sgn}(\cdot)\partial^{-1}\varphi$ Оскільки $|x+y| \geq |x-y|$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, то ми бачимо, що

$$\begin{aligned} \left(\left|\partial^{-1}\varphi\right|_0^{0[1/2]}\right)^2 = \left(|\psi|_0^{0[1/2]}\right)^2 &= \int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty \frac{|\psi(x)-\psi(y)|^2}{|x-y|^2}\,dy\,dx \\ &\leq 4\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{|\psi(x)-\psi(y)|^2}{|x-y|^2}\,dy\,dx \\ &= 4\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{|\partial^{-1}\varphi(x)-\partial^{-1}\varphi(y)|^2}{|x-y|^2}\,dy\,dx \\ &\leq 2\left(\left|\partial^{-1}\varphi\right|_0^{0[1/2]}\right)^2. \qquad (4.28) \end{aligned}$$

З (4.26)–(4.28) випливає оцінка

$$\left|\partial^{-1}\varphi\right|_0^{0[1/2]} \leq \|\varphi\|_0^0 + \sqrt{2}\left|\partial^{-1}\varphi\right|_0^{0[1/2]} \leq 2\,|\varphi|_0^{0[1/2]}. \qquad (4.29)$$

Тому $\operatorname{sgn}(\cdot)\varphi \in \widetilde{H}_0^{1/2[-1/2]}$. Використовуючи (4.25) та (4.29) одержуємо, що $\operatorname{sgn}(\cdot)f \in \widehat{H}_0^{-1/2[1/2]}$ і оцінку (4.24) виконано. Теорему доведено. $\square$

Позначимо через $\widetilde{H}^0_{-s[1/2]}$ та $\widetilde{H}_0^{-s[1/2]}$ підпростори всіх непарних розподілів в $H^0_{-s[1/2]}$ та $H_0^{-s[1/2]}$, відповідно, а через $\widehat{H}^0_{-s[1/2]}$ та $\widehat{H}_0^{-s[1/2]}$ підпростори всіх парних розподілів в $H^0_{-s[1/2]}$ та $H_0^{-s[1/2]}$, відповідно. Позначимо також $\widetilde{\mathbf{H}}^0_{-s[1/2]} = \widetilde{H}^0_{-s[1/2]} \times \widetilde{H}^0_{-s-1[1/2]}$ та $\widehat{\mathbf{H}}^0_{-s[1/2]} = \widehat{H}^0_{-s[1/2]} \times \widehat{H}^0_{-s-1[1/2]}$ з нормою $\|\cdot\|^0_{-s[1/2]}$ і $\widetilde{\mathbf{H}}_0^{-s[1/2]} = \widetilde{H}_0^{-s[1/2]} \times \widetilde{H}_0^{-s-1[1/2]}$ та $\widehat{\mathbf{H}}_0^{-s[1/2]} = \widehat{H}_0^{-s[1/2]} \times \widehat{H}_0^{-s-1[1/2]}$ з нормою $\|\cdot\|_0^{-s[1/2]}$.

4.3. Оператор перетворення, пов'язаний із задачею Діріхле

Розглянемо підпростори

$$\widetilde{\mathcal{H}}^s = \left\{ G \in H_0^s(\mathbb{R}^2) \mid \exists g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+)\ G(x) = \frac{\partial}{\partial x_1} g(|x|) \right\},$$
$$\widetilde{\mathcal{H}}_s = \left\{ F \in H_s^0(\mathbb{R}^2) \mid \exists f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+)\ F(\sigma) = i\sigma_1 f(|\sigma|) \right\}$$

просторів $\widetilde{H}_0^s(\mathbb{R}^2)$ та $\widetilde{H}_s^0(\mathbb{R}^2)$, відповідно. Очевидно, $\widetilde{\mathcal{H}}_s = \mathcal{F}\widetilde{\mathcal{H}}^s$. Якщо $f \in \widetilde{\mathcal{H}}_s$, то існує функція f така, що $F(\sigma) = i\sigma_1 f(|\sigma|)$, $\sigma \in \mathbb{R}^2$, та

$$\|F\|_s^0 = \sqrt{\pi} \left\| |\cdot|^{3/2} f \right\|_s^0. \tag{4.30}$$

Отже, простір $\widetilde{\mathcal{H}}_s$ є повним. Оскільки перетворення Фур'є $\mathcal{F}$ є ізометричним ізоморфізмом $\widetilde{H}_0^s(\mathbb{R}^2)$ і $\widetilde{H}_s^0(\mathbb{R}^2)$ (див. теорему 1.3), то воно є ізометричним ізоморфізмом $\widetilde{\mathcal{H}}^s$ і $\widetilde{\mathcal{H}}_s$. Отже, простір $\widetilde{\mathcal{H}}^s$ є також повним. Позначимо $\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{H}}}^s = \widetilde{\mathcal{H}}^s \times \widetilde{\mathcal{H}}^{s-1}$ з нормою $|||\cdot|||_0^s$ та $\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_s = \widetilde{\mathcal{H}}_s \times \widetilde{\mathcal{H}}_{s-1}$ з нормою $|||\cdot|||_s$.

Бачимо, що простір $\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{H}}}^s$ є підпростором $\widetilde{\mathbf{H}}_0^s(\mathbb{R}^2) = \widetilde{H}_0^s(\mathbb{R}^2) \times \widetilde{H}_0^{s-1}(\mathbb{R}^2)$, а простір $\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_s$ — підпростором $\widetilde{\mathbf{H}}_s(\mathbb{R}^2) = \widetilde{H}_0^s(\mathbb{R}^2) \times \widetilde{H}_0^{s-1}(\mathbb{R}^2)$.

Позначимо $\mathbf{\Psi} : \widetilde{H}_0^{-5/2[1/2]} \to \widetilde{\mathcal{H}}^{-5/2}$, $D(\mathbf{\Psi}) = \widetilde{H}_0^{-5/2[1/2]}$,

$$\mathbf{\Psi} f = \mathcal{F}^{-1}_{\sigma \to x} \left(\frac{\sigma_1}{|\sigma|} \left(\mathcal{F} f\right)(|\sigma|) \right), \qquad f \in D(\mathbf{\Psi}).$$

Бачимо, що для оператора $\mathbf{\Psi}$ справедливі наступні три теореми.

Теорема 4.11. *Оператор $\mathbf{\Psi}$ є ізоморфізмом $\widetilde{H}_0^{s[1/2]}$ та $\widetilde{\mathcal{H}}^s$. Окрім того, $\|\mathbf{\Psi} f\|_0^s = \sqrt{\pi}|f|_0^{s[1/2]}$, $f \in D(\mathbf{\Psi})$, $s \geq -5/2$.*

Теорема 4.12. *Маємо $\Delta \mathbf{\Psi} f = \mathbf{\Psi}(f'')$, $f \in \widetilde{H}_0^{s[1/2]}$, $s \geq -1/2$.*

Теорема 4.13. *Маємо $\mathbf{\Psi} \delta' = \sqrt{2\pi} \delta_{x_1}$.*

Крім того, має місце наступна теорема.

Теорема 4.14. *Нехай $\alpha > 0$. Якщо $f \in \widetilde{H}_0^{-1/2[1/2]}$ та $G = \mathbf{\Psi} f$, то $\operatorname{supp} f \subset [-\alpha, \alpha]$ тоді і лише тоді, коли $\operatorname{supp} G \subset D_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq \alpha\}$.*

Доведення. За теоремою 4.11, $G \in \widetilde{\mathcal{H}}{-1/2}$. Позначимо $F = \mathcal{F} f$ та $g = \mathcal{F} G$. Тоді

$$g(\sigma) = \frac{\sigma_1}{|\sigma|} F(|\sigma|), \qquad \sigma \in \mathbb{R}^2. \tag{4.31}$$

Припустимо спочатку, що $\operatorname{supp} f \subset [-\alpha, \alpha]$. За лемою 4.8 $f \in \widetilde{H}^0_{-3/2}$. Тому $f \in \widetilde{H}_0^0$. Застосовуючи теорему Пелі—Вінера, бачимо, що $F \in L^2(\mathbb{R})$ і може бути продовженою до цілої функції порядку ≤ 1 і типу $\leq \alpha$. Оскільки F є непарною, то g є цілою непарною функцією того ж порядку і того ж типу, що і F. Застосовуючи узагальнену теорему Пелі—Вінера [89, Гл. 3], одержуємо $\operatorname{supp} G \subset D_\alpha$.

Нехай тепер $\operatorname{supp} G \subset D_\alpha$. Використовуючи знову узагальнену теорему Пелі—Вінера, одержуємо, що $g \in \widetilde{\mathcal{H}}^0_{-1/2}$ і може бути продовженою до цілої функції порядку ≤ 1 і типу $\le \alpha$. Оскільки g є непарною, то F є цілою непарною функцією того ж порядку і того ж типу, що і g. Скориставшись ще раз узагальненою теоремою Пелі—Вінера, одержуємо $\operatorname{supp} f \subset [-\alpha, \alpha]$. Теорему доведено. $\square$

Справедливі, також, наступні дві теореми

Теорема 4.15. *Нехай $f \in D(\mathbf{\Psi})$ і $f \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$. Тоді*

$$(\mathbf{\Psi} f)(x) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\partial}{\partial x_1} \int_{|x|}^{\infty} \frac{f(\xi)\, d\xi}{\sqrt{\xi^2 - |x|^2}}.$$

Теорема 4.16. *Нехай $G \in D(\mathbf{\Psi}^{-1})$, $G(x) = \frac{\partial}{\partial x_1} g(|x|)$, $x \in \mathbb{R}^2$, $rg \in L^1(\mathbb{R})$ і $rg \in L^\infty(-a, a)$ для кожного $a > 0$. Тоді*

$$\left(\mathbf{\Psi}^{-1} G\right)(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{d}{d\xi} \int_{\xi}^{\infty} \frac{rg(r)\, dr}{\sqrt{r^2 - \xi^2}}.$$

4.4. Оператор перетворення, пов'язаний із задачею Неймана

Розглянемо підпростори

$$\widehat{\mathcal{H}}^s = \left\{ G \in H^s_0(\mathbb{R}^2) \mid \exists g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+)\ G(x) = g(|x|) \right\},$$
$$\widehat{\mathcal{H}}_s = \left\{ F \in H^0_s(\mathbb{R}^2) \mid \exists f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+)\ F(\sigma) = f(|\sigma|) \right\}$$

просторів $\widehat{H}^s_0(\mathbb{R}^2)$ та $\widehat{H}^0_s(\mathbb{R}^2)$, відповідно. Очевидно, $\widehat{\mathcal{H}}_s = \mathcal{F}\widehat{\mathcal{H}}^s$. Якщо $f \in \widehat{\mathcal{H}}_s$, то існує функція f така, що $F(\sigma) = f(|\sigma|)$, $\sigma \in \mathbb{R}^2$, та

$$\|F\|^0_s = \sqrt{\pi} \left\| \sqrt{|\cdot|} f \right\|^0_s = \sqrt{\pi}\, \|f\|^0_{s[]1/2}. \tag{4.32}$$

Отже, простір $\widehat{\mathcal{H}}_s$ є повним. Оскільки перетворення Фур'є $\mathcal{F}$ є ізометричним ізоморфізмом $\widehat{H}^s_0(\mathbb{R}^2)$ і $\widehat{H}^0_s(\mathbb{R}^2)$ (див. теорему 1.3), то воно є ізометричним ізоморфізмом $\widehat{\mathcal{H}}^s$ і $\widehat{\mathcal{H}}_s$. Отже, простір $\widehat{\mathcal{H}}^s$ є також повним. Позначимо $\widehat{\boldsymbol{\mathcal{H}}}^s = \widehat{\mathcal{H}}^s \times \widehat{\mathcal{H}}^{s-1}$ з нормою $|||\cdot|||^s_0$ та $\widehat{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_s = \widehat{\mathcal{H}}_s \times \widehat{\mathcal{H}}_{s-1}$ з нормою $|||\cdot|||_s$. Бачимо, що простір $\widehat{\boldsymbol{\mathcal{H}}}^s$ є підпростором $\widehat{\mathbf{H}}^s_0(\mathbb{R}^2) = \widehat{H}^s_0(\mathbb{R}^2) \times \widehat{H}^{s-1}_0(\mathbb{R}^2)$, а простір $\widehat{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_s$ — підпростором $\widehat{\mathbf{H}}_s(\mathbb{R}^2) = \widehat{H}^s_0(\mathbb{R}^2) \times \widehat{H}^{s-1}_0(\mathbb{R}^2)$.

Позначимо $\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{H}}}^s = \widetilde{\mathcal{H}}^s \times \widetilde{\mathcal{H}}^{s-1}$ з нормою $|||\cdot|||^s_0$ та $\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_s = \widetilde{\mathcal{H}}_s \times \widetilde{\mathcal{H}}_{s-1}$ з нормою $|||\cdot|||_s$. Бачимо, що простір $\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{H}}}^s$ є підпростором $\widetilde{\mathbf{H}}^s_0(\mathbb{R}^2) = \widetilde{H}^s_0(\mathbb{R}^2) \times \widetilde{H}^{s-1}_0(\mathbb{R}^2)$, а простір $\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_s$ — підпростором $\widetilde{\mathbf{H}}_s(\mathbb{R}^2) = \widetilde{H}^s_0(\mathbb{R}^2) \times \widetilde{H}^{s-1}_0(\mathbb{R}^2)$.

Позначимо $\mathbf{\Phi} : \widehat{H}^{-3[1/2]}_0 \to \widehat{\mathcal{H}}^{-3/1}$, $D(\mathbf{\Phi}) = \widehat{H}^{-3/2[1/2]}_0$,

$$\mathbf{\Phi} f = \mathcal{F}^{-1}_{\sigma\to x}\left(\left(\mathcal{F} f\right)(|\sigma|)\right), \qquad f \in D(\mathbf{\Phi}).$$

Бачимо, що для оператора $\mathbf{\Phi}$ справедливі наступні три теореми.

Теорема 4.17. *Оператор $\mathbf{\Phi}$ є ізоморфізмом $\widehat{H}^{s[1/2]}_0$ та $\widehat{\mathcal{H}}^s$. Окрім того, $\|\mathbf{\Phi} f\|^s_0 = \sqrt{\pi}|f|^{-s[1/2]}_0$, $f \in D(\mathbf{\Phi})$, $s \geq -3/2$.*

Теорема 4.18. *Маємо $\Delta\mathbf{\Phi} f = \mathbf{\Phi}(f'')$, $f \in \widehat{H}^{s[1/2]}_0$, $s \geq 1/2$.*

Теорема 4.19. *Маємо $\mathbf{\Phi}\delta = \sqrt{2\pi}\delta$.*

Аналогічно теоремі 4.14 одержуємо наступну теорему.

Теорема 4.20. *Нехай $\alpha > 0$. Якщо $f \in \widehat{H}^{1/2[1/2]}_0$ та $G = \mathbf{\Phi} f$, то $\operatorname{supp} f \subset [-\alpha, \alpha]$ тоді і лише тоді, коли $\operatorname{supp} G \subset D_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq \alpha\}$.*

Справедливі, також, наступні дві теореми

Теорема 4.21. *Нехай* $f \in D(\mathbf{\Phi})$ *і* $f' \in L^{\infty}(\mathbb{R}) \cap L^{1}(\mathbb{R})$. *Тоді*

$$(\mathbf{\Phi} f)(x) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{|x|}^{\infty} \frac{f'(\xi)\, d\xi}{\sqrt{\xi^2 - |x|^2}}.$$

Теорема 4.22. *Нехай* $G \in D(\mathbf{\Phi}^{-1})$, $G(x) = g(|x|)$, $x \in \mathbb{R}^2$, $rg \in L^1(\mathbb{R})$ *і* $rg \in L^{\infty}(-a, a)$ *для кожного* $a > 0$. *Тоді*

$$\left(\mathbf{\Phi}^{-1} G\right)(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{\xi}^{\infty} \frac{rg(r)\, dr}{\sqrt{r^2 - \xi^2}}.$$

4.5. Допоміжні твердження до розділу 4

Розглянемо більш детально норму простору $H_0^{1/2}$. Нехай $\varphi \in H_0^{1/2}$. Позначимо

$$\mathfrak{N}_p(\varphi) = \sqrt{\iint_{\mathbb{R}^2} |\sigma_p| \left|(\mathcal{F}\varphi)(\sigma)\right|^2 d\sigma}, \quad p = 1, 2. \tag{4.33}$$

Оскільки $\frac{1}{\sqrt{3}}(1 + |\sigma_1| + |\sigma_2|) \le \sqrt{1 + |\sigma|^2} \le 1 + |\sigma_1| + |\sigma_2|$, то

$$\frac{1}{\sqrt[4]{3}} \Big(\|\varphi\|_0^0 + \mathfrak{N}_1(\varphi) + \mathfrak{N}_2(\varphi) \Big) \le \|\varphi\|_0^{1/2} \le \|\varphi\|_0^0 + \mathfrak{N}_1(\varphi) + \mathfrak{N}_2(\varphi). \tag{4.34}$$

Скориставшись [88, Гл. 1], одержуємо

$$\mathfrak{N}_1^2(\varphi) = \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{|\varphi(x_1, x_2) - \varphi(y_1, x_2)|^2}{|x_1 - y_1|^2}\, dy_1\, dx_1\, dx_2, \tag{4.35}$$

$$\mathfrak{N}_2^2(\varphi) = \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{|\varphi(x_1, x_2) - \varphi(x_1, y_2)|^2}{|x_2 - y_2|^2}\, dx_1\, dx_2\, dy_2. \tag{4.36}$$

При доведенні наступних лем ми постійно будемо використовувати оцінку (4.34), яка означає, що норми $\|\varphi\|_0^{1/2}$ і $\|\varphi\|_0^0 + \mathfrak{N}_1(\varphi) + \mathfrak{N}_2(\varphi)$ є еквівалентними.

Лема 4.23. *Нехай* $\varphi \in \widetilde{H}_0^{1/2}(\mathbb{R}^2)$, $\varphi_1(x) = \operatorname{sgn} x_1\, \varphi(x)$, $x \in \mathbb{R}^2$. *Тоді* $\varphi_1 \in \widehat{H}_0^{1/2}(\mathbb{R}^2)$ *і* $\|\varphi_1\|_0^{1/2} \le \sqrt{6}\, \|\varphi\|_0^{1/2}$.

Доведення. Зрозуміло, що

$$\|\varphi_1\|_0^0 = \|\varphi\|_0^0 \quad \text{і} \quad \mathfrak{N}_2(\varphi_1) = \mathfrak{N}_2(\varphi). \tag{4.37}$$

Оцінимо $\mathfrak{N}_1(\varphi_1)$ через $\mathfrak{N}_1(\varphi)$. Маємо

$$\begin{aligned}\mathfrak{N}_1^2(\varphi) = &\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\varphi(x_1,x_2)-\varphi(y_1,x_2)|^2}{|x_1-y_1|^2}\,dy_1\,dx_1\,dx_2 \\ =&2\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty} \frac{|\varphi(x_1,x_2)-\varphi(y_1,x_2)|^2}{|x_1-y_1|^2}\,dy_1\,dx_1\,dx_2 \\ &\qquad + 2\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty} \frac{|\varphi(x_1,x_2)+\varphi(y_1,x_2)|^2}{|x_1+y_1|^2}\,dy_1\,dx_1\,dx_2\end{aligned}$$

Оскільки $|x_1+y_1| \geq |x_1-y_1|$, $x_1 \geq 0$, $y_1 \geq 0$, то

$$\begin{aligned}\mathfrak{N}_1^2(\varphi_1) = &\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\varphi_1(x_1,x_2)-\varphi_1(y_1,x_2)|^2}{|x_1-y_1|^2}\,dy_1\,dx_1\,dx_2 \\ \leq&4\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty} \frac{|\varphi_1(x_1,x_2)-\varphi_1(y_1,x_2)|^2}{|x_1-y_1|^2}\,dy_1\,dx_1\,dx_2 \\ =&4\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty} \frac{|\varphi(x_1,x_2)-\varphi(y_1,x_2)|^2}{|x_1-y_1|^2}\,dy_1\,dx_1\,dx_2 \leq 2N_1^2(\varphi.)\end{aligned}$$

Враховуючи (4.37), звідси одержуємо

$$\begin{aligned}\|\varphi_1\|_0^{1/2} \leq &\|\varphi_1\|_0^0 + \mathfrak{N}_1(\varphi_1) + \mathfrak{N}_2(\varphi_1) \\ \leq&\sqrt{2}\left(\|\varphi\|_0^0 + \mathfrak{N}_1(\varphi) + \mathfrak{N}_2(\varphi)\right) \leq \sqrt{6}\,\|\varphi\|_0^{1/2}.\end{aligned}$$

Лему доведено. □

Лема 4.24. *Якщо* $\varphi \in \widetilde{H}_0^{1/2}(\mathbb{R}^2)$, *то*

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{a}^{\infty} \frac{|\varphi(x_1,x_2)|^2}{x_1}\,dx_1\,dx_2 \to 0, \quad \text{коли } a \to +\infty. \tag{4.38}$$

Доведення. Позначимо $\varphi_1(x) = H(x_1)\varphi(x)$, $x \in \mathbb{R}^2$. За лемою 4.23 маємо $\varphi_1 \in H_0^{1/2}$. Отже,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{a}^{\infty} \frac{|\varphi(x_1,x_2)|^2}{x_1}\,dx_1\,dx_2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty} \frac{|\varphi(x_1,x_2)|^2}{|x_1+y_1|^2}\,dx_1\,dx_2$$

$$\leq \frac{1}{2}\mathfrak{N}_1(\varphi_1) \leq \infty.$$

Тому (4.38) виконано. Лему доведено. $\square$

Лема 4.25. *Нехай* $a > 0$, $\varphi \in \widetilde{H}_0^{1/2}(\mathbb{R}^2)$, $\psi \in C^1(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp}\psi \subset [-1,1]$, $0 \leq \psi(\xi) \leq 1$, $\xi \in \mathbb{R}$, $\phi_a(x) = \varphi(x)\psi(x_1/a)$, $x \in \mathbb{R}^2$. *Тоді* $\phi_a \in H_0^{1/2}(\mathbb{R}^2)$.

Доведення. Маємо

$$\|\phi_a\|_0^{1/2} \leq \|\phi_a\|_0^0 + \mathfrak{N}_1(\phi_a) + \mathfrak{N}_2(\phi_a) \leq \|\varphi\|_0^0 + \mathfrak{N}_2(\varphi) + \mathfrak{N}_1(\phi_a) \leq \|\varphi\|_0^{1/2} + \mathfrak{N}_1(\phi_a).$$

Тому, щоб довести лему, досить довести, що $\mathfrak{N}_1(\phi_a) < \infty$. Зробимо це. Позначимо $I_{-\infty} = (-\infty, -a]$, $I_0 = [-a, a]$, $I_{+\infty} = [a, +\infty)$. Тоді

$$\mathfrak{N}_1^2(\phi_a) = \sum_{k,l=-\infty,0,+\infty} J_{k,l}, \quad \text{де}$$

$$J_{k,l} = \iiint_{I_k \times I_l \times \mathbb{R}} \frac{\phi_a(x_1,x_2) - \phi_a(y_1,x_2)|^2}{|x_1 - y_1|^2}\, dy_1\, dx_1\, dx_2. \tag{4.39}$$

Позначимо $M = \max\{|\psi'(\xi)| \mid \xi \in [-a,a]\}$. З теореми про середнє значення випливає, що $|\psi(x/a) - \psi(y/a)| \leq \frac{M}{a}(x-y)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Отже,

$$J_{-\infty,-\infty} = J_{+\infty,+\infty} = 0, \tag{4.40}$$

$$\begin{aligned} J_{0,0} &\leq 2\iiint_{I_0 \times I_0 \times \mathbb{R}} \frac{|\varphi(x_1,x_2) - \varphi(y_1,x_2)|^2}{|x-y|^2}\, dy_1\, dx_1\, dx_2 \\ &\qquad + 2\iiint_{I_0 \times I_0 \times \mathbb{R}} |\varphi(x)|^2 \frac{|\psi(x_1/a) - \psi(y_1/a)|^2}{|x_1 - y_1|^2}\, dy_1\, dx_1\, dx_2 \\ &\leq 2\mathfrak{N}_1^2(\varphi) + 4M\left(\|\varphi\|_{L^2(I_0 \times \mathbb{R})}\right)^2, \end{aligned} \tag{4.41}$$

$$\begin{aligned} J_{-\infty,0} = J_{0,-\infty} &= \iiint_{I_{-\infty} \times I_0 \times \mathbb{R}} \frac{|\varphi(x)\psi(x_1/a)|^2}{|x_1 - y_1|^2}\, dy_1\, dx_1\, dx_2 \\ &= \iint_{I_0 \times \mathbb{R}} \frac{|\varphi(x)\psi(x_1/a)|^2}{|x_1 + a|}\, dx_1\, dx_2 \leq 2M\left(\|\varphi\|_{L^2(I_0 \times \mathbb{R})}\right)^2, \end{aligned} \tag{4.42}$$

$$J_{+\infty,0} = J_{0,+\infty} = \iiint_{I_{+\infty}\times I_0\times\mathbb{R}} \frac{|\varphi(x)\psi(x_1/a)|^2}{|x_1-y_1|^2}\,dy_1\,dx_1\,dx_2$$
$$= \iint_{I_0\times\mathbb{R}} \frac{|\varphi(x)\psi(x_1/a)|^2}{|x_1-a|}\,dx_1\,dx_2 \le 2M\left(\|\varphi\|_{L^2(I_0\times\mathbb{R})}\right)^2. \qquad (4.43)$$

Підсумовуючи (4.39)–(4.43), ми бачимо, що $\mathfrak{N}_1(\phi_a) < \infty$, отже, $\phi_a \in H_0^{1/2}(\mathbb{R}^2)$. Лему доведено. □

Лема 4.26. *Нехай* $\psi \in C^1(\mathbb{R})$ *є парною,* $0 \le \psi(\xi) \le 1$, $\xi \in \mathbb{R}$*;* $\psi(\xi) = 1$, $|\xi| \le 1/2$*;* $\psi(\xi) = 0$, $|\xi| \ge 1$*. Нехай* $\varphi \in \widetilde{H}_0^{1/2}(\mathbb{R}^2)$, $\varphi_a(x) = \varphi(x)H(x_1)(1-\psi(x_1/a))$, $x \in \mathbb{R}^2$, $a > 0$*. Тоді* $\varphi_a \in H_0^{1/2}(\mathbb{R}^2)$, $a > 0$, *і* $\|\varphi_a\|_0^{1/2} \to 0$, *коли* $a \to \infty$.

Доведення. З лем 4.23 та 4.25 одержуємо $\varphi_a \in \widetilde{H}_0^{1/2}(\mathbb{R}^2)$, $a > 0$. Тому

$$\|\varphi_a\|_0^{1/2} \le \|\varphi_a\|_0^0 + \mathfrak{N}_1(\varphi_a) + \mathfrak{N}_2(\varphi_a).$$

Оскільки $\|\varphi_a\|_0^0 + \mathfrak{N}_2(\varphi_a) \to 0$, коли $a \to \infty$, то, щоб довести лему, досить довести, що $\mathfrak{N}_1(\varphi_a) \to 0$, коли $a \to \infty$. Зробимо це. Маємо

$$\frac{4}{3a}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{a/2}^{a} |\varphi(x)|^2\,dx_1\,dx_2 \le \int_{-\infty}^{\infty}\int_{a/2}^{\infty} \frac{|\varphi(x)|^2}{x_1 - a/4}\,dx_1\,dx_2$$
$$\le \int_{-\infty}^{\infty}\int_{a/2}^{\infty}\int_{0}^{a/4} \frac{|\varphi_a(x)|^2}{|x-y|^2}\,dx_1\,dx_2$$
$$\le \iiint_{(\mathbb{R}^2\setminus[-a/2,a/2]^2)\times\mathbb{R}} \frac{|\varphi_a(x_1,x_2)-\varphi_a(y_1,x_2)|^2}{|x_1-y_1|^2}\,dy_1\,dx_1\,dx_2 \to 0,$$
$$\text{коли } a \to \infty, \qquad (4.44)$$

Позначимо $I_1 = (-\infty, a/2]$, $I_2 = [-a/2, a]$, $I_3 = [a, +\infty)$. Тоді

$$\mathfrak{N}_1^2(\varphi_a) = \sum_{k,l=1}^{3} J_{k,l}, \quad \text{де}$$

$$J_{k,l} = \iiint_{I_k \times I_l \times \mathbb{R}} \frac{\varphi_a(x_1, x_2) - \varphi_a(y_1, x_2)|^2}{|x_1 - y_1|^2}\, dy_1\, dx_1\, dx_2. \tag{4.45}$$

Маємо

$$J_{11} = 0, \tag{4.46}$$

$$\begin{aligned} J_{22} \leq & 2 \iiint_{I_2 \times I_2 \times \mathbb{R}} \frac{|\varphi(x_1, x_2) - \varphi(y_1, x_2)|^2}{|x_1 - y_1|^2}\, dy_1\, dx_1\, dx_2 \\ & + 2 \iiint_{I_2 \times I_2 \times \mathbb{R}} |\varphi(x)|^2 \frac{|\psi(x_1/a) - \psi(y_1/a)|^2}{|x_1 - y_1|^2}\, dy_1\, dx_1\, dx_2, \end{aligned} \tag{4.47}$$

$$J_{33} = \iiint_{I_3 \times I_3 \times \mathbb{R}} \frac{|\varphi(x_1, x_2) - \varphi(y_1, x_2)|^2}{|x_1 - y_1|^2}\, dy_1\, dx_1\, dx_2, \tag{4.48}$$

$$\begin{aligned} J_{12} = J_{21} = & \iiint_{I_1 \times I_2 \times \mathbb{R}} |\varphi(x)|^2 \frac{|1 - \psi(x_1/a)|^2}{|x_1 - y_1|^2}\, dy_1\, dx_1\, dx_2 \\ \leq & \iint_{I_2 \times \mathbb{R}} |\varphi(x)|^2 \frac{|1 - \psi(x_1/a)|^2}{x_1 - a/2}\, dx_1\, dx_2, \end{aligned} \tag{4.49}$$

$$J_{13} = J_{31} = \iiint_{I_1 \times I_3 \times \mathbb{R}} \frac{|\varphi(x)|^2}{|x_1 - y_1|^2}\, dy_1\, dx_1\, dx_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_a^{\infty} \frac{|\varphi(x)|^2}{x_1 - a/2}\, dx, \tag{4.50}$$

$$\begin{aligned} J_{23} = J_{32} = & 2 \iiint_{I_2 \times I_3 \times \mathbb{R}} \frac{|\varphi(x_1, x_2) - \varphi(y_1, x_2)|^2}{|x_1 - y_1|^2}\, dy_1\, dx_1\, dx_2 \\ & + 2 \iiint_{I_2 \times I_3 \times \mathbb{R}} |\varphi(y_1, x_2)|^2 \frac{|\psi(y_1/a)|^2}{|x_1 - y_1|^2}\, dy_1\, dx_1\, dx_2, \\ = & 2 \iiint_{I_2 \times I_3 \times \mathbb{R}} \frac{|\varphi(x_1, x_2) - \varphi(y_1, x_2)|^2}{|x_1 - y_1|^2}\, dy_1\, dx_1\, dx_2 \\ & + 2 \iint_{I_2 \times \mathbb{R}} |\varphi(y_1, x_2)|^2 \frac{|\psi(y_1/a)|^2}{|a - y_1|^2}\, dy_1\, dx_2. \end{aligned} \tag{4.51}$$

Позначимо $M = \max\{|\psi'(\xi)| \mid \xi \in [-a, a]\}$. З теореми про середнє значення випливає, що

$$|\psi(x/a) - \psi(y/a)| \leq \frac{M}{a}(x - y), \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Отже,

$$\iiint_{I_2\times I_2\times\mathbb{R}} |\varphi(x)|^2 \frac{|\psi(x_1/a)-\psi(y_1/a)|^2}{|x-y|^2}\,dy_1\,dx_1\,dx_2$$
$$\le \frac{M^2}{2a}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{a/2}^{a}|\varphi(x)|^2\,dx_1\,dx_2, \tag{4.52}$$

$$\int_{I_2\times\mathbb{R}} |\varphi(x)|^2 \frac{|1-\psi(x_1/a)|^2}{x_1-a/2}\,dx_1\,dx_2$$
$$\le \frac{M^2}{a^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{a/2}^{a}|\varphi(x)|^2(x_1-a/2)\,dx_1\,dx_2$$
$$\le \frac{M^2}{2a}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{a/2}^{a}|\varphi(x)|^2\,dx_1\,dx_2, \tag{4.53}$$

$$\int_{I_2\times\mathbb{R}} |\varphi(y_1,x_2)|^2 \frac{|\psi(y_1/a)|^2}{|a-y_1|^2}\,dy_1\,dx_2$$
$$\le \frac{M^2}{a^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{a/2}^{a}|\varphi(y_1,x_2)|^2(a-y_1)\,dy_1\,dx_2$$
$$\le \frac{M^2}{2a}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{a/2}^{a}|\varphi(y_1,x_2)|^2\,dy_1dx_2. \tag{4.54}$$

Підсумовуючи (4.44)–(4.54), одержуємо

$$\mathfrak{N}_1^2(\varphi_a) \le \iiint_{(\mathbb{R}^2\setminus[-a/2,a/2]^2)\times\mathbb{R}} \frac{|\varphi(x_1,x_2)-\varphi(y_1,x_2)|^2}{|x_1-y_1|^2}\,dy_1\,dx_1\,dx_2$$
$$+\,2\int_{-\infty}^{\infty}\int_{a}^{\infty}\frac{|\varphi(x)|^2}{x_1-a/2}\,dx_1\,dx_2$$
$$+\,\frac{3M^2}{a}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{a/2}^{a}|\varphi(x)|^2\,dx_1\,dx_2 \to 0,\ \text{коли } a\to\infty.$$

Лему доведено. □

З леми 4.26 одразу одержуємо наступну лему.

Лема 4.27. *Нехай* $\psi\in C^1(\mathbb{R})$ *є парною,* $0\le\psi(\xi)\le 1$, $\xi\in\mathbb{R}$; $\psi(\xi)=1$, $|\xi|\le 1/2$; $\psi(\xi)=0$, $|\xi|\ge 1$. *Нехай* $f\in \widetilde{H}_0^{-1/2}(\mathbb{R}^2)$, $f_n(x)=f(x)\psi(x_1/n)$,

$x \in \mathbb{R}^2$, $n \in \mathbb{N}$. Тоді послідовність $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \widetilde{H}^{-1/2}$ слабко збігається до f в $\widetilde{H}_0^{-1/2}(\mathbb{R}^2)$, коли $n \to \infty$.

Висновки до розділу 4

У цьому розділі введено та вивчено деякі модифікації просторів Соболєва, зокрема, простори $H_0^{s[1/2]}$, $H_{s[1/2]}^0$, і оператори перетворення, пов'язані із задачею Діріхле та задачею Неймана для хвильового рівняння із змінними коефіцієнтами на півплощині. Результати цього розділу застосовано в розділі 5.

РОЗДІЛ 5.

ЗАДАЧІ КЕРУВАННЯ ДЛЯ ХВИЛЬОВОГО РІВНЯННЯ ЗІ СТАЛИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

5.1. Керованість хвильового рівняння на півосі

У цьому підрозділі досліджено керованість хвильового рівняння зі сталими коефіцієнтами на півосі. Результати проілюстровано прикладами 7.1–7.13 в підрозділі 7.

5.1.1. Керованість умовами Діріхле. Розглянемо хвильове рівняння

$$w_{tt} = w_{xx} - q^2 w, \qquad x > 0,\ t \in (0,T), \tag{5.1}$$

кероване крайовою умовою Діріхле

$$w(0,t) = u(t), \qquad t \in (0,T), \tag{5.2}$$

за початкових умов

$$w(x,0) = w_0^0(x), \quad w_t(x,0) = w_1^0(x), \qquad x > 0, \tag{5.3}$$

де $T > 0$, $q \geq 0$ — деякі сталі; $w(\cdot,t) \in \widetilde{H}_+^0 = H_\oplus^0$, $t \in [0,T]$; $\left(\frac{d}{dt}\right)^m w : [0,T] \to H_\oplus^{-m}$, $m = 0,1,2$; $u \in L^\infty(0,T)$ — керування; $w_0^0 \in \widetilde{H}_+^0$, $w_1^0 \in$

$\widetilde{H}_{+}^{-1}$ — початкові дані.

Позначимо через w, w_0^0 та w_1^0 непарні продовження за x для w, w_0^0 та w_1^0, відповідно. Скориставшись теоремою 2.3, бачимо, що w задовольняє систему

$$\mathrm{w}_{tt} = \mathrm{w}_{xx} - q^2\mathrm{w} - 2u\delta', \qquad x \in \mathbb{R},\ t \in (0,T), \tag{5.4}$$

$$\mathrm{w}(x,0) = \mathrm{w}_0^0(x), \quad \mathrm{w}_t(x,0) = \mathrm{w}_1^0(x), \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{5.5}$$

де δ — це розподіл Дірака за x; $\left(\frac{d}{dt}\right)^m \mathrm{w} : [0,T] \to \widetilde{H}^{-m}$, $m = 0,1,2$; $\mathrm{w}_0^0 \in \widetilde{H}^0$, $\mathrm{w}_1^0 \in \widetilde{H}^{-1}$. Нижче у висновку 5.3 ми доведемо, що для розв'язку w системи (5.4), (5.5) виконано умову

$$\mathrm{w}(+0,t) = u(t) \quad \text{м. с. на } [0,T], \tag{5.6}$$

отже, звуження цього розв'язку на $\mathbb{R}_+$ задовольняє систему (5.1)–(5.3). Таким чином, системи (5.1)–(5.3) і (5.4), (5.5) є еквівалентними, тому далі ми розглядатимемо систему (5.4), (5.5) замість (5.1)–(5.3). Позначимо $\mathrm{W}^0 = \begin{pmatrix} \mathrm{w}_0^0 \\ \mathrm{w}_1^0 \end{pmatrix}$. Бачимо, що $\mathrm{W}^0 \in \widetilde{\mathbf{H}}^0$. Зрозуміло, що ця керована система має вигляд (1.11), (1.12).

Оскільки за теоремою 1.3 простори H^m та H_0^m є ізоморфними, $m \in \mathbb{Z}$, то властивості керованості (див. 1.21–1.23) системи (5.4), (5.5) в просторах H^m збігаються з властивостями керованості цієї системи в просторах H_0^m. Далі нам буде зручно перейти до розгляду цієї системи в просторах H_0^m, тому що ми застосовуватимо перетворення Фур'є та теорему 1.3 про те, що перетворення Фур'є є ізометричним ізоморфізмом H_0^m та H_m^0.

Позначимо через $\mathcal{A} : \widetilde{H}_0^0 \to \widetilde{H}_0^{-2}$ диференціальний оператор $\left(\frac{d}{dx}\right)^2 - q^2$, а через $\mathcal{B} : \mathbb{R} \to \widetilde{H}_0^{-2}$ — оператор множення на $-2\delta'(x)$. Отже, (5.4), (5.5) перетворюється на (1.11), (1.12), де $H_0 = \widetilde{H}_0^0$, $H_1 = \widetilde{H}_0^{-1}$ та $H_2 = \widetilde{H}_0^{-2}$. Керована система (1.13), (1.14) еквівалентна системі (1.11), (1.12), а, отже, і системам (5.1)–(5.3) та (5.4), (5.5). Тому далі ми будемо розглядати систему (1.13), (1.14), де $\mathbf{H} = \widetilde{\mathbf{H}}_0^0$ та $\mathrm{H} = \widetilde{\mathbf{H}}_0^{-1}$. Беручи до уваги теорему 1.3 та застосовуючи до (1.13), (1.14) перетворення Фур'є за x, одержуємо

$$\mathrm{V}' = \widetilde{\mathbf{G}}\mathrm{V} + \widetilde{\mathbf{Q}}u, \qquad t \in (0, T), \tag{5.7}$$

$$\mathrm{V}(0) = \mathrm{V}^0 \tag{5.8}$$

де $\mathrm{V}(\cdot, t) = \mathcal{F}_{x\to\sigma}\mathrm{W}(\cdot, t)$, $t \in [0, T]$, $\mathrm{V}^0 = \mathcal{F}_{x\to\sigma}\mathrm{W}^0$; оператор $\widetilde{\mathbf{G}} : \widetilde{\mathbf{H}}_{-1} \to \widetilde{\mathbf{H}}_{-1}$, $D(\widetilde{\mathbf{G}}) = \widetilde{\mathbf{H}}_0$, є оператором множення на матрицю

$$G(\sigma) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\left(q^2 + \sigma^2\right) & 0 \end{pmatrix},$$

а оператор $\widetilde{\mathbf{Q}} : \mathbb{R} \to \widetilde{\mathbf{H}}_{-1}$ є оператором множення на вектор

$$\widetilde{Q}(\sigma)\sqrt{\frac{\pi}{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -i\sigma \end{pmatrix}.$$

За висновками 5.63 та 5.64 оператор $\widetilde{\mathbf{G}}$ є інфінітезимальним генератором C_0-групи $\widetilde{\mathbf{\Sigma}} : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(\widetilde{\mathbf{H}}_{-1})$, де для кожного $t \in \mathbb{R}$ оператор $\widetilde{\mathbf{\Sigma}}(t) : \widetilde{\mathbf{H}}_{-1} \to \widetilde{\mathbf{H}}_{-1}$, $D(\widetilde{\mathbf{\Sigma}}(t)) = \widetilde{\mathbf{H}}_{-1}$, є оператором множення на матрицю

$$\Sigma(\sigma, t) = \begin{pmatrix} \cos\left(t\sqrt{\sigma^2 + q^2}\right) & \frac{\sin\left(t\sqrt{\sigma^2+q^2}\right)}{\sqrt{\sigma^2+q^2}} \\ -\sqrt{\sigma^2 + q^2}\sin\left(t\sqrt{\sigma^2 + q^2}\right) & \cos\left(t\sqrt{\sigma^2 + q^2}\right) \end{pmatrix}, \quad \sigma \in \mathbb{R}. \tag{5.9}$$

Тому єдиним розв'язком (5.7), (5.8) є

$$\mathrm{V}(t)=\widetilde{\boldsymbol{\Sigma}}(t)\left(\mathrm{V}^0+\int_0^t\widetilde{\boldsymbol{\Sigma}}(-\xi)\widetilde{\mathbf{Q}}u(\xi)\,d\xi\right),\qquad t\in[0,T]. \tag{5.10}$$

Звідси, позначаючи

$$\mathcal{E}(\cdot,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{F}_{\sigma\to x}\Sigma(\cdot,t),\qquad t\in\mathbb{R},$$

та застосовуючи теорему 1.3, одержуємо, що оператори $\mathbb{S}(t):\widetilde{\mathbf{H}}_0^{-1}\to\widetilde{\mathbf{H}}_0^{-1}$, $D(\mathbb{S}(t))=\widetilde{\mathbf{H}}_0^{-1}$, $t\in\mathbb{R}$, що є операторами згортки (за x) з $\mathcal{E}(\cdot,t)$, утворюють C_0-групу $\mathbb{S}:\mathbb{R}\to\mathcal{L}(\widetilde{\mathbf{H}}_0^{-1})$, яку генерує оператор $\mathbf{A}$ керованої системи (1.13), (1.14). Тому для кожного $u\in L^\infty(0,T)$ єдиний розв'язок цієї системи має вигляд (1.15). З (5.187) та (5.189) випливають оцінки

$$|||\mathbb{S}(t)|||_0^0=|||\mathbb{S}(t)|||^0\le Q(t)=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{q} & \text{для } q>0\\ 2\sqrt{(1+t^2)} & \text{для } q=0\end{bmatrix},\quad t\in\mathbb{R}. \tag{5.11}$$

У [19] було показано, що для всіх $(x,t)\in\mathbb{R}^2$ маємо

$$\mathcal{E}(x,t)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\partial/\partial t & 1\\ (\partial/\partial t)^2 & \partial/\partial t\end{pmatrix}\Big(J_0\Big(q\sqrt{t^2-x^2}\Big)(H(x+t)-H(x-t))\Big), \tag{5.12}$$

зокрема, для $q=0$ маємо

$$\mathcal{E}(x,t)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\delta(x+t)+\delta(x-t) & H(x+t)-H(x-t)\\ \delta'(x+t)-\delta'(x-t) & \delta(x+t)+\delta(x-t)\end{pmatrix}. \tag{5.13}$$

Беручи до уваги (1.15), (5.10), (5.11) і (5.12), одержуємо наступні дві теореми

Теорема 5.1. *Нехай* $u \in L^\infty(0,T)$ *та* $\mathrm{W}^0 \in \widetilde{\mathbf{H}}^0$. *Тоді єдиним розв'язком системи* (5.4), (5.5) *є*

$$\begin{aligned}
\mathrm{w}(x,t) =&\mathbf{J}_t(x,t) * \mathrm{w}_0^0(x) + \mathbf{J}(x,t) * \mathrm{w}_1^0(x) \\
&- \frac{\partial}{\partial x}\left((H(x+t) - H(x-t)) \int_{|x|}^t J_0\left(\sqrt{\tau^2 - x^2}\right) u(t-\tau)\, d\tau \right) \\
=&\mathbf{J}_t(x,t) * \mathrm{w}_0^0(x) + \mathbf{J}(x,t) * \mathrm{w}_1^0(x) \\
&+ (H(x+t) - H(x-t)) \Bigg(u(t-|x|) \operatorname{sgn} x \\
&\quad -qx \int_{|x|}^t \frac{J_1\left(q\sqrt{\tau^2 - x^2}\right)}{\sqrt{\tau^2 - x^2}} u(t-\tau)\, d\tau \Bigg), \quad x \in \mathbb{R},\ t \geq 0,
\end{aligned} \tag{5.14}$$

де $*$ *є згорткою за* x, *а*

$$\mathbf{J}(x,t) = \frac{1}{2} J_0\left(q\sqrt{t^2 - x^2}\right) (H(x+t) - H(x-t)), \qquad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0.$$

Теорема 5.2. *Нехай* $u \in L^\infty(0,T)$ *та* $\mathrm{W}^0 \in \widetilde{\mathbf{H}}^0$. *Тоді розв'язок системи* (5.4), (5.5) *задовольняє умову*

$$\left|\left|\left| \begin{pmatrix} \mathrm{w}(\cdot,t) \\ \mathrm{w}_t(\cdot,t) \end{pmatrix} \right|\right|\right|^0 \leq Q(T) \left\|\mathrm{W}^0\right\|^0 + \sqrt{2T}(1+T^2)(1+q^2) \left\|u\right\|_{L^\infty(0,T)},\ t \in [0,T].$$

тобто, задача (5.4), (5.5) *є коректно поставленою. Тут* $Q(T)$ *є сталою з оцінки* (5.11).

Для того, щоб довести, що системи (5.1)–(5.3) і (5.4), (5.5) є еквівалентними нам потрібен наступний висновок, який одразу випливає з теореми 5.1.

Висновок 5.3. *Нехай* w *є розв'язком керованої системи* (5.4), (5.5) *для деяких* $u \in L^\infty(0,T)$ *та* $\mathrm{W}^0 \in \widetilde{\mathbf{H}}^0$. *Тоді виконано умову* (5.6).

Обчислимо тепер оператор $\mathbf{\Lambda} : L^2(\mathbb{R}_+) \to \widetilde{\mathbf{H}}_0^{-1}$,

$$\mathbf{\Lambda} f = \lim_{T\to\infty} \int_0^T \mathbb{S}(-\xi)\mathbf{B} f(\xi)\, d\xi,$$

який було введено в підрозділі 1.4, та знайдемо його область визначення, тобто, множину всіх тих $f \in L^2(\mathbb{R}_+)$, для яких границя в правій частині існує. Маємо

$$\begin{aligned}
\mathbf{\Lambda} f = &\lim_{T\to\infty} \int_0^T \mathcal{E}(\cdot,-\xi) * \begin{pmatrix} 0 \\ -2\delta'(\cdot) \end{pmatrix} f(\xi)\, d\xi \\
=&\mathcal{F}_{\sigma\to x} \lim_{T\to\infty} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_0^T \Sigma(\sigma,t) \begin{pmatrix} 0 \\ -i\sigma \end{pmatrix} f(\xi)\, d\xi \\
=&\mathcal{F}_{\sigma\to x} \lim_{T\to\infty} \sqrt{\frac{\pi}{2}} i\sigma \int_0^T \begin{pmatrix} \frac{\sin\left(\xi\sqrt{\sigma^2+q^2}\right)}{\sqrt{\sigma^2+q^2}} \\ -\cos\left(\xi\sqrt{\sigma^2+q^2}\right) \end{pmatrix} f(\xi)\, d\xi \\
=&-\mathcal{F}_{\sigma\to x} \begin{pmatrix} \frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2+q^2}} \left(\mathcal{F}_{\xi\to\sigma} \mathbf{I}^0_{\mathrm{odd}} f\right)\left(\sqrt{\sigma^2+q^2}\right) \\ i\sigma \left(\mathcal{F}_{\xi\to\sigma} \mathbf{I}^0_{\mathrm{even}} f\right)\left(\sqrt{\sigma^2+q^2}\right) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Нагадаємо означення для Ψ та $\widehat{\Psi}$. Маємо $\Psi : \widetilde{H}_0^0 \to \widetilde{H}_0^0$, $D(\Psi) = \widetilde{H}_0^0$,

$$\Psi g = \mathcal{F}^{-1}_{\sigma\to x} \left(\frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2+q^2}} (\mathcal{F} g) \left(\sqrt{\sigma^2+q^2}\right)\right), \qquad g \in D(\Psi), \tag{5.15}$$

та $\widehat{\Psi} : \widetilde{H}_0^0 \to \widetilde{H}_0^{-1}$, $D(\widehat{\Psi}) = D(\Psi) = \widetilde{H}_0^0$,

$$\widehat{\Psi} g = \frac{d}{dx} \mathcal{F}^{-1}_{\sigma\to x} \left((\mathcal{F}(\operatorname{sgn} t\, g)) \left(\sqrt{\sigma^2+q^2}\right)\right), \qquad g \in D(\widehat{\Psi}),. \tag{5.16}$$

бачимо, що

$$\mathbf{\Lambda} f = -\begin{pmatrix} \Psi \mathbf{I}^0_{\mathrm{odd}} f \\ \widehat{\Psi} \mathbf{I}^0_{\mathrm{odd}} f \end{pmatrix}, \qquad f \in D(\mathbf{\Lambda}) = L^2(\mathbb{R}_+), \tag{5.17}$$

Зрозуміло, що для $q = 0$ маємо $\Psi = \mathrm{Id}$ та $\widehat{\Psi} = \frac{d}{dx}\operatorname{sgn}(\cdot)$. Оператори Ψ та $\widehat{\Psi}$ було вивчено в підрозділі 2.2.

У підрозділі 1.4 було показано, що множини $\mathcal{L}_T$, $\overline{\mathcal{L}}_T$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}_T$, $\overline{\mathcal{M}}_T$, $\mathcal{M}$ відповідають за властивості керованості керованості системи (1.13), (1.14), тому далі ми проведемо дослідження цих множин. Для заданого $T > 0$ обчислимо $\mathcal{M}_T$, $\overline{\mathcal{M}}_T$ та $\mathcal{M}$.

Теорема 5.4. *Нехай $T > 0$ та $\mathrm{W}^0 \in \widetilde{\mathbf{H}}^0_0$. Тоді $\mathrm{W}^0 \in \mathcal{M}_T$ в тому і лише тому випадку, коли виконано три умови*

$$\operatorname{supp} \mathrm{w}^0_0 \subset [-T, T], \quad \mathrm{w}^0_1 - \widehat{\Psi}_T \Psi_T^{-1} \mathrm{w}^0_0 = 0 \quad \textit{та} \quad \mathrm{w}^0_0 \in L^\infty(\mathbb{R}). \tag{5.18}$$

Доведення. Якщо $\mathrm{W}^0 \in \mathcal{M}_T$, то існує $u \in L^\infty(\mathbb{R}_+)$ таке, що $\operatorname{supp} u \in [0, T]$ і $\mathrm{W}^0 + \mathbf{\Lambda} u = 0$. Остання рівність означає $\Psi_T \widetilde{u} = \mathrm{w}^0_0$ і $\widehat{\Psi}_T \widetilde{u} = \mathrm{w}^0_1$ для $\widetilde{u} = \mathbf{I}^0_{\mathrm{odd}} u$. Очевидно, що $\widetilde{u} \in \widetilde{H}^0_0[-T, T]$. З теорем 2.8 та 2.9 випливає (5.18).

Нехай тепер для W^0 виконано умови (5.18). Тоді, позначаючи $\widetilde{u} = \Psi_T^{-1} \mathrm{w}^0_0$, бачимо, що $\widetilde{u} \in L^\infty(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp} \widetilde{u} \subset [-T, T]$, $\widetilde{u}$ є непарним, $\Psi_T \widetilde{u} = \mathrm{w}^0_0$ і $\widehat{\Psi}_T \widetilde{u} = \mathrm{w}^0_1$. Тому $\mathrm{W}^0 \in \mathcal{M}_T$. Теорему доведено. □

Скориставшись (1.19), одержуємо наступну теорему.

Теорема 5.5. *Нехай $T > 0$ та $\mathrm{W}^0 \in \widetilde{\mathbf{H}}_0^0$. Тоді $\mathrm{W}^0 \in \overline{\mathcal{M}}_T$ в тому і лише тому випадку, коли виконано дві умови*

$$\operatorname{supp} \mathrm{w}_0^0 \subset [-T, T] \quad \text{та} \quad \mathrm{w}_1^0 - \widehat{\Psi}_T \Psi_T^{-1} \mathrm{w}_0^0 = 0. \tag{5.19}$$

Теорема 5.6. *Справедливі твердження:*

(i) *Якщо $q > 0$, то $\mathcal{M} = \widetilde{\mathbf{H}}_0^0$.*

(ii) *Якщо $q = 0$, то $\mathcal{M} = \Big\{\mathrm{W}^0 \in \widetilde{\mathbf{H}}_0^0 \mid \mathrm{w}_1^0 - \big(\operatorname{sgn}(\cdot)\, \mathrm{w}_0^0\big)' = 0\Big\}$.*

Доведення. (i) Нехай $q > 0$ та $\mathrm{W}^0 \in \widetilde{\mathbf{H}}_0^0$. Тоді за теоремами 2.18 та 2.20 маємо

$$\begin{pmatrix} \mathrm{w}_0^0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \overline{\Psi(N(\widehat{\Psi}))} \quad \text{та} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{w}_1^0 \end{pmatrix} \in \overline{\widehat{\Psi}(N(\Psi))}.$$

Тому існують послідовності $\{u_0^n\}_{n=1}^\infty \subset N(\widehat{\Psi})$ та $\{u_0^n\}_{n=1}^\infty \subset N(\Psi)$ такі, що

$$\left\|\Psi u_0^n - \mathrm{w}_0^0\right\|_0^0 \to 0 \quad \text{та} \quad \left\|\widehat{\Psi} u_1^n - \mathrm{w}_1^0\right\|_0^{-1} \to 0, \quad \text{коли } n \to \infty.$$

Тому для $u^n = u_0^n + u_1^n$ маємо $u^n \in \widetilde{H}_0^0$, $n \in \mathbb{N}$, і

$$\left\|\Psi u^n - \mathrm{w}_0^0\right\|_0^0 \to 0 \quad \text{та} \quad \left\|\widehat{\Psi} u^n - \mathrm{w}_1^0\right\|_0^{-1} \to 0, \quad \text{коли } n \to \infty. \tag{5.20}$$

Очевидно, що для кожного $n \in \mathbb{N}$ функцію u^n можна наблизити в $\widetilde{H}_0^0$ обмеженими функціями з компактними носіями. Враховуючи (5.20), одержуємо $\mathrm{W}^0 \in \mathcal{M}$. Оскільки ми розглядали довільне $\mathrm{W}^0 \in \widetilde{\mathbf{H}}_0^0$, то $\mathcal{M} = \widetilde{\mathbf{H}}_0^0$.

(ii) Нехай $q = 0$. Якщо $\mathrm{W}^0 \in \mathcal{M}$, то існують послідовності $\{T^n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}_+$ і $\{u^n\}_{n=1}^\infty \subset L^\infty(\mathbb{R}_+)$ такі, що $\operatorname{supp} u^n \in [0, T_n]$, $n \in \mathbb{N}$, і $\mathrm{W}^0 + \boldsymbol{\Lambda} u^n \to 0$

в $\widehat{\mathbf{H}}_0^1$, коли $n \to \infty$. Остання границя означає, що

$$\left\|\mathrm{w}_0^0 - \widetilde{u}_n\right\|_0^0 \to 0 \quad \text{та} \quad \left\|\mathrm{w}_1^0 - \widetilde{u}_n{}' \operatorname{sgn}(\cdot)\right\|_0^{-1} \to 0, \quad \text{коли } n \to \infty, \tag{5.21}$$

де $\widetilde{u}_n$ є непарним продовженням u_n. Отже,

$$\mathrm{w}_1^0 - \left(\operatorname{sgn}(\cdot)\,\mathrm{w}_0^0\right)' = 0 \tag{5.22}$$

Нехай тепер для $\mathrm{W}^0 \in \widetilde{\mathbf{H}}_0^0$ виконано умову (5.22). Для будь-якої послідовності $\{T_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathbb{R}_+$ такої, що $T_n \to \infty$, коли $n \to \infty$, існує послідовність $\{\widetilde{u}_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L^\infty(\mathbb{R})$ така, що $\operatorname{supp} \widetilde{u}_n \subset [-T_n, T_n]$, $n \in \mathbb{N}$, та

$$\left\|\mathrm{w}_0^0 - \widetilde{u}_n\right\|^0 \to 0, \quad \text{коли } n \to \infty. \tag{5.23}$$

Тоді для $\widetilde{u}_n$ виконано умови (5.21), тобто, $\mathrm{W}^0 \in \mathcal{M}$. Теорему доведено. □

Як ми вже згадували на початку цього пункту, простори $\widetilde{\mathbf{H}}^m$ та $\widetilde{\mathbf{H}}_0^m$ ізоморфні, і $\widetilde{\mathbf{H}}^m = \widetilde{\mathbf{H}}_0^m$ (як множини), $m \in \mathbb{Z}$. Тому в теоремах 5.4–5.6 простір $\widetilde{\mathbf{H}}_0^0$ можна замінити на $\widetilde{\mathbf{H}}^0$ і систему (1.13), (1.14) також розглядати в просторах $\mathbf{H} = \widetilde{\mathbf{H}}^0$ і $\mathrm{H} = \widetilde{\mathbf{H}}^{-1}$ (див. теорему 1.4).

Враховуючи (5.11) та теореми 5.4 і 5.5, з твердження 1.24 одержуємо критерій керованості для системи (5.4), (5.5) за заданий час.

Теорема 5.7. *Нехай $T > 0$.*

(i) *Стан $\mathrm{W}^0 \in \widetilde{\mathbf{H}}^0$ системи (5.4), (5.5) є наближено L^∞-керованим за заданий час T тоді і лише тоді, коли виконано дві умови:*

$$\operatorname{supp} \mathrm{w}_0^0 \subset [-T, T], \tag{5.24}$$

$$\mathrm{w}_1^0 - \widehat{\Psi}_T \Psi_T^{-1} \mathrm{w}_0^0 = 0. \tag{5.25}$$

(ii) *Стан* $\mathrm{W}^0 \in \widetilde{\mathbf{H}}^0$ *системи* (5.4), (5.5) *є* L^∞*-керованим за заданий час* T *тоді і лише тоді, коли виконано три умови:* (5.24), (5.25) *та*

$$\mathrm{w}_0^0 \in L^\infty(\mathbb{R}). \tag{5.26}$$

Крім того, за умов (5.24)–(5.26) *керування* $u(t) = \mathrm{w}_0^0(t)$, $t \in [0, T]$, *розв'язує задачу* L^∞*-керованості за час* T.

Зауваження 5.8. *Для* $q = 0$ *умова* (5.25) *набирає вигляду*

$$\mathrm{w}_1^0 - \big(\operatorname{sgn}(\cdot)\,\mathrm{w}_0^0\big)' = 0. \tag{5.27}$$

У випадку $q > 0$ наступний критерій керованості системи (5.4), (5.5) за вільний час одразу випливає з тверджень 1.24, 1.25, (5.11) та теореми 5.6.

Теорема 5.9. *Для* $q > 0$ *будь-який стан* $\mathrm{W}^0 \in \widetilde{\mathbf{H}}^0$ *системи* (5.4), (5.5) *є наближено* L^∞*-керованим за вільний час.*

Для $q = 0$ оператори групи $\mathbb{S}$ не є рівномірно обмеженими відносно $t \in \mathbb{R}$ (див. (5.11)). Тому твердження 1.25 в цьому випадку застосувати неможливо. Проте висновок цього твердження залишається в силі, тобто, $\mathcal{L} = \mathcal{M}$ і для $q = 0$. Це випливає з наступної теореми.

Теорема 5.10. *Для* $q = 0$ *стан* $\mathrm{W}^0 \in \widetilde{\mathbf{H}}^0$ *системи* (5.4), (5.5) *є наближено* L^∞*-керованим за вільний час тоді і лише тоді, коли виконано умову* (5.27).

Доведення. Достатність (5.27). Нехай для $\mathrm{W}^0 \in \widetilde{\mathbf{H}}^0$ виконано (5.27) та нехай $\{T_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}_+$, $T_n \to \infty$, коли $n \to \infty$. Зрозуміло, що існує послідовність $\{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L^{\infty}(\mathbb{R})$ така, що $\operatorname{supp} u_n \subset [-T_n, T_n]$, $n \in \mathbb{N}$, та

$$\left\|\mathrm{w}_0^0 - u_n\right\|^0 \to 0, \quad \text{коли } n \to \infty. \tag{5.28}$$

Скориставшись формулами (1.15), (5.13), (5.15) та (5.16), одержуємо, що

$$\mathrm{W}^n(x, T_n) = \mathbb{S}(T_n) \begin{pmatrix} \mathrm{w}_0^0 - u_n \\ \big(\operatorname{sgn}(\cdot)(\mathrm{w}_0^0 - u_n)\big)' \end{pmatrix} (x)$$
$$= \begin{pmatrix} (\mathrm{w}_0^0 - u_n)(x + T_n) H(x + T_n) - (\mathrm{w}_0^0 - u_n)(T_n - x) H(T_n - x) \\ \big((\mathrm{w}_0^0 - u_n)(x + T_n) H(x + T_n) + (\mathrm{w}_0^0 - u_n)(T_n - x) H(T_n - x)\big)' \end{pmatrix}$$

де W^n є розв'язком задачі (1.13), (1.13) з $u = u_n$, $T = T_n$, $n \in \mathbb{N}$. Оскільки

$$\|f'\|^{-1} = \|f'\|_0^{-1} = \|\sigma \mathcal{F} f\|_{-1}^0 \le \|\mathcal{F} f\|_0^0 = \|f\|_0^0 = \|f\|^0, \quad f \in H^0, \tag{5.29}$$

то, враховуючи (5.28), звідси одержуємо

$$|||\mathrm{W}^n(\cdot, T_n)|||^0 \le 2\left\|\mathrm{w}_0^0 - u_n\right\|^0 \to 0, \quad \text{коли } n \to \infty. \tag{5.30}$$

Отже, стан $\mathrm{W}^0 \in \widetilde{\mathbf{H}}^0$ системи (5.4), (5.5) є наближено L^{∞}-керованим за вільний час.

Необхідність (5.27). Нехай стан $\mathrm{W}^0 \in \widetilde{\mathbf{H}}^0$ системи (5.4), (5.5) є наближено L^{∞}-керованим за вільний час, тобто існують послідовності $\{T_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}_+$ та $\{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L^{\infty}(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp} u_n \subset [-T_n, T_n]$, $n \in \mathbb{N}$, такі, що для розв'язку $\mathrm{W}^n = \begin{pmatrix} \mathrm{W}_0^n \\ \mathrm{W}_1^n \end{pmatrix}$ задачі (1.13), (1.13) з $u = u_n$, $T = T_n$, $n \in \mathbb{N}$ маємо

$$|||\mathrm{W}^n(\cdot, T_n)|||^0 \to 0, \quad \text{коли } n \to \infty. \tag{5.31}$$

З формул (1.15), (5.13), (5.15) та (5.16) одержуємо

$$\begin{pmatrix} \mathrm{w}_0^0 - u_n \\ \mathrm{w}_1^0 - (\operatorname{sgn}(\cdot)u_n)' \end{pmatrix} = \mathbb{S}(-T_n)\mathrm{W}^n(\cdot, T_n).$$

Тому

$$\begin{aligned} \big(\mathrm{w}_0^0(x) - u_n(x)\big)' &= \mathrm{W}_0^{n\prime}(x - T_n) + \mathrm{W}_0^{n\prime}(x + T_n) \\ &\qquad + \mathrm{W}_1^n(x - T_n) - \mathrm{W}_0^n(x + T_n), \\ \mathrm{w}_1^0(x) - (\operatorname{sgn}(x)u_n(x))' &= \mathrm{W}_0^{n\prime}(x - T_n) - \mathrm{W}_0^{n\prime}(x + T_n) \\ &\qquad + \mathrm{W}_1^n(x - T_n) + \mathrm{W}_0^n(x + T_n). \end{aligned}$$

За (5.31) звідси випливає, що

$$\left\|\big(\mathrm{w}_0^0 - u_n\big)'\right\|^{-1} \to 0 \quad \text{та} \quad \left\|\mathrm{w}_1^0 - (\operatorname{sgn}(\cdot)u_n)'\right\|^{-1} \to 0, \quad \text{коли } n \to \infty.$$

Зокрема, це означає, що $\big(\mathrm{w}_0^0 - u_n\big)'$ та $\mathrm{w}_1^0 - (\operatorname{sgn}(\cdot)u_n)'$ слабко збігаються до 0 в $\widetilde{H}^{-1}$, коли $n \to \infty$. Нехай $\varphi \in \widetilde{H}^1$. Оскільки φ є непарною і неперервною (див. теорему 1.2), то $\varphi(0) = 0$ та $(\operatorname{sgn} x\, \varphi(x) = \operatorname{sgn} x\, \varphi'(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Отже, $\operatorname{sgn}(\cdot)\varphi \in \widetilde{H}^1$ і

$$\begin{aligned} \langle\big(\operatorname{sgn}(\cdot)(\mathrm{w}_0^0 - u_n)\big)', \varphi\rangle &= -\langle \mathrm{w}_0^0 - u_n, \operatorname{sgn}(\cdot)\varphi'\rangle = -\langle \mathrm{w}_0^0 - u_n, (\operatorname{sgn}(\cdot)\varphi)'\rangle \\ &= \langle\big(\mathrm{w}_0^0 - u_n\big)', \operatorname{sgn}(\cdot)\varphi\rangle, \quad \text{коли } n \to \infty. \end{aligned} \tag{5.32}$$

Таким чином, $\big(\operatorname{sgn}(\cdot)(\mathrm{w}_0^0 - u_n)\big)'$ та $\mathrm{w}_1^0 - (\operatorname{sgn}(\cdot)u_n)'$ слабко збігаються до 0 в $\widetilde{H}^{-1}$, коли $n \to \infty$. Оскільки

$$\mathrm{w}_1^0 - \big(\operatorname{sgn}(\cdot)\,\mathrm{w}_0^0\big)' = \mathrm{w}_1^0 - (\operatorname{sgn}(\cdot)u_n)' + \big(\operatorname{sgn}(\cdot)(\mathrm{w}_0^0 - u_n)\big)',$$

то звідси одержуємо, що умову (5.27) виконано. □

5.1.2. Застосування продовженого оператора $\Psi^{[q]}$ до задач керованості для хвильового рівняння, керованого крайовою умовою Діріхле. Розглянемо рівняння (5.4) з $q = 0$ і $u \in L^\infty(0,T)$:

$$\mathrm{w}_{tt} = \mathrm{w}_{xx} - 2u\delta', \qquad x \in \mathbb{R},\ t \in (0,T) \tag{5.4^0}$$

Нехай $\mathrm{w}^{[0]}$ є розв'язком цього рівняння. Нехай також $q > 0$ і $\mathrm{w}^{[q]}(\cdot,t) = \Psi^{[q]}\mathrm{w}^{[0]}(\cdot,t)$, $t \in (0,T)$. Тоді $\mathrm{w}^{[q]}$ є розв'язком рівняння (5.4) з тим самим u (див. теореми 2.22, 2.23). За теоремою 2.21:(iii) існують функції $g_1 \in \widetilde{H}_0^0$ і $g_2 \in \widetilde{H}_0^0$ такі, що $g_1 \neq g_2$ і $\Psi^{[q]}g_1 = \Psi^{[q]}g_2$. Позначаючи через $\mathrm{w}_1^{[0]}$ розв'язок рівняння (5.4^0) за умови (5.5) з $\mathrm{w}_0^0 = g_1$ і довільним $\mathrm{w}_1^0 \in \widetilde{H}_0^{-1}$, а через $\mathrm{w}_2^{[0]}$ — розв'язок рівняння (5.4^0) за умови (5.5) з $\mathrm{w}_0^0 = g_2$ і тим самим w_1^0, одержуємо два різні розв'язки $\mathrm{w}_1^{[0]}$ і $\mathrm{w}_2^{[0]}$ рівняння (5.4^0), для яких $\mathrm{w}_1^{[q]} = \mathrm{w}_2^{[q]}$, де $\mathrm{w}_1^{[q]}(\cdot,t) = \Psi^{[q]}\mathrm{w}_1^{[0]}(\cdot,t)$, $\mathrm{w}_2^{[q]}(\cdot,t) = \Psi^{[q]}\mathrm{w}_2^{[0]}(\cdot,t)$, $t \in (0,T)$, тому, що за побудовою $\mathrm{w}_1^{[q]}$ і $\mathrm{w}_2^{[q]}$ є розв'язками рівняння (5.4) з однаковими початковими умовами, а за теоремою 5.1 розв'язок задачі (5.4), (5.5) є єдиним. Таким чином, двом різним розв'язкам рівняння (5.4^0) може відповідати лише один розв'язок рівняння (5.4) (образ цих розв'язків під дією оператора $\Psi^{[q]}$). Крім того, скориставшись теоремою 2.21:(i), бачимо, що існують розв'язки рівняння (5.4), для яких немає прообразу-розв'язку рівняння (5.4^0).

На с. 40 було введено множини $\mathcal{L}_T$, $\overline{\mathcal{L}}_T$ та $\mathcal{L}$, загальні властивості яких подано в твердженнях 1.24, 1.25 та формулах (1.16)–(1.19). Позначимо через $\mathcal{L}_T^{[0]}$, $\overline{\mathcal{L}}_T^{[0]}$ та $\mathcal{L}^{[0]}$ множини $\mathcal{L}_T$, $\overline{\mathcal{L}}_T$ та $\mathcal{L}$, відповідно, для керованої системи (5.4^0), (5.5). Позначимо також через $\mathcal{L}_T^{[q]}$, $\overline{\mathcal{L}}_T^{[q]}$ та $\mathcal{L}^{[q]}$ множини

$\mathcal{L}_T$, $\overline{\mathcal{L}}_T$ та $\mathcal{L}$, відповідно, для керованої системи (5.4), (5.5). З формули (1.19), твердження 1.25 та теорем 2.21, 2.24, 5.4—5.10 випливає наступна теорема

Теорема 5.11. *Для* $q > 0$ *маємо*

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathcal{L}_T^{[0]} & \subsetneq & \overline{\mathcal{L}}_T^{[0]} & \subsetneq & \mathcal{L}^{[0]} & \subsetneq & \widetilde{\mathbf{H}}^0 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\Psi^{[q]}\mathcal{L}_T^{[0]} & \subsetneq & \Psi^{[q]}\overline{\mathcal{L}}_T^{[0]} & \subsetneq & \Psi^{[q]}\mathcal{L}^{[0]} & \subsetneq & \widetilde{\mathbf{H}}^0 \\
\| & & \| & & \not\cap & & \| \\
\mathcal{L}_T^{[q]} & \subsetneq & \overline{\mathcal{L}}_T^{[q]} & \subsetneq & \mathcal{L}^{[q]} & = & \widetilde{\mathbf{H}}^0
\end{array}.$$

5.1.2.1. Керованість умовами Діріхле в просторах $\widetilde{H}_0^{s[1/2]}$. Нехай $q = 0$. Розглянемо задачу (5.4), (5.5) в просторах $\widetilde{H}_0^{s[1/2]}$, а саме, $\left(\frac{d}{dt}\right)^m \mathrm{w} : [0,T] \to \widetilde{H}_0^{-m-1/2[1/2]}$, $m = 0, 1, 2$; $\mathrm{w}_0^0 \in \widetilde{H}_0^{-1/2[1/2]}$, $\mathrm{w}_1^0 \in \widetilde{H}_0^{-3/2[1/2]}$. Позначимо через $\mathcal{A} : \widetilde{H}_0^{-1/2[1/2]} \to \widetilde{H}_0^{-5/2[1/2]}$ диференціальний оператор $\left(\frac{d}{dx}\right)^2$, а через $\mathcal{B} : \mathbb{R} \to \widetilde{H}_0^{-5/2[1/2]}$ — оператор множення на $-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\delta'(x)$. Отже, (5.4), (5.5) перетворюється на (1.11), (1.12), де $H_0 = \widetilde{H}_0^{-1/2[1/2]}$, $H_1 = \widetilde{H}_0^{-3/2[1/2]}$ та $H_2 = \widetilde{H}_0^{-5/2[1/2]}$. Керована система (1.13), (1.14) еквівалентна системі (1.11), (1.12), а, отже, і системам (5.4), (5.5). Тому далі ми будемо розглядати систему (1.13), (1.14), де $\mathbf{H} = \widetilde{\mathbf{H}}_0^{-1/2[1/2]}$ та $\mathrm{H} = \widetilde{\mathbf{H}}_0^{-3/2[1/2]}$.

Повторюючи міркування, зроблені вище, застосовуючи теорему 1.3, одержуємо, що для кожного $t \in \mathbb{R}$ оператори $\mathbb{S}(t) : \widetilde{\mathbf{H}}_0^{-3/2[1/2]} \to \widetilde{\mathbf{H}}_0^{-3/2[1/2]}$, $D(\mathbb{S}(t)) = \widetilde{\mathbf{H}}_0^{-3/2[1/2]}$, що є операторами згортки (за x) з $\mathcal{E}(\cdot, t)$, утворюють C_0-групу $\mathbb{S} : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(\widetilde{\mathbf{H}}_0^{-3/2[1/2]})$, яку генерує оператор $\mathbf{A}$ керованої системи (1.13), (1.14). Тому для кожного $u \in L^\infty(0,T)$ єдиний розв'язок цієї системи має вигляд (1.15). З (5.189), з урахуванням зауваження 5.65, випливає оцінка

$$|||\mathbb{S}(t)|||_0^{-3/2[1/2]} \le 2\sqrt{(1+t^2)}, \qquad t \in \mathbb{R}. \tag{5.33}$$

Беручи до уваги (1.15), (5.10), (5.13) і (5.33), одержуємо аналоги теорем 5.1 і 5.2.

Теорема 5.12. *Нехай* $u \in L^\infty(0,T)$ *та* $\mathrm{W}^0 \in \widetilde{\mathbf{H}}_0^{-1/2[1/2]}$. *Тоді єдиним розв'язком системи* (5.4), (5.5) *є*

$$\mathrm{w}(x,t) = \mathcal{E}(x,t) * \begin{pmatrix} \mathrm{w}_0^0(x) - \widetilde{u}^t(x) \\ \mathrm{w}_1^0(x) - (\mathrm{sgn}(x)\widetilde{u}^t(x))' \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R},\ t \ge 0, \tag{5.34}$$

де $\widetilde{u}^t(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\big(u(x)(H(x)-H(x-t)) - u(-x)(H(x+t)-H(x))\big)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $t \ge 0$, *а* $*$ *є згорткою за* x.

Теорема 5.13. *Нехай* $u \in L^\infty(0,T)$ *та* $\mathrm{W}^0 \in \widetilde{\mathbf{H}}_0^{-1/2[1/2]}$. *Тоді розв'язок системи* (5.4), (5.5) *задовольняє умову*

$$\left|\left|\left| \begin{pmatrix} \mathrm{w}(\cdot,t) \\ \mathrm{w}_t(\cdot,t) \end{pmatrix} \right|\right|\right|_0^{-1/2[1/2]} \le 2\sqrt{(1+T^2)}\left(\left\|\mathrm{W}^0\right\|_0^{-1/2[1/2]} + \|u\|_{L^\infty(0,T)}\right), \qquad t \in [0,T].$$

тобто, задача (5.4), (5.5) *є коректно поставленою.*

З теореми 5.12 випливає формула для оператора Λ:

$$\mathbf{\Lambda} f = \lim_{T\to\infty} \int_0^T \mathbb{S}(-\xi)\mathbf{B} f(\xi)\, d\xi = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \begin{pmatrix} \widetilde{u} \\ (\mathrm{sgn}(\cdot)\widetilde{u})' \end{pmatrix},$$

де $\widetilde{u}(x) = \big(u(x)(H(x) - H(x-T)) - u(-x)(H(x+T) - H(x))\big)$, $x \in \mathbb{R}$.

У підрозділі 1.4 було показано, що множини $\mathcal{L}_T$, $\overline{\mathcal{L}}_T$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}_T$, $\overline{\mathcal{M}}_T$, $\mathcal{M}$ відповідають за властивості керованості керованості системи (1.13), (1.14), тому далі ми проведемо дослідження цих множин. Для заданого $T > 0$ обчислимо $\mathcal{M}_T$, $\overline{\mathcal{M}}_T$ та $\mathcal{M}$.

Враховуючи теорему 4.10, аналогічно доведенню теорем 5.4, 5.5 і 5.6 доводимо наступні три теореми.

Теорема 5.14. *Нехай $T > 0$ та $\mathrm{W}^0 \in \widetilde{\mathbf{H}}_0^{-1/2[1/2]}$. Тоді $\mathrm{W}^0 \in \mathcal{M}_T$ в тому і лише тому випадку, коли виконано три умови*

$$\operatorname{supp} \mathrm{w}_0^0 \subset [-T, T], \quad \mathrm{w}_1^0 - \big(\operatorname{sgn}(\cdot)\, \mathrm{w}_0^0\big)' = 0 \quad \textit{та} \quad \mathrm{w}_0^0 \in L^\infty(\mathbb{R}). \tag{5.35}$$

Теорема 5.15. *Нехай $T > 0$ та $\mathrm{W}^0 \in \widetilde{\mathbf{H}}_0^{-1/2[1/2]}$. Тоді $\mathrm{W}^0 \in \overline{\mathcal{M}}_T$ в тому і лише тому випадку, коли виконано дві умови*

$$\operatorname{supp} \mathrm{w}_0^0 \subset [-T, T] \quad \textit{та} \quad \mathrm{w}_1^0 - \big(\operatorname{sgn}(\cdot)\, \mathrm{w}_0^0\big)' = 0. \tag{5.36}$$

Теорема 5.16. *Справедливі твердження: Нехай $\mathrm{W}^0 \in \widetilde{\mathbf{H}}_0^{-1/2[1/2]}$. Тоді $\mathrm{W}^0 \in \mathcal{M}$ в тому і лише тому випадку, коли виконано умову*

$$\mathrm{w}_1^0 - \big(\operatorname{sgn}(\cdot)\, \mathrm{w}_0^0\big)' = 0. \tag{5.37}$$

Враховуючи (5.33) та теореми 5.14 і 5.15, з твердження 1.24 одержуємо критерій керованості для системи (5.4), (5.5) за заданий час.

Теорема 5.17. *Нехай $T > 0$.*

(i) *Стан* $\mathrm{W}^0 \in \widetilde{\mathbf{H}}_0^{-1/2[1/2]}$ *системи* (5.4), (5.5) *є наближено* L^∞*-керованим за заданий час* T *тоді і лише тоді, коли виконано дві умови:*

$$\operatorname{supp} \mathrm{w}_0^0 \subset [-T, T], \tag{5.38}$$

$$\mathrm{w}_1^0 - \left(\operatorname{sgn}(\cdot)\, \mathrm{w}_0^0\right)' = 0. \tag{5.39}$$

(ii) *Стан* $\mathrm{W}^0 \in \widetilde{\mathbf{H}}_0^{-1/2[1/2]}$ *системи* (5.4), (5.5) *є* L^∞*-керованим за заданий час* T *тоді і лише тоді, коли виконано три умови:* (5.38), (5.39) *та*

$$\mathrm{w}_0^0 \in L^\infty(\mathbb{R}). \tag{5.40}$$

Крім того, за умов (5.38)–(5.40) *керування* $u(t) = \mathrm{w}_0^0(t)$, $t \in [0, T]$, *розв'язує задачу* L^∞*-керованості за час* T.

Оператори групи $\mathbb{S}$ не є рівномірно обмеженими відносно $t \in \mathbb{R}$ (див. (5.33)). Тому твердження 1.25 в цьому випадку застосувати неможливо. Проте, висновок цього твердження залишається в силі, тобто, $\mathcal{L} = \mathcal{M}$. Це випливає з наступної теореми.

Теорема 5.18. *Стан* $\mathrm{W}^0 \in \widetilde{\mathbf{H}}_0^{-1/2[1/2]}$ *системи* (5.4), (5.5) *є наближено* L^∞*-керованим за вільний час тоді і лише тоді, коли виконано умову* (5.39).

Доведення. Достатність (5.39) одразу випливає з теорем 5.10, 4.10 і висновку 4.9. *Необхідність* (5.39) доводимо, повторюючи міркування, використані при доведенні необхідності умови (5.27) в теоремі 5.10. $\square$

5.1.3. Керованість умовами Неймана. Розглянемо хвильове рівняння

$$w_{tt} = w_{xx} - q^2 w, \qquad x > 0,\ t \in (0, T), \tag{5.41}$$

кероване крайовою умовою

$$w_x(0, t) = u(t), \qquad t \in (0, T), \tag{5.42}$$

за початкових умов

$$w(x, 0) = w_0^0(x), \quad w_t(x, 0) = w_1^0(x), \qquad x > 0, \tag{5.43}$$

де $T > 0$, $q \ge 0$ — деякі сталі; $w(\cdot, t) \in \widehat{H}_+^1$, $t \in [0, T]$; $\left(\frac{d}{dt}\right)^m w : [0, T] \to H_\oplus^{-m+1}(\mathbb{R}_+)$, $m = 1, 2$; $u \in L^\infty(0, T)$ — керування; $w_0^0 \in \widehat{H}_+^1$, $w_1^0 \in \widehat{H}_+^0$ — початкові дані.

Позначимо через w, w_0^0 та w_1^0 парні продовження за x для w, w_0^0 та w_1^0, відповідно. Скориставшись висновком 2.5, бачимо, що w задовольняє систему

$$\mathrm{w}_{tt} = \mathrm{w}_{xx} - q^2 \mathrm{w} - 2u\delta, \qquad x \in \mathbb{R},\ t \in (0, T), \tag{5.44}$$

$$\mathrm{w}(x, 0) = \mathrm{w}_0^0(x), \quad \mathrm{w}_t(x, 0) = \mathrm{w}_1^0(x), \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{5.45}$$

де δ — це розподіл Дірака за x; $\left(\frac{d}{dt}\right)^m \mathrm{w} : [0, T] \to \widehat{H}^{-m+1}$, $m = 0, 1, 2$; $\mathrm{w}_0^0 \in \widehat{H}^1$, $\mathrm{w}_1^0 \in \widehat{H}^0$. Нижче у висновку 5.21 ми доведемо, що для розв'язку w системи (5.44), (5.45) виконано умову

$$\mathrm{w}_x(+0, t) = u(t) \quad \text{м. с. на } [0, T]. \tag{5.46}$$

отже, звуження цього розв'язку на $\mathbb{R}_+$ задовольняє систему (5.41)–(5.43). Таким чином, системи (5.41)–(5.43) і (5.44), (5.45) є еквівалентними, тому далі ми розглядатимемо систему (5.44), (5.45) замість (5.1)–(5.3). Позначимо $\mathrm{W}^0 = \begin{pmatrix} \mathrm{w}_0^0 \\ \mathrm{w}_1^0 \end{pmatrix}$. Бачимо, що $\mathrm{W}^0 \in \widehat{\mathbf{H}}^0$. Зрозуміло, що ця керована система має вигляд (1.11), (1.12).

Оскільки за теоремою 1.3 простори H^m та H_0^m є ізоморфними, $m \in \mathbb{Z}$, то властивості керованості (див. 1.21–1.23) системи (5.44), (5.45) в просторах H^m збігаються з властивостями керованості цієї системи в просторах H_0^m. Далі нам буде зручно перейти до розгляду цієї системи в просторах H_0^m, тому що ми застосовуватимо перетворення Фур'є та теорему 1.3 про те, що перетворення Фур'є є ізометричним ізоморфізмом H_0^m та H_m^0.

Позначимо через $\mathcal{A} : \widehat{H}_0^1 \to \widehat{H}_0^{-1}$ диференціальний оператор $\left(\frac{d}{dx}\right)^2 - q^2$, а через $\mathcal{B} : \mathbb{R} \to \widehat{H}_0^{-1}$ — оператор множення на $-2\delta(x)$. Отже, (5.44), (5.45) перетворюється на (1.11), (1.12), де $H_0 = \widehat{H}_0^1$, $H_1 = \widehat{H}_0^0$ та $H_2 = \widehat{H}_0^{-1}$. Керована система (1.13), (1.14) еквівалентна системі (1.11), (1.12), а, отже, і системам (5.41), (5.43) та (5.44), (5.45). Тому далі ми будемо розглядати систему (1.13), (1.14), де $\mathbf{H} = \widehat{\mathbf{H}}_0^1$ та $\mathrm{H} = \widehat{\mathbf{H}}_0^0$. Аналогічно випадку керованості умовами Діріхле одержуємо, що для кожного $t \in \mathbb{R}$ оператори $\mathbb{S}(t) : \widehat{\mathbf{H}}_0^0 \to \widehat{\mathbf{H}}_0^0$, $D(\mathbb{S}(t)) = \widehat{\mathbf{H}}_0^0$, що є операторами згортки (за x) з $\mathcal{E}(\cdot, t)$ (див. 5.12, 5.13), утворюють C_0-групу $\mathbb{S} : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(\widehat{\mathbf{H}}_0^0)$, яку генерує оператор $\mathbf{A}$ керованої системи (1.13), (1.14). Тому для кожного $u \in L^\infty(0, T)$ єдиний розв'язок цієї системи має вигляд (1.15). З (5.187) та (5.189) випливають оцінки

$$|||\mathbb{S}(t)|||_0^0 = |||\mathbb{S}(t)|||^0 \le Q(T) \begin{bmatrix} \dfrac{1}{q}, & \text{для } q > 0 \\ 2\sqrt{(1+t^2)}, & \text{для } q = 0 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (5.47)$$

Беручи до уваги (1.15), (5.12) і (5.47), одержуємо

Теорема 5.19. *Нехай* $u \in L^\infty(0,T)$ *та* $\mathrm{W}^0 \in \widehat{\mathbf{H}}^0$. *Тоді єдиним розв'язком системи* (5.44), (5.45) *є*

$$\begin{aligned} \mathrm{w}(x,t) =& \mathbf{J}_t(x,t) * \mathrm{w}_0^0(x) + \mathbf{J}(x,t) * \mathrm{w}_1^0(x) - (H(x+t) - H(x-t)) \\ &\times \int_{|x|}^t J_0\left(\sqrt{\tau^2 - x^2}\right) u(t-\tau)\, d\tau, \qquad x \in \mathbb{R},\ t \ge 0, \end{aligned} \quad (5.48)$$

де $*$ *є згорткою за* ξ, *а* $\mathbf{J} = \frac{1}{2} J_0\left(q\sqrt{t^2 - x^2}\right)(H(x+t) - H(x-t))$, $x \in \mathbb{R}$, $t \ge 0$.

Теорема 5.20. *Нехай* $u \in L^\infty(0,T)$ *та* $\mathrm{W}^0 \in \widehat{\mathbf{H}}^1$. *Тоді розв'язок системи* (5.44), (5.45) *задовольняє умову*

$$\left|\left|\left| \begin{pmatrix} \mathrm{w}(\cdot,t) \\ \mathrm{w}_t(\cdot,t) \end{pmatrix} \right|\right|\right|^1 \le Q(T) \left\| \mathrm{W}^0 \right\|^1 + \sqrt{2T}(1+T^2)(1+q^2) \|u\|_{L^\infty(0,T)}, \ t \in [0,T].$$

тобто, задача (5.44), (5.45) *є коректно поставленою. Тут* $Q(T)$ *є сталою з оцінки* (5.47).

Для того, щоб довести, що системи (5.41)–(5.43) і (5.44), (5.45) є еквівалентними нам потрібен наступний висновок

Висновок 5.21. *Нехай* w *є розв'язком керованої системи* (5.44), (5.45) *для деяких* $u \in L^\infty(0,T)$ *та* $\mathrm{W}^0 \in \widehat{\mathbf{H}}^1$. *Тоді виконано умову* (5.46).

Доведення. З (5.48) одержуємо

$$
\begin{aligned}
\mathrm{w}_x(x,t) =& \mathbf{J}_t(x,t) * \mathrm{w}_0^{0\prime}(x) + \mathbf{J}(x,t) * \mathrm{w}_1^{0\prime}(x) - 2\frac{\partial}{\partial x}\int_0^t \mathbf{J}(x,t-\tau)u(\tau)\,d\tau \\
=& \mathbf{J}_t(x,t) * \mathrm{w}_0^{0\prime}(x) + \mathbf{J}(x,t) * \mathrm{w}_1^{0\prime}(x) \\
& + 2(H(x+t) - H(x-t))\Bigg(u(t-|x|)\operatorname{sgn} x \\
& -qx\int_0^t \frac{J_1\left(q\sqrt{t^2-x^2}\right)}{\sqrt{t^2-x^2}}u(\tau)\,d\tau\Bigg), \quad x\in\mathbb{R},\ t\geq 0, \qquad (5.49)
\end{aligned}
$$

Тому (5.46) виконано. Висновок доведено. □

Обчислимо тепер оператор $\mathbf{\Lambda} : L^2(\mathbb{R}_+) \to \widehat{\mathbf{H}}_0^0$,

$$
\mathbf{\Lambda} f = \lim_{T\to\infty}\int_0^T \mathbb{S}(-\xi)\mathbf{B}f(\xi)\,d\xi,
$$

який було введено в підрозділі 1.4, та знайдемо його область визначення, тобто, множину всіх тих $f \in L^2(\mathbb{R}_+)$, для яких границя в правій частині існує. Маємо

$$
\begin{aligned}
\mathbf{\Lambda} f =& \lim_{T\to\infty}\int_0^T \mathcal{E}(\cdot,-\xi) * \begin{pmatrix} 0 \\ -2\delta(\cdot)\end{pmatrix} f(\xi)\,d\xi \\
=& \mathcal{F}_{\sigma\to x}\lim_{T\to\infty}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\int_0^T \Sigma(\sigma,t)\begin{pmatrix} 0 \\ -1\end{pmatrix} f(\xi)\,d\xi \\
=& \mathcal{F}_{\sigma\to x}\lim_{T\to\infty}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\int_0^T \begin{pmatrix} \frac{\sin\left(\xi\sqrt{\sigma^2+q^2}\right)}{\sqrt{\sigma^2+q^2}} \\ -\cos\left(\xi\sqrt{\sigma^2+q^2}\right)\end{pmatrix} f(\xi)\,d\xi \\
=& -\mathcal{F}_{\sigma\to x}\begin{pmatrix} \frac{-i}{\sqrt{\sigma^2+q^2}}\left(\mathcal{F}_{\xi\to\sigma}\mathbf{I}_{\mathrm{odd}}^0 f\right)\left(\sqrt{\sigma^2+q^2}\right) \\ \left(\mathcal{F}_{\xi\to\sigma}\mathbf{I}_{\mathrm{even}}^0 f\right)\left(\sqrt{\sigma^2+q^2}\right)\end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Нагадаємо означення для Φ та $\widehat{\Phi}$. Маємо $\Phi : \widetilde{H}_0^0 \to \widehat{H}_0^1$, $D(\Phi) = \{g \in \widetilde{H}_0^0 \mid \frac{\sqrt{|\cdot|H((\cdot)^2-q^2)}}{\sqrt[4]{(\cdot)^2-q^2}}\mathcal{F}g \in H_0^0\}$ для $q > 0$ і $D(\Phi) = \{g \in \widetilde{H}_0^0 \mid \frac{\mathcal{F}g}{(\cdot)} \in H_0^0\}$ для $q = 0$,

$$\Phi g = \mathcal{F}^{-1}_{\sigma\to x}\left(\frac{-i}{\sqrt{\sigma^2+q^2}}\,(\mathcal{F}g)\left(\sqrt{\sigma^2+q^2}\right)\right), \qquad g \in D(\Phi), \tag{5.50}$$

та $\widehat{\Phi} : \widetilde{H}_0^0 \to \widehat{H}_0^0$, $D(\widehat{\Phi}) = \{g \in \widetilde{H}_0^0 \mid \frac{\sqrt{|\cdot|H((\cdot)^2-q^2)}}{\sqrt[4]{(\cdot)^2-q^2}}\mathcal{F}(g\operatorname{sgn}(\cdot)) \in H_0^0\}$ для $q > 0$ і $D(\Phi) = \widetilde{H}_0^0$ для $q = 0$,

$$\widehat{\Phi} g = \mathcal{F}^{-1}_{\sigma\to x}\left(\left(\mathcal{F}\left(\operatorname{sgn}(\cdot)\, g\right)\right)\left(\sqrt{\sigma^2+q^2}\right)\right), \qquad g \in D(\widehat{\Phi}), \tag{5.51}$$

бачимо, що

$$\mathbf{\Lambda} f = -\begin{pmatrix}\Phi \mathbf{I}^0_{\mathrm{odd}} f\\ \widehat{\Phi}\mathbf{I}^0_{\mathrm{odd}} f\end{pmatrix}, \qquad f \in D(\mathbf{\Lambda}) = D(\Phi)\cap D(\widehat{\Phi}), \tag{5.52}$$

Для $q = 0$ маємо $\Phi = \partial^{-1}$, де $\partial = d/dx$, та $\widehat{\Phi} = \operatorname{sgn}(\cdot)$, тобто це оператор множення на $\operatorname{sgn} x$. Оператори Φ та $\widehat{\Phi}$ було вивчено в підрозділі 2.2, зокрема, області визначення цих операторів та оператора $\mathbf{\Lambda}$ описуються формулами (2.41) та (2.42).

У підрозділі 1.4 було показано, що множини $\mathcal{L}_T$, $\overline{\mathcal{L}}_T$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}_T$, $\overline{\mathcal{M}}_T$, $\mathcal{M}$ відповідають за властивості керованості керованості системи (1.13), (1.14), тому далі ми проведемо дослідження цих множин. Для заданого $T > 0$ обчислимо $\mathcal{M}_T$, $\overline{\mathcal{M}}_T$ та $\mathcal{M}$. Цілком аналогічно теоремам 5.4 та 5.5, застосовуючи теореми 2.27–2.29 замість теорем 2.8–2.10, одержуємо наступні дві теореми.

Теорема 5.22. *Нехай* $T > 0$ *та* $\mathrm{W}^0 \in \widehat{\mathbf{H}}_0^1$. *Тоді* $\mathrm{W}^0 \in \mathcal{M}_T$ *в тому і лише тому випадку, коли виконано три умови*

$$\operatorname{supp} \mathrm{w}_0^0 \subset [-T, T], \quad \mathrm{w}_1^0 - \widehat{\Phi}_T \Phi_T^{-1} \mathrm{w}_0^0 = 0 \quad \text{та} \quad \mathrm{w}_0^{0\prime} \in L^\infty(\mathbb{R}). \tag{5.53}$$

Теорема 5.23. *Нехай* $T > 0$ *та* $\mathrm{W}^0 \in \widehat{\mathbf{H}}_0^1$. *Тоді* $\mathrm{W}^0 \in \overline{\mathcal{M}_T}$ *в тому і лише тому випадку, коли виконано дві умови*

$$\operatorname{supp} \mathrm{w}_0^0 \subset [-T, T] \quad \text{та} \quad \mathrm{w}_1^0 - \widehat{\Phi}_T \Phi_T^{-1} \mathrm{w}_0^0 = 0. \tag{5.54}$$

Наступна теорема є аналогом теореми 5.6.

Теорема 5.24. *Справедливі твердження:*

(i) *Якщо* $q > 0$, *то* $\mathcal{M} = \widehat{\mathbf{H}}_0^1$.

(ii) *Якщо* $q = 0$, *то* $\mathcal{M} = \left\{ \mathrm{W}^0 \in \widehat{\mathbf{H}}_0^1 \mid \mathrm{w}_1^0 - \operatorname{sgn}(\cdot)\, \mathrm{w}_0^{0\prime} = 0 \right\}$.

Доведення. (i) Нехай $q > 0$ та $\mathrm{W}^0 \in \widehat{\mathbf{H}}_0^1$. Тоді за теоремами 2.37 та 2.39 маємо

$$\begin{pmatrix} \mathrm{w}_0^0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \overline{\Phi(N(\widehat{\Phi}) \cap \widetilde{H}_1^0)} \quad \text{та} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{w}_1^0 \end{pmatrix} \in \overline{\widehat{\Phi}(N(\Phi) \cap \widetilde{H}_1^0)}.$$

Тому існують послідовності $\{u_0^n\}_{n=1}^\infty \subset N(\widehat{\Phi}) \cap \widetilde{H}_1^0$ та $\{u_0^n\}_{n=1}^\infty \subset N(\Phi) \cap \widetilde{H}_1^0$ такі, що

$$\left\| \Phi u_0^n - \mathrm{w}_0^0 \right\|_0^1 \to 0 \quad \text{та} \quad \left\| \widehat{\Phi} u_1^n - \mathrm{w}_1^0 \right\|_0^1 \to 0, \quad \text{коли } n \to \infty.$$

Тому для $u^n = u_0^n + u_1^n$ маємо $u^n \in \widetilde{H}_1^0$, $n \in \mathbb{N}$, і

$$\left\| \Phi u^n - \mathrm{w}_0^0 \right\|_0^1 \to 0 \quad \text{та} \quad \left\| \widehat{\Phi} u^n - \mathrm{w}_1^0 \right\|_0^1 \to 0, \quad \text{коли } n \to \infty. \tag{5.55}$$

Очевидно, що для кожного $n \in \mathbb{N}$ функцію u^n можна наблизити в $\widetilde{H}_1^0$ обмеженими функціями з компактними носіями. Враховуючи теорему 2.30 та (5.55), одержуємо $\mathrm{W}^0 \in \mathcal{M}$. Оскільки ми розглядали довільне $\mathrm{W}^0 \in \widehat{\mathbf{H}}_0^1$, то $\mathcal{M} = \widetilde{\mathbf{H}}_0^1$.

(ii) Нехай $q = 0$. Якщо $\mathrm{W}^0 \in \mathcal{M}$, то існують послідовності $\{T^n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}_+$ і $\{u^n\}_{n=1}^\infty \subset L^\infty(\mathbb{R}_+)$ такі, що $\operatorname{supp} u^n \in [0, T_n]$, $n \in \mathbb{N}$, і $\mathrm{W}^0 + \boldsymbol{\Lambda} u^n \to 0$ в $\widehat{\mathbf{H}}_0^1$, коли $n \to \infty$. Остання границя означає, що

$$\left\|\mathrm{w}_0^0 - \partial^{-1}\widetilde{u}_n\right\|_0^1 \to 0 \quad \text{та} \quad \left\|\mathrm{w}_1^0 - \widetilde{u}_n \operatorname{sgn}(\cdot)\right\|_0^0 \to 0, \quad \text{коли } n \to \infty, \tag{5.56}$$

де $\widetilde{u}_n$ є непарним продовженням u_n. Отже,

$$\mathrm{w}_1^0 - \operatorname{sgn}(\cdot)\, \mathrm{w}_0^{0\prime} = 0 \tag{5.57}$$

Нехай тепер для W^0 виконано умову (5.57). Припустимо спочатку, що $\mathrm{W}^0 \in \widehat{\mathbf{H}}_0^2$. За теоремою 1.2 маємо $\mathrm{w}_0^0 \in C^1(\mathbb{R})$, тому існує послідовність $\{T_n\}_{n=1}^\infty \in \mathbb{R}_+$ така, що $T_n \to \infty$ та $\sqrt{T_n}\mathrm{w}_0^0(T_n) \to 0$, коли $n \to \infty$. Позначимо

$$\widehat{u}_n(t) = \frac{\mathrm{w}_0^0(0) H(T_n^2 - t^2)}{\mathrm{w}_0^0(0) - \mathrm{w}_0^0(T_n)} \left(\mathrm{w}_0^0(t) - \mathrm{w}_0^0(T_n)\right), \ t \in \mathbb{R}, \ n \in \mathbb{N}. \tag{5.58}$$

Тоді для $\widetilde{u}_n = \widehat{u}_n{}'$ виконано умови (5.56), тобто, $\mathrm{W}^0 \in \mathcal{M}$. Тут враховано те, що $\widetilde{u}_n \in C(\mathbb{R})$ і тому $\widetilde{u}_n \in L^\infty(\mathbb{R})$. Оскільки за теоремою 1.1 $\widehat{\mathbf{H}}_0^2$ є щільним в $\widehat{\mathbf{H}}_0^1$, то для кожного $\mathrm{W}^0 \in \widehat{\mathbf{H}}_0^1$, для якого виконано умову (5.57), маємо $\mathrm{W}^0 \in \mathcal{M}$. $\Box$

Як ми вже згадували на початку цього пункту, простори $\widehat{\mathbf{H}}^m$ та $\widehat{\mathbf{H}}_0^m$ ізоморфні, і $\widehat{\mathbf{H}}^m = \widehat{\mathbf{H}}_0^m$ (як множини), $m \in \mathbb{Z}$. Тому в теоремах 5.22–

5.24 простір $\widehat{\mathbf{H}}_0^1$ можна замінити на $\widehat{\mathbf{H}}^1$ і систему (1.13), (1.14) також розглядати в просторах $\mathbf{H} = \widehat{\mathbf{H}}^1$ і $\mathrm{H} = \widehat{\mathbf{H}}^0$ (див. теорему 1.4).

Враховуючи (5.47) та теореми 5.22 і 5.23, з твердження 1.24 одержуємо критерій керованості для системи (5.44), (5.45) за заданий час.

Теорема 5.25. *Нехай* $T > 0$.

(i) *Стан* $\mathrm{W}^0 \in \widehat{\mathbf{H}}^1$ *системи* (5.44), (5.45) *є наближено* L^∞*-керованим за заданий час* T *тоді і лише тоді, коли виконано дві умови:*

$$\operatorname{supp} \mathrm{w}_0^0 \subset [-T, T], \tag{5.59}$$

$$\mathrm{w}_1^0 - \widehat{\Phi}_T \Phi_T^{-1} \mathrm{w}_0^0 = 0. \tag{5.60}$$

(ii) *Стан* $\mathrm{W}^0 \in \widehat{\mathbf{H}}^1$ *системи* (5.44), (5.45) *є* L^∞*-керованим за заданий час* T *тоді і лише тоді, коли виконано три умови:* (5.59), (5.60) *та*

$$\mathrm{w}_0^{0\prime} \in L^\infty(\mathbb{R}). \tag{5.61}$$

Крім того, за умов (5.59)–(5.61) *керування* $u(t) = \mathrm{w}_0^{0\prime}(t)$, $t \in [0, T]$, *розв'язує задачу* L^∞*-керованості за час* T.

Зауваження 5.26. *Для* $q = 0$ *умова* (5.60) *набирає вигляду*

$$\mathrm{w}_1^0 - \operatorname{sgn}(\cdot)\, \mathrm{w}_0^{0\prime} = 0. \tag{5.62}$$

У випадку $q > 0$ наступний критерій керованості системи (5.44), (5.45) за вільний час одразу випливає з тверджень 1.24, 1.25, (5.47) та теореми 5.24.

Теорема 5.27. *Для* $q > 0$ *будь-який стан* $\mathrm{W}^0 \in \widehat{\mathbf{H}}^1$ *системи* (5.44), (5.45) *є наближено* L^∞*-керованим за вільний час.*

Для $q = 0$ оператори групи $\mathbb{S}$ не є рівномірно обмеженими відносно $t \in \mathbb{R}$ (див. (5.47)). Тому твердження 1.25 в цьому випадку застосувати неможливо. Проте висновок цього твердження залишається в силі, тобто, $\mathcal{L} = \mathcal{M}$ і для $q = 0$. Це випливає з наступної теореми.

Теорема 5.28. *Для* $q = 0$ *стан* $\mathrm{W}^0 \in \widehat{\mathbf{H}}^1$ *системи* (5.44), (5.45) *є наближено* L^∞*-керованим за вільний час тоді і лише тоді, коли виконано умову* (5.62).

Доведення. Достатність (5.62). Нехай спочатку для $\mathrm{W}^0 \in \widehat{\mathbf{H}}^2$ виконано (5.62). Розглянемо послідовності $\{T_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}_+$, $T_n \to \infty$, $\sqrt{T_n}\mathrm{w}_0^0(T_n) \to 0$, коли $n \to \infty$, та $\{\widetilde{u}_n\}_{n=1}^\infty \subset L^\infty(\mathbb{R})$, $\widetilde{u}_n = \widehat{u}_n{}'$, $\operatorname{supp}\widehat{u}_n \subset [-T_n, T_n]$, $n \in \mathbb{N}$, з доведення теореми 5.24 (див. (5.58)), для якої виконано умови (5.57). Відмітимо, що $\widehat{u}_n(0) = \mathrm{w}_0^0(0)$, $n \in \mathbb{N}$. Скориставшись формулами (1.15), (5.13), (5.50) та (5.51), одержуємо, що

$$\mathrm{W}^n(x, T_n) = \mathbb{S}(T)\begin{pmatrix} \mathrm{w}_0^0 - \partial^{-1}\widetilde{u}_n \\ \big(\operatorname{sgn}(\cdot)(\mathrm{w}_0^0 - \partial^{-1}\widetilde{u}_n)\big)' \end{pmatrix}(x)$$
$$= \begin{pmatrix} (\mathrm{w}_0^0 - \widehat{u}_n)(x + T_n)H(x + T_n) + (\mathrm{w}_0^0 - \widehat{u}_n)(T_n - x)H(T_n - x) \\ \big((\mathrm{w}_0^0 - \widehat{u}_n)(x + T_n)H(x + T_n) - (\mathrm{w}_0^0 - \widehat{u}_n)(T_n - x)H(T_n - x)\big)' \end{pmatrix}$$

де W^n є розв'язком задачі (1.13), (1.13) з $u = \widetilde{u}_n$, $T = T_n$, $n \in \mathbb{N}$. Оскільки

$$\|f'\|^0 = \|f'\|_0^0 = \|\sigma\mathcal{F}f\|_0^0 \le \|\mathcal{F}f\|_1^0 = \|f\|_0^1 = \|f\|^1, \quad f \in H^1, \tag{5.63}$$

то, враховуючи (5.58), звідси одержуємо

$$|||\mathrm{W}^n(\cdot, T_n)|||^1 \le 2\left\|\mathrm{w}_0^0 - \partial^{-1}\widetilde{u}_n\right\|^1 \to 0, \quad \text{коли } n \to \infty. \tag{5.64}$$

Отже, стан W^0 системи (5.44), (5.45) є наближено L^∞-керованим за вільний час. Оскільки за теоремою 1.1 $\widehat{\mathbf{H}}_0^2$ є щільним в $\widehat{\mathbf{H}}_0^1$, то кожний стан $\mathrm{W}^0 \in \widehat{\mathbf{H}}_0^1$, для якого виконано умову (5.57), є наближено L^∞-керованим за вільний час.

Необхідність (5.62). Нехай стан $\mathrm{W}^0 \in \widehat{\mathbf{H}}^1$ системи (5.44), (5.45) є наближено L^∞-керованим за вільний час, тобто існують послідовності $\{T_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}_+$ та $\{\widetilde{u}_n\}_{n=1}^\infty \subset L^\infty(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp} \widetilde{u}_n \subset [-T_n, T_n]$, $n \in \mathbb{N}$, такі, що для розв'язку $\mathrm{W}^n = \begin{pmatrix} \mathrm{W}_0^n \\ \mathrm{W}_1^n \end{pmatrix}$ задачі (1.13), (1.13) з $u = \widetilde{u}_n$, $T = T_n$, $n \in \mathbb{N}$ маємо

$$|||\mathrm{W}^n(\cdot, T_n)|||^1 \to 0, \quad \text{коли } n \to \infty. \tag{5.65}$$

З формул (1.15), (5.13), (5.50) та (5.51) одержуємо

$$\begin{pmatrix} \mathrm{w}_0^0 - \partial^{-1}\widetilde{u}_n \\ \mathrm{w}_1^0 - \operatorname{sgn}(\cdot)\widetilde{u}_n \end{pmatrix} = \mathbb{S}(-T_n)\mathrm{W}^n(\cdot, T_n).$$

Тому

$$\begin{aligned} \left(\mathrm{w}_0^0 - \partial^{-1}\widetilde{u}_n\right)' =& \mathrm{W}_0^{n\prime}(x - T_n) + \mathrm{W}_0^{n\prime}(x + T_n) \\ & + \mathrm{W}_1^n(x - T_n) - \mathrm{W}_0^n(x + T_n) \\ \mathrm{w}_1^0 - \operatorname{sgn}(\cdot)\widetilde{u}_n =& \mathrm{W}_0^{n\prime}(x - T_n) - \mathrm{W}_0^{n\prime}(x + T_n) \\ & + \mathrm{W}_1^n(x - T_n) + \mathrm{W}_0^n(x + T_n). \end{aligned}$$

За (5.65) звідси випливає, що

$$\left\|\mathrm{w}_0^{0\prime} - \widetilde{u}_n\right\|^0 \to 0 \quad \text{та} \quad \left\|\mathrm{w}_1^0 - \operatorname{sgn}(\cdot)\widetilde{u}_n\right\|^0 \to 0, \quad \text{коли } n \to \infty.$$

Отже, умову (5.62) виконано. □

5.1.4. Застосування продовженого оператора $\Phi^{[q]}$ до задач керованості для хвильового рівняння, керованого крайовою умовою Неймана. Нехай $\mathrm{w}^{[0]}$ є розв'язком рівняння (5.4^0). Нехай також $q > 0$ і $\mathrm{w}^{[q]}(\cdot, t) = \Phi^{[q]}\mathrm{w}^{[0]}(\cdot, t)$, $t \in (0, T)$. Тоді $\mathrm{w}^{[q]}$ є розв'язком рівняння (5.44) з тим самим u (див. теореми 2.41, 2.42). За теоремою 2.40:(iv) існують функції $g_1 \in \widetilde{H}_0^0$ і $g_2 \in \widetilde{H}_0^0$ такі, що $g_1 \neq g_2$ і $\Phi^{[q]}g_1 = \Phi^{[q]}g_2$. Позначаючи через $\mathrm{w}_1^{[0]}$ розв'язок рівняння (5.4^0) за умови (5.5) з $\mathrm{w}_0^0 = g_1$ і довільним $\mathrm{w}_1^0 \in \widetilde{H}_0^{-1}$, а через $\mathrm{w}_2^{[0]}$ — розв'язок рівняння (5.4^0) за умови (5.5) з $\mathrm{w}_0^0 = g_2$ і тим самим w_1^0, одержуємо два різні розв'язки $\mathrm{w}_1^{[0]}$ і $\mathrm{w}_2^{[0]}$ рівняння (5.4^0), для яких $\mathrm{w}_1^{[q]} = \mathrm{w}_2^{[q]}$, де $\mathrm{w}_1^{[q]}(\cdot, t) = \Phi^{[q]}\mathrm{w}_1^{[0]}(\cdot, t)$, $\mathrm{w}_2^{[q]}(\cdot, t) = \Phi^{[q]}\mathrm{w}_2^{[0]}(\cdot, t)$, $t \in (0, T)$, тому, що за побудовою $\mathrm{w}_1^{[q]}$ і $\mathrm{w}_2^{[q]}$ є розв'язками рівняння (5.44) з однаковими початковими умовами, а за теоремою 5.19 розв'язок задачі (5.44), (5.45) є єдиним. Таким чином, двом різним розв'язкам рівняння (5.4^0) може відповідати лише один розв'язок рівняння (5.44) (образ цих розв'язків під дією оператора $\Phi^{[q]}$).

На с. 40 було введено множини $\mathcal{L}_T$, $\overline{\mathcal{L}}_T$ та $\mathcal{L}$, загальні властивості яких подано в твердженнях 1.24, 1.25 та формулах (1.16)–(1.19). Позначимо через $\mathcal{L}_T^{[0]}$, $\widetilde{\mathcal{L}}_T^{[0]}$ та $\mathcal{L}^{[0]}$ множини $\mathcal{L}_T$, $\overline{\mathcal{L}}_T$ та $\mathcal{L}$, відповідно, для керованої системи (5.4^0), (5.5). Позначимо також через $\mathcal{L}_T^{[q]}$, $\overline{\mathcal{L}}_T^{[q]}$ та $\mathcal{L}^{[q]}$ множини $\mathcal{L}_T$, $\overline{\mathcal{L}}_T$ та $\mathcal{L}$, відповідно, для керованої системи (5.44), (5.45). З формули (1.19), твердження 1.25 та теорем 2.40, 2.43, 5.22—5.28 випливає наступна теорема

Теорема 5.29. *Для* $q > 0$ *маємо*

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathcal{L}_T^{[0]} & \subsetneq & \overline{\mathcal{L}}_T^{[0]} & \subsetneq & \mathcal{L}^{[0]} & \subsetneq & \widetilde{\mathbf{H}}^0 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\Phi^{[q]}\mathcal{L}_T^{[0]} & \subsetneq & \Phi^{[q]}\overline{\mathcal{L}}_T^{[0]} & \subsetneq & \Phi^{[q]}\mathcal{L}^{[0]} & \subsetneq & \widehat{\mathbf{H}}^1 \\
\parallel & & \parallel & & \rotatebox{-90}{$\subsetneq$} & & \parallel \\
\mathcal{L}_T^{[q]} & \subsetneq & \overline{\mathcal{L}}_T^{[q]} & \subsetneq & \mathcal{L}^{[q]} & = & \widehat{\mathbf{H}}^1
\end{array} .$$

5.1.4.1. Керованість умовами Неймана в просторах $\widehat{H}_0^{s[1/2]}$. Нехай $q = 0$. Розглянемо задачу (5.44), (5.45) в просторах $\widehat{H}_0^{s[1/2]}$, а саме, $\left(\frac{d}{dt}\right)^m \mathrm{w} : [0,T] \to \widehat{H}_0^{-m+1/2[1/2]}$, $m = 0,1,2$; $\mathrm{w}_0^0 \in \widehat{H}_0^{1/2[1/2]}$, $\mathrm{w}_1^0 \in \widehat{H}_0^{-1/2[1/2]}$. Позначимо через $\mathcal{A} : \widehat{H}_0^{1/2[1/2]} \to \widehat{H}_0^{-3/2[1/2]}$ диференціальний оператор $\left(\frac{d}{dx}\right)^2$, а через $\mathcal{B} : \mathbb{R} \to \widehat{H}_0^{-3/2[1/2]}$ — оператор множення на $-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\delta(x)$. Отже, (5.44), (5.45) перетворюється на (1.11), (1.12), де $H_0 = \widehat{H}_0^{1/2[1/2]}$, $H_1 = \widehat{H}_0^{-1/2[1/2]}$ та $H_2 = \widehat{H}_0^{-3/2[1/2]}$. Керована система (1.13), (1.14) еквівалентна системі (1.11), (1.12), а, отже, і системам (5.4), (5.5). Тому далі ми будемо розглядати систему (1.13), (1.14), де $\mathbf{H} = \widetilde{\mathbf{H}}_0^{1/2[1/2]}$ та $\mathrm{H} = \widetilde{\mathbf{H}}_0^{-1/2[1/2]}$.

Повторюючи міркування, зроблені вище, застосовуючи теорему 1.3, одержуємо, що для кожного $t \in \mathbb{R}$ оператори $\mathbb{S}(t) : \widehat{\mathbf{H}}_0^{-1/2[1/2]} \to \widehat{\mathbf{H}}_0^{-1/2[1/2]}$, $D(\mathbb{S}(t)) = \widehat{\mathbf{H}}_0^{-1/2[1/2]}$, що є операторами згортки (за x) з $\mathcal{E}(\cdot, t)$, утворюють C_0-групу $\mathbb{S} : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(\widetilde{\mathbf{H}}_0^{-1/2[1/2]})$, яку генерує оператор $\mathbf{A}$ керованої системи (1.13), (1.14). Тому для кожного $u \in L^\infty(0,T)$ єдиний розв'язок цієї системи має вигляд (1.15). З (5.189), з урахуванням зауваження 5.65, випливає оцінка

$$|||\mathbb{S}(t)|||_0^{-1/2[1/2]} \leq 2\sqrt{(1+t^2)}, \qquad t \in \mathbb{R}. \tag{5.66}$$

Беручи до уваги (1.15), (5.10), (5.13) і (5.33), одержуємо аналоги теорем 5.19 і 5.20.

Теорема 5.30. *Нехай* $u \in L^\infty(0,T)$ *та* $\mathrm{W}^0 \in \widehat{\mathbf{H}}_0^{1/2[1/2]}$. *Тоді єдиним розв'язком системи* (5.44), (5.45) *є*

$$\mathrm{w}(x,t) = \mathcal{E}(x,t) * \begin{pmatrix} \mathrm{w}_0^0(x) - \widetilde{u}^t(x) \\ \mathrm{w}_1^0(x) - \operatorname{sgn}(x)\left(\widetilde{u}^t(x)\right)' \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R},\ t \geq 0, \tag{5.67}$$

де $*$ *є згорткою за* x, $\widetilde{u}^t(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\partial^{-1}\big(u(x)(H(x)-H(x-t)) - u(-x)(H(x+t) - H(x))\big)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $t \geq 0$, $\partial^{-1} f(x) = \int_{-\infty}^{x} f(\xi)\,d\xi$, *якщо* $f \in L^2(\mathbb{R})$ *є непарною і має компактний носій.*

Теорема 5.31. *Нехай* $u \in L^\infty(0,T)$ *та* $\mathrm{W}^0 \in \widehat{\mathbf{H}}_0^{1/2[1/2]}$. *Тоді розв'язок системи* (5.4), (5.5) *задовольняє умову*

$$\left|\left|\left| \begin{pmatrix} \mathrm{w}(\cdot,t) \\ \mathrm{w}_t(\cdot,t) \end{pmatrix} \right|\right|\right|_0^{1/2[1/2]} \leq 2\sqrt{(1+T^2)}\left(\left\|\mathrm{W}^0\right\|_0^{1/2[1/2]} + \|u\|_{L^\infty(0,T)}\right),\ t \in [0,T].$$

тобто, задача (5.44), (5.45) *є коректно поставленою.*

З теореми 5.30 випливає формула для оператора Λ:

$$\mathbf{\Lambda} f = \lim_{T\to\infty} \int_0^T \mathbb{S}(-\xi)\mathbf{B} f(\xi)\,d\xi = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \begin{pmatrix} \widetilde{u} \\ \operatorname{sgn}(\cdot)\,(\widetilde{u})' \end{pmatrix},$$

де $\widetilde{u}(x) = \partial^{-1}\big(u(x)(H(x)-H(x-T)) - u(-x)(H(x+T)-H(x))\big)$, $x \in \mathbb{R}$.

У підрозділі 1.4 було показано, що множини $\mathcal{L}_T$, $\overline{\mathcal{L}}_T$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}_T$, $\overline{\mathcal{M}}_T$, $\mathcal{M}$ відповідають за властивості керованості керованості системи (1.13), (1.14), тому далі ми проведемо дослідження цих множин. Для заданого $T > 0$ обчислимо $\mathcal{M}_T$, $\overline{\mathcal{M}}_T$ та $\mathcal{M}$.

Враховуючи теорему 4.10, аналогічно доведенню теорем 5.22, 5.23 і 5.24 доводимо наступні три теореми.

Теорема 5.32. *Нехай* $T > 0$ *та* $\mathrm{W}^0 \in \widehat{\mathbf{H}}_0^{1/2[1/2]}$. *Тоді* $\mathrm{W}^0 \in \mathcal{M}_T$ *в тому і лише тому випадку, коли виконано три умови*

$$\operatorname{supp} \mathrm{w}_0^0 \subset [-T, T], \quad \mathrm{w}_1^0 - \operatorname{sgn}(\cdot)\, \mathrm{w}_0^{0\prime} = 0 \quad \textit{та} \quad \mathrm{w}_0^0 \in L^\infty(\mathbb{R}). \tag{5.68}$$

Теорема 5.33. *Нехай* $T > 0$ *та* $\mathrm{W}^0 \in \widehat{\mathbf{H}}_0^{1/2[1/2]}$. *Тоді* $\mathrm{W}^0 \in \overline{\mathcal{M}}_T$ *в тому і лише тому випадку, коли виконано дві умови*

$$\operatorname{supp} \mathrm{w}_0^0 \subset [-T, T] \quad \textit{та} \quad \mathrm{w}_1^0 - \operatorname{sgn}(\cdot)\, \mathrm{w}_0^{0\prime} = 0. \tag{5.69}$$

Теорема 5.34. *Справедливі твердження: Нехай* $\mathrm{W}^0 \in \widehat{\mathbf{H}}_0^{1/2[1/2]}$. *Тоді* $\mathrm{W}^0 \in \mathcal{M}$ *в тому і лише тому випадку, коли виконано умову*

$$\mathrm{w}_1^0 - \operatorname{sgn}(\cdot)\, \mathrm{w}_0^{0\prime} = 0. \tag{5.70}$$

Враховуючи (5.66) та теореми 5.32 і 5.33, з твердження 1.24 одержуємо критерій керованості для системи (5.44), (5.45) за заданий час.

Теорема 5.35. *Нехай* $T > 0$.

(i) *Стан* $\mathrm{W}^0 \in \widehat{\mathbf{H}}_0^{1/2[1/2]}$ *системи* (5.44), (5.45) *є наближено* L^∞*-керованим за заданий час* T *тоді і лише тоді, коли виконано дві умови:*

$$\operatorname{supp} \mathrm{w}_0^0 \subset [-T, T], \tag{5.71}$$

$$\mathrm{w}_1^0 - \operatorname{sgn}(\cdot)\,\mathrm{w}_0^{0\prime} = 0. \tag{5.72}$$

(ii) *Стан* $\mathrm{W}^0 \in \widehat{\mathbf{H}}_0^{1/2[1/2]}$ *системи* (5.44), (5.45) *є* L^∞*-керованим за заданий час* T *тоді і лише тоді, коли виконано три умови:* (5.71), (5.72) *та*

$$\mathrm{w}_0^{0\prime} \in L^\infty(\mathbb{R}). \tag{5.73}$$

Крім того, за умов (5.71)–(5.73) *керування* $u(t) = \mathrm{w}_0^{0\prime}(t)$, $t \in [0, T]$, *розв'язує задачу* L^∞*-керованості за час* T.

Оператори групи $\mathbb{S}$ не є рівномірно обмеженими відносно $t \in \mathbb{R}$ (див. (5.66)). Тому твердження 1.25 в цьому випадку застосувати неможливо. Проте, висновок цього твердження залишається в силі, тобто, $\mathcal{L} = \mathcal{M}$. Це випливає з наступної теореми.

Теорема 5.36. *Стан* $\mathrm{W}^0 \in \widehat{\mathbf{H}}_0^{1/2[1/2]}$ *системи* (5.44), (5.45) *є наближено* L^∞*-керованим за вільний час тоді і лише тоді, коли виконано умову* (5.72).

Доведення. Достатність (5.72) одразу випливає з теорем 5.28, 4.10 і висновку 4.9. *Необхідність* (5.72) доводимо, повторюючи міркування, використані при доведенні необхідності умови (5.62) в теоремі 5.28. □

5.2. Керованість хвильового рівняння на півплощині

У цьому підрозділі досліджено керованість хвильового рівняння зі сталими коефіцієнтами на півплощині. Результати проілюстровано прикладами 7.14–7.15 в підрозділі 7.

5.2.1. Керованість умовами Діріхле. Розглянемо хвильове рівняння

$$z_{tt} = \Delta z, \qquad \xi_1 > 0,\ \xi_2 \in \mathbb{R},\ t \in (0, T), \tag{5.74}$$

кероване крайовою умовою Діріхле

$$z(0, \xi_2, t) = \delta(\xi_2)u(t), \qquad \xi_2 \in \mathbb{R},\ t \in (0, T), \tag{5.75}$$

за початкових умов

$$z(\xi, 0) = z_0^0(\xi), \quad z_t(\xi, 0) = z_1^0(\xi), \qquad \xi_1 > 0,\ \xi_2 \in \mathbb{R}, \tag{5.76}$$

де $T > 0$ — деяка стала; $z(\cdot, t) \in \widetilde{H}_+^{-1/2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$, $t \in [0, T]$; $\left(\frac{d}{dt}\right)^m z : [0, T] \to H_\oplus^{-m-1/2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$, $m = 0, 1, 2$; $u \in L^\infty(0, T)$ — керування; $z_0^0 \in \widetilde{H}_+^{-1/2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$, $z_1^0 \in \widetilde{H}_+^{-3/2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ — початкові дані.

Позначимо через z, z_0^0 та z_1^0 непарні продовження за ξ_1 для z, z_0^0 та z_1^0, відповідно. Скориставшись теоремою 4.4, бачимо, що z задовольняє систему

$$\mathrm{z}_{tt} = \Delta \mathrm{z} - 2u\delta_{\xi_1}, \qquad \xi \in \mathbb{R},\ t \in (0, T), \tag{5.77}$$

$$\mathrm{z}(x, 0) = \mathrm{z}_0^0(x), \quad \mathrm{z}_t(x, 0) = \mathrm{z}_1^0(x), \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{5.78}$$

де δ — це розподіл Дірака за ξ; $\left(\frac{d}{dt}\right)^m \mathrm{z} : [0, T] \to \widetilde{H}_0^{-m-1/2}(\mathbb{R}^2)$, $m = 0, 1, 2$; $\mathrm{z}_0^0 \in \widetilde{H}_0^{-1/2}(\mathbb{R}^2)$, $\mathrm{z}_1^0 \in \widetilde{H}_0^{-3/2}(\mathbb{R}^2)$. З теореми 4.7 випливає, що для розв'язку z системи (5.77), (5.78) виконано умову

$$\mathrm{z}(+0, \xi_2, t) = \delta(\xi_2)u(t) \quad \text{м. с. на } [0, T]. \tag{5.79}$$

отже, звуження цього розв'язку на $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ задовольняє систему (5.74)–(5.76). Таким чином, системи (5.74)–(5.76) і (5.77), (5.78) є еквівалентними, тому далі ми розглядатимемо систему (5.77), (5.78) замість (5.74)–(5.76). Позначимо $Z^0 = \begin{pmatrix} z_0^0 \\ z_1^0 \end{pmatrix}$. Бачимо, що $Z^0 \in \widetilde{\mathbf{H}}_0^{-1/2}(\mathbb{R}^2)$. Зрозуміло, що ця керована система має вигляд (1.11), (1.12).

Скориставшись формулою Пуассона (див., напр., [86, Chap. 3]), одержуємо

$$\mathrm{z}(\xi,t) = \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{H(t^2-|\xi|^2)}{\sqrt{t^2-|\xi|^2}} * \mathrm{z}_0^0(\xi)\right) + \frac{1}{2\pi}\frac{H(t^2-|\xi|^2)}{\sqrt{t^2-|\xi|^2}} * \mathrm{z}_1^0(\xi) \\ - \frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial \xi_1}\int_0^t \frac{H(\xi^2-|\xi|^2)}{\sqrt{\tau^2-|x|^2}} u(t-\tau)\,d\tau,$$

де $*$ є згорткою за ξ.

Теорема 5.37. *Нехай керування $u_n(t)$, $t \in [0,T_n]$, $n = \overline{1,\infty}$, розв'язують проблему наближеної L^∞-керованості стану $Z^0 \in \widetilde{\mathbf{H}}_0^{-1/2}(\mathbb{R}^2)$ системи (5.77), (5.78) за вільний час. Нехай z^n є розв'язком системи (5.77), (5.78) з $u = u_n$, $T = T_n$, $n = \overline{1,\infty}$. Тоді цей розв'язок є єдиним, $Z^0 \in \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{H}}}^{-1/2}$ і $\mathrm{z}^n(\cdot,t) \in \widetilde{\mathcal{H}}^{-1/2}$, $t \in [0,T_n]$, $n = \overline{1,\infty}$.*

Доведення. Оскільки керування $u_n(t)$, $t \in [0,T_n]$, $n = \overline{1,\infty}$, розв'язують проблему наближеної L^∞-керованості стану $Z^0 \in \widetilde{\mathbf{H}}_0^{-1/2}(\mathbb{R}^2)$ системи (5.77), (5.78) за вільний час, то

$$\left|\left|\left|\begin{pmatrix} \mathrm{z}_0^n(\cdot,T_n) \\ \mathrm{z}_1^n(\cdot,T_n)\end{pmatrix}\right|\right|\right|_0^{-1/2} \to 0 \qquad \text{as } n \to \infty. \tag{5.80}$$

Позначимо

$$\mathrm{V}^0 = \mathcal{F}\mathrm{Z}^0, \quad \mathrm{V}^n(\cdot,t) = \mathcal{F}\begin{pmatrix} \mathrm{z}_0^n(\cdot,t) \\ \mathrm{z}_1^n(\cdot,t)\end{pmatrix}, \qquad t \in [0,T_n],\ n = \overline{1,\infty}.$$

Для $n = \overline{1, \infty}$, застосовуючи перетворення Фур'є за ξ до системи (5.77), (5.78) з $u = u_n$, $T = T_n$, одержуємо

$$\frac{d}{dt}\mathrm{V}^n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -|\sigma|^2 & 0 \end{pmatrix} \mathrm{V}^n - \frac{1}{\pi} u_n(t) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad t \in (0, T), \tag{5.81}$$

$$\mathrm{V}(\cdot, 0) = \mathrm{V}^0, \tag{5.82}$$

де $\left(\frac{d}{dt}\right)^m \mathrm{V} : [0, T] \to \widetilde{\mathbf{H}}_{-m-1/2}(\mathbb{R}^2)$, $m = 0, 1$, $\mathrm{V}^0 \in \widetilde{\mathbf{H}}_{-1/2}(\mathbb{R}^2)$. Отже, для $n = \overline{1, \infty}$, функція

$$\mathrm{V}^n(\sigma, t) = \begin{pmatrix} \cos(t|\sigma|) & \frac{\sin(t|\sigma|)}{|\sigma|} \\ -|\sigma| \sin(t|\sigma|) & \cos(t|\sigma|) \end{pmatrix}$$
$$\times \left(\mathrm{V}^0(\sigma) - i\sigma_1 \frac{1}{\pi} \int_0^t \begin{pmatrix} \frac{\sin(\xi|\sigma|)}{|\sigma|} \\ \cos(\xi|\sigma|) \end{pmatrix} u_n(\xi)\, d\xi \right) \tag{5.83}$$

є єдиним розв'язком (5.81), (5.82). Тому z є єдиним розв'язком (5.77), (5.78). Беручи до уваги (5.80), одержуємо

$$|||\mathrm{V}^n(\cdot, T_n)|||^0_{-1/2} \to 0 \qquad \text{as } n \to \infty. \tag{5.84}$$

Позначимо $\mathcal{U}_n(t) = u_n(t)(H(t) - H(t - T))$, $t \in \mathbb{R}$; $\nu_n = \mathcal{F}\mathcal{U}_n$; $\tilde{\nu}_n(\sigma) = \nu_n(|\sigma|) - \nu_n(-|\sigma|)$, $\hat{\nu}_n(\sigma) = \nu_n(|\sigma|) + \nu_n(-|\sigma|)$, $\sigma \in \mathbb{R}^2$, $n = \overline{1, \infty}$. Враховуючи (5.84), одержуємо

$$\left\| |\sigma| \mathrm{V}^0_0 - \sqrt{\frac{2}{\pi}} i\sigma_1 \tilde{\nu}_n \right\|^0_{-3/2} \to 0 \text{ and } \left\| \mathrm{V}^0_1 - \sqrt{\frac{2}{\pi}} i\sigma_1 \hat{\nu}_n \right\|^0_{-3/2} \to 0 \quad \text{as } n \to \infty.$$

Оскільки $\boldsymbol{\mathcal{H}}_0$ є повним простором і $\mathrm{V}^0 \in \widetilde{\mathbf{H}}_{-1/2}(\mathbb{R}^2)$, то $\mathrm{V}^0 \in \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_{-1/2}$. Отже, $\mathrm{Z}^0 \in \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{H}}}^{-1/2}$. Скориставшись (5.83), одержуємо $\mathrm{V}^n(\cdot, t) \in \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_{-1/2}$, $t \in [0, T_n]$, тому маємо $\mathrm{z}^n(\cdot, t) \in \widetilde{\mathcal{H}}^{-1/2}$, $t \in [0, T_n]$, $n = \overline{1, \infty}$. Теорему доведено. $\square$

Звідси одержуємо наступний висновок.

Висновок 5.38. *Нехай* $T > 0$, $u \in L^\infty(0,T)$ *і* $\mathrm{Z}^0 \in \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{H}}}^{-1/2}$. *Якщо* z *є розв'язком системи , то* $\mathrm{z}(\cdot,t) \in \widetilde{\mathcal{H}}^{-1/2}$, $t \in [0,T]$.

Скориставшись теоремою 5.37 і висновком 5.38, ми можемо розглядати проблеми L^∞-керованості системи (5.77), (5.78) у просторі $\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{H}}}^{-1/2}$ замість простору $\widetilde{\mathbf{H}}_0^{-1/2}(\mathbb{R}^2)$.

Беручи до уваги теореми 4.11—4.13, одержуємо наступні дві теореми.

Теорема 5.39. *Нехай* $T > 0$, $u \in L^\infty(0,T)$, $\mathrm{W}^0 \in \widetilde{\mathbf{H}}_0^{-1/2[1/2]}$, $\mathrm{Z}^0 = \boldsymbol{\Psi}\mathrm{W}^0$. *Якщо* w *є розв'язком системи* (5.4), (5.5) *і* $\mathrm{z}(\cdot,t) = \boldsymbol{\Psi}\mathrm{w}(\cdot,t)$, $t \in [0,T]$, *то* z *є розв'язком системи* (5.77), (5.78), $\mathrm{Z}^0 \in \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{H}}}^{-1/2}$ *і* $\mathrm{z}(\cdot,t) \in \widetilde{\mathcal{H}}^{-1/2}$, $t \in [0,T]$.

Теорема 5.40. *Нехай* $T > 0$, $u \in L^\infty(0,T)$, $\mathrm{Z}^0 \in \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{H}}}^{-1/2}$, $\mathrm{W}^0 = \boldsymbol{\Psi}^{-1}\mathrm{Z}^0$. *Якщо* z *є розв'язком системи* (5.77), (5.78) *і* $\mathrm{w}(\cdot,t) = \boldsymbol{\Psi}^{-1}\mathrm{z}(\cdot,t)$, $t \in [0,T]$, *то* w *є розв'язком системи* (5.4), (5.5), $\mathrm{W}^0 \in \widetilde{\mathbf{H}}_0^{-1/2[1/2]}$ *і* $\mathrm{w}(\cdot,t) \in \widetilde{\mathbf{H}}_0^{-1/2[1/2]}$, $t \in [0,T]$.

З теорем 4.11, 5.39 і 5.40 одержуємо наступний висновок.

Висновок 5.41. *Нехай* $\mathrm{Z}^0 \in \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{H}}}^{-1/2}$ *і* $\mathrm{W}^0 = \boldsymbol{\Psi}^{-1}\mathrm{Z}^0$. *Тоді справедливі наступні твердження.*

(i) *Стан* Z^0 *системи* (5.77), (5.78) *є* L^∞*-керованим за заданий час* $T > 0$ *тоді і лише тоді, коли стан* W^0 *системи* (5.4), (5.5) *є* L^∞*-керованим за той же час.*

(ii) *Стан* Z^0 *системи* (5.77), (5.78) *є наближено* L^∞*-керованим за заданий час* $T > 0$ *тоді і лише тоді, коли стан* W^0 *системи* (5.4), (5.5) *є наближено* L^∞*-керованим за той же час.*

(iii) *Стан* Z^0 *системи* (5.77), (5.78) *є наближено* L^∞*-керованим за вільний час тоді і лише тоді, коли стан* W^0 *системи* (5.4), (5.5) *є наближено* L^∞*-керованим за вільний час.*

Таким чином, двовимірна керована система (5.77), (5.78) відтворює властивості керованості одновимірної керованої системи (5.4), (5.5) і навпаки.

З теорем 4.20, 5.37, 5.17, 5.18 и висновків 5.38, 5.41 одержуємо наступні дві теореми.

Теорема 5.42. *Нехай* $T > 0$.

(i) *Стан* $\mathrm{Z}^0 \in \widetilde{\mathbf{H}}_0^{-1/2}(\mathbb{R}^2)$ *системи* (5.77), (5.78) *є наближено* L^∞*-керованим за заданий час* T *тоді і лише тоді, коли виконано три умови:*

$$\mathrm{Z}^0 \in \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{H}}}^{-1/2}, \tag{5.85}$$

$$\mathrm{z}_1^0 = \boldsymbol{\Psi}\left(\left(\operatorname{sgn}(\cdot)\,\boldsymbol{\Psi}^{-1}\mathrm{z}_0^0\right)'\right), \tag{5.86}$$

$$\operatorname{supp}\mathrm{Z}^0 \subset D_T, \tag{5.87}$$

$$\tag{5.88}$$

де $D_T = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \le T\}$.

(ii) *Стан* $\mathbb{Z}^0 \in \widetilde{\mathbf{H}}_0^{-1/2}$ *системи* (5.77), (5.78) *є* L^∞*-керованим за заданий* *час T тоді і лише тоді, коли виконано чотири умови:* (5.85)–(5.87) *та*

$$\mathbf{\Psi}^{-1}\mathrm{z}_0^0 \in L^\infty(\mathbb{R}), \tag{5.89}$$

Крім того, за умов (5.85)–(5.89) *керування* $u(t) = \mathbf{\Psi}^{-1}\mathrm{z}_0^0(t)$, $t \in [0, T]$, *розв'язує задачу L^∞-керованості за час T.*

Теорема 5.43. *Стан* $\mathrm{Z}^0 \in \widetilde{\mathbf{H}}_0^{-1/2}(\mathbb{R}^2)$ *системи* (5.77), (5.78) *є наближено L^∞-керованим за вільний час тоді і лише тоді, коли виконано дві умови:* (5.85) *і* (5.86).

На с. 40 було введено множини $\mathcal{L}_T$, $\overline{\mathcal{L}}_T$ та $\mathcal{L}$, загальні властивості яких подано в твердженнях 1.24, 1.25 та формулах (1.16)–(1.19). Позначимо через $\mathcal{L}_T^{[1D]}$, $\overline{\mathcal{L}}_T^{[1D]}$ та $\mathcal{L}^{[1D]}$ множини $\mathcal{L}_T$, $\overline{\mathcal{L}}_T$ та $\mathcal{L}$, відповідно, для керованої системи (5.4), (5.5) з $q = 0$ в $\widetilde{\mathbf{H}}_0^{-3/2[1/2]}$. Позначимо також через $\mathcal{L}_T^{[2D]}$, $\overline{\mathcal{L}}_T^{[2D]}$ та $\mathcal{L}^{[2D]}$ множини $\mathcal{L}_T$, $\overline{\mathcal{L}}_T$ та $\mathcal{L}$, відповідно, для керованої системи (5.77), (5.78). З формули (1.19), твердження 1.25 та теорем 4.11, 5.14–5.18, 5.42, 5.43 випливає наступна теорема

Теорема 5.44. *Маємо*

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathcal{L}_T^{[1D]} & \subsetneq & \overline{\mathcal{L}}_T^{[1D]} & \subsetneq & \mathcal{L}^{[1D]} & \subsetneq & \widetilde{\mathbf{H}}_0^{-1/2[1/2]} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathbf{\Psi}\mathcal{L}_T^{[1D]} & \subsetneq & \mathbf{\Psi}\overline{\mathcal{L}}_T^{[1D]} & \subsetneq & \mathbf{\Psi}\mathcal{L}^{[1D]} & \subsetneq & \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{H}}}^{-1/2} \\
\| & & \| & & \| & & \| \\
\mathcal{L}_T^{[2D]} & \subsetneq & \overline{\mathcal{L}}_T^{[2D]} & \subsetneq & \mathcal{L}^{[2D]} & \subsetneq & \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{H}}}^{-1/2}
\end{array} .$$

5.2.2. Керованість умовами Неймана. Розглянемо хвильове рівняння

$$z_{tt} = \Delta z, \qquad \xi_1 > 0,\ \xi_2 \in \mathbb{R},\ t \in (0, T), \tag{5.90}$$

кероване крайовою умовою Неймана

$$z_{\xi_1}(0, \xi_2, t) = \delta(\xi_2) u(t), \qquad \xi_2 \in \mathbb{R},\ t \in (0, T), \tag{5.91}$$

за початкових умов

$$z(\xi, 0) = z_0^0(\xi), \quad z_t(\xi, 0) = z_1^0(\xi), \qquad \xi_1 > 0,\ \xi_2 \in \mathbb{R}, \tag{5.92}$$

де $T > 0$ — деяка стала; $z(\cdot, t) \in \widehat{H}_+^{1/2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$, $t \in [0, T]$; $\left(\frac{d}{dt}\right)^m z : [0, T] \to H_\oplus^{-m+1/2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$, $m = 0, 1, 2$; $u \in L^\infty(0, T)$ — керування; $z_0^0 \in \widehat{H}_+^{1/2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$, $z_1^0 \in \widehat{H}_+^{-1/2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ — початкові дані.

Позначимо через z, z_0^0 та z_1^0 парні продовження за ξ_1 для z, z_0^0 та z_1^0, відповідно. Скориставшись виновком 4.6, бачимо, що z задовольняє систему

$$\mathrm{z}_{tt} = \Delta \mathrm{z} - 2u\delta, \qquad \xi \in \mathbb{R},\ t \in (0, T), \tag{5.93}$$

$$\mathrm{z}(x, 0) = \mathrm{z}_0^0(x), \quad \mathrm{z}_t(x, 0) = \mathrm{z}_1^0(x), \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{5.94}$$

де δ — це розподіл Дірака за ξ; $\left(\frac{d}{dt}\right)^m \mathrm{z} : [0, T] \to \widehat{H}_0^{-m+1/2}(\mathbb{R}^2)$, $m = 0, 1, 2$; $\mathrm{z}_0^0 \in \widehat{H}_0^{1/2}(\mathbb{R}^2)$, $\mathrm{z}_1^0 \in \widehat{H}_0^{-1/2}(\mathbb{R}^2)$. З теореми 4.7 випливає, що для розв'язку z системи (5.93), (5.94) виконано умову

$$\mathrm{z}_{\xi_1}(+0, \xi_2, t) = \delta(\xi_2) u(t) \quad \text{м. с. на } [0, T]. \tag{5.95}$$

отже, звуження цього розв'язку на $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ задовольняє систему (5.90)–(5.92). Таким чином, системи (5.90)–(5.92) і (5.93), (5.94) є еквівалентними, тому далі ми розглядатимемо систему (5.93), (5.94) замість (5.90)–(5.92). Позначимо $\mathrm{Z}^0 = \begin{pmatrix} \mathrm{z}_0^0 \\ \\ \mathrm{z}_1^0 \end{pmatrix}$. Бачимо, що $\mathrm{Z}^0 \in \widehat{\mathbf{H}}_0^{1/2}(\mathbb{R}^2)$. Зрозуміло, що ця керована система має вигляд (1.11), (1.12).

Скориставшись формулою Пуассона (див., напр., [86, Chap. 3]), одержуємо

$$\mathrm{z}(\xi,t) = \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{H(t^2-|\xi|^2)}{\sqrt{t^2-|\xi|^2}} * \mathrm{z}_0^0(\xi)\right) + \frac{1}{2\pi}\frac{H(t^2-|\xi|^2)}{\sqrt{t^2-|\xi|^2}} * \mathrm{z}_1^0(\xi) \\ - \frac{1}{\pi}\int_0^t \frac{H(\xi^2-|\xi|^2)}{\sqrt{\tau^2-|x|^2}} u(t-\tau)\,d\tau,$$

де $*$ є згорткою за ξ.

Цілком аналогічно теоремі 5.37 доводимо наступну теорему

Теорема 5.45. *Нехай керування* $u_n(t)$, $t \in [0,T_n]$, $n = \overline{1,\infty}$, *розв'язують проблему наближеної* L^∞*-керованості стану* $\mathrm{Z}^0 \in \widehat{\mathbf{H}}_0^{1/2}(\mathbb{R}^2)$ *системи* (5.93), (5.94) *за вільний час. Нехай* z^n *є розв'язком системи* (5.93), (5.94) *з* $u = u_n$, $T = T_n$, $n = \overline{1,\infty}$. *Тоді цей розв'язок є єдиним,* $\mathrm{Z}^0 \in \widehat{\boldsymbol{\mathcal{H}}}^{1/2}$ *і* $\mathrm{z}^n(\cdot,t) \in \widehat{\mathcal{H}}^{1/2}$, $t \in [0,T_n]$, $n = \overline{1,\infty}$.

Звідси одержуємо наступний висновок.

Висновок 5.46. *Нехай* $T > 0$, $u \in L^\infty(0,T)$ *і* $\mathrm{Z}^0 \in \widehat{\boldsymbol{\mathcal{H}}}^{1/2}$. *Якщо* z *є розв'язком системи , то* $\mathrm{z}(\cdot,t) \in \widehat{\mathcal{H}}^{1/2}$, $t \in [0,T]$.

Скориставшись теоремою 5.45 і висновком 5.46, ми можемо розглядати проблеми L^∞-керованості системи (5.77), (5.78) у просторі $\widehat{\boldsymbol{\mathcal{H}}}^{1/2}$ замість простору $\widehat{\mathbf{H}}_0^{1/2}(\mathbb{R}^2)$.

Беручи до уваги теореми 4.11—4.13, одержуємо наступні дві теореми.

Теорема 5.47. *Нехай* $T > 0$, $u \in L^\infty(0,T)$, $\mathrm{W}^0 \in \widehat{\mathbf{H}}_0^{1/2[1/2]}$, $\mathrm{Z}^0 = \mathbf{\Phi}\mathrm{W}^0$. *Якщо* w *є розв'язком системи* (5.44), (5.45) *і* $\mathrm{z}(\cdot,t) = \mathbf{\Phi}\mathrm{w}(\cdot,t)$, $t \in [0,T]$, *то* z *є розв'язком системи* (5.93), (5.94), $\mathrm{Z}^0 \in \widehat{\boldsymbol{\mathcal{H}}}^{1/2}$ *і* $\mathrm{z}(\cdot,t) \in \widehat{\mathcal{H}}^{1/2}$, $t \in [0,T]$.

Теорема 5.48. *Нехай* $T > 0$, $u \in L^\infty(0,T)$, $\mathrm{Z}^0 \in \widehat{\boldsymbol{\mathcal{H}}}^{1/2}$, $\mathrm{W}^0 = \mathbf{\Phi}^{-1}\mathrm{Z}^0$. *Якщо* z *є розв'язком системи* (5.93), (5.94) *і* $\mathrm{w}(\cdot,t) = \mathbf{\Phi}^{-1}\mathrm{z}(\cdot,t)$, $t \in [0,T]$, *то* w *є розв'язком системи* (5.44), (5.45), $\mathrm{W}^0 \in \widehat{\mathbf{H}}_0^{1/2[1/2]}$ *і* $\mathrm{w}(\cdot,t) \in \widehat{\mathbf{H}}_0^{1/2[1/2]}$, $t \in [0,T]$.

З теорем 4.11, 5.47 і 5.48 одержуємо наступний висновок.

Висновок 5.49. *Нехай* $\mathrm{Z}^0 \in \widehat{\boldsymbol{\mathcal{H}}}^{-1/2}$ *і* $\mathrm{W}^0 = \mathbf{\Phi}^{-1}\mathrm{Z}^0$. *Тоді справедливі наступні твердження.*

(i) *Стан* Z^0 *системи* (5.93), (5.94) *є* L^∞*-керованим за заданий час* $T > 0$ *тоді і лише тоді, коли стан* W^0 *системи* (5.44), (5.45) *є* L^∞*-керованим за той же час.*

(ii) *Стан* Z^0 *системи* (5.93), (5.94) *є наближено* L^∞*-керованим за заданий час* $T > 0$ *тоді і лише тоді, коли стан* W^0 *системи* (5.44), (5.45) *є наближено* L^∞*-керованим за той же час.*

(iii) *Стан* Z^0 *системи* (5.93), (5.94) *є наближено* L^∞*-керованим за вільний час тоді і лише тоді, коли стан* W^0 *системи* (5.44), (5.45) *є наближено* L^∞*-керованим за вільний час.*

Таким чином, двовимірна керована система (5.93), (5.94) відтворює властивості керованості одновимірної керованої системи (5.44), (5.45) і навпаки.

З теорем 4.20, 5.45, 5.35, 5.36 и висновків 5.46, 5.49 одержуємо наступні дві теореми.

Теорема 5.50. *Нехай $T > 0$.*

(i) *Стан* $\mathrm{Z}^0 \in \widehat{\mathbf{H}}_0^{1/2}(\mathbb{R}^2)$ *системи* (5.93), (5.94) *є наближено* L^∞*-керованим за заданий час* T *тоді і лише тоді, коли виконано три умови:*

$$\mathrm{Z}^0 \in \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{H}}}^{1/2}, \tag{5.96}$$

$$\mathrm{z}_1^0 = \mathbf{\Phi}\left(\operatorname{sgn}(\cdot)\,\left(\mathbf{\Phi}^{-1}\mathrm{z}_0^0\right)'\right), \tag{5.97}$$

$$\operatorname{supp} \mathrm{Z}^0 \subset D_T, \tag{5.98}$$

$$\tag{5.99}$$

де $D_T = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \le T\}$.

(ii) *Стан* $\mathbb{Z}^0 \in \widehat{\mathbf{H}}_0^{1/2}$ *системи* (5.93), (5.94) *є* L^∞*-керованим за заданий час* T *тоді і лише тоді, коли виконано чотири умови:* (5.96)–(5.98) *та*

$$\left(\mathbf{\Phi}^{-1}\mathrm{z}_0^0\right)' \in L^\infty(\mathbb{R}), \tag{5.100}$$

Крім того, за умов (5.85)–(5.89) *керування* $u(t) = \left(\mathbf{\Psi}^{-1}\mathrm{z}_0^0\right)'(t)$, $t \in [0,T]$, *розв'язує задачу* L^∞*-керованості за час* T.

Теорема 5.51. *Стан* $\mathrm{Z}^0 \in \widehat{\mathbf{H}}_0^{1/2}(\mathbb{R}^2)$ *системи* (5.93), (5.94) *є наближено* L^∞*-керованим за вільний час тоді і лише тоді, коли виконано дві умови:* (5.96) *і* (5.97).

На с. 40 було введено множини $\mathcal{L}_T$, $\overline{\mathcal{L}}_T$ та $\mathcal{L}$, загальні властивості яких подано в твердженнях 1.24, 1.25 та формулах (1.16)–(1.19). Позначимо через $\mathcal{L}_T^{[1D]}$, $\overline{\mathcal{L}}_T^{[1D]}$ та $\mathcal{L}^{[1D]}$ множини $\mathcal{L}_T$, $\overline{\mathcal{L}}_T$ та $\mathcal{L}$, відповідно, для керованої системи (5.44), (5.45) з $q = 0$ в $\widehat{\mathbf{H}}_0^{-1/2[1/2]}$. Позначимо також через $\mathcal{L}_T^{[2D]}$, $\overline{\mathcal{L}}_T^{[2D]}$ та $\mathcal{L}^{[2D]}$ множини $\mathcal{L}_T$, $\overline{\mathcal{L}}_T$ та $\mathcal{L}$, відповідно, для керованої системи (5.93), (5.94). З формули (1.19), твердження 1.25 та теорем 4.17, 5.32–5.36, 5.50, 5.51 випливає наступна теорема

Теорема 5.52. *Маємо*

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{L}_T^{[1D]} & \subsetneq & \overline{\mathcal{L}}_T^{[1D]} & \subsetneq & \mathcal{L}^{[1D]} & \subsetneq & \widetilde{\mathbf{H}}_0^{1/2[1/2]} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{\Phi}\mathcal{L}_T^{[1D]} & \subsetneq & \mathbf{\Phi}\overline{\mathcal{L}}_T^{[1D]} & \subsetneq & \mathbf{\Phi}\mathcal{L}^{[1D]} & \subsetneq & \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{H}}}^{1/2} \\ \| & & \| & & \| & & \| \\ \mathcal{L}_T^{[2D]} & \subsetneq & \overline{\mathcal{L}}_T^{[2D]} & \subsetneq & \mathcal{L}^{[2D]} & \subsetneq & \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{H}}}^{1/2} \end{array}.$$

5.3. Стабілізація хвильового рівняння

У цьому підрозділі вивчено стабілізовність хвильового рівняння на півосі за допомоги позиційних керувань без запізнення та позиційних керувань із запізненням.

5.3.1. Позиційне керування без запізнення за умов Діріхле.

Розглянемо хвильове рівняння

$$w_{tt} = w_{xx} + v, \qquad x > 0,\ t > 0, \tag{5.101}$$

за умови Діріхле

$$w(0,t) = \omega(t), \qquad t > 0, \tag{5.102}$$

та за початкових умов

$$w(x,0) = w_0^0(x), \quad w_t(x,0) = w_1^0(x), \qquad x > 0, \tag{5.103}$$

де $w(\cdot,t) \in \widetilde{H}_+^0 = H_\oplus^0$ є шуканою функцією, $t \in [0,+\infty)$; $\left(\frac{d}{dt}\right)^m w : [0,+\infty) \to H_\oplus^{-m}$, $m = 0,1,2$; $\omega \in L^2(\mathbb{R}_+)$, $w_0^0 \in \widetilde{H}_+^0$, $w_1^0 \in \widetilde{H}_+^{-1}$ є заданими функціями, v є позиційним керуванням вигляду

$$v = b_0 w + b_1 w_t, \tag{5.104}$$

де $b_0 \in \mathbb{R}$ та $b_1 \in \mathbb{R}$ є сталими, що визначають це керування.

Позначимо через w, w_0^0 та w_1^0 непарні продовження за x для w, w_0^0 та w_1^0, відповідно. Скориставшись теоремою 2.3, бачимо, що w задовольняє систему

$$\mathrm{w}_{tt} = \mathrm{w}_{xx} + \mathrm{u} - 2\omega\delta', \qquad x \in \mathbb{R},\ t > 0, \tag{5.105}$$

$$\mathrm{w}(x,0) = \mathrm{w}_0^0(x), \quad \mathrm{w}_t(x,0) = \mathrm{w}_1^0(x), \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{5.106}$$

де δ — це розподіл Дірака за x; ω з умови (5.102) є функцією від t; $\left(\frac{d}{dt}\right)^m \mathrm{w} : [0,+\infty) \to \widetilde{H}^{-m}$, $m = 0,1,2$; $\mathrm{w}_0^0 \in \widetilde{H}^0$, $\mathrm{w}_1^0 \in \widetilde{H}^{-1}$, u є позиційним керуванням вигляду

$$\mathrm{u} = b_0 \mathrm{w} + b_1 \mathrm{w}_t, \tag{5.107}$$

де $b_0 \in \mathbb{R}$ та $b_1 \in \mathbb{R}$ є сталими, що визначають це керування. З висновку 5.3 випливає, що для розв'язку w системи (5.105), (5.106) виконано умову

$$\mathrm{w}(+0,t) = \omega(t) \quad \text{м. с. на } \mathbb{R}_+. \tag{5.108}$$

отже, звуження за x цього розв'язку на $\mathbb{R}_+$ задовольняє систему (5.101)–(5.103). Таким чином, системи (5.101)–(5.103) і (5.105), (5.106) є еквівалентними, тому далі ми розглядатимемо систему (5.105), (5.106) замість (5.101)–(5.103). Позначимо $\mathrm{W}^0 = \begin{pmatrix} \mathrm{w}_0^0 \\ \mathrm{w}_1^0 \end{pmatrix}$. Бачимо, що $\mathrm{W}^0 \in \widetilde{\mathbf{H}}^0$. Зрозуміло, що ця керована система має вигляд (1.21), (1.12).

Оскільки за теоремою 1.3 простори H^m та H_0^m є ізоморфними, $m \in \mathbb{Z}$, то властивості стабілізовності (див. означення 1.26) системи (5.105), (5.106) в просторах H^m збігаються з властивостями керованості цієї системи в просторах H_0^m. Далі нам буде зручно перейти до розгляду цієї системи в просторах H_0^m, тому що ми застосовуватимо перетворення Фур'є та теорему 1.3 про те, що перетворення Фур'є є ізометричним ізоморфізмом H_0^m та H_m^0.

Позначимо через $\mathcal{A} : \widetilde{H}_0^0 \to \widetilde{H}_0^{-2}$ диференціальний оператор $\left(\frac{d}{dx}\right)^2$, $f(x,t) = -2\delta'(x)\omega(t)$, а $\mathfrak{F} = \{2\delta'(x)\nu(t) \mid \nu \in L^2(\mathbb{R}_+)\}$. Отже, (5.105), (5.106) перетворюється на (1.21), (1.12), де $H_0 = \widetilde{H}_0^0$, $H_1 = \widetilde{H}_0^{-1}$ та $H_2 = \widetilde{H}_0^{-2}$. Керована система (1.23), (1.14) еквівалентна системі (1.11), (1.12), а, отже, і системам (5.101), (5.103) та (5.105), (5.106). Тому далі ми будемо розглядати систему (1.23), (1.14), де $\mathbf{H} = \widetilde{\mathbf{H}}_0^0$ та $\mathrm{H} = \widetilde{\mathbf{H}}_0^{-1}$. Беручи до уваги теорему 1.3 та застосовуючи до (1.23), (1.14) перетворення Фур'є за x, одержуємо

$$\mathrm{V}' = \widetilde{\mathbf{G}} + \widetilde{\mathbf{B}}\mathrm{V} + F, \qquad t > 0, \tag{5.109}$$

$$\mathrm{V}(0) = \mathrm{V}^0 \tag{5.110}$$

де $\mathrm{V}(\cdot,t) = \mathcal{F}_{x\to\sigma}\mathrm{W}(\cdot,t)$, $t \in [0,+\infty)$, $\mathrm{V}^0 = \mathcal{F}_{x\to\sigma}\mathrm{W}^0$; оператор $\widetilde{\mathbf{G}} : \widetilde{\mathbf{H}}_{-1} \to \widetilde{\mathbf{H}}_{-1}$, $D(\widetilde{\mathbf{G}}) = \widetilde{\mathbf{H}}_0$, є оператором множення на матрицю

$$G(\sigma) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\sigma^2 & 0 \end{pmatrix},$$

а оператор $\widetilde{\mathbf{B}} : \widetilde{\mathbf{H}}_{-1} \to \widetilde{\mathbf{H}}_{-1}$, $D(\widetilde{\mathbf{B}}) = \widetilde{\mathbf{H}}_0$, є оператором множення на матрицю

$$\widetilde{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b_0 & b_1 \end{pmatrix}.$$

Нехай задано деяке $b > 0$. Позначимо $b_0 = -b^2$, $b_1 = -2b$. За висновками 5.68 та 5.69 оператор $\widetilde{\mathbf{G}} + \widetilde{\mathbf{B}}$ є інфінітезимальним генератором C_0-групи $\widetilde{\mathbf{\Sigma}}_b : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(\widetilde{\mathbf{H}}_{-1})$, де для кожного $t \in \mathbb{R}$ оператор $\widetilde{\mathbf{\Sigma}}_b(t) : \widetilde{\mathbf{H}}_{-1} \to \widetilde{\mathbf{H}}_{-1}$, $D(\widetilde{\mathbf{\Sigma}}_b(t)) = \widetilde{\mathbf{H}}_{-1}$, є оператором множення на матрицю

$$\Sigma_b(\sigma, t) = \begin{pmatrix} \cos(t\sigma) + b\frac{\sin(t\sigma)}{\sigma} & \frac{\sin(t\sigma)}{\sigma} \\ -(\sigma^2 + b^2)\frac{\sin(t\sigma)}{\sigma} & \cos(t\sigma) - b\frac{\sin(t\sigma)}{\sigma} \end{pmatrix}, \qquad \sigma \in \mathbb{R},$$

помножену на e^{-bt}. Тому єдиним розв'язком (5.109), (5.110) є

$$\mathrm{V}(\cdot, t) = \widetilde{\mathbf{\Sigma}}_b(t)\mathrm{V}^0 + \int_0^t \widetilde{\mathbf{\Sigma}}_b(t - \xi)F(\cdot, \xi)\, d\xi, \qquad t \in [0, +\infty).$$

$$\mathrm{V}(\sigma, t) = e^{-bt}\Sigma(\sigma, t)\mathrm{V}^0(\sigma) - i\sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^t s(t - \xi)e^{b\xi}\omega(\xi)\, d\xi,\ t \in [0, +\infty), \tag{5.111}$$

де

$$s(\xi) = \begin{pmatrix} \frac{\sin(\xi\sigma)}{\sigma} \\ \cos(\xi\sigma) - b\frac{\sin(\xi\sigma)}{\sigma} \end{pmatrix}, \qquad \xi \in \mathbb{R}.$$

Звідси, позначаючи

$$\mathcal{E}_b(\cdot, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{F}_{\sigma\to x}\Sigma_b(\cdot, t), \qquad t \in \mathbb{R},$$

та застосовуючи теорему 1.3, одержуємо, що для кожного $t \in \mathbb{R}$ оператори $\mathbb{S}_b(t) : \widetilde{\mathbf{H}}_0^{-1} \to \widetilde{\mathbf{H}}_0^{-1}$, $D(\mathbb{S}_b(t)) = \widetilde{\mathbf{H}}_0^{-1}$, що є операторами множення на e^{-bt} згортки (за x) з $\mathcal{E}_b(\cdot, t)$, утворюють C_0-групу $\mathbb{S}_b : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(\widetilde{\mathbf{H}}_0^{-1})$, яку генерує оператор $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ системи (1.25), (1.14). Тому єдиний розв'язок цієї системи має вигляд (1.26). З (5.194) випливає оцінка

$$|||\mathbb{S}_b(t)|||_0^0 = |||\mathbb{S}(t)|||^0 \leq 2(1+b^2)\sqrt{(1+t^2)}e^{-bt}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{5.112}$$

Маємо

$$\mathcal{E}_b(x,t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e_{11}(x,t) & e_{12}(x,t) \\ e_{21}(x,t) & e_{22}(x,t) \end{pmatrix}, \qquad (x,t) \in \mathbb{R}^2, \tag{5.113}$$

де

$$\begin{aligned}
e_{11}(x,t) &= \delta(x+t) + \delta(x-t) + b(H(x+t) - H(x-t)), \\
e_{12}(x,t) &= H(x+t) - H(x-t), \\
e_{21}(x,t) &= \delta'(x+t) - \delta'(x-t) - b^2(H(x+t) - H(x-t)), \\
e_{22}(x,t) &= \delta(x+t) + \delta(x-t) - b(H(x+t) - H(x-t)).
\end{aligned}$$

Обчислимо тепер оператор $\mathbf{\Lambda}_b(t) : \mathfrak{F} \to \widetilde{\mathbf{H}}_0^{-1}$,

$$\mathbf{\Lambda}_b(t)f = \int_0^t \mathbb{S}_b(t-\xi)F(\xi)\,d\xi, \qquad t > 0.$$

який було введено в підрозділі 1.4. Маємо

$$\begin{aligned}
\left(\mathbf{\Lambda}_b(t)f\right)(x) =& \mathcal{F}_{\sigma\to x}\sqrt{\frac{\pi}{2}}i\sigma\int_0^t \begin{pmatrix} \frac{\sin((t-\xi)\sigma)}{\sigma} \\ \cos((t-\xi)\sigma) - b\frac{\sin((t-\xi)\sigma)}{\sigma} \end{pmatrix} e^{b\xi}\omega(\xi)\,d\xi \\
=& e^{-b|x|}\begin{pmatrix} \omega^t(x) \\ -\left(\omega^t(x)\operatorname{sgn} x\right)' - b\omega^t(x) \end{pmatrix},
\end{aligned} \tag{5.114}$$

де $\omega^t(x) = \omega(t-x)(H(x) - H(x-t)) - \omega(t+x)(H(x+t) - H(x))$, $x \in \mathbb{R}$, штрих означає похідну за x. Звідси, враховуючи (1.26) та (5.113), одержуємо, що єдиним розв'язком системи (5.105), (5.106) за умови (5.107) є

$$\begin{aligned}\mathrm{w}(x,t) =& \frac{1}{2}e^{-bt}\Big(\mathrm{w}_0^0(x+t)+\mathrm{w}_0^0(x-t)-b\left(\widehat{\mathrm{w}}_0^0(x+t)-\widehat{\mathrm{w}}_0^0(x-t)\right)\\ &+\widehat{\mathrm{w}}_1^0(x+t)-\widehat{\mathrm{w}}_1^0(x-t)\Big)+e^{-b|x|}\omega^t(x), \quad x\in\mathbb{R},\ t\geq 0, \quad (5.115)\end{aligned}$$

де $\widehat{\mathrm{w}}_0^0=\mathcal{F}^{-1}\left(\left(\mathcal{F}\widehat{\mathrm{w}}_0^0\right)/(i(\cdot))\right)$, $\widehat{\mathrm{w}}_1^0=\mathcal{F}^{-1}\left(\left(\mathcal{F}\widehat{\mathrm{w}}_1^0\right)/(i(\cdot))\right)$. Оскільки

$$\begin{aligned}\int_0^t \left|e^{-bx}\omega(t-x)\right|^2\,dx = e^{-2bt}\int_0^t\left|e^{b\xi}\omega(\xi)\right|^2\,d\xi\\ \leq e^{-bt}\int_0^{t/2}|\omega(\xi)|^2\,d\xi+\int_{t/2}^t|\omega(\xi)|^2\,d\xi\\ \leq e^{-bt}\left(\|\omega\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}\right)^2+\int_{t/2}^\infty|\omega(\xi)|^2\,d\xi, \qquad t\geq 0,\end{aligned}$$

то

$$\left\|\omega^t\right\|^0\leq\sqrt{2}\left(e^{-bt/2}\|\omega\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}+\sqrt{\int_{t/2}^\infty|\omega(\xi)|^2\,d\xi}\right), \quad t\geq 0. \qquad (5.116)$$

Отже,

$$\begin{aligned}|||\mathbf{\Lambda}_b(t)f|||^0 \leq& \sqrt{2}\sqrt{1+b^2}\Bigg(e^{-bt/2}\|\omega\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}\\ &+\sqrt{\int_{t/2}^\infty|\omega(\xi)|^2\,d\xi}\Bigg)\to 0, \quad \text{коли } t\to+\infty.\end{aligned} \qquad (5.117)$$

Скориставшись твердженням 1.27, беручи до уваги (5.112) та (5.117), одержуємо наступну теорему.

Теорема 5.53. *Система* (5.105), (5.106) *(а, отже і система* (5.101)–(5.103)*) є стабілізовною. Зокрема, керування* $\mathrm{u}=-b^2\mathrm{w}-2b\mathrm{w}_t$ *з будь-яким* $b>0$ *стабілізує цю систему.*

5.3.2. Позиційне керування без запізнення за умов Неймана. Розглянемо хвильове рівняння

$$w_{tt} = w_{xx} + v, \qquad x > 0,\ t > 0, \tag{5.118}$$

за умови Неймана

$$w_x(0,t) = \omega(t), \qquad t > 0, \tag{5.119}$$

та за початкових умов

$$w(x,0) = w_0^0(x), \quad w_t(x,0) = w_1^0(x), \qquad x > 0, \tag{5.120}$$

де $w(\cdot,t) \in \widehat{H}_+^1$ є шуканою функцією, $t \in [0,+\infty)$; $\left(\frac{d}{dt}\right)^m w : [0,+\infty) \to H_\oplus^{-m+1}$, $m = 0,1,2$; $\omega \in L^2(\mathbb{R}_+)$, $w_0^0 \in \widehat{H}_+^1$, $w_1^0 \in \widetilde{H}_+^0$ є заданими функціями, v є позиційним керуванням вигляду

$$v = b_0 w + b_1 w_t, \tag{5.121}$$

де $b_0 \in \mathbb{R}$ та $b_1 \in \mathbb{R}$ є сталими, що визначають це керування.

Позначимо через w, w_0^0 та w_1^0 парні продовження за x для w, w_0^0 та w_1^0, відповідно. Скориставшись висновком 2.5, бачимо, що w задовольняє систему

$$\mathrm{w}_{tt} = \mathrm{w}_{xx} + \mathrm{u} - 2\omega\delta, \qquad x \in \mathbb{R},\ t > 0, \tag{5.122}$$

$$\mathrm{w}(x,0) = \mathrm{w}_0^0(x), \quad \mathrm{w}_t(x,0) = \mathrm{w}_1^0(x), \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{5.123}$$

де δ — це розподіл Дірака за x; ω з умови (5.119) є функцією від t; $\left(\frac{d}{dt}\right)^m \mathrm{w} : [0,+\infty) \to \widetilde{H}^{-m+1}$, $m = 0,1,2$; $\mathrm{w}_0^0 \in \widehat{H}^1$, $\mathrm{w}_1^0 \in \widehat{H}^0$, u є позиційним керуванням вигляду

$$\mathrm{u} = b_0 \mathrm{w} + b_1 \mathrm{w}_t, \tag{5.124}$$

де $b_0 \in \mathbb{R}$ та $b_1 \in \mathbb{R}$ є сталими, що визначають це керування. З висновку 5.21 випливає, що для розв'язку w системи (5.122), (5.123) виконано умову

$$\mathrm{w}_x(+0,t) = \omega(t) \quad \text{м. с. на } \mathbb{R}_+. \tag{5.125}$$

отже, звуження за x цього розв'язку на $\mathbb{R}_+$ задовольняє систему (5.118)–(5.120). Таким чином, системи (5.118)–(5.120) і (5.122), (5.123) є еквівалентними, тому далі ми розглядатимемо систему (5.122), (5.123) замість (5.118)–(5.120). Позначимо $\mathrm{W}^0 = \begin{pmatrix} \mathrm{w}_0^0 \\ \mathrm{w}_1^0 \end{pmatrix}$. Бачимо, що $\mathrm{W}^0 \in \widehat{\mathbf{H}}^1$. Зрозуміло, що ця керована система має вигляд (1.21), (1.12).

Оскільки за теоремою 1.3 простори H^m та H_0^m є ізоморфними, $m \in \mathbb{Z}$, то властивості стабілізовності (див. означення 1.26) системи (5.122), (5.123) в просторах H^m збігаються з властивостями керованості цієї системи в просторах H_0^m. Далі нам буде зручно перейти до розгляду цієї системи в просторах H_0^m, тому що ми застосовуватимо перетворення Фур'є та теорему 1.3 про те, що перетворення Фур'є є ізометричним ізоморфізмом H_0^m та H_m^0.

Позначимо через $\mathcal{A} : \widehat{H}_0^1 \to \widetilde{H}_0^{-1}$ диференціальний оператор $\left(\frac{d}{dx}\right)^2$, $f(x,t) = -2\delta(x)\omega(t)$, а $\mathfrak{F} = \{2\delta(x)\nu(t) \mid \nu \in L^2(\mathbb{R}_+)\}$. Отже, (5.122), (5.123) перетворюється на (1.21), (1.12), де $H_0 = \widehat{H}_0^1$, $H_1 = \widehat{H}_0^0$ та $H_2 = \widehat{H}_0^{-1}$. Керована система (1.23), (1.14) еквівалентна системі (1.11), (1.12), а, отже, і системам (5.118), (5.120) та (5.122), (5.123). Тому далі ми будемо розглядати систему (1.23), (1.14), де $\mathbf{H} = \widehat{\mathbf{H}}_0^1$ та $\mathrm{H} = \widehat{\mathbf{H}}_0^0$. Як і у випадку керованості умовами Діріхле вважаємо, що задано деяке $b > 0$ і позначаємо $b_0 = -b^2$, $b_1 = -2b$. Аналогічно згаданому випадку одержуємо, що для кожного $t \in \mathbb{R}$ оператори $\mathbb{S}_b(t) : \widehat{\mathbf{H}}_0^0 \to \widehat{\mathbf{H}}_0^0$, $D(\mathbb{S}_b(t)) = \widehat{\mathbf{H}}_0^0$, що є операторами згортки (за x) з $\mathcal{E}_b(\cdot, t)$ (див. 5.113), утворюють C_0-групу $\mathbb{S}_b : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(\widehat{\mathbf{H}}_0^0)$, яку генерує оператор $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ керованої системи (1.23), (1.14), де оператор $\widehat{\mathbf{B}} : \widehat{\mathbf{H}}_{-1} \to \widehat{\mathbf{H}}_{-1}$, $D(\widehat{\mathbf{B}}) = \widehat{\mathbf{H}}_0$, є оператором множення на матрицю $\widehat{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b_0 & b_1 \end{pmatrix}$, де $b_0 = -b^2$, $b_1 = -2b$. Тому єдиний розв'язок цієї системи має вигляд (1.26). З (5.194) випливає оцінка

$$|||\mathbb{S}_b(t)|||_0^0 = |||\mathbb{S}(t)|||^0 \le 2(1 + b^2)\sqrt{(1 + t^2)}e^{-bt}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{5.126}$$

Обчислимо тепер оператор $\mathbf{\Lambda}_b(t) : \mathfrak{F} \to \widehat{\mathbf{H}}_0^{-1}$,

$$\mathbf{\Lambda}_b(t)f = \int_0^t \mathbb{S}_b(t - \xi) \begin{pmatrix} 0 \\ f(\xi) \end{pmatrix} d\xi, \qquad t > 0.$$

який було введено в підрозділі 1.4. Маємо

$$\begin{aligned}(\mathbf{\Lambda}_b(t)f)(x) =& \mathcal{F}_{\sigma \to x}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\int_0^t \begin{pmatrix} \frac{\sin((t-\xi)\sigma)}{\sigma} \\ \cos((t-\xi)\sigma) - b\frac{\sin((t-\xi)\sigma)}{\sigma} \end{pmatrix} e^{b\xi}\omega(\xi)\, d\xi \\ =& \begin{pmatrix} \Omega^t(x) \\ -e^{-b|x|}\omega^t(x)\operatorname{sgn} x - b\Omega^t(x) \end{pmatrix},\end{aligned} \tag{5.127}$$

де $\omega^t(x) = \omega(t - x)(H(x) - H(x - t)) - \omega(t + x)(H(x + t) - H(x))$, $x \in \mathbb{R}$, $\Omega^t = \mathcal{F}^{-1}\left(\left(\mathcal{F}(e^{-b|\cdot|}\omega^t)\right)/(i(\cdot))\right)$. Звідси, враховуючи (1.26) та (5.113), одержуємо, що єдиним розв'язком системи (5.122), (5.123) за умови (5.124) є

$$\mathrm{w}(x, t) = \frac{1}{2}e^{-bt}\Big(\mathrm{w}_0^0(x + t) + \mathrm{w}_0^0(x - t) - b^2\left(\widehat{\mathrm{w}}_0^0(x + t) - \widehat{\mathrm{w}}_0^0(x - t)\right)$$

$$+\,\widehat{\mathrm{w}}_1^0(x+t)-\widehat{\mathrm{w}}_1^0(x-t)\big)+\Omega^t(x),\quad x\in\mathbb{R},\ t\geq 0,\tag{5.128}$$

де $\widehat{\mathrm{w}}_0^0=\mathcal{F}^{-1}\left(\left(\mathcal{F}\widehat{\mathrm{w}}_0^0\right)/(i(\cdot))\right)$, $\widehat{\mathrm{w}}_1^0=\mathcal{F}^{-1}\left(\left(\mathcal{F}\widehat{\mathrm{w}}_1^0\right)/(i(\cdot))\right)$.

З (5.116) випливає

$$\left|\left|\left|\mathbf{\Lambda}_b(t)f\right|\right|\right|^1 \leq \sqrt{2}\sqrt{1+b^2}\left(e^{-bt/2}\left\|\omega\right\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}\right.$$
$$\left.+\sqrt{\int_{t/2}^{\infty}\left|\omega(\xi)\right|^2\,d\xi}\right)\to 0,\quad \text{коли } t\to+\infty.\tag{5.129}$$

Скориставшись твердженням 1.27, беручи до уваги (5.126) та (5.129), одержуємо наступну теорему.

Теорема 5.54. *Система* (5.122), (5.123) *(а, отже і система* (5.118)–(5.120)*) є стабілізовною. Зокрема, керування* $\mathrm{u}=-b^2\mathrm{w}-2b\mathrm{w}_t$ *з будь-яким* $b>0$ *стабілізує цю систему.*

Доведення. Скориставшись твердженням 1.27, беручи до уваги (5.126), бачимо, що для доведення теореми досить довести

$$\left|\left|\left|\mathbf{\Lambda}_b(t)f\right|\right|\right|^1\to 0,\quad \text{коли } t\to+\infty.\tag{5.130}$$

Позначимо $\Omega_1(x)=e^{-b|x|}\omega^t(x)$, $\Omega_2(x)=e^{-b|x|/2}\omega^t(x)$, $x\in\mathbb{R}$. Маємо

$$\left(\left\|\Omega^t\right\|^0\right)^2=\int_0^b\left(\frac{(\mathcal{F}\Omega_1)(\sigma)}{\sigma}\right)^2d\sigma+\int_b^{\infty}\left(\frac{(\mathcal{F}\Omega_1)(\sigma)}{\sigma}\right)^2d\sigma.\tag{5.131}$$

Оскільки

$$\left|(\mathcal{F}\Omega_1)'(\sigma)\right|\leq\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^t e^{-bx}|\omega(t-x)|\,dx$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left\| \Omega_2 \right\|^0 \sqrt{\int_0^\infty e^{-bx}\, dx} \leq \frac{1}{\sqrt{\pi b}} \left\| \Omega_2 \right\|^0, \quad \sigma \in \mathbb{R},$$

то, продовжуючи оцінку (5.131), одержуємо

$$\left\| \Omega^t \right\|^0 \leq \left\| \Omega_2 \right\|^0 + \frac{1}{b} \left\| \Omega_1 \right\|^0 \leq 2\frac{\sqrt{1+b^2}}{b} \left\| \Omega_2 \right\|^0.$$

Скориставшись формулами (5.116) та (5.127), звідси одержуємо

$$\begin{aligned} |||\mathbf{\Lambda}_b(t) f|||^1 &\leq 3\sqrt{1+b^2} \left(\left\| \Omega^t \right\|^0 + \left\| \Omega_1 \right\|^0 \right) \leq 12\frac{1+b^2}{b} \left\| \Omega_2 \right\|^0 \\ &\leq 12\frac{1+b^2}{b} \left(\|\omega\|_{L^2(\mathbb{R}_+)} + \int_{t/4}^\infty |\omega(x)|^2\, dx \right), \quad \text{коли } t \to +\infty, \end{aligned}$$

тобто, (5.130) виконано і теорему доведено. □

5.3.3. Позиційне керування із запізненням. Розглянемо проблему стабілізації із запізненням для керованої системи, що відповідає хвильовому рівнянню. А саме, розглянемо систему (1.30)–(1.32) з такими даними

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0^0, \quad \mathrm{H} = \mathbf{H}_0^{-1}; \tag{5.132}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \left(\frac{d}{dx}\right)^2 - q^2 & 0 \end{pmatrix} : \mathbf{H}_0^{-1} \to \mathbf{H}_0^{-1}, \quad D(\mathbf{A}) = \mathbf{H}_0^0. \tag{5.133}$$

Далі ми вважаємо, що $\mathfrak{B}$ є класом псевдо-диференціальних операторів, символи яких є нескінченно диференційовними мультиплікаторами $\mathbf{H}_0 = H_0^0 \times H_{-1}^0$. Повторюючи міркування пункту 5.1.1, з результатів підрозділу 5.5 одержуємо, що оператор $\mathbf{A}$ є інфінітезимальним генератором групи $\mathbb{S} : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(\mathbf{H}_0^{-1})$, оператори $\mathbb{S}(t)$ якої є операторами згортки за x з $\mathcal{E}(x,t)$, що задається формулами (5.12), (5.13) та задовольняє умову: $\mathcal{E}(\cdot, t) =$

$\mathcal{F}_{\sigma\to x}\Sigma(\cdot,t)$, $t\in\mathbb{R}$, де Σ (5.9). Зрозуміло що для цієї групи оцінка (5.11) для $|||\mathbb{S}(t)|||_0^0$ залишається справедливою.

Спробуємо стабілізувати систему (1.30)–(1.32) з даними (5.132), (5.132) за допомоги керувань, у яких оператор $B\in\mathfrak{B}$ має вигляд

$$B=\beta\mathbb{S}(h), \tag{5.134}$$

де $\beta\in\mathbb{R}$ є деякою сталою. Позначимо $\mathrm{V}(\cdot,t)=\mathbb{S}(t)\mathrm{W}(\cdot,t)$, $t\geq 0$, $\mathrm{V}^0(\cdot,t)=\mathbb{S}(t)\mathrm{W}^0(\cdot,t)$, $t\in[0,h]$ та підставимо керування (1.32) з оператором в у формі (5.134). Тоді система (1.30)–(1.32) набирає вигляду

$$\mathrm{V}_t(\cdot,t)=\beta\mathrm{V}(\cdot,t-h),\qquad t>h, \tag{5.135}$$

$$\mathrm{V}(\cdot,t)=\mathrm{V}^0(\cdot,t),\qquad t\in[0,h]. \tag{5.136}$$

Бачимо, що в одержаній системі немає явної залежності від x. Для розв'язання цієї системи ми використовуємо метод, описаний в книзі [4] та застосований для задач стабілізації в [16]. Одержуємо, що єдиним розв'язком системи (5.135), (5.136) є

$$\mathrm{V}(\cdot,t)=k_\beta(t-h)\mathrm{V}^0(\cdot,h)-\beta\int_0^h k_\beta(t-\tau-h)\mathrm{V}^0(\cdot,\tau)\,d\tau,\quad t>h, \tag{5.137}$$

де для будь-якої сталої c, більшої за дійсні значення коренів квазиполіному $\mathcal{H}_\beta(\lambda)=\lambda+\beta e^{-h\lambda}$, позначено

$$k_\beta(t)=\left[\begin{array}{ll}\displaystyle\int_{(c)}\frac{e^{\lambda t}}{\mathcal{H}_\beta(\lambda)}\,d\lambda, & t>0\\ 0, & t<0\end{array}\right.. \tag{5.138}$$

Тут і далі ми позначаємо

$$\int_{(c)}f(\lambda)\,d\lambda=\mathrm{V.P.}\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(c+i\mu)\,d\mu.$$

Тому

$$\begin{aligned} \mathrm{W}(\cdot,t) =&k_\beta(t-h)\mathbb{S}(t-h)\mathrm{W}^0(\cdot,h) \\ &- B\int_0^h k_\beta(t-\tau-h)\mathbb{S}(t-\tau-h)\mathrm{W}^0(\cdot,\tau)\,d\tau, \quad t>h, \end{aligned} \tag{5.139}$$

є єдиним розв'язком системи (1.30), (1.31) з керуванням (1.32), (5.134). Оцінку для $|||\mathbb{S}(t)|||_0^0$, $t\in\mathbb{R}$, ми вже маємо, тому, щоб оцінити розв'язок W на потрібно одержати лише оцінку $k_\beta(t)$, $t>0$.

Далі ми спробуємо вибрати $\beta\in\mathbb{R}$ так, щоб $|k_\beta(t)|\to 0$, коли $t\to+\infty$. Для цього досить вибрати $\beta\in\mathbb{R}$ так, щоб усі корені $\mathcal{H}_\beta$ потрапляли в ліву комплексну півплощину, тобто, так щоб їх дійсні частини були від'ємними. Зрозуміло, що для $\beta<0$ квазиполіном $\mathcal{H}_\beta$ має хоча б один дійсний додатний корінь. Тому далі розглядатимемо $\beta>0$. Маємо

$$\mathcal{H}_\beta(\lambda)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1+\beta e^{-h\lambda_1}\cos(h\lambda_2)=0 \\ \lambda_2-\beta e^{-h\lambda_1}\sin(h\lambda_2)=0 \end{cases}$$

де $\lambda=\lambda_1+i\lambda_2$, $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$. З другого рівняння останньої системи ми одержуємо, що для $0<\beta<\frac{1}{eh}$ усі корені квазиполіному $\mathcal{H}_\beta$, що не є чисто дійсними, задовольняють умову $\lambda_1=\operatorname{Re}\lambda\le\frac{1}{h}\ln(h\beta)<-\frac{1}{h}$, а дійсні корені задовольняють умову $\lambda_1+\beta e^{-h\lambda_1}=0$. Не важко побачити, що корені останнього рівняння задовольняють умову $\lambda_1<-\beta$. Таким чином, якщо $0<\beta<\frac{1}{eh}$, то усі корені квазиполіному $\mathcal{H}_\beta$ задовольняють умову $\operatorname{Re}\lambda<-\beta$. Тому в формулі (5.138) ми можемо взяти $c=-\beta$. Зрозуміло, що існує така стала $\alpha>0$, що

$$|\mathcal{H}_\beta(-\beta+i\mu)|\ge\alpha, \qquad |\mu|\le 2\beta e^{h\beta}, \tag{5.140}$$

$$|\mathcal{H}_\beta(-\beta+i\mu)| \geq \frac{|\mu|}{2}, \qquad |\mu| \geq 2\beta e^{h\beta}. \tag{5.141}$$

Оскільки для $t>0$ маємо

$$\begin{aligned}
k_\beta(t) &= \int_{(-\beta)} \frac{e^{\lambda t}}{\mathcal{H}_\beta(\lambda)}\, d\lambda = \int_{(-\beta)} \frac{e^{\lambda t}}{\lambda}\, d\lambda - \beta \int_{(-\beta)} \frac{e^{\lambda(t-h)}}{\lambda \mathcal{H}_\beta(\lambda)}\, d\lambda \\
&= -\,\beta \int_{(-\beta)} \frac{e^{\lambda(t-h)}}{\lambda \mathcal{H}_\beta(\lambda)}\, d\lambda \\
&= -\,\frac{\beta}{2\pi} e^{-\beta(t-h)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\mu(t-h)}}{(-\beta+i\mu)\mathcal{H}_\beta(-\beta+i\mu)}\, d\mu,
\end{aligned}$$

то, враховуючи (5.140) і (5.141), для цих t одержуємо

$$\begin{aligned}
|k_\beta(t)| &\leq \frac{\beta}{2\pi} e^{-\beta(t-h)} \left(\int_{|\mu| \leq 2\beta e^{h\beta}} d\mu + \int_{|\mu| \geq 2\beta e^{h\beta}} \frac{d\mu}{\mu^2} \right) \\
&= C(\alpha,\beta,h) e^{-\beta t},
\end{aligned} \tag{5.142}$$

де $C(\alpha,\beta,h) = \frac{\beta}{\pi}\left(\frac{2}{\alpha} e^{2h\beta} + \frac{1}{\beta}\right)$. Звідси, враховуючи оцінку (5.11), одержуємо, що для розв'язку W системи (1.30), (1.31) з керуванням (1.32), (5.134) і даними (5.132), (5.133), який задається формулою (5.139), маємо

$$|||\mathrm{W}(\cdot,t)|||_0^0 \leq C(\alpha,\beta,h) e^{2h\beta} Q(t) e^{-\beta t} \to 0, \qquad \text{коли } t \to +\infty, \tag{5.143}$$

де $Q(t)$ є функцією з оцінки (5.11).

Таким чином, ми довели наступну теорему

Теорема 5.55. *Система* (1.30), (1.31) *з даними* (5.132), (5.133) *є стабілізовною. Керування, що стабілізує систему має вигляд*

$$U(x,t) = \beta \mathcal{E}(x,h) * \mathrm{W}(x,t), \qquad t > h,$$

де $*$ означає згортку за x, β є будь-якою сталою з інтервалу $(0, \frac{1}{eh})$, *а* $\mathcal{E}$ *задано формулами* (5.10), (5.12).

5.4. Крайові задачи

Розглянемо хвильове рівняння

$$\mathrm{w}_{tt} = \mathrm{w}_{xx} - q^2\mathrm{w} + b_n f, \qquad x \in \mathbb{R},\ t \in (0,T), \tag{5.144}$$

за крайових умов

$$\begin{cases} p_0^0\left(-i\dfrac{\partial}{\partial x}\right)\mathrm{w}(x,0) + p_0^T\left(-i\dfrac{\partial}{\partial x}\right)\mathrm{w}(x,T) = \mathrm{w}_0^0 \\ p_1^0\left(-i\dfrac{\partial}{\partial x}\right)\mathrm{w}_t(x,0) + p_1^T\left(-i\dfrac{\partial}{\partial x}\right)\mathrm{w}_t(x,T) = \mathrm{w}_1^0 \end{cases}, \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{5.145}$$

де $T > 0$, $q \ge 0$ є деякими сталими; $b_n(x) = \sum_{k=0}^n \beta_k \delta^{(k)}(x)$ (тут δ є розподілом Дірака за x, $\beta_k \in \mathbb{R}$, $k = \overline{0,n}$ є заданими сталими та $\beta_n \ne 0$); p_j^α є поліномом степеня n_j^α, $j = 0,1$, $\alpha = 0,T$; $r_j = \max\{n_j^0, n_j^T\}$, $j = 0,1$; $\left(\frac{d}{dt}\right)^m w : [0,T] \to H_0^{-n-m+1}$, $m = 0,1,2$; $f \in L^2(0,T)$; $\mathrm{w}_0^0 \in H_0^{-n-r_0+1}$, $\mathrm{w}_1^0 \in H_0^{-n-r_1}$. Вважаємо також, що поліноми p_j^α, $j = 0,1$, $\alpha = 0,T$, задовольняють наступні три умови

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} p_0^0(\sigma) & 0 & p_0^T(\sigma) & 0 \\ 0 & p_1^0(\sigma) & 0 & p_1^T(\sigma) \end{pmatrix} = 2, \qquad \sigma \in \mathbb{R}, \tag{5.146}$$

$$\deg\left(p_0^0 p_1^0 + p_0^T p_1^T\right) = r_0 + r_1, \tag{5.147}$$

$$\lim_{\sigma\to\infty}\left|\frac{p_0^0(\sigma)p_1^0(\sigma) + p_0^T(\sigma)p_1^T(\sigma)}{p_0^0(\sigma)p_1^T(\sigma) + p_1^0(\sigma)p_0^T(\sigma)}\right| > 1 \tag{5.148}$$

Зрозуміло, що задача (5.144), (5.145) є задачею вигляду (1.33), (1.34), де

$$H_j = H_0^{-n-j+1},\ j = 0,1,2;\ H_3 = H_0^{-n-r_0+1},\ H_4 = H_0^{-n-r_1}; \tag{5.149}$$

$$\mathcal{A} = \left(\frac{d}{dx}\right)^2 - q^2 : H_0^{-n-1} \to H_0^{-n-1}, \quad D(\mathcal{A}) = H_0^{-n+1}; \tag{5.150}$$

$$\mathcal{B} : \mathbb{R} \to H_0^{-n-1} \text{ є оператором множення на } b_n, \quad D(\mathcal{B}) = \mathbb{R}; \tag{5.151}$$

$$\mathbf{P}^{\alpha}=\begin{pmatrix} p_0^{\alpha}\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right) & 0 \\ 0 & p_1^{\alpha}\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)\end{pmatrix}: H_0^{-n+1}\times H_0^{-n}\to H_0^{-n-r_0+1}\times H_0^{-n-r_1},$$

$$D(\mathbf{P}^{\alpha})=H_0^{-n+1}\times H_0^{-n},\ \alpha=0,T. \qquad (5.152)$$

Вона еквівалентна крайовій задачі (1.35), (1.36), де $\mathrm{W}^0=\begin{pmatrix}\mathrm{w}_0^0\\ \mathrm{w}_1^0\end{pmatrix}\in$ $\mathbf{H}_0^{n,r_0,r_1}$,

$$\mathbf{H}=\mathbf{H}_0^{-n+1},\ \mathrm{H}=\mathbf{H}_0^{-n},\ \mathcal{H}=\mathbf{H}_0^{n,r_0,r_1}=H_0^{-n-r_0+1}\times H_0^{-n+r_1}, \qquad (5.153)$$

норму простору $\mathbf{H}_0^{n,r_0,r_1}$ позначатимемо через $|||\cdot|||_0^{n,r_0,r_1}$. Застосовуючи до (1.35), (1.36) перетворення Фур'є за x, одержуємо

$$\mathrm{V}'=\mathbf{G}\mathrm{V}+\mathbf{Q}f, \qquad t\in(0,T), \qquad (5.154)$$

$$\boldsymbol{\mathcal{P}}^0\mathrm{V}(\cdot,0)+\boldsymbol{\mathcal{P}}^T\mathrm{V}(\cdot,0)=\mathrm{V}^0 \qquad (5.155)$$

де $\mathrm{V}(\cdot,t)=\mathcal{F}_{x\to\sigma}\mathrm{W}(\cdot,t)$, $t\in[0,T]$, $\mathrm{V}^0=\mathcal{F}_{x\to\sigma}\mathrm{W}^0$; $\left(\frac{d}{dt}\right)^m\mathrm{V}:[0,T]\to\mathbf{H}_{-n-m+1}$, $m=0,1$; оператор $\mathbf{G}:\mathbf{H}_{-n}\to\widetilde{\mathbf{H}}_{-n}$, $D(\mathbf{G})=\mathbf{H}_{-n+1}$, є оператором множення на матрицю

$$G(\sigma)=\begin{pmatrix} 0 & 1\\ -\left(q^2+\sigma^2\right) & 0\end{pmatrix},$$

а оператор $\mathbf{Q}:\mathbb{R}\to\mathbf{H}_{-n-1}$ є оператором множення на вектор

$$\overline{Q}(\sigma)\sqrt{\frac{\pi}{2}}d_n(\sigma)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \qquad d_n(\sigma)=\sum_{k=0}^{n}\beta_k\sigma^k;$$

$\boldsymbol{\mathcal{P}}^{\alpha}:\mathbf{H}_{-n+1}\to\mathbf{H}_{n,r_0,r_1}$, $D(\boldsymbol{\mathcal{P}}^{\alpha})=\mathbf{H}_{-n+1}$, є оператором множення на матрицю

$$\mathcal{P}^{\alpha}(\sigma)=\begin{pmatrix} p_0^{\alpha}(\sigma) & 0\\ 0 & p_1^{\alpha}(\sigma)\end{pmatrix}, \qquad \alpha=0,T.$$

За лемою 5.62 оператор $\mathbf{G}$ є інфінітезимальним генератором C_0-групи $\mathbf{\Sigma} : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(\widetilde{\mathbf{H}}_{-n})$, де для кожного $t \in \mathbb{R}$ оператор $\mathbf{\Sigma}(t) : \widetilde{\mathbf{H}}_{-n} \to \widetilde{\mathbf{H}}_{-n}$, $D(\mathbf{\Sigma}(t)) = \widetilde{\mathbf{H}}_{-n}$, є оператором множення на матрицю $\Sigma(\sigma, t)$, що визначається формулою (5.9). Позначимо

$$\Delta(\sigma) = \mathcal{P}^0(\sigma) + \mathcal{P}^T(\sigma)\Sigma(\sigma, T), \qquad \sigma \in \mathbb{R}.$$

Тоді

$$\begin{aligned} \mathrm{V}(\sigma, t) =& \Sigma(\sigma, t)\Delta^{-1}(\sigma) \Bigg(\mathrm{V}^0(\sigma) \\ & + \frac{d_n(\sigma)}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{P}^T(\sigma) \int_0^T \Sigma(\sigma, T-\xi) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} f(\xi)\, d\xi \Bigg) \\ & + \frac{d_n(\sigma)}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t \Sigma(\sigma, t-\xi) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} f(\xi)\, d\xi, \quad \sigma \in \mathbb{R},\ t \in [0, T], \end{aligned} \tag{5.156}$$

є розв'язком задачі (5.154), (5.155), якщо

$$\det \Delta(\sigma) \neq 0, \qquad \sigma \in \mathbb{R}. \tag{5.157}$$

Тут

$$\Delta^{-1} = \frac{1}{\det \Delta} \left(\widetilde{\mathcal{P}}^0 + \Sigma(\cdot, -T)\widetilde{\mathcal{P}}^T \right), \tag{5.158}$$

де $\widetilde{\mathcal{P}}^0$ та $\widetilde{\mathcal{P}}^T$ є союзними (приєднаними) матрицями для $\mathcal{P}^0$ та $\mathcal{P}^T$, відповідно,

$$\begin{aligned} \det \Delta(\sigma) &= p_0^0(\sigma)p_1^0(\sigma) + p_0^T(\sigma)p_1^T(\sigma) \\ &+ \left(p_0^0(\sigma)p_1^T(\sigma) + p_1^0(\sigma)p_0^T(\sigma)\right) \cos\left(T\sqrt{\sigma^2 + q^2}\right), \ \sigma \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{5.159}$$

Лема 5.56. *Якщо умову* (5.157) *виконано, то існує стала* $M > 0$ *така, що*

$$|\det \Delta(\sigma)| \geq M \left(1+\sigma^2\right)^{\frac{r_0+r_1}{2}}, \qquad \sigma \in \mathbb{R}. \tag{5.160}$$

Доведення. Позначимо $g_0 = p_0^0 p_1^0 + p_0^T p_1^T$, $g_T = p_0^0 p_1^T + p_1^0 p_0^T$. Тоді $\det \Delta(\sigma) = g_0(\sigma) + g_T(\sigma) \cos\left(T\sqrt{\sigma^2+q^2}\right)$, $\sigma \in \mathbb{R}$. Для досить великих за модулем $\sigma \in \mathbb{R}$ маємо

$$\det \Delta(\sigma) = 0 \Leftrightarrow \cos\left(T\sqrt{\sigma^2+q^2}\right) = -\frac{g_0(\sigma)}{g_T(\sigma)}.$$

З умов (5.147) та (5.148) випливає, що існують сталі $M_1 > 0$ та $M_2 > 1$ такі, що для досить великих за модулем $\sigma \in \mathbb{R}$ виконано умови

$$|g_0(\sigma)| \geq M_1 \left(1+\sigma^2\right)^{\frac{r_0+r_1}{2}} \quad \text{та} \quad M_2 |g_T(\sigma)| \leq |g_0(\sigma)|.$$

Тому для таких $\sigma \in \mathbb{R}$ маємо

$$|\det \Delta(\sigma)| \geq |g_0(\sigma)| - |g_T(\sigma)| \geq M_1 \left(1 - \frac{1}{M_2}\right) \left(1+\sigma^2\right)^{\frac{r_0+r_1}{2}}.$$

З умови (5.157) одразу випливає, що для будь-якого компакта в $\mathbb{R}$ існує стала $M_3 > 0$ така, що

$$|\det \Delta(\sigma)| \geq M_3.$$

Отже, існує стала $M > 0$ така, що умову (5.160) виконано. □

Скориставшись цією лемою і (5.158), бачимо, що функція V, визначена формулою (5.156), задовольняє умову $\mathrm{V}(\cdot, t) \in \mathbf{H}_{-n+1}$, $t \in [0, T]$. Позначаючи

$$\mathcal{E}(\cdot, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}_{\sigma \to x} \Sigma(\cdot, t), \qquad t \in \mathbb{R},$$

та застосовуючи теорему 1.3, одержуємо, що для кожного $t \in \mathbb{R}$ оператори $\mathbb{S}(t) : \mathbf{H}_0^{-n} \to \mathbf{H}_0^{-n}$, $D(\mathbb{S}(t)) = \mathbf{H}_0^{-n}$, що є операторами згортки (за x) з $\mathcal{E}(\cdot, t)$, утворюють C_0-групу $\mathbb{S} : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(\mathbf{H}_0^{-n})$, яку генерує оператор $\mathbf{A}$ системи (1.35), (1.36). Скориставшись оцінками (5.187), (5.189), бачимо, що C_0-група $\mathbb{S}$ задовольняє оцінку (5.11). Тому функція W, що задана формулою (1.37), э розв'язком задачі (1.35), (1.36). Позначаючи

$$\mathcal{R}(\cdot, t) = \mathcal{F}^{-1}_{\sigma\to x}\Sigma(\cdot, t)\Delta^{-1}, \qquad t \in [0, T], \tag{5.161}$$

та згадуючи означення операторів Φ_α і $\widehat{\Phi}_\alpha$ (див. підрозділ 2.3), бачимо, що

$$\begin{aligned}\mathrm{W}(\cdot, t) = \mathcal{R}(\cdot, t) * &\left(\mathrm{W}^0 + \frac{1}{2} d_n \left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \mathcal{P}^T \left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right) \begin{pmatrix} -\Phi_T F^T \\ \widehat{\Phi}_T F^T \end{pmatrix}\right) \\ &+ \frac{1}{2} d_n \left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \begin{pmatrix} -\Phi_t F^t \\ \widehat{\Phi}_t F^t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, T],\end{aligned} \tag{5.162}$$

є розв'язком задачі (1.35), (1.36), де $*$ означає згортку за x,

$$F^t(\xi) = f(t - \xi)(H(\xi) - H(\xi - t)) - f(\xi + t)(H(\xi + t) - H(\xi)).$$

З [87] випливає, що умова (5.157) є необхідною і достатньою для єдиності розв'язку задачі (1.35), (1.36). Тому формула (5.162) задає єдиний розв'язок цієї задачі. Скориставшись теоремами 2.27, 2.29, оцінками (5.187), (5.189) та лемою 5.56, з (5.156) одержуємо

$$|||\mathrm{V}(\cdot, t)|||_{-n+1} \le C_{T,q} \left(|||\mathrm{V}^0|||_{n,r_0,r_1} + \|f\|_{L^2(0,T)}\right), \quad t \in [0, T],$$

де $C_{T,q}$ є сталою, що залежить від T і q. Тому

$$|||\mathrm{W}(\cdot, t)|||_0^{-n+1} \le C_{T,q} \left(|||\mathrm{W}^0|||_0^{n,r_0,r_1} + \|f\|_{L^2(0,T)}\right), \quad t \in [0, T]. \tag{5.163}$$

Таким чином, доведено наступну теорему.

Теорема 5.57. *За умов* (5.149)–(5.151) *задача* (5.144), (5.145) *(та* (1.35), (1.36) *з даними* (5.149)–(5.153)*) є коректною в тому і лише тому випадку, коли виконано умову* (5.157)*. У разі виконання* (5.157) *розв'язок цієї задачі задовольняє оцінку*

$$\left|\left|\left|\begin{pmatrix} \mathrm{w}(\cdot,t) \\ \mathrm{w}_t(\cdot,t) \end{pmatrix}\right|\right|\right|_0^{-n+1} \le C_{T,q}\left(\left|\left|\left|\begin{pmatrix} \mathrm{w}_0^0 \\ \mathrm{w}_1^0 \end{pmatrix}\right|\right|\right|_0^{n,r_0,r_1} + \|f\|_{L^2(0,T)}\right),\ t\in[0,T]. \tag{5.164}$$

(та оцінку (5.163)*, відповідно) тут* $C_{T,q}$ *є сталою, що залежить від* T *і* q*.*

Зауваження 5.58. *Оскільки за теоремою 1.3 простори* H^m *та* H_0^m *є ізоморфними,* $m \in \mathbb{Z}$*, то властивості коректності (див. означення 1.29) задачі* (5.144), (5.145) *в просторах* H^m *збігаються з властивостями коректності цієї задачі в просторах* H_0^m*. Далі нам буде зручно перейти до розгляду цієї системи в просторах* H^m*, тому що в подальшому ми застосовуватимо оператор перетворення, який розглянуто саме у просторах* H^m*, для одержання результатів коректності для рівнянь зі змінними коефіцієнтами.*

Далі ми розглядатимемо дві крайові задачі для хвильового рівняння на півосі, які є, фактично, окремими випадками задачі (5.144), (5.145).

Розглянемо хвильове рівняння

$$w_{tt} = w_{xx} - q^2 w, \qquad x > 0,\ t \in (0,T), \tag{5.165}$$

за умови Діріхле

$$w(0,t) = f(t), \qquad t \in (0,T), \tag{5.166}$$

та за крайових умов

$$\begin{cases} p_0^0 w(x,0) + p_0^T w(x,T) = w_0^0 \\ p_1^0 w_t(x,0) + p_1^T w_t(x,T) = w_1^0 \end{cases}, \qquad x > 0, \tag{5.167}$$

де $T > 0$, $q \geq 0$, $p_j^\alpha \in \mathbb{R}$, $j = 0,1$, $\alpha = 0,T$ є деякими сталими; $w(\cdot,t) \in \widetilde{H}_+^0 = H_\oplus^0$, $t \in [0,T]$; $\left(\frac{d}{dt}\right)^m w : [0,T] \to H_\oplus^{-m}$, $m = 0,1,2$; $f \in L^2(0,T)$; $w_0^0 \in \widetilde{H}_+^0$, $w_1^0 \in \widetilde{H}_+^{-1}$. Вважаємо також, що p_j^α, $j = 0,1$, $\alpha = 0,T$, задовольняють умову

$$\operatorname{rank} \begin{pmatrix} p_0^0 & 0 & p_0^T & 0 \\ 0 & p_1^0 & 0 & p_1^T \end{pmatrix} = 2. \tag{5.168}$$

Позначимо через w, w_0^0 та w_1^0 непарні продовження за x для w, w_0^0 та w_1^0, відповідно. Скориставшись теоремою 2.3, бачимо, що w задовольняє крайову задачу

$$\mathrm{w}_{tt} = \mathrm{w}_{xx} - q^2\mathrm{w} - 2\delta' f, \qquad x \in \mathbb{R},\ t \in (0,T), \tag{5.169}$$

за крайових умов

$$\begin{cases} p_0^0 \mathrm{w}(x,0) + p_0^T \mathrm{w}(x,T) = \mathrm{w}_0^0 \\ p_1^0 \mathrm{w}_t(x,0) + p_1^T \mathrm{w}_t(x,T) = \mathrm{w}_1^0 \end{cases}, \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{5.170}$$

де δ — це розподіл Дірака за x; $\left(\frac{d}{dt}\right)^m \mathrm{w} : [0,T] \to \widetilde{H}^{-m}$, $m = 0,1,2$; $\mathrm{w}_0^0 \in \widetilde{H}^0$, $\mathrm{w}_1^0 \in \widetilde{H}^{-1}$.

З формули (5.162) випливає, що для розв'язку w задачі (5.169), (5.170) виконано умову

$$\mathrm{w}(+0,t) = f(t) \quad \text{м. с. на } [0,T], \tag{5.171}$$

отже, звуження цього розв'язку на $\mathbb{R}_+$ задовольняє задачу (5.165)–(5.167). Таким чином, крайові задачі (5.165)–(5.167) і (5.169), (5.170) є еквівалентними, тому далі ми розглядатимемо задачу (5.169), (5.170) замість (5.165)–(5.167). Позначимо $\mathrm{W}^0 = \begin{pmatrix} \mathrm{w}_0^0 \\ \mathrm{w}_1^0 \end{pmatrix}$. Бачимо, що $\mathrm{W}^0 \in \widetilde{\mathbf{H}}^0$. Зрозуміло, що ця керована система має вигляд (1.33), (1.34). Зрозуміло, що умова (5.168) гарантує виконання умов (5.146)–(5.148) для цієї системи. Для задач (5.165)–(5.167) і (5.169), (5.170) маємо

$$\Delta(\sigma) = p_0^0 p_1^0 + p_0^T p_1^T + \left(p_0^0 p_1^T + p_1^0 p_0^T\right) \cos\left(T\sqrt{\sigma^2 + q^2}\right), \quad \sigma \in \mathbb{R}, \tag{5.172}$$

$$\forall \sigma \in \mathbb{R}\ \Delta(\sigma) \neq 0 \Leftrightarrow \left|p_0^0 p_1^0 + p_0^T p_1^T\right| > \left|p_0^0 p_1^T + p_1^0 p_0^T\right|. \tag{5.173}$$

З (5.162) одержуємо, що

$$\begin{pmatrix} \mathrm{w}(\cdot, t) \\ \mathrm{w}_t(\cdot, t) \end{pmatrix} = \mathcal{R}(\cdot, t) * \left(\mathrm{W}^0 + \begin{pmatrix} p_0^T \Psi_T F^T \\ -p_1^T \widehat{\Psi}_T F^T \end{pmatrix}\right) + \begin{pmatrix} \Psi_t F^t \\ -\widehat{\Psi}_t F^t \end{pmatrix}, \ t \in [0, T], \tag{5.174}$$

є єдиним розв'язком задачі (5.169), (5.170), де $*$ означає згортку за x, $F^t(\xi) = f(t-\xi)(H(\xi) - H(\xi - t)) - f(\xi + t)(H(\xi + t) - H(\xi))$, $t \in [0, T]$, Ψ_α і $\widehat{\Psi}_\alpha$ визначені в підрозділі 2.2.

З теореми 5.57, зауваження 5.58 та (5.173) одержуємо висновок.

Висновок 5.59. *За умови* (5.168) *задача* (5.165)–(5.167)*(та* (5.169), (5.170)*) є коректною в тому і лише тому випадку, коли виконано умову*

$$\left|p_0^0 p_1^0 + p_0^T p_1^T\right| > \left|p_0^0 p_1^T + p_1^0 p_0^T\right|. \tag{5.175}$$

У разі виконання (5.175) *розв'язок* w *цієї задачі задовольняє оцінку вигляду* (5.164)*:*

$$\left|\!\left|\!\left|\begin{pmatrix}\mathrm{w}(\cdot,t)\\ \mathrm{w}_t(\cdot,t)\end{pmatrix}\right|\!\right|\!\right|^0 \le C_{T,q}\left(\left|\!\left|\!\left|\begin{pmatrix}\mathrm{w}_0^0\\ \mathrm{w}_1^0\end{pmatrix}\right|\!\right|\!\right|^0 + \|f\|_{L^2(0,T)}\right), \quad t\in[0,T], \quad (5.176)$$

де $C_{T,q} > 0$ *є сталою, що залежить лише від* T *і* q*.*

Розглянемо хвильове рівняння

$$w_{tt} = w_{xx} - q^2 w, \qquad x>0,\ t\in(0,T), \tag{5.177}$$

за умови Неймана

$$w_x(0,t) = f(t), \qquad t\in(0,T), \tag{5.178}$$

та за крайових умов

$$\begin{cases} p_0^0 w(x,0) + p_0^T w(x,T) = w_0^0 \\ p_1^0 w_t(x,0) + p_1^T w_t(x,T) = w_1^0 \end{cases}, \qquad x>0, \tag{5.179}$$

де $T>0$, $q\ge 0$, $p_j^\alpha\in\mathbb{R}$, $j=0,1$, $\alpha=0,T$ є деякими сталими; $w(\cdot,t)\in\widehat{H}_+^1$, $t\in[0,T]$; $\left(\frac{d}{dt}\right)^m w:[0,T]\to H_\oplus^{-m+1}$, $m=0,1,2$; $f\in L^2(0,T)$; $w_0^0\in\widehat{H}_+^1$, $w_1^0\in\widehat{H}_+^0$. Вважаємо також, що p_j^α, $j=0,1$, $\alpha=0,T$, задовольняють умову (5.168).

Позначимо через w, w_0^0 та w_1^0 парні продовження за x для w, w_0^0 та w_1^0, відповідно. Скориставшись висновком 2.5, бачимо, що w задовольняє крайову задачу

$$\mathrm{w}_{tt} = \mathrm{w}_{xx} - q^2\mathrm{w} - 2\delta f, \qquad x\in\mathbb{R},\ t\in(0,T), \tag{5.180}$$

за крайових умов

$$\begin{cases} p_0^0 \mathrm{w}(x,0) + p_0^T \mathrm{w}(x,T) = \mathrm{w}_0^0 \\ p_1^0 \mathrm{w}_t(x,0) + p_1^T \mathrm{w}_t(x,T) = \mathrm{w}_1^0 \end{cases}, \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{5.181}$$

де δ — це розподіл Дірака за x; $\left(\frac{d}{dt}\right)^m \mathrm{w} : [0,T] \to \widehat{H}^{-m+1}$, $m = 0,1,2$; $\mathrm{w}_0^0 \in \widehat{H}^1$, $\mathrm{w}_1^0 \in \widehat{H}^0$.

З формули (5.162) випливає, що для розв'язку w задачі (5.180), (5.181) виконано умову

$$\mathrm{w}_x(+0,t) = f(t) \quad \text{м. с. на } [0,T], \tag{5.182}$$

отже, звуження цього розв'язку на $\mathbb{R}_+$ задовольняє задачу (5.177)–(5.179). Таким чином, крайові задачі (5.177)–(5.179) і (5.180), (5.181) є еквівалентними, тому далі ми розглядатимемо задачу (5.180), (5.181) замість (5.177)–(5.179). Позначимо $\mathrm{W}^0 = \begin{pmatrix} \mathrm{w}_0^0 \\ \mathrm{w}_1^0 \end{pmatrix}$. Бачимо, що $\mathrm{W}^0 \in \widehat{\mathbf{H}}^1$. Зрозуміло, що ця керована система має вигляд (1.33), (1.34). Зрозуміло, що умова (5.168) гарантує виконання умов (5.146)–(5.148) для цієї системи. Для задач (5.177)–(5.179) і (5.180), (5.181) виконано умови (5.172) (5.173)

З (5.162) одержуємо, що

$$\begin{pmatrix} \mathrm{w}(\cdot,t) \\ \mathrm{w}_t(\cdot,t) \end{pmatrix} = \mathcal{R}(\cdot,t) * \left(\mathrm{W}^0 + \begin{pmatrix} p_0^T \Phi_T F^T \\ -p_1^T \widehat{\Phi}_T F^T \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} \Phi_t F^t \\ -\widehat{\Phi}_t F^t \end{pmatrix}, \ t \in [0,T], \tag{5.183}$$

є єдиним розв'язком задачі (5.180), (5.181), де $*$ означає згортку за x, $F^t(\xi) = f(t-\xi)(H(\xi) - H(\xi - t)) - f(\xi + t)(H(\xi + t) - H(\xi))$, $t \in [0,T]$,

Φ_α і $\widehat{\Phi}_\alpha$ визначені в підрозділі 2.3.

З теореми 5.57, зауваження 5.58 та (5.173) одержуємо висновок.

Висновок 5.60. *За умови* (5.168) *задача* (5.177)–(5.179)*(та* (5.180), (5.181)*) є коректною в тому і лише тому випадку, коли виконано умову* (5.175). *У разі виконання* (5.175) *розв'язок* w *цієї задачі задовольняє оцінку вигляду* (5.164)*:*

$$\left|\left|\left|\begin{pmatrix} \mathrm{w}(\cdot,t) \\ \mathrm{w}_t(\cdot,t) \end{pmatrix}\right|\right|\right|^1 \leq C_{T,q}\left(\left|\left|\left|\begin{pmatrix} \mathrm{w}_0^0 \\ \mathrm{w}_1^0 \end{pmatrix}\right|\right|\right|^1 + \|f\|_{L^2(0,T)}\right), \quad t\in[0,T], \tag{5.184}$$

де $C_{T,q}>0$ *є сталою, що залежить лише від* T *і* q.

5.5. Допоміжні твердження до розділу 5

У цьому підрозділі завжди будемо вважати $s\in\mathbb{R}$. Позначимо $\mathbf{H}_s = H_s^0\times H_{s-1}^0$ з нормою $|||\mathrm{V}|||_s = \left((\|\mathrm{V}_0\|_s^0)^2 + (\|\mathrm{V}_1\|_s^0)^2\right)^{1/2}$, $\mathrm{V}=\begin{pmatrix}\mathrm{V}_0\\ \mathrm{V}_1\end{pmatrix}\in\mathbf{H}_s$. Для кожного $t\in\mathbb{R}$ позначимо через $\mathbf{\Sigma}(t):\mathbf{H}_s\to\mathbf{H}_s$, $D(\mathbf{\Sigma}(t))=\mathbf{H}_s$, оператор множення на матрицю

$$\Sigma(\sigma,t)=\begin{pmatrix} \cos\left(t\sqrt{\sigma^2+q^2}\right) & \frac{\sin\left(t\sqrt{\sigma^2+q^2}\right)}{\sqrt{\sigma^2+q^2}} \\ -\sqrt{\sigma^2+q^2}\sin\left(t\sqrt{\sigma^2+q^2}\right) & \cos\left(t\sqrt{\sigma^2+q^2}\right)\end{pmatrix}, \qquad \sigma\in\mathbb{R}.$$

Нагадаємо, що через $\mathcal{L}(\mathbf{H}_s)$ ми позначаємо простір лінійних обмежених операторів, визначених на всьому $\mathbf{H}_s$, що діють в $\mathbf{H}_s$.

Лема 5.61. *Відображення* $\mathbf{\Sigma}:\mathbb{R}\to\mathcal{L}(\mathbf{H}_s)$, *що діє за правилом* $t\mapsto\mathbf{\Sigma}(t)$, *є* C_0*-групою.*

Доведення. Покажемо спочатку, що для кожного $t \in \mathbb{R}$ оператор $\mathbf{\Sigma}(t)$ є обмеженим. Очевидно, справедливі нерівності

$$\frac{q^2}{1+q^2}\left(1+\sigma^2\right) \le q^2+\sigma^2 \le \left(1+q^2\right)\left(1+\sigma^2\right), \qquad \sigma \in \mathbb{R}. \tag{5.185}$$

Нехай $q > 0$, $t \in \mathbb{R}$, $\mathrm{V} = \begin{pmatrix} \mathrm{V}_0 \\ \mathrm{V}_1 \end{pmatrix} \in \mathbf{H}_s$, $\widetilde{\mathrm{V}}_1 = \mathrm{V}_1/\sqrt{\sigma^2+q^2}$. Скориставшись (5.185), одержуємо

$$\begin{aligned}(|||\mathbf{\Sigma}(t)\mathrm{V}|||_s) \le &\left(1+q^2\right)\int_{-\infty}^{\infty}\left(1+\sigma^2\right)^s \\ &\times\left(\left|\cos\left(t\sqrt{\sigma^2+q^2}\right)\mathrm{V}_0(\sigma)+\sin\left(t\sqrt{\sigma^2+q^2}\right)\widetilde{\mathrm{V}}_1(\sigma)\right|^2\right. \\ &\left.+\left|-\sin\left(t\sqrt{\sigma^2+q^2}\right)\mathrm{V}_0(\sigma)+\cos\left(t\sqrt{\sigma^2+q^2}\right)\widetilde{\mathrm{V}}_1(\sigma)\right|^2\right)d\sigma \\ \le&\frac{1}{q^2}\left(|||\mathrm{V}|||_s\right)^2. \end{aligned} \tag{5.186}$$

Таким чином, якщо $q > 0$, то

$$|||\mathbf{\Sigma}(t)|||_s \le \frac{1}{q}, \qquad t \in \mathbb{R}. \tag{5.187}$$

Нехай тепер $q = 0$, $t \in \mathbb{R}$, $\mathrm{V} = \begin{pmatrix} \mathrm{V}_0 \\ \mathrm{V}_1 \end{pmatrix} \in \mathbf{H}_s$, $\widetilde{\mathrm{V}}_1 = \mathrm{V}_1/\sqrt{1+\sigma^2}$. Маємо

$$\begin{aligned}(|||\mathbf{\Sigma}(t)|||_s\,\mathrm{V}) \le& 4\int_{-\infty}^{\infty}\left(1+\sigma^2\right)^s\left(1+\frac{\sin^2(t\sigma)}{\sigma^2}\right)\left(|\mathrm{V}_0(\sigma)|^2+\left|\widetilde{\mathrm{V}}_1(\sigma)\right|^2\right)d\sigma \\ \le& 4\left(1+t^2\right)\left(|||\mathrm{V}|||_s\right)^2. \end{aligned} \tag{5.188}$$

Таким чином, якщо $q = 0$, то

$$|||\mathbf{\Sigma}(t)|||_s \le 2\sqrt{(1+t^2)}, \qquad t \in \mathbb{R}. \tag{5.189}$$

Зрозуміло, що для будь-якого $q \geq 0$, маємо

$$\mathbf{\Sigma}(0) = \mathrm{Id} \qquad \text{та} \qquad \mathbf{\Sigma}(t+\tau) = \mathbf{\Sigma}(t)\mathbf{\Sigma}(\tau), \quad t, \tau \in \mathbb{R}.$$

Для завершення доведення теореми залишилося перевірити, що для будь-якого $\mathrm{V} = \begin{pmatrix} \mathrm{V}_0 \\ \mathrm{V}_1 \end{pmatrix} \in \mathbf{H}_s$ вірно

$$|||\mathbf{\Sigma}(t)\mathrm{V} - \mathrm{V}|||_s \to 0, \qquad \text{коли } t \to 0. \tag{5.190}$$

Для $q > 0$, скориставшись (5.186), одержуємо

$$\begin{aligned}(|||\mathbf{\Sigma}(t)\mathrm{V} - \mathrm{V}|||_s)^2 &\leq \left(1+q^2\right) \int_{-\infty}^{\infty} \left(1+\sigma^2\right)^s \left(|\mathrm{V}_0(\sigma)|^2 + \left| \frac{\mathrm{V}_1(\sigma)}{\sqrt{\sigma^2+q^2}} \right|^2 \right) \\ &\times \left(\left(\cos\left(t\sqrt{\sigma^2+q^2}\right) - 1 \right)^2 + \sin^2\left(t\sqrt{\sigma^2+q^2}\right) \right) d\sigma \\ &\leq 4\frac{1}{q^2} \int_{-\infty}^{\infty} \sin^2\left(\frac{t}{2}\sqrt{\sigma^2+q^2}\right) \\ &\times \left(\left(1+\sigma^2\right)^s |\mathrm{V}_0(\sigma)|^2 + \left(1+\sigma^2\right)^{s-1} |\mathrm{V}_1(\sigma)|^2 \right) d\sigma. \end{aligned} \tag{5.191}$$

Звідси, застосовуючи теорему Лебега про послідовність функції, обмежених інтегровною мажорантою, одержуємо (5.190) для $q > 0$. Для $q = 0$, скориставшись (5.188), одержуємо

$$\begin{aligned}(|||\mathbf{\Sigma}(t)\mathrm{V} - \mathrm{V}|||_s)^2 &\leq 4 \int_{-\infty}^{\infty} \left(\left(\cos^2(t\sigma) - 1\right)^2 + \sin^2(t\sigma) + \frac{\sin^2(t\sigma)}{\sigma^2} \right) \\ &\times \left(\left(1+\sigma^2\right)^s |\mathrm{V}_0(\sigma)|^2 + \left(1+\sigma^2\right)^{s-1} |\mathrm{V}_1(\sigma)|^2 \right) d\sigma \\ &\leq 4 \int_{-\infty}^{\infty} \left(4\sin^2\left(\frac{t\sigma}{2}\right) + \frac{\sin^2(t\sigma)}{\sigma^2} \right) \\ &\times \left(\left(1+\sigma^2\right)^s |\mathrm{V}_0(\sigma)|^2 + \left(1+\sigma^2\right)^{s-1} |\mathrm{V}_1(\sigma)|^2 \right) d\sigma. \end{aligned} \tag{5.192}$$

Застосовуючи знову згадану теорему Лебега, звідси одержуємо (5.190) у випадку $q = 0$. Теорему доведено. $\square$

Зрозуміло, що для кожного $\mathrm{V} \in \mathbf{H}_s$ і кожного $\sigma \in \mathbb{R}$ маємо

$$\frac{1}{t}\left(\Sigma(\sigma, t)\mathrm{V}(\sigma) - \mathrm{V}(\sigma)\right) \to G(\sigma)\mathrm{V}(\sigma), \qquad \text{коли } t \to 0,$$

де

$$G(\sigma) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\left(q^2 + \sigma^2\right) & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma \in \mathbb{R}.$$

Для оператора $\mathbf{G} : \mathbf{H}_s \to \mathbf{H}_s$ множення на матрицю G областю визначення $D(\mathbf{G})$ є простір $\mathbf{H}_{s+1}$. За теоремою 1.1 простір $\mathbf{H}_{s+1}$ є щільним в $\mathbf{H}_s$.

Лема 5.62. *Оператор* $\mathbf{G}$ *є інфінітезимальним генератором* C_0*-групи* $\mathbf{\Sigma}$*, тобто, для кожного* $\mathrm{V} \in D(\mathbf{G}) = \mathbf{H}_{s+1}$

$$\left|\left|\left| \frac{1}{t}\left(\mathbf{\Sigma}(t)\mathrm{V} - \mathrm{V}\right) - \mathbf{G}\mathrm{V} \right|\right|\right|_s \to 0, \qquad \textit{коли } t \to 0. \tag{5.193}$$

Доведення. Нехай $q > 0$, $t \in \mathbb{R}$, $\mathrm{V} = \begin{pmatrix} \mathrm{V}_0 \\ \mathrm{V}_1 \end{pmatrix} \in \mathbf{H}_{s+1}$. Позначимо $\alpha(\xi) = (\cos\xi - 1)^2 + (\sin\xi - \xi)^2$, $\xi \in \mathbb{R}$. Скориставшись (5.191), одержуємо

$$\begin{aligned}\left(\left|\left|\left| \frac{1}{t}\left(\mathbf{\Sigma}(t)\mathrm{V} - \mathrm{V}\right) - \mathbf{G}\mathrm{V} \right|\right|\right|_s\right)^2 &\leq \frac{1}{q^2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha\left(\left(t\sqrt{\sigma^2 + q^2}\right)\right)}{t^2(1+\sigma^2)} \\ &\quad \times \left(\left(1+\sigma^2\right)^{s+1}\left|\mathrm{V}_0(\sigma)\right|^2 + \left(1+\sigma^2\right)^s\left|\mathrm{V}_1(\sigma)\right|^2\right) d\sigma \\ &\leq \frac{1+q^2}{q^2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha\left(\left(t\sqrt{\sigma^2 + q^2}\right)\right)}{t^2(q^2+\sigma^2)} \\ &\quad \times \left(\left(1+\sigma^2\right)^{s+1}\left|\mathrm{V}_0(\sigma)\right|^2 + \left(1+\sigma^2\right)^s\left|\mathrm{V}_1(\sigma)\right|^2\right) d\sigma.\end{aligned}$$

Звідси, застосовуючи теорему Лебега про послідовність функції, обмежених інтегровною мажорантою, одержуємо (5.193) для $q > 0$. Нехай $q = 0$, $t \in \mathbb{R}$, $\mathrm{V} = \begin{pmatrix} \mathrm{V}_0 \\ \mathrm{V}_1 \end{pmatrix} \in \mathbf{H}_{s+1}$. Скориставшись (5.192), одержуємо

$$\left(\left|\!\left|\!\left| \frac{1}{t} \left(\mathbf{\Sigma}(t)\mathrm{V} - \mathrm{V} \right) - \mathbf{G}\mathrm{V} \right|\!\right|\!\right|_s \right)^2 \\ \leq 2 \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\alpha \left(\left(t\sqrt{\sigma^2 + q^2} \right) \right)}{t^2(1+\sigma^2)} + \frac{(\sin(t\sigma) - t\sigma)^2}{t^2\sigma^2(1+\sigma^2)} \right) \\ \times \left(\left(1+\sigma^2\right)^{s+1} |\mathrm{V}_0(\sigma)|^2 + \left(1+\sigma^2\right)^s |\mathrm{V}_1(\sigma)|^2 \right) d\sigma.$$

Застосовуючи знову згадану теорему Лебега, звідси одержуємо (5.193) у випадку $q = 0$. Теорему доведено. □

Позначимо через $\widetilde{\mathbf{H}}_s$ підпростір усіх непарних функцій простору $\mathbf{H}_s$, а через $\widehat{\mathbf{H}}_s$ — підпростір усіх парних функцій простору $\mathbf{H}_s$. Зрозуміло, що $\widetilde{\mathbf{H}}_s = \widetilde{H}_s \times \widetilde{H}_{s-1}$ та $\widehat{\mathbf{H}}_s = \widehat{H}_s \times \widehat{H}_{s-1}$. Для кожного $t \in \mathbb{R}$ позначимо також через $\widetilde{\mathbf{\Sigma}}(t)$ та $\widetilde{\mathbf{G}}$ звуження операторів $\mathbf{\Sigma}(t)$ та $\mathbf{G}$ на $\widetilde{\mathbf{H}}_s$, а через $\widehat{\mathbf{\Sigma}}(t)$ та $\widehat{\mathbf{G}}$ звуження операторів $\mathbf{\Sigma}(t)$ та $\mathbf{G}$ на $\widehat{\mathbf{H}}_s$. З лем 5.61 та 5.62 одержуємо два висновки.

Висновок 5.63. *Відображення $\widetilde{\mathbf{\Sigma}} : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(\widetilde{\mathbf{H}}_s)$, що діє за правилом $t \mapsto \widetilde{\mathbf{\Sigma}}(t)$, є C_0-групою. Відображення $\widehat{\mathbf{\Sigma}} : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(\widehat{\mathbf{H}}_s)$, що діє за правилом $t \mapsto \widehat{\mathbf{\Sigma}}(t)$, також є C_0-групою.*

Висновок 5.64. *Оператор $\widetilde{\mathbf{G}}$ є інфінітезимальним генератором C_0-групи $\widetilde{\mathbf{\Sigma}}$. Оператор $\widehat{\mathbf{G}}$ також є інфінітезимальним генератором C_0-групи $\widehat{\mathbf{\Sigma}}$.*

Зауваження 5.65. *Нехай $q = 0$. Замінюючи щойно розглянуті простори $\mathbf{H}_s$, $\widetilde{\mathbf{H}}_s$ та $\widehat{\mathbf{H}}_s$ на нові: $\mathbf{H}_s = H^0_{s[1/2]} \times H^0_{s-1[1/2]}$, $\widetilde{\mathbf{H}}_s = \widetilde{H}^0_{s[1/2]} \times \widetilde{H}^0_{s-1[1/2]}$ та $\widehat{\mathbf{H}}_s = \widehat{H}^0_{s[1/2]} \times \widehat{H}^0_{s-1[1/2]}$, відповідно, бачимо, що леми 5.61, 5.62 і висновки 5.63, 5.64 залишаються справедливими і в цьому випадку.*

Нехай $b > 0$. Для кожного $t \in \mathbb{R}$ позначимо через $\mathbf{\Sigma}_b(t) : \mathbf{H}_s \to \mathbf{H}_s$, $D(\mathbf{\Sigma}_b(t)) = \mathbf{H}_s$, оператор множення на матрицю

$$\Sigma_b(\sigma, t) = \begin{pmatrix} \cos(t\sigma) + b\frac{\sin(t\sigma)}{\sigma} & \frac{\sin(t\sigma)}{\sigma} \\ -(\sigma^2 + b^2)\frac{\sin(t\sigma)}{\sigma} & \cos(t\sigma) - b\frac{\sin(t\sigma)}{\sigma} \end{pmatrix}, \qquad \sigma \in \mathbb{R},$$

помножену на e^{-bt}. Аналогічно лемі 5.61 доводимо наступну лему.

Лема 5.66. *Відображення $\mathbf{\Sigma}_b : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(\mathbf{H}_s)$, що діє за правилом $t \mapsto \mathbf{\Sigma}_b(t)$, є C_0-групою.*

При доведенні цієї леми аналогічно оцінці 5.189 одержуємо оцінку

$$|||\mathbf{\Sigma}_b(t)|||_s \leq 2(1 + b^2)\sqrt{(1 + t^2)}e^{-bt}, \qquad t \in \mathbb{R}. \tag{5.194}$$

Зрозуміло, що для кожного $\mathrm{V} \in \mathbf{H}_s$ і кожного $\sigma \in \mathbb{R}$ маємо

$$\frac{1}{t}\left(e^{-bt}\Sigma_b(\sigma, t)\mathrm{V}(\sigma) - \mathrm{V}(\sigma)\right) \to (G(\sigma) + B)\,\mathrm{V}(\sigma), \qquad \text{коли } t \to 0,$$

де

$$G(\sigma) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\sigma^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma \in \mathbb{R}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -b^2 & -2b \end{pmatrix}.$$

Для оператора $\mathbf{G} + \mathbf{B} : \mathbf{H}_s \to \mathbf{H}_s$ множення на матрицю $G + B$ областю визначення $D(\mathbf{G} + \mathbf{B})$ є простір $\mathbf{H}_{s+1}$. За теоремою 1.1 простір $\mathbf{H}_{s+1}$ є щільним в $\mathbf{H}_s$. Аналогічно доведенню леми 5.62 доводимо наступну лему.

Лема 5.67. *Оператор* $\mathbf{G}$ *є інфінітезимальним генератором* C_0*-групи* $\mathbf{\Sigma}_b$*, тобто, для кожного* $\mathrm{V} \in D(\mathbf{G}+\mathbf{B}) = \mathbf{H}_{s+1}$

$$\left|\left|\left|\frac{1}{t}\left(\mathbf{\Sigma}_b(t)\mathrm{V} - \mathrm{V}\right) - (\mathbf{G}+\mathbf{B})\mathrm{V}\right|\right|\right|_s \to 0, \qquad \textit{коли } t \to 0. \tag{5.195}$$

Для кожного $t \in \mathbb{R}$ позначимо також через $\widetilde{\mathbf{\Sigma}}_b(t)$ та $\widetilde{\mathbf{G}}+\widetilde{\mathbf{B}}$ звуження операторів $\mathbf{\Sigma}_b(t)$ та $\mathbf{G}+\mathbf{B}$ на $\widetilde{\mathbf{H}}_s$, а через $\widehat{\mathbf{\Sigma}}_b(t)$ та $\widehat{\mathbf{G}}+\widehat{\mathbf{B}}$ звуження операторів $\mathbf{\Sigma}_b(t)$ та $\mathbf{G}+\mathbf{B}$ на $\widehat{\mathbf{H}}_s$. З лем 5.66 та 5.67 аналогічно висновкам 5.63 і 5.63 одержуємо наступні два висновки

Висновок 5.68. *Відображення* $\widetilde{\mathbf{\Sigma}}_b : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(\widetilde{\mathbf{H}}_s)$*, що діє за правилом* $t \mapsto \widetilde{\mathbf{\Sigma}}_b(t)$*, є* C_0*-групою. Відображення* $\widehat{\mathbf{\Sigma}}_b : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(\widehat{\mathbf{H}}_s)$*, що діє за правилом* $t \mapsto \widehat{\mathbf{\Sigma}}_b(t)$*, також є* C_0*-групою.*

Висновок 5.69. *Оператор* $\widetilde{\mathbf{G}}+\widetilde{\mathbf{B}}$ *є інфінітезимальним генератором* C_0*-групи* $\widetilde{\mathbf{\Sigma}}_b$*. Оператор* $\widehat{\mathbf{G}}+\widehat{\mathbf{B}}$ *також є інфінітезимальним генератором* C_0*-групи* $\widehat{\mathbf{\Sigma}}_b$*.*

Висновки до розділу 5

У цьому розділі для хвильових рівнянь зі сталими коефіцієнтами на півосі та на півплощині, керованих крайовою умовою Діріхле або крайовою умовою Неймана знайдено необхідні і достатні умови керованості як за заданий так і за вільний час. Також для хвильового рівняння зі сталими коефіцієнтами на півосі вивчено проблему стабілізовності за допомоги позиційного керування без запізнення та позиційного керування із запізненням. Крім того, для цього рівняння досліджено коректність нелокальної крайової задачі.

РОЗДІЛ 6.

ЗАДАЧІ КЕРУВАННЯ ДЛЯ ХВИЛЬОВОГО РІВНЯННЯ ЗІ ЗМІННИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Нехай ρ, k, γ — задані функції такі, що $\gamma \in C^1[0,+\infty)$, а $\rho, k \in C^1[0,+\infty)$ є позитивними на $[0,+\infty)$, $(\rho k) \in C^2[0,+\infty)$, $(\rho k)'(0) = 0$ і

$$\int_0^x \sqrt{\rho(\mu)/k(\mu)}\, d\mu \to +\infty, \qquad \text{коли } x \to +\infty. \tag{6.1}$$

Ми також вважаємо, що виконано дві умови:

$$P(k,\rho) - \gamma \in L^\infty(0,+\infty) \bigcap C^1[0,+\infty), \tag{6.2}$$

$$\exists q = \text{const} \geq 0 \quad \sigma\sqrt{\frac{\rho}{k}}\left(P(k,\rho) - \gamma - q^2\right) \in L^1(0,+\infty), \tag{6.3}$$

де

$$P(k,\rho) = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{k}{\rho}}\left(\sqrt{\frac{k}{\rho}}\left(\frac{k'}{k} + \frac{\rho'}{\rho}\right)\right)' + \left(\frac{1}{4}\sqrt{\frac{k}{\rho}}\left(\frac{k'}{k} + \frac{\rho'}{\rho}\right)\right)^2.$$

Позначимо через η парне продовження $(k\rho)^{1/4}$, а через θ — парне продовження $(k/\rho)^{1/4}$. Бачимо, що $\eta \in C^2(\mathbb{R})$ і $\theta \in C^1(\mathbb{R})$ є парними додатніми на $\mathbb{R}$ функціями. З (6.1) випливає що для них виконано умову (3.1). Як і в підрозділі 3.1,

$$\mathcal{D}_{\eta\theta} = \theta^2 \left(d/dx + \eta'/\eta\right),$$

а σ визначається формулою (3.2):

$$\sigma(x) = \int_0^x \frac{d\mu}{\theta^2(\mu)} \to \infty, \quad \text{коли } x \to +\infty.$$

У цьому розділі ми будемо використовувати оператор $\mathbf{S}$ і простори $\mathbb{H}^k$, $\mathbb{H}^k(\mathbb{R}_+)$, $\mathbb{H}^k_\oplus$, $\widetilde{\mathbb{H}}^k_+$ та $\widehat{\mathbb{H}}^k_+$, $k = \overline{-2, 2}$, які було введено та досліджено в підрозділі 3.1 за такими η і θ.

Нехай також $\gamma \in C^1[0, +\infty)$ — задана функція, $\widehat{\gamma}$ є її парним продовженням, а

$$p = \nu - \widehat{\gamma}, \qquad \nu = \mathcal{D}_{\eta\theta} \left(\theta^2 \frac{\eta'}{\eta} \right).$$

З (6.2) і (6.3) випливає, що $p \in C^1(\mathbb{R})$ є парною функцією, для якої виконано умову

$$\exists q = \text{const} \geq 0 \left(r = p \circ \sigma^{-1} - q^2 \in C^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}) \right.$$
$$\left. \wedge \int_0^\infty \lambda |r(\lambda)| \, d\lambda < \infty \right), \tag{6.4}$$

зокрема $p = r \circ \sigma + q^2$, де $q \geq 0$ — це стала з умови (6.3) та (6.4), а r задовольняє умову (1.2). Далі ми будемо використовувати оператори $\widetilde{\mathbb{T}} = \mathbf{S}\widetilde{\mathbf{T}}_r$ та $\widehat{\mathbb{T}} = \mathbf{S}\widehat{\mathbf{T}}_r$, які було вивчено в підрозділі 3.2.

6.1. Керованість хвильового рівняння на півосі

У цьому підрозділі досліджено керованість хвильового рівняння зі змінними коефіцієнтами на півосі. Результати проілюстровано прикладами 7.7–7.13 в підрозділі 7.

6.1.1. Керованість умовами Діріхле. Розглянемо хвильове рівняння

$$z_{tt} = \frac{1}{\rho}\left(k z_x\right)_x + \gamma z, \qquad x > 0,\ t \in (0, T), \tag{6.5}$$

кероване крайовою умовою Діріхле

$$z(0, \cdot) = v(t), \qquad t \in (0, T), \tag{6.6}$$

за початкових умов

$$z(\cdot, 0) = z_0^0, \quad z_t(\cdot, 0) = z_1^0, \qquad x > 0, \tag{6.7}$$

де $T > 0$ — деяка стала; $z(\cdot, t) \in \widetilde{\mathbb{H}}_+^0 = \mathbb{H}_\oplus^0$, $t \in [0, T]$; $\left(\frac{d}{dt}\right)^m z : [0, T] \to \mathbb{H}_\oplus^{-m}$, $m = 0, 1, 2$; $v \in L^\infty(0, T)$ — керування; $z_0^0 \in \widetilde{\mathbb{H}}_+^0$, $z_1^0 \in \widetilde{\mathbb{H}}_+^{-1}$ — початкові дані.

Позначимо через z, z_0^0 та z_1^0 непарні продовження за x для z, z_0^0 z_1^0 відповідно. Скориставшись теоремою 3.10, бачимо, що z задовольняє систему

$$\mathrm{z}_{tt} = \mathcal{D}_{\eta\theta}^2 \mathrm{z} - p\mathrm{z} - 2\eta^2(0) v \mathcal{D}_{\eta\theta}\delta, \qquad x \in \mathbb{R},\ t \in (0, T), \tag{6.8}$$

$$\mathrm{z}(\cdot, 0) = \mathrm{z}_0^0, \quad \mathrm{z}_t(\cdot, 0) = \mathrm{z}_1^0, \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{6.9}$$

де δ — це розподіл Дірака за x; $\left(\frac{d}{dt}\right)^m \mathrm{z} : [0, T] \to \widetilde{\mathbb{H}}^{-m}$, $m = 0, 1, 2$; $\mathrm{z}_0^0 \in \widetilde{\mathbb{H}}^0$, $\mathrm{z}_1^0 \in \widetilde{\mathbb{H}}^{-1}$. Нижче у висновку 6.2 ми доведемо, що для розв'язку z системи (6.8), (6.9) виконано умову

$$\mathrm{z}(+0, t) = v(t) \quad \text{м. с. на } [0, T], \tag{6.10}$$

отже, звуження цього розв'язку на $\mathbb{R}_+$ задовольняє систему (6.5)–(6.7). Таким чином, системи (6.5)–(6.7) і (6.8), (6.9) є еквівалентними, тому далі ми розглядатимемо систему (6.8), (6.9) замість (6.5)–(6.7). Позначимо $\mathrm{Z}^0 = \begin{pmatrix} \mathrm{z}_0^0 \\ \mathrm{z}_1^0 \end{pmatrix}$. Бачимо, що $\mathrm{Z}^0 \in \widetilde{\mathbb{H}}^0$. Зрозуміло, що ця керована система має вигляд (1.11), (1.12).

Далі за допомогою операторів $\widetilde{\mathbb{T}} = \mathbf{S}\widetilde{\mathbf{T}}_r$ ми одержуємо властивості керованості системи (6.5)–(6.7) з властивостей керованості системи (5.4)–(5.5), яку було досліджено в пункті 5.1.1.

Теорема 6.1. *Нехай* w *є розв'язком керованої системи* (5.4), (5.5) *для деяких* $u \in L^\infty(0,T)$ *і* $\mathrm{W}^0 \in \widetilde{\mathbf{H}}^0$. *Нехай також* $\mathrm{z}(\cdot,t) = \widetilde{\mathbb{T}}\mathrm{w}(\cdot,t)$, $t \in [0,T]$. *Тоді* z *є розв'язком* (6.8), (6.9) *з* $\mathrm{Z}^0 = \widetilde{\mathbb{T}}\mathrm{W}^0$ *та*

$$\eta(0)v(t) = u(t) + \int_0^\infty K(0,\xi)\mathrm{w}(\xi,t)\,d\xi, \qquad t \in [0,T], \tag{6.11}$$

і умову (6.10) *виконано. Крім того,*

$$\left|\!\left|\!\left| \begin{pmatrix} \mathrm{z}(\cdot,t) \\ \mathrm{z}_t(\cdot,t) \end{pmatrix} \right|\!\right|\!\right|^0 \le C_0 \left|\!\left|\!\left| \begin{pmatrix} \mathrm{w}(\cdot,t) \\ \mathrm{w}_t(\cdot,t) \end{pmatrix} \right|\!\right|\!\right|^0, \qquad t \in [0,T], \tag{6.12}$$

$$\|v\|_{L^\infty(0,T)} \le C_1 \left(2(1+T^2)^2(1+q^2)\,\|u\|_{L^\infty(0,T)} + Q(T)\left|\!\left|\!\left|\mathrm{W}^0\right|\!\right|\!\right|^0 \right), \tag{6.13}$$

де $C_0 > 0$ *і* $C_1 > 0$ *— деякі сталі, які не залежать від* q *та* T, *а* $Q(T)$ *є сталою з оцінки* (5.11).

Доведення. Застосовуючи теорему 3.14, одержуємо, що z є розв'язком (6.8), (6.9) із $\mathrm{Z}^0 = \widetilde{\mathbb{T}}\mathrm{W}^0$ і v, визначеним через (6.11). Доведемо (6.10). Беручи до уваги (5.6) і (6.11), бачимо, що

$$\mathrm{z}(+0,t) = \left(\widetilde{\mathbb{T}}\mathrm{w}\right)(+0,t)$$

$$= \frac{1}{\eta(0)} \left(\mathrm{w}(+0,t) + \int_0^\infty K(0,\xi)\mathrm{w}(\xi,t)\,d\xi \right) = v(t), \qquad t \in [0,T],$$

тобто, (6.10) виконано. За теоремою 3.13 існує стала $C_0 > 0$ така, що виконано (6.12).

З (6.11) випливає оцінка

$$\|v\|_{L^\infty(0,T)} \le \frac{1}{\eta(0)} \left(\|u\|_{L^\infty(0,T)} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\int_0^\infty |K(0,\xi)|^2\, d\xi}\, \|\mathrm{w}(\cdot,t)\|^0 \right)$$
$$\le C_2 \left(\|u\|_{L^\infty(0,T)} + \|\mathrm{w}(\cdot,t)\|^0 \right), \tag{6.14}$$

де $C_1 > 0$ — деяка стала, яка не залежить від q та T. Тут для оцінки L^2-норми ядра K використано теорему 1.9. Застосовуючи теорему 5.2, одержуємо (6.13). Теорему доведено. □

Висновок 6.2. *Якщо* z *є розв'язком керованої системи* (6.8), (6.9) *для деяких* $v \in L^\infty(0,T)$ *та* $\mathrm{Z}^0 \in \widetilde{\mathbb{H}}^0$, *то* (6.10) *виконано.*

Доведення. Нехай $\mathrm{w}(\cdot,t) = \widetilde{\mathbb{T}}^{-1}\mathrm{z}(\cdot,t)$, $t \in [0,T]$. Застосовуючи теорему 3.15, бачимо, що w є розв'язком керованої системи (5.4), (5.5) з $\mathrm{W}^0 = \widetilde{\mathbb{T}}^{-1}\mathrm{Z}^0$ і

$$u(t) = \eta(0)v(t) + \int_0^\infty L(0,\lambda)y(\lambda,t)\,d\lambda, \qquad t \in [0,T], \tag{6.15}$$

де $y(\cdot,t) = \mathbf{S}^{-1}\mathrm{z}(\cdot,t)$, $t \in [0,T]$. З тореми 6.1 випливає, що $\mathrm{z}(+0,t) = \widetilde{v}(t)$ на $[0,T]$ для

$$\eta(0)\widetilde{v}(t) = u(t) + \int_0^\infty K(0,\xi)\mathrm{w}(\xi,t)\,d\xi, \qquad t \in [0,T]. \tag{6.16}$$

Доведемо, що $v(t) = \widetilde{v}(t)$, $t \in [0,T]$. Порівнюючи (6.15) і (6.16), одержуємо

$$\eta(0)\left(\widetilde{v}(t) - v(t)\right) = \int_0^\infty L(0,\lambda)y(\lambda,t)\,d\lambda + \int_0^\infty K(0,\xi)\mathrm{w}(\xi,t)\,d\xi$$

$$= \int_0^\infty y(\lambda,t)\,(L(0,\lambda)+K(0,\lambda))\;d\lambda$$
$$+\int_0^\infty K(0,\xi)\int_\xi^\infty L(\xi,\lambda)y(\lambda,t)\,d\lambda\,d\xi$$
$$= \int_0^\infty y(\lambda,t)\biggl(L(0,\lambda)+K(0,\lambda)$$
$$+\int_0^\lambda K(0,\xi)L(\xi,\lambda)\,d\xi\biggr)\,d\lambda, \qquad t\in[0,T].$$

Беручи до уваги (1.8), одержуємо $v(t)=\widetilde{v}(t)$, $t\in[0,T]$. Отже, (6.10) виконано. Висновок доведено. $\square$

Теорема 6.3. *Нехай* z *є розв'язком керованої системи* (6.8), (6.9) *для деяких* $v\in L^\infty(0,T)$ *та* $\mathrm{Z}^0\in\widetilde{\mathbb{H}}^0$. *Нехай також* $\mathrm{w}(\cdot,t)=\widetilde{\mathbb{T}}^{-1}\mathrm{z}(\cdot,t)$, $t\in[0,T]$. *Тоді* w *є розв'язком* (5.4), (5.5) *з* $\mathrm{W}^0=\widetilde{\mathbb{T}}^{-1}\mathrm{Z}^0$ *та*

$$u(t)=\eta(0)v(t)+\int_0^\infty L(0,x)\mathbf{S}^{-1}\mathrm{z}(x,t)\,dx, \qquad t\in[0,T]. \tag{6.17}$$

Крім того,

$$\left|\!\left|\!\left|\begin{pmatrix}\mathrm{w}(\cdot,t)\\ \mathrm{w}_t(\cdot,t)\end{pmatrix}\right|\!\right|\!\right|^0 \le G_0 \left[\!\left[\begin{pmatrix}\mathrm{z}(\cdot,t)\\ \mathrm{z}_t(\cdot,t)\end{pmatrix}\right]\!\right]^0, \qquad t\in[0,T], \tag{6.18}$$

$$\|u\|_{L^\infty(0,T)} \le G_1Q(T)e^{TG_2}\left(\|v\|_{L^\infty(0,T)}+\left[\!\left[\mathrm{Z}^0\right]\!\right]^0\right), \tag{6.19}$$

де $Q(T)$ *є сталою з оцінки* (5.11), $G_0>0$, $G_1>0$ *та* $G_2>0$ *є деякими сталими, що не залежать від* q *та* T.

Доведення. За аналогією з (6.11)і (6.12), застосовуючи теорему 3.15 замість теореми 3.14, одержуємо (6.17) і (6.18). Доведемо (6.19). З доведення висновку 6.2 випливає, що (6.11) виконано за умов цієї теореми.

Беручи до уваги (5.14) та (6.11), маємо

$$u(t) = F_1(t) + \int_0^t F_2(t-\mu)u(\mu)\,d\mu, \qquad t \in [0,T], \tag{6.20}$$

де

$$F_1(t) = \eta(0)v(t) - \int_0^\infty K(0,\xi)\left(\mathbf{J}_t(\xi,t) * \mathrm{w}_0^0(\xi) + \mathbf{J}(x,t) * \mathrm{w}_1^0(\xi)\right)\,d\xi$$

$$\begin{aligned} F_2(\mu) &= K(0,\mu) - q\int_0^\mu K(0,\xi)\frac{J_1\left(q\sqrt{\mu^2-\xi^2}\right)}{\sqrt{\mu^2-\xi^2}}\xi\,d\xi \\ &= RJ_0\left(q\mu\right) + \int_0^\mu K_\xi(0,\xi)J_0\left(q\sqrt{\mu^2-\xi^2}\right)\,d\xi. \end{aligned}$$

Враховуючи теорему 1.9, (1.2) і (1.3), одержуємо

$$\|F_2\|_{L^\infty(0,+\infty)} \le \frac{3}{4}\left(\sigma_0(0) + M_1\|\lambda r\|_{L^1(0,+\infty)}\right). \tag{6.21}$$

З (5.11) і теореми 1.9 випливає, що

$$\|F_1\|_{L^\infty(0,T)} \le \eta(0)\|v\|_{L^\infty(0,T)} + Q(T)\sqrt{M_0\|\lambda r\|_{L^1(0,+\infty)}}\,\left|\left|\left|\mathrm{W}^0\right|\right|\right|^0, \tag{6.22}$$

де $Q(T)$ є сталою з оцінки (5.11).

Застосовуючи (6.21) і лему 6.39, ми бачимо, що інтегральне рівняння

$$u(t) = \int_0^t F_2(t-\mu)u(\mu)\,d\mu, \qquad t \in [0,T], \tag{6.23}$$

має лише тривіальний розв'язок в $L^2(0,T)$. Використовуючи альтернативу Фредгольма, одержуємо, що рівняння (6.20) має єдиний розв'язок в $L^2(0,T)$. Знову скориставшись лемою 6.39, одержуємо

$$|u(t)| \le \|F_1\|_{L^\infty(0,T)}\,e^{t\|F_2\|_{L^\infty(0,+\infty)}}, \qquad t \in [0,T].$$

Беручи до уваги (6.21), (6.22) та (6.18), бачимо, що (6.19) виконується з деякими сталими $G_1 > 0$ і $G_2 > 0$, , які не залежать від q та T. Теорему доведено. $\square$

З теорем 6.1, 6.3, 5.1 та 5.2 випливають наступні два висновки.

Висновок 6.4. *Нехай* $v \in L^\infty(0,T)$ *та* $\mathrm{Z}^0 \in \widetilde{\mathbb{H}}^0$. *Тоді розв'язок системи* (6.8), (6.9) *є єдиним.*

Висновок 6.5. *Нехай* $v \in L^\infty(0,T)$ *та* $\mathrm{Z}^0 \in \widetilde{\mathbb{H}}^0$. *Тоді розв'язок системи* (6.8), (6.9) *задовольняє умову*

$$\left|\left|\left|\begin{pmatrix} \mathrm{z}(\cdot,t) \\ \mathrm{z}_t(\cdot,t) \end{pmatrix}\right|\right|\right|^0 \le Q_1(T,q)\left(\left|\left|\left|\mathrm{Z}^0\right|\right|\right|^0 + \|u\|_{L^\infty(0,T)}\right), \quad t \in [0,T].$$

тобто, задача (6.8), (6.9) *є коректно поставленою. Тут* $Q_1(T,q) > 0$ *є сталою, що залежить від* T *і* q.

Таким чином, керована система (6.8), (6.9) із загальним хвильовим оператором є трансформацією за допомоги оператора $\widetilde{\mathbb{T}}$ керованої системи (5.4), (5.5) з найпростішим хвильовим оператором, і навпаки: керована система (5.4), (5.5) є трансформацією за допомоги оператора $\widetilde{\mathbb{T}}^{-1}$ керованої системи (6.8), (6.9).

З теорем 6.1, 6.3 одразу випливають наступні два висновки.

Висновок 6.6. *Нехай* $\mathrm{Z}^0 \in \widetilde{\mathbb{H}}^0$, $\mathrm{W}^0 = \widetilde{\mathbb{T}}^{-1}\mathrm{Z}^0$ *і час* $T > 0$ *є заданим. Тоді*

(i) *Стан* Z^0 *системи* (6.8), (6.9) *є наближено* L^∞*-керованим за час* T *тоді і лише тоді, коли стан* W^0 *системи* (5.4), (5.5) *є наближено* L^∞*-керованим за той же час;*

(ii) *Стан* Z^0 *системи* (6.8), (6.9) *є* L^∞*-керованим за час* T *тоді і лише тоді, коли стан* W^0 *системи* (5.4), (5.5) *є* L^∞*-керованим за той же час.*

Висновок 6.7. *Нехай* $\mathrm{Z}^0 \in \widetilde{\mathbb{H}}^0$ *і* $\mathrm{W}^0 = \widetilde{\mathbb{T}}^{-1}\mathrm{Z}^0$. *Тоді стан* Z^0 *системи* (6.8), (6.9) *є наближено* L^∞*-керованим за вільний час тоді і лише тоді, коли стан* W^0 *системи* (5.4), (5.5) *є наближено* L^∞*-керованим за вільний час.*

Таким чином, беручи до уваги теореми 5.7, 5.9 та 5.10, одержуємо наступні критерії керованості для системи (6.8), (6.9).

Теорема 6.8. *Нехай* $\mathrm{Z}^0 \in \widetilde{\mathbb{H}}^0$ *і час* $T > 0$ *є заданим. Тоді*

(i) *Стан* Z^0 *системи* (6.8), (6.9) *є наближено* L^∞*-керованим за час* T *тоді і лише тоді, коли виконано дві умови*

$$\operatorname{supp} \mathrm{z}_0^0 \subset [-\sigma^{-1}(T), \sigma^{-1}(T)], \tag{6.24}$$

$$\mathrm{z}_1^0 - \widetilde{\mathbb{T}}\widehat{\Psi}_T\Psi_T^{-1}\widetilde{\mathbb{T}}^{-1}\mathrm{z}_0^0 = 0; \tag{6.25}$$

(ii) *Стан* Z^0*системи* (6.8), (6.9) *є* L^∞*-керованим за час* T *тоді і лише тоді, коли* $\eta \mathrm{z}_0^0 \in L^\infty(0, \sigma^{-1}(T))$ *і виконано умови* (6.24) *та* (6.25).

Доведення. Зрозуміло, що (i) одразу випливає з теореми 5.7: (i). Щоб довести (ii) досить показати, що виконано умову

$$\eta \mathrm{z}_0^0 \in L^\infty(0, \sigma^{-1}(T)) \quad \text{тоді і лише тоді, коли} \quad \mathrm{w}_0^0 \in L^\infty(0, T). \tag{6.26}$$

Беручи до уваги теорему 1.10 і (1.2), бачимо, що (6.26) справджується. Теорему доведено. □

Теорема 6.9. *Нехай* $q = 0$. *Стан* $\mathrm{Z}^0 \in \widetilde{\mathbb{H}}^0$*системи* (6.8), (6.9) *є наближено* L^∞*-керованим за вільний час тоді і лише тоді, коли*

$$\mathrm{z}_1^0 - \widetilde{\mathbb{T}}\left(\operatorname{sgn}(\cdot)\,\widetilde{\mathbb{T}}^{-1}\mathrm{z}_0^0\right)' = 0. \tag{6.27}$$

Відмітимо, що для $q = 0$ умови (6.27) та (6.25) є еквівалентними.

Теорема 6.10. *Нехай* $q > 0$. *Кожний стан* $\mathrm{Z}^0 \in \widetilde{\mathbb{H}}^0$ *системи* (6.8), (6.9) *є наближено* L^∞*-керованим за вільний час.*

Таким чином, трансформована керована система (6.8), (6.9) із загальним хвильовим оператором відтворює властивості керованості вихідної керованої системи (5.4), (5.5) з найпростішим хвильовим оператором і навпаки.

На с. 40 було введено множини $\mathcal{L}_T$, $\overline{\mathcal{L}}_T$ та $\mathcal{L}$, загальні властивості яких подано в твердженнях 1.24, 1.25 та формулах (1.16)–(1.19). Позначимо через $\mathcal{L}_T^{[q]}$, $\overline{\mathcal{L}}_T^{[q]}$ та $\mathcal{L}^{[q]}$ множини $\mathcal{L}_T$, $\overline{\mathcal{L}}_T$ та $\mathcal{L}$, відповідно, для керованої системи (5.4), (5.5). Позначимо через $\mathcal{L}_T^{[\eta\theta p]}$, $\overline{\mathcal{L}}_T^{[\eta\theta p]}$ та $\mathcal{L}^{[\eta\theta p]}$ множини $\mathcal{L}_T$, $\overline{\mathcal{L}}_T$ та $\mathcal{L}$, відповідно, для керованої системи (6.8), (6.9). З формули (1.19), тверджень 1.24, 1.25 та теорем 3.13, 5.44, 6.8—6.10 випливає наступна теорема

Теорема 6.11. *Маємо*

$$\begin{array}{ccccccccl}
\widetilde{\mathbb{T}}\mathcal{L}_T^{[q]} & \subsetneq & \widetilde{\mathbb{T}}\overline{\mathcal{L}}_T^{[q]} & \subsetneq & \widetilde{\mathbb{T}}\mathcal{L}^{[q]} & = & \widetilde{\mathbb{H}}^0 & & \\
\| & & \| & & \| & & \| & & \text{для } q>0, \\
\mathcal{L}_T^{[\eta\theta p]} & \subsetneq & \overline{\mathcal{L}}_T^{[\eta\theta p]} & \subsetneq & \mathcal{L}^{[\eta\theta p]} & = & \widetilde{\mathbb{H}}^0 & & \\
\widetilde{\mathbb{T}}\mathcal{L}_T^{[0]} & \subsetneq & \widetilde{\mathbb{T}}\overline{\mathcal{L}}_T^{[0]} & \subsetneq & \widetilde{\mathbb{T}}\mathcal{L}^{[0]} & \subsetneq & \widetilde{\mathbb{H}}^0 & & \\
\| & & \| & & \| & & \| & & \text{для } q=0. \\
\mathcal{L}_T^{[\eta\theta p]} & \subsetneq & \overline{\mathcal{L}}_T^{[\eta\theta p]} & \subsetneq & \mathcal{L}^{[\eta\theta p]} & \subsetneq & \widetilde{\mathbb{H}}^0 & &
\end{array}$$

6.1.2. Керованість умовами Неймана. Розглянемо хвильове рівняння

$$z_{tt} = \frac{1}{\rho}\left(k z_x\right)_x + \gamma z, \qquad x > 0,\ t \in (0,T), \tag{6.28}$$

кероване крайовою умовою Неймана

$$z_x(0,\cdot) = v(t), \qquad t \in (0,T), \tag{6.29}$$

за початкових умов

$$z(\cdot,0) = z_0^0, \quad z_t(\cdot,0) = z_1^0, \qquad x > 0, \tag{6.30}$$

де $T > 0$ — деяка стала; $\left(\frac{d}{dt}\right)^m z : [0,T] \to \mathbb{H}_{\oplus}^{-m+1}$, $m = 0,1,2$; $v \in L^\infty(0,T)$ — керування; $z_0^0 \in \widehat{\mathbb{H}}_+^1$, $z_1^0 \in \widehat{\mathbb{H}}_+^0$ — початкові дані.

Позначимо через z, z_0^0 та z_1^0 парні продовження за x для z, z_0^0 z_1^0 відповідно. Скориставшись висновком 3.12, бачимо, що z задовольняє систему

$$\mathrm{z}_{tt} = \mathcal{D}_{\eta\theta}^2 \mathrm{z} - p\mathrm{z} - 2\eta^2(0)\theta^2(0) v\delta, \qquad x \in \mathbb{R},\ t \in (0,T), \tag{6.31}$$

$$\mathrm{z}(\cdot,0) = \mathrm{z}_0^0, \quad \mathrm{z}_t(\cdot,0) = \mathrm{z}_1^0, \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{6.32}$$

де δ — це розподіл Дірака за x; $\left(\frac{d}{dt}\right)^m \mathrm{z} : [0,T] \to \widehat{\mathbb{H}}^{-m+1}$, $m = 0,1,2$; $\mathrm{z}_0^0 \in \widehat{\mathbb{H}}^1$, $\mathrm{z}_1^0 \in \widehat{\mathbb{H}}^0$.Нижче у висновку 6.13 ми доведемо, що для розв'язку z системи (6.31), (6.32) виконано умову

$$\mathrm{z}_x(+0,t) = v(t) \quad \text{м. с. на } [0,T]. \tag{6.33}$$

отже, звуження цього розв'язку на $\mathbb{R}_+$ задовольняє систему (6.28)–(6.30). Таким чином, системи (6.28)–(6.30) і (6.31), (6.32) є еквівалентними, тому далі ми розглядатимемо систему (6.31), (6.32) замість (6.28)–(6.30).

Позначимо $\mathrm{Z}^0 = \begin{pmatrix} \mathrm{z}_0^0 \\ \mathrm{z}_1^0 \end{pmatrix}$. Бачимо, що $\mathrm{Z}^0 \in \widehat{\mathbb{H}}^1$. Зрозуміло, що ця керована система має вигляд (1.11), (1.12).

Далі за допомогою операторів $\widehat{\mathbb{T}} = \mathbf{S}\widehat{\mathbf{T}}_r$ ми одержуємо властивості керованості системи (6.28)–(6.30) з властивостей керованості системи (5.44)–(5.45), яку було досліджено в пункті 5.1.3.

Теорема 6.12. *Нехай* w *є розв'язком керованої системи* (5.44), (5.45) *для деяких* $u \in L^\infty(0,T)$ *і* $\mathrm{W}^0 \in \widehat{\mathbf{H}}^1$. *Нехай також* $\mathrm{z}(\cdot,t) = \widehat{\mathbb{T}}\mathrm{w}(\cdot,t)$, $t \in [0,T]$. *Тоді* z *є розв'язком* (6.31), (6.32) *з* $\mathrm{Z}^0 = \widehat{\mathbb{T}}\mathrm{W}^0$ *та*

$$\eta(0)\theta^2(0)v(t) = u(t) - R\mathrm{w}(+0,t) + \int_0^\infty K_{y_1}(0,\xi)\mathrm{w}(\xi,t)\,d\xi, \qquad t \in [0,T], \tag{6.34}$$

і умову (6.33) *виконано. Тут*

$$R = \frac{1}{2}\int_0^\infty r(\xi)\,d\xi.$$

Крім того,

$$\left|\left|\left|\begin{pmatrix} \mathrm{z}(\cdot,t) \\ \mathrm{z}_t(\cdot,t) \end{pmatrix}\right|\right|\right|^1 \le B_0 \left|\left|\left|\begin{pmatrix} \mathrm{w}(\cdot,t) \\ \mathrm{w}_t(\cdot,t) \end{pmatrix}\right|\right|\right|^1, \qquad t \in [0,T], \tag{6.35}$$

$$\|v\|_{L^\infty(0,T)} \le B_1 \left(2(1+T^2)^2(1+q^2)\,\|u\|_{L^\infty(0,T)} + Q(T)\left|\left|\left|\mathrm{W}^0\right|\right|\right|^0\right), \tag{6.36}$$

де $B_0 > 0$ *і* $B_1 > 0$ *— деякі сталі, які не залежать від* q *та* T, *а* $Q(T)$ *є сталою з оцінки* (5.47).

Доведення. Застосовуючи теорему 3.18, одержуємо, що z є розв'язком (6.31), (6.32) із $\mathrm{Z}^0 = \widehat{\mathbb{T}}\mathrm{W}^0$ і v, визначеним через (6.34). Доведемо (6.33).

Беручи до уваги (5.6) і (6.34), бачимо, що

$$\begin{aligned} \mathrm{z}_x(+0,t) = \left(\widehat{\mathbb{T}}\mathrm{w}\right)_x(+0,t) = \frac{1}{\eta(0)\theta^2(0)}\Big(\mathrm{w}(+0,t) - R\mathrm{w}(+0,t) \\ + \int_0^\infty K_{y_1}(0,\xi)\mathrm{w}(\xi,t)\,d\xi\Big) = v(t), \quad t\in[0,T], \end{aligned}$$

тобто, (6.33) виконано. За теоремою 3.17 існує стала $C_0 > 0$ така, що виконано (6.35).

З (6.34) випливає оцінка

$$\begin{aligned} \|v\|_{L^\infty(0,T)} \le & \frac{1}{\eta(0)\theta^2(0)}\Bigg(\|u\|_{L^\infty(0,T)} + |R|\,\|\mathrm{w}(+0,t)\|_{L^\infty(0,T)} \\ & + \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\int_0^\infty |K(0,\xi)|^2\,d\xi}\,\|\mathrm{w}(\cdot,t)\|^0\Bigg) \\ \le & B_2\left(\|u\|_{L^\infty(0,T)} + \|\mathrm{w}(+0,t)\|_{L^\infty(0,T)} + \|\mathrm{w}(\cdot,t)\|^0\right), \end{aligned} \tag{6.37}$$

де $B_2 > 0$ — деяка стала, яка не залежить від q та T. Тут для оцінки L^2-норми ядра K використано теорему 1.9. Маємо

$$\begin{aligned} |\mathrm{w}(\xi,t)| &\le 2\int_0^\infty \left|\sqrt{1+\sigma^2}(\mathcal{F}\mathrm{w}(\cdot,t))(\sigma)\right| \frac{d\sigma}{\sqrt{1+\sigma^2}} \\ &\le \sqrt{\pi}\,\|\mathrm{w}(\cdot,t)\|^1, \quad \xi\in\mathbb{R},\ t\in[0,T]. \end{aligned} \tag{6.38}$$

Застосовуючи теорему 5.20 та враховуючи (6.38), одержуємо (6.36). Теорему доведено. □

Висновок 6.13. *Якщо* z *є розв'язком керованої системи* (6.31), (6.32) *для деяких* $v \in L^\infty(0,T)$ *та* $\mathrm{Z}^0 \in \widehat{\mathbb{H}}^1$, *то* (6.33) *виконано.*

Доведення. Нехай $\mathrm{w}(\cdot,t) = \widehat{\mathbb{T}}^{-1}\mathrm{z}(\cdot,t)$, $t\in[0,T]$. Застосовуючи теорему 3.19, бачимо, що w є розв'язком керованої системи (5.44), (5.45) з

$\mathrm{W}^0 = \widehat{\mathbb{T}}^{-1}\mathrm{Z}^0$ і

$$
\begin{aligned}
u(t) =& \eta(0)\theta^2(0)v(t) - Ry(+0,y) \\
&+ \int_0^\infty L_{y_1}(0,\lambda)y(\lambda,t)\,d\lambda, \qquad t \in [0,T],
\end{aligned} \tag{6.39}
$$

де $y(\cdot,t) = \mathbf{S}^{-1}\mathrm{z}(\cdot,t)$, $t \in [0,T]$. З тореми 6.12 випливає, що $\mathrm{z}(+0,t) = \widetilde{v}(t)$ на $[0,T]$ для

$$
\begin{aligned}
\eta(0)\theta^2(0)\widetilde{v}(t) =& u(t) - R\mathrm{w}(+0,t) \\
&+ \int_0^\infty K_{y_1}(0,\xi)\mathrm{w}(\xi,t)\,d\xi, \qquad t \in [0,T].
\end{aligned} \tag{6.40}
$$

Доведемо, що $v(t) = \widetilde{v}(t)$, $t \in [0,T]$. Порівнюючи (6.39) і (6.40), одержуємо

$$
\begin{aligned}
\eta(0)\theta^2(0)\left(\widetilde{v}(t) - v(t)\right) &= \int_0^\infty L_{y_1}(0,\lambda)y(\lambda,t)\,d\lambda + \int_0^\infty K_{y_1}(0,\xi)\mathrm{w}(\xi,t)\,d\xi \\
&\quad - R\int_0^\infty L(0,\lambda)y(\lambda,t)\,d\lambda \\
&= \int_0^\infty y(\lambda,t)\left(L_{y_1}(0,\lambda) + K_{y_1}(0,\lambda)\right)\,d\lambda \\
&\quad - R\int_0^\infty L(0,\lambda)y(\lambda,t)\,d\lambda \\
&\qquad + \int_0^\infty K_{y_1}(0,\xi)\int_\xi^\infty L(\xi,\lambda)y(\lambda,t)\,d\lambda\,d\xi \\
&= \int_0^\infty y(\lambda,t)\Bigg(L_{y_1}(0,\lambda) + K_{y_1}(0,\lambda) - RL(0,\lambda) \\
&\quad + \int_0^\lambda K_{y_1}(0,\xi)L(\xi,\lambda)\,d\xi\Bigg)\,d\lambda, \qquad t \in [0,T].
\end{aligned}
$$

Беручи до уваги (1.8), одержуємо $v(t) = \widetilde{v}(t)$, $t \in [0,T]$. Отже, (6.33) виконано. Висновок доведено. □

Аналогично теоремі 6.1 одержуємо наступну теорему.

Теорема 6.14. *Нехай* z *є розв'язком керованої системи* (6.31), (6.32) *для деяких* $v \in L^\infty(0,T)$ *та* $\mathrm{Z}^0 \in \widehat{\mathbb{H}}^1$. *Нехай також* $\mathrm{w}(\cdot,t) = \widehat{\mathbb{T}}^{-1}\mathrm{z}(\cdot,t)$, $t \in [0,T]$. *Тоді* w *є розв'язком* (5.44), (5.45) *з* $\mathrm{W}^0 = \widehat{\mathbb{T}}^{-1}\mathrm{Z}^0$ *та*

$$u(t) = \eta(0)\theta^2(0)v(t) + R\eta(0)\mathrm{z}(+0,t) \\ + \int_0^\infty L_{y_1}(0,x)\mathbf{S}^{-1}\mathrm{z}(x,t)\,dx, \qquad t \in [0,T]. \qquad (6.41)$$

Тут

$$R = \frac{1}{2}\int_0^\infty r(\xi)\,d\xi.$$

Крім того,

$$\left|\left|\left| \begin{pmatrix} \mathrm{w}(\cdot,t) \\ \mathrm{w}_t(\cdot,t) \end{pmatrix} \right|\right|\right|^1 \le C_0 \left|\left|\left| \begin{pmatrix} \mathrm{z}(\cdot,t) \\ \mathrm{z}_t(\cdot,t) \end{pmatrix} \right|\right|\right|^1, \qquad t \in [0,T], \qquad (6.42)$$

$$\|u\|_{L^\infty(0,T)} \le C_1 Q(T) e^{TC_2}\left(\|v\|_{L^\infty(0,T)} + |||\mathrm{Z}^0|||^1\right), \qquad (6.43)$$

де $Q(T)$ *є сталою з оцінки* (5.11), $C_0 > 0$, $C_1 > 0$ *та* $C_2 > 0$ *є деякими сталими, що не залежать від* q *та* T.

Доведення. За аналогією з (6.34) і (6.35), застосовуючи теорему 3.19 замість теореми 3.18, одержуємо (6.41) і (6.42). Доведемо (6.43). З доведення висновку 6.13 випливає, що (6.34) виконано за умов цієї теореми. Беручи до уваги (5.48) та (6.34), маємо

$$u(t) = F_1(t) + \int_0^t F_2(t-\mu)u(\mu)\,d\mu, \qquad t \in [0,T], \qquad (6.44)$$

де

$$F_1(t) = \eta(0)\theta^2(0)v(t) + R\left(\mathbf{J}_t(\xi,t) * \mathrm{w}_0^0(\xi) + \mathbf{J}(x,t) * \mathrm{w}_1^0(\xi)\right)\Big|_{\xi=0}$$

$$-\int_0^\infty K_{y_1}(0,\xi)\left(\mathbf{J}_t(\xi,t)*\mathrm{w}_0^0(\xi)+\mathbf{J}(x,t)*\mathrm{w}_1^0(\xi)\right)\,d\xi$$

$$F_2(\mu)=-\,RJ_0\,(q\mu)+\int_0^\mu K_{y_1}(0,\xi)J_0\left(q\sqrt{\mu^2-\xi^2}\right)\,d\xi.$$

Враховуючи теорему 1.9, (1.2) і (1.3), одержуємо

$$\|F_2\|_{L^\infty(0,+\infty)}\le\frac{3}{4}\left(\sigma_0(0)+M_1\,\|\lambda r\|_{L^1(0,+\infty)}\right). \tag{6.45}$$

З (6.38), (5.47) і теореми 1.9 випливає, що

$$\|F_1\|_{L^\infty(0,T)}\le\eta(0)\theta^2(0)\,\|v\|_{L^\infty(0,T)} \tag{6.46}$$

$$+\,Q(T)\left(R+\sqrt{M_0\,\|\lambda r\|_{L^1(0,+\infty)}}\right)\left|\left|\left|\mathrm{W}^0\right|\right|\right|^1, \tag{6.47}$$

де $Q(T)$ є сталою з оцінки (5.47).

Застосовуючи (6.45) і лему 6.39, ми бачимо, що інтегральне рівняння

$$u(t)=\int_0^t F_2(t-\mu)u(\mu)\,d\mu,\qquad t\in[0,T], \tag{6.48}$$

має лише тривіальний розв'язок в $L^2(0,T)$. Використовуючи альтернативу Фредгольма, одержуємо, що рівняння (6.20) має єдиний розв'язок в $L^2(0,T)$. Знову скориставшись лемою 6.39, одержуємо

$$|u(t)|\le\|F_1\|_{L^\infty(0,T)}\,e^{t\|F_2\|_{L^\infty(0,+\infty)}},\qquad t\in[0,T].$$

Беручи до уваги (6.45), (6.47) та (6.42), бачимо, що (6.43) виконується з деякими сталими $C_1>0$ і $C_2>0$, що не залежать від q та T. Теорему доведено. □

З теорем 6.12, 6.14, 5.19 та 5.20 випливають наступні два висновки.

Висновок 6.15. *Нехай* $v\in L^\infty(0,T)$ *та* $\mathrm{Z}^0\in\widehat{\mathbb{H}}^0$. *Тоді розв'язок системи* (6.31), (6.32) *є єдиним.*

Висновок 6.16. *Нехай* $v \in L^\infty(0,T)$ *та* $\mathrm{Z}^0 \in \widehat{\mathbb{H}}^0$. *Тоді розв'язок системи* (6.31), (6.32) *задовольняє умову*

$$\left|\left|\left|\begin{pmatrix} \mathrm{z}(\cdot,t) \\ \mathrm{z}_t(\cdot,t) \end{pmatrix}\right|\right|\right|^1 \le Q_2(T,q)\left(\left|\left|\left|\mathrm{Z}^0\right|\right|\right|^1 + \|u\|_{L^\infty(0,T)}\right), \quad t \in [0,T].$$

тобто, задача (6.31), (6.32) *є коректно поставленою. Тут* $Q_2(T,q) > 0$ *є сталою, що залежить від* T *і* q.

Таким чином, керована система (6.31), (6.32) із загальним хвильовим оператором є трансформацією за допомоги оператора $\widehat{\mathbb{T}}$ керованої системи (5.44), (5.45) з найпростішим хвильовим оператором, і навпаки: керована система (5.44), (5.45) є трансформацією за допомоги оператора $\widehat{\mathbb{T}}^{-1}$ керованої системи (6.31), (6.32).

З теорем 6.12, 6.14 одразу випливають наступні два висновки.

Висновок 6.17. *Нехай* $\mathrm{Z}^0 \in \widehat{\mathbb{H}}^1$, $\mathrm{W}^0 = \widehat{\mathbb{T}}^{-1}\mathrm{Z}^0$ *і час* $T > 0$ *є заданим. Тоді*

(i) *Стан* Z^0 *системи* (6.31), (6.32) *є наближено* L^∞*-керованим за час* T *тоді і лише тоді, коли стан* W^0 *системи* (5.44), (5.45) *є наближено* L^∞*-керованим за той же час;*

(ii) *Стан* Z^0 *системи* (6.31), (6.32) *є* L^∞*-керованим за час* T *тоді і лише тоді, коли стан* W^0 *системи* (5.44), (5.45) *є* L^∞*-керованим за той же час.*

Висновок 6.18. *Нехай* $\mathrm{Z}^0 \in \widehat{\mathbb{H}}^1$ *і* $\mathrm{W}^0 = \widehat{\mathbb{T}}^{-1}\mathrm{Z}^0$. *Тоді стан* Z^0 *системи* (6.31), (6.32) *є наближено* L^∞*-керованим за вільний час тоді і лише* *тоді, коли стан* W^0 *системи* (5.44), (5.45) *є наближено* L^∞*-керованим за вільний час.*

Таким чином, беручи до уваги теореми 5.25, 5.27 та 5.28, одержуємо наступні критерії керованості для системи (6.31), (6.32).

Теорема 6.19. *Нехай* $\mathrm{Z}^0 \in \widehat{\mathbb{H}}^1$ *і час* $T > 0$ *є заданим. тоді*

(i) *Стан* Z^0 *системи* (6.31), (6.32) *є наближено* L^∞*-керованим за час* T *тоді і лише тоді, коли виконано дві умови*

$$\operatorname{supp} \mathrm{z}_0^0 \subset [-\sigma^{-1}(T), \sigma^{-1}(T)], \tag{6.49}$$

$$\mathrm{z}_1^0 - \widehat{\mathbb{T}}\widehat{\Psi}_T \Psi_T^{-1} \widehat{\mathbb{T}}^{-1} \mathrm{z}_0^0 = 0; \tag{6.50}$$

(ii) *Стан* Z^0*системи* (6.31), (6.32) *є* L^∞*-керованим за час* T *тоді і лише тоді, коли* $\eta\theta^2 \mathrm{z}_0^{0\prime} \in L^\infty(0, \sigma^{-1}(T))$ *і виконано умови* (6.49) *та* (6.50).

Доведення. Зрозуміло, що (i) одразу випливає з теореми 5.25: (i). Щоб довести (ii) досить показати, що виконано умову

$$\eta\theta^2 \mathrm{z}_0^{0\prime} \in L^\infty(0, \sigma^{-1}(T)) \quad \text{тоді і лише тоді, коли} \quad \mathrm{w}_0^{0\prime} \in L^\infty(0, T). \tag{6.51}$$

Беручи до уваги теорему 1.10 і (1.2), бачимо, що (6.51) справджується. Теорему доведено. □

Теорема 6.20. *Нехай* $q = 0$. *Стан* $\mathrm{Z}^0 \in \widehat{\mathbb{H}}^1$*системи* (6.31), (6.32) *є наближено* L^∞*-керованим за вільний час тоді і лише тоді, коли*

$$\mathrm{z}_1^0 - \widehat{\mathbb{T}} \left(\operatorname{sgn}(\cdot) \left(\widehat{\mathbb{T}}^{-1} \mathrm{z}_0^0 \right)' \right) = 0. \tag{6.52}$$

Відмітимо, що для $q = 0$ умови (6.52) та (6.50) є еквівалентними.

Теорема 6.21. *Нехай* $q > 0$. *Кожний стан* $\mathrm{Z}^0 \in \widehat{\mathbb{H}}^1$ *системи* (6.31), (6.32) *є наближено* L^∞*-керованим за вільний час.*

Таким чином, трансформована керована система (6.31), (6.32) із загальним хвильовим оператором відтворює властивості керованості вихідної керованої системи (5.44), (5.45) з найпростішим хвильовим оператором і навпаки.

На с. 40 було введено множини $\mathcal{L}_T$, $\overline{\mathcal{L}}_T$ та $\mathcal{L}$, загальні властивості яких подано в твердженнях 1.24, 1.25 та формулах (1.16)–(1.19). Позначимо через $\mathcal{L}_T^{[q]}$, $\overline{\mathcal{L}}_T^{[q]}$ та $\mathcal{L}^{[q]}$ множини $\mathcal{L}_T$, $\overline{\mathcal{L}}_T$ та $\mathcal{L}$, відповідно, для керованої системи (5.44), (5.45). Позначимо також через $\mathcal{L}_T^{[\eta\theta p]}$, $\overline{\mathcal{L}}_T^{[\eta\theta p]}$ та $\mathcal{L}^{[\eta\theta p]}$ множини $\mathcal{L}_T$, $\overline{\mathcal{L}}_T$ та $\mathcal{L}$, відповідно, для керованої системи (6.31), (6.32). З формули (1.19), тверджень 1.24, 1.25 та теорем 3.17, 5.52, 6.19—6.21 випливає наступна теорема

Теорема 6.22. *Маємо*

$$\begin{array}{ccccccccl}
\widehat{\mathbb{T}}\mathcal{L}_T^{[q]} & \subsetneqq & \widehat{\mathbb{T}}\overline{\mathcal{L}}_T^{[q]} & \subsetneqq & \widehat{\mathbb{T}}\mathcal{L}^{[q]} & = & \widehat{\mathbb{H}}^1 & & \\
\parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & \textit{для } q>0, \\
\mathcal{L}_T^{[\eta\theta p]} & \subsetneqq & \overline{\mathcal{L}}_T^{[\eta\theta p]} & \subsetneqq & \mathcal{L}^{[\eta\theta p]} & = & \widehat{\mathbb{H}}^1 & & \\
\widehat{\mathbb{T}}\mathcal{L}_T^{[0]} & \subsetneqq & \widehat{\mathbb{T}}\overline{\mathcal{L}}_T^{[0]} & \subsetneqq & \widehat{\mathbb{T}}\mathcal{L}^{[0]} & \subsetneqq & \widehat{\mathbb{H}}^1 & & \\
\parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & \textit{для } q=0. \\
\mathcal{L}_T^{[\eta\theta p]} & \subsetneqq & \overline{\mathcal{L}}_T^{[\eta\theta p]} & \subsetneqq & \mathcal{L}^{[\eta\theta p]} & \subsetneqq & \widehat{\mathbb{H}}^1 & &
\end{array}$$

6.2. Стабілізація хвильового рівняння на півосі

Розглянемо хвильове рівняння

$$z_{tt} = \frac{1}{\rho}\left(kz_x\right)_x + \gamma z + \nu, \qquad x > 0,\ t > 0, \tag{6.53}$$

за умови Діріхле

$$z(0,\cdot) = \zeta(t), \qquad t > 0, \tag{6.54}$$

та за початкових умов

$$z(\cdot,0) = z_0^0, \quad z_t(\cdot,0) = z_1^0, \qquad x > 0, \tag{6.55}$$

де $T > 0$ — деяка стала; $z(\cdot,t) \in \widetilde{\mathbb{H}}_+^0 = \mathbb{H}_\oplus^0$, $t \in [0,+\infty)$; $\left(\frac{d}{dt}\right)^m z$: $[0,+\infty \to \mathbb{H}_\oplus^{-m}$, $m = 0,1,2$; $\zeta \in L^2(\mathbb{R}_+)$, $\sqrt{(\cdot)}\zeta \in L^2(\mathbb{R}_+)$, $z_0^0 \in \widetilde{\mathbb{H}}_+^0$, $z_1^0 \in \widetilde{\mathbb{H}}_+^{-1}$є заданими функціями, ν є позиційним керуванням вигляду

$$\nu = b_0 z + b_1 z_t, \tag{6.56}$$

де $b_0 \in \mathbb{R}$ та $b_1 \in \mathbb{R}$ є сталими, що визначають це керування.

Позначимо через z, z_0^0 та z_1^0 непарні продовження за x для z, z_0^0 z_1^0 відповідно. Скориставшись теоремою 3.10, бачимо, що z задовольняє систему

$$\mathrm{z}_{tt} = \mathcal{D}_{\eta\theta}^2 \mathrm{z} - p\mathrm{z} + \mathrm{v} - 2\eta^2(0)\zeta\mathcal{D}_{\eta\theta}\delta, \qquad x \in \mathbb{R},\ t > 0, \tag{6.57}$$

$$\mathrm{z}(\cdot,0) = \mathrm{z}_0^0, \quad \mathrm{z}_t(\cdot,0) = \mathrm{z}_1^0, \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{6.58}$$

де δ — це розподіл Дірака за x; ζ з умови (6.54) є функцією від t; $\left(\frac{d}{dt}\right)^m \mathrm{z} : [0,+\infty) \to \widetilde{\mathbb{H}}^{-m}$, $m = 0,1,2$; $\mathrm{z}_0^0 \in \widetilde{\mathbb{H}}^0$, $\mathrm{z}_1^0 \in \widetilde{\mathbb{H}}^{-1}$, v є позиційним керуванням вигляду

$$\mathrm{v} = b_0 \mathrm{z} + b_1 \mathrm{z}_t, \tag{6.59}$$

де $b_0 \in \mathbb{R}$ та $b_1 \in \mathbb{R}$ є сталими, що визначають це керування. Нагадаємо, що $p = \nu - \widehat{\gamma}$, де $\widehat{\gamma}$ є парним продовженням γ, $\nu = \mathcal{D}_{\eta\theta}\left(\theta^2 \frac{\eta'}{\eta}\right)$. З (6.2) і (6.3) випливає, що $p \in C^1(\mathbb{R})$ є парною функцією, для якої виконано умову (6.4), зокрема $p = r + q^2$, де $q \geq 0$ — це стала з умови (6.3) та (6.4), а r задовольняє умову (1.2). Нижче у висновку 6.24 ми доводимо, що для розв'язку z системи (6.8), (6.9) виконано умову

$$\mathrm{z}(+0, t) = \zeta(t) \quad \text{м. с. на } \mathbb{R}_+. \tag{6.60}$$

отже, звуження цього розв'язку на $\mathbb{R}_+$ задовольняє систему (6.53)–(6.55). Таким чином, системи (6.53)–(6.55) і (6.57), (6.58) є еквівалентними, тому далі ми розглядатимемо систему (6.57), (6.58) замість (6.53)–(6.55). Позначимо $\mathrm{Z}^0 = \begin{pmatrix} \mathrm{z}_0^0 \\ \\ \mathrm{z}_1^0 \end{pmatrix}$. Бачимо, що $\mathrm{Z}^0 \in \widetilde{\mathbb{H}}^0$. Зрозуміло, що ця керована система має вигляд (1.21), (1.12), де $\mathfrak{F} = \{2\delta'(x)\nu(t) \mid \wedge\sqrt{(\cdot)}\nu \in L^2(\mathbb{R}_+)\}$. Нехай $b > 0$. Позначимо $b_0 = q^2 - b^2$, $b_1 = -2b$.

Далі за допомогою операторів $\widetilde{\mathbb{T}} = \mathbf{S}\widetilde{\mathbf{T}}_r$ ми одержуємо властивості стабілізовності системи (6.53)–(6.55) з властивостей стабілізовності системи (5.101)–(5.103), яку було досліджено в пункті 5.3.1.

Теорема 6.23. *Нехай* w *є розв'язком керованої системи* (5.105), (5.106) *з керуванням* (5.107) *для деяких* $b > 0$, $\omega \in L^2(\mathbb{R}_+)$ *і* $\mathrm{W}^0 \in \widetilde{\mathbf{H}}^0$. *Нехай також* $\mathrm{z}(\cdot, t) = \widetilde{\mathbb{T}}\mathrm{w}(\cdot, t)$, $t \geq 0$. *Тоді* z *є розв'язком* (6.57), (6.58) *з керуванням* (6.59), *з* $\mathrm{Z}^0 = \widetilde{\mathbb{T}}\mathrm{W}^0$ *та*

$$\eta(0)\zeta(t) = \omega(t) + \int_0^\infty K(0, \xi)\mathrm{w}(\xi, t)\, d\xi, \qquad t \geq 0, \tag{6.61}$$

і умову (6.60) *виконано. Крім того,*

$$\left|\!\left|\!\left| \begin{pmatrix} \mathrm{z}(\cdot,t) \\ \mathrm{z}_t(\cdot,t) \end{pmatrix} \right|\!\right|\!\right|^0 \le L_0 \left|\!\left|\!\left| \begin{pmatrix} \mathrm{w}(\cdot,t) \\ \mathrm{w}_t(\cdot,t) \end{pmatrix} \right|\!\right|\!\right|^0, \qquad t \ge 0, \tag{6.62}$$

$$\|\zeta\|_{L^2\mathbb{R}_+)} \le \frac{\sqrt{2}}{\eta(0)} \left(\frac{\sqrt{1+b^2}}{b} \right)^3 L_1 \left|\!\left|\!\left| \mathrm{W}^0 \right|\!\right|\!\right|^0 \tag{6.63}$$

$$+ \frac{1}{\eta(0)} \left(1 + 2L_1 \sqrt{\frac{2}{b}} \right) \|\omega\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}, \tag{6.64}$$

де $L_0 > 0$ *і* $L_1 > 0$ *— деякі сталі, які залежать лише від даних рівняння* (6.57) *та керування* (6.59), *тобто, від* ρ, k, γ *та* b.

Доведення. Застосовуючи теорему 3.14, одержуємо, що z є розв'язком (6.57), (6.58) керуванням (6.59), з $\mathrm{Z}^0 = \widetilde{\mathbb{T}}\mathrm{W}^0$ і ζ, визначеним через (6.61). Доведемо (6.60). Беручи до уваги (5.108) і (6.61), бачимо, що

$$\begin{aligned} \mathrm{z}(+0,t) &= \left(\widetilde{\mathbb{T}}\mathrm{w}\right)(+0,t) \\ &= \frac{1}{\eta(0)} \left(\mathrm{w}(+0,t) + \int_0^\infty K(0,\xi)\mathrm{w}(\xi,t)\,d\xi \right) = \zeta(t), \qquad t \in [0,T], \end{aligned}$$

тобто, (6.60) виконано. За теоремою 3.13 існує стала $L_0 > 0$ така, що виконано (6.62).

З (6.61) випливає оцінка

$$\|\zeta\|_{L^2(\mathbb{R}_+)} \le \frac{1}{\eta(0)} \left(\|\omega\|_{L^2(\mathbb{R}_+)} + \int_0^\infty |K(0,x)||\mathrm{w}(x,t)|\,dx \right). \tag{6.65}$$

З (1.2) та (1.4) випливає, що $K(0,\cdot) \in L^2(\mathbb{R}_+) \cap L^1(\mathbb{R}_+)$. Позначимо $L = \|K(0,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}$. Беручи до уваги (1.27), (5.112) та (5.114), одержуємо

$$\int_0^\infty |K(0,x)||\mathrm{w}(x,t)|\,dx \le \sqrt{2}(1+b^2)L \left|\!\left|\!\left| \mathrm{W}^0 \right|\!\right|\!\right|^0 e^{-bt}\sqrt{1+t^2}$$

$$+\int_0^t |K(0,x)||\omega(t-x)|e^{-bx}\,dx. \tag{6.66}$$

Оцінимо останній інтеграл. Маємо

$$\int_0^t |K(0,x)||\omega(t-x)|e^{-bx}\,dx \le L\sqrt{\int_0^{t/2} e^{-2b(t-x)}|\omega(x)|^2\,dx}$$
$$+ M_0\sigma_0\left(\frac{t}{4}\right)\int_{t/2}^t e^{-b(t-x)}|\omega(x)|\,dx$$
$$\le \left(Le^{-bt/2} + \frac{M_0}{\sqrt{2b}}\sigma_0\left(\frac{t}{4}\right)\right)\|\omega\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}\,. \tag{6.67}$$

Тут при оцінці останнього інтеграла використано оцінку (1.4). Поєднуючи оцінки (6.65)–(6.67), одержуємо

$$\|\zeta\|_{L^2(\mathbb{R}_+)} \le \frac{1}{\eta(0)}\left(1 + \frac{L}{\sqrt{b}} + \frac{M_0}{\sqrt{2b}}\sqrt{\int_0^\infty \left|\sigma_0\left(\frac{t}{4}\right)\right|^2 dt}\right)\|\omega\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}$$
$$+ \left(\frac{\sqrt{1+b^2}}{b}\right)^3 \frac{L}{\eta(0)}\left|\left|\left|\mathrm{W}^0\right|\right|\right|^0. \tag{6.68}$$

Беручи до уваги (1.2) та (1.4) і позначаючи $L_1 = M_0\int_0^\infty(1+\xi)|r(\xi)|\,d\xi$, маємо

$$\int_0^\infty \left|\sigma_0\left(\frac{t}{4}\right)\right|^2 dt = 4\int_0^\infty |\sigma_0(\xi)|^2\,d\xi \le 4\sigma(0)\int_0^\infty \sigma_0(\xi)\,d\xi \le \frac{4}{M_0}L_1^2,$$
$$L = \|K(0,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}_+)} \le M_0\sqrt{\int_0^\infty \left|\sigma_0\left(\frac{\xi}{2}\right)\right|^2 d\xi} \le \sqrt{2}L_1.$$

Тому з (6.68) випливає (6.64). Теорему доведено. □

Аналогічно доведенню висновку (6.2) доводимо наступний висновок.

Висновок 6.24. *Якщо* z *є розв'язком керованої системи* (6.57), (6.58)*з керуванням* (5.107) *для деяких* $b \ge q$, $\omega \in L^2(\mathbb{R}_+)$ *і* $\mathrm{W}^0 \in \widetilde{\mathbf{H}}^0$, *то* (6.60) *виконано.*

Зауваження 6.25. *Аналогічно тому, як це було зроблено при доведенні еквівалентністі умов* (6.10) *і* (6.15) *у висновку* (6.2) *доводиться еквівалентність умов* (6.61) *і* (6.69).

Теорема 6.26. *Нехай* z *є розв'язком керованої системи* (6.57), (6.58) *з керуванням* (6.59) *для деяких* $b > \sqrt{2}M_0\int_0^\infty(1+\xi)|r(\xi)|\,d\xi$, $\zeta \in L^2(\mathbb{R}_+)$, $\sqrt{(\cdot)}\zeta \in L^2(\mathbb{R}_+)$ *та* $\mathrm{Z}^0 \in \widetilde{\mathbb{H}}^0$ *(тут* $M_0 > 0$ *є сталою з оцінки* (1.4)*). Нехай також* $\mathrm{w}(\cdot,t) = \widetilde{\mathbb{T}}^{-1}\mathrm{z}(\cdot,t)$, $t \geq 0$. *Тоді* w *є розв'язком* (5.105), (5.106) *з керуванням* (5.107), *з* $\mathrm{W}^0 = \widetilde{\mathbb{T}}^{-1}\mathrm{Z}^0$ *та*

$$\omega(t) = \eta(0)\zeta(t) + \int_0^\infty L(0,x)\mathbf{S}^{-1}\mathrm{z}(x,t)\,dx, \qquad t \geq 0. \tag{6.69}$$

Крім того,

$$\left|\left|\left|\begin{pmatrix}\mathrm{w}(\cdot,t)\\ \mathrm{w}_t(\cdot,t)\end{pmatrix}\right|\right|\right|^0 \leq G_0 \left[\!\left[\!\left[\begin{pmatrix}\mathrm{z}(\cdot,t)\\ \mathrm{z}_t(\cdot,t)\end{pmatrix}\right]\!\right]\!\right]^0, \qquad t \geq 0, \tag{6.70}$$

$$\begin{aligned}\|\omega\|_{L^2(\mathbb{R}_+)} \leq G_1 \Big(|||\mathbb{Z}^0|||^0 + \left\|\sqrt{(\cdot)}\zeta\right\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}\Big)& \\ + \eta(0)\,\|\zeta\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}\,,&\end{aligned} \tag{6.71}$$

де $G_0 > 0$ *і* $G_1 > 0$ — *деякі сталі, які залежать лише від даних рівняння* (6.57) *та керування* (6.59), *тобто, від* ρ, k, γ *та* b.

Доведення. За аналогією з (6.61)і (6.62), застосовуючи теорему 3.15 замість теореми 3.14, одержуємо (6.17) і (6.18). Доведемо (6.19). Із зауваження 6.25 випливає, що (6.61) виконано за умов цієї теореми. Тому, беручи до уваги (5.112) і (5.113) одержуємо оцінку

$$\left|\omega(t)e^{bt}\right| \leq \varphi(t) + \int_0^t |K(0,t-x)|\left|\omega(x)e^{bx}\right|\,dx, \qquad t \geq 0,$$

де $\varphi(t) = \left|\eta(0)\zeta(t)e^{bt}\right| + 2M_0L_0(1+b^2)\left|\left|\left|\mathrm{W}^0\right|\right|\right|^0(1+t)$, $L = \|K(0,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}$. Скориставшись оцінкою (1.4), одержуємо

$$L = \|K(0,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}_+)} \leq M_0\sqrt{2\sigma_0(0)\int_0^\infty \sigma_0(\xi)\,d\xi} \leq \sqrt{2}M_0L_0$$

де $L_0 = \int_0^\infty (1+\xi)|r(\xi)|\,d\xi$ та

$$\left|\omega(t)e^{bt}\right| \leq \varphi(t) + \sqrt{2}M_0L_0\int_0^t \left|\omega(x)e^{bx}\right|\,dx, \qquad t \geq 0,$$

Застосовуючи лему 6.38, маємо

$$\left|\omega(t)e^{bt}\right| \leq \varphi(t) + \sqrt{2}M_0L_0\int_0^t \varphi(x)e^{\sqrt{2}M_0L_0(t-x)}\,dx, \qquad t \geq 0. \qquad (6.72)$$

Оскільки $b > \sqrt{2}M_0L_0$, то існує $\varepsilon > 0$ таке, що $b - 2\varepsilon > \sqrt{2}M_0L_0$. Тоді

$$\begin{aligned}\int_0^t &\left|\eta(0)\zeta(x)e^{bx}\right|e^{\sqrt{2}M_0L_0(t-x)}dx \\ &\leq \eta(0)e^{bt}\int_0^t |\zeta(x)|e^{-2\varepsilon(t-x)}e^{-(b-2\varepsilon-\sqrt{2}M_0L_0)(t-x)}\,dx \\ &\leq \frac{\eta(0)e^{bt}}{\sqrt{2(b-2\varepsilon-\sqrt{2}M_0L_0}}\sqrt{\int_0^t \left|\zeta(x)e^{-2\varepsilon(t-x)}\right|^2dx},\ t \geq 0\end{aligned}$$

Скориставшись оцінкою

$$\begin{aligned}\int_0^t \left|\zeta(x)e^{-2\varepsilon(t-x)}\right|^2dx &\leq e^{-2\varepsilon t}\int_0^{t/2}|\zeta(x)|^2dx + \int_{t/2}^t|\zeta(x)|^2dx \\ &\leq e^{-2\varepsilon t}\left(\|\zeta\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}\right)^2 + \int_{t/2}^t|\zeta(x)|^2dx\end{aligned}$$

звідси одержуємо

$$\begin{aligned}\int_0^t &\left|\eta(0)\zeta(x)e^{bx}\right|e^{\sqrt{2}M_0L_0(t-x)}dx \\ &\leq \eta(0)e^{bt}\sqrt{\frac{e^{-2\varepsilon t}\left(\|\zeta\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}\right)^2 + \int_{t/2}^t|\zeta(x)|^2dx}{2(b-2\varepsilon-\sqrt{2}M_0L_0)}},\ t \geq 0. \qquad (6.73)\end{aligned}$$

Крім того, маємо

$$\int_0^t (1+x)e^{\sqrt{2}M_0L_0(t-x)}dx \le \frac{e^{\varepsilon t}}{\varepsilon}\int_0^t e^{\sqrt{2}M_0L_0(t-x)}dx$$
$$\le \frac{e^{(\sqrt{2}M_0L_0+\varepsilon)(t-x)}}{\sqrt{2}\varepsilon M_0L_0}. \qquad (6.74)$$

Поєднуючи (6.72)–(6.74), одержуємо

$$\begin{aligned}|\omega(t)| \le & \eta(0)|\zeta(t)| + 2M_0L_0(1+b^2)\left|\left|\left|\mathrm{W}^0\right|\right|\right|^0 (1+t)e^{-bt} \\ & + \frac{M_0L_0\eta(0)}{\sqrt{b-2\varepsilon-\sqrt{2}M_0L_0}}\sqrt{e^{-2\varepsilon t}\left(\|\zeta\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}\right)^2 + \int_{t/2}^t |\zeta(x)|^2dx} \\ & + \frac{2M_0L_0}{\varepsilon}e^{-(b-\sqrt{2}M_0L_0-\varepsilon)t}(1+b^2)\left|\left|\left|\mathrm{W}^0\right|\right|\right|^0 . \end{aligned} \qquad (6.75)$$

Оскільки

$$\int_0^\infty \int_{t/2}^t |\zeta(x)|^2 dx\, dt = \int_0^\infty |\zeta(x)|^2 \int_x^{2x} dt\, dx = \int_0^\infty x|\zeta(x)|^2dx,$$

то, застосовуючи оцінку (6.70), звідси одержуємо(6.71). □

Таким чином, керована система (6.57), (6.58) із загальним хвильовим оператором є трансформацією за допомоги оператора $\widetilde{\mathbb{T}}$ керованої системи (5.105), (5.106) з найпростішим хвильовим оператором, і навпаки: керована система (5.105), (5.106) є трансформацією за допомоги оператора $\widetilde{\mathbb{T}}^{-1}$ керованої системи (6.57), (6.58).

З теорем 6.23, 6.26, використовуючи теорему 5.53, одержуємо наступну теорему.

Теорема 6.27. *Система* (6.57), (6.58) *(а, отже і система* (6.53)–(6.55)*) є стабілізовною. Зокрема, керування* $\mathrm{u} = \left(q^2 - b^2\right)\mathrm{w} - 2b\mathrm{w}_t$ *з будь-яким*

$b > \sqrt{2}M_0 \int_0^\infty (1+\xi)|r(\xi)|\, d\xi$ *стабілізує цю систему (тут* $M_0 > 0$ *є сталою з оцінки* (1.4)*).*

Результати цього підрозділу проілюстровано прикладом 7.16.

6.3. Крайові задачи

У цьому підрозділі досліджено крайові задачі для хвильового рівняння із змінними коефіцієнтами

6.3.1. Крайова задача за умови Діріхле. Розглянемо хвильове рівняння

$$z_{tt} = \frac{1}{\rho}\left(k z_x\right)_x + \gamma z, \qquad x > 0,\ t \in (0,T), \tag{6.76}$$

за умови Діріхле

$$z(0,\cdot) = g(t), \qquad t \in (0,T), \tag{6.77}$$

та за крайових умов

$$\begin{cases} p_0^0 z(x,0) + p_0^T z(x,T) = z_0^0 \\ p_1^0 z_t(x,0) + p_1^T z_t(x,T) = z_1^0 \end{cases}, \qquad x > 0, \tag{6.78}$$

де $T > 0$, $p_j^\alpha \in \mathbb{R}$, $j = 0,1$, $\alpha = 0, T$ є деякими сталими; $z(\cdot,t) \in \widetilde{\mathbb{H}}_+^0 = \mathbb{H}_\oplus^0$, $t \in [0,T]$; $\left(\frac{d}{dt}\right)^m z : [0,T] \to \mathbb{H}_\oplus^{-m}$, $m = 0,1,2$; $z_0^0 \in \widetilde{\mathbb{H}}_+^0$, $z_1^0 \in \widetilde{\mathbb{H}}_+^{-1}$; $g \in L^2(0,T)$, η задовольняє умову (6.81) (див. нижче). Вважаємо також, що p_j^α, $j = 0,1$, $\alpha = 0, T$, задовольняють умову (5.168).

Позначимо через z, z_0^0 та z_1^0 непарні продовження за x для z, z_0^0 z_1^0 відповідно. Скориставшись теоремою 3.10, бачимо, що z задовольняє систему

$$\mathrm{z}_{tt} = \mathcal{D}^2_{\eta\theta}\mathrm{z} - p\mathrm{z} - 2\eta^2(0)g\mathcal{D}_{\eta\theta}\delta, \qquad x \in \mathbb{R},\ t \in (0,T), \tag{6.79}$$

$$\mathrm{z}(\cdot,0) = \mathrm{z}^0_0, \quad \mathrm{z}_t(\cdot,0) = \mathrm{z}^0_1, \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{6.80}$$

де δ — це розподіл Дірака за x; $\left(\frac{d}{dt}\right)^m \mathrm{z} : [0,T] \to \widetilde{\mathbb{H}}^{-m}$, $m = 0,1,2$; $\mathrm{z}^0_0 \in \widetilde{\mathbb{H}}^0$, $\mathrm{z}^0_1 \in \widetilde{\mathbb{H}}^{-1}$. Вважаємо також, що η задовольняє умову

$$\eta(0)g(t) = \frac{1}{2}\left\langle\!\left\langle \widetilde{\mathbb{T}}^{-1}\mathrm{z}^0_0, U_0(\cdot,t)\right\rangle\!\right\rangle + \frac{1}{2}\left\langle\!\left\langle \widetilde{\mathbb{T}}^{-1}\mathrm{z}^0_1, U_1(\cdot,t)\right\rangle\!\right\rangle, \tag{6.81}$$

де $\mathcal{R} = \begin{pmatrix} \mathcal{R}_{00} & \mathcal{R}_{01} \\ \mathcal{R}_{10} & \mathcal{R}_{11} \end{pmatrix}$ визначено формулою (5.161),

$$U_j(\xi,t) = \int_{-\infty}^{\infty} (K(0,x)H(x) \\ -K(0,-x)H(-x))\,\mathcal{R}_{j0}(\xi - x)\,dx, \quad x \in \mathbb{R},\ t \in [0,T],\ j = 0,1,$$

Зрозуміло, що $U_j(\cdot,t) \in \widetilde{H}^j$, $t \in [0,T]$, $j = 0,1$. Нижче у висновку 6.29 ми доведемо, що для розв'язку z системи (6.8), (6.9) виконано умову

$$\mathrm{z}(+0,t) = g(t) \quad \text{м. с. на } [0,T]. \tag{6.82}$$

отже, звуження цього розв'язку на $\mathbb{R}_+$ задовольняє систему (6.76)–(6.78). Таким чином, системи (6.76)–(6.78) і (6.79), (6.80) є еквівалентними, тому далі ми розглядатимемо систему (6.79), (6.80) замість (6.76)–(6.78). Позначимо $\mathrm{Z}^0 = \begin{pmatrix} \mathrm{z}^0_0 \\ \mathrm{z}^0_1 \end{pmatrix}$. Бачимо, що $\mathrm{Z}^0 \in \widetilde{\mathbb{H}}^0$. Зрозуміло, що ця керована система має вигляд (1.33), (1.34).

Далі за допомогою операторів $\widetilde{\mathbb{T}} = \mathbf{S}\widetilde{\mathbf{T}}_r$ ми одержуємо властивості керованості системи (6.76)–(6.78) з властивостей керованості системи (5.169)–(5.170), яку було досліджено в розділі 5.4.

Аналогічно доведенню теореми 6.1, враховуючи (5.176), одержуємо наступну теорему.

Теорема 6.28. *Нехай* w *є розв'язком керованої системи* (5.169), (5.170) *для* $f = 0$ *і деякого* $\mathrm{W}^0 \in \widetilde{\mathbf{H}}^0$. *Нехай також* $\mathrm{z}(\cdot, t) = \widetilde{\mathbb{T}}\mathrm{w}(\cdot, t)$, $t \in [0, T]$. *Тоді* z *є розв'язком* (6.79), (6.80) *з* $\mathrm{Z}^0 = \widetilde{\mathbb{T}}\mathrm{W}^0$ *та*

$$\eta(0)g(t) = \int_0^\infty K(0, \xi)\mathrm{w}(\xi, t)\, d\xi, \qquad t \in [0, T], \tag{6.83}$$

і умову (6.82) *виконано. Крім того,*

$$\left[\!\!\left[\begin{pmatrix} \mathrm{z}(\cdot, t) \\ \mathrm{z}_t(\cdot, t) \end{pmatrix} \right]\!\!\right]^0 \le C_0 \left|\!\left|\!\left| \begin{pmatrix} \mathrm{w}(\cdot, t) \\ \mathrm{w}_t(\cdot, t) \end{pmatrix} \right|\!\right|\!\right|^0, \qquad t \in [0, T], \tag{6.84}$$

де $C_0 > 0$ *є деякою сталою, що залежить від* T, ρ, k *та* γ.

Цілком аналогічно доведенню висновку 6.2 одержуємо наступний

Висновок 6.29. *Якщо* z *є розв'язком керованої системи* (6.79), (6.80) *для деякого* $\mathrm{Z}^0 \in \widetilde{\mathbb{H}}^0$ *та* $g \in L^\infty(0, T)$, *що задовольняє* (6.81), *то* (6.82) *виконано.*

Аналогично теоремі 6.1 одержуємо наступну теорему.

Теорема 6.30. *Нехай* z *є розв'язком керованої системи* (6.79), (6.80) *для деякого* $\mathrm{Z}^0 \in \widetilde{\mathbb{H}}^0$ *та* $g \in L^\infty(0, T)$, *що задовольняє* (6.81). *Нехай також* $\mathrm{w}(\cdot, t) = \widetilde{\mathbb{T}}^{-1}\mathrm{z}(\cdot, t)$, $t \in [0, T]$. *Тоді* w *є розв'язком* (5.169), (5.170) *з* $\mathrm{W}^0 = \widetilde{\mathbb{T}}^{-1}\mathrm{Z}^0$ *та* $f = 0$. *Крім того,*

$$\left|\!\left|\!\left| \begin{pmatrix} \mathrm{w}(\cdot, t) \\ \mathrm{w}_t(\cdot, t) \end{pmatrix} \right|\!\right|\!\right|^0 \le G_0 \left[\!\!\left[\begin{pmatrix} \mathrm{z}(\cdot, t) \\ \mathrm{z}_t(\cdot, t) \end{pmatrix} \right]\!\!\right]^0, \qquad t \in [0, T], \tag{6.85}$$

де $G_0 > 0$ *є деякою сталою, що залежать лише від* T, ρ, k *та* γ.

Доведення. За аналогією з (6.17)і (6.18) в теоремі 6.1 одержуємо $f = 0$ і (6.85). □

Таким чином, керована система (6.79), (6.80) із загальним хвильовим оператором є трансформацією за допомоги оператора $\widetilde{\mathbb{T}}$ керованої системи (5.169), (5.170) з найпростішим хвильовим оператором, і навпаки: керована система (5.169), (5.170) є трансформацією за допомоги оператора $\widetilde{\mathbb{T}}^{-1}$ керованої системи (6.79), (6.80).

З теорем 6.1, 6.3 одразу випливає наступний висновок.

Висновок 6.31. *Нехай* $\mathrm{Z}^0 \in \widetilde{\mathbb{H}}^0$, $g \in L^\infty(0,T)$ *задовольняє* (6.81), $\mathrm{W}^0 = \widetilde{\mathbb{T}}^{-1}\mathrm{Z}^0$ *і* $f = 0$. *Тоді задача* (6.79), (6.80) *є коректною тоді і лише тоді, коли коректною є задача* (5.169), (5.170).

Таким чином, беручи до уваги висновок 5.59, одержуємо наступний критерій коректності задачі (6.79), (6.80).

Висновок 6.32. *За умови* (5.168) *задача* (6.76), (6.78) *(та* (6.79), (6.80)*) є коректною в тому і лише тому випадку, коли виконано умову* (5.175). *У разі виконання цієї умови розв'язок* z *цієї задачі задовольняє оцінку:*

$$\left|\!\left|\!\left| \begin{pmatrix} \mathrm{z}(\cdot,t) \\ \mathrm{z}_t(\cdot,t) \end{pmatrix} \right|\!\right|\!\right|^0 \le C \left|\!\left|\!\left| \begin{pmatrix} \mathrm{z}_0^0 \\ \mathrm{z}_1^0 \end{pmatrix} \right|\!\right|\!\right|^0, \quad t \in [0,T], \tag{6.86}$$

де $C > 0$ *є сталою, яка залежать лише від* T, ρ, k *та* γ.

6.3.2. Крайова задача за умови Неймана. Розглянемо хвильове рівняння

$$z_{tt} = \frac{1}{\rho}\left(kz_x\right)_x + \gamma z, \qquad x > 0,\ t \in (0,T), \tag{6.87}$$

за умови Неймана

$$z_x(0,\cdot) = g(t), \qquad t \in (0,T), \tag{6.88}$$

та за крайових умов

$$\begin{cases} p_0^0 z(x,0) + p_0^T z(x,T) = z_0^0 \\ p_1^0 z_t(x,0) + p_1^T z_t(x,T) = z_1^0 \end{cases}, \qquad x > 0, \tag{6.89}$$

де $T > 0$, $p_j^\alpha \in \mathbb{R}$, $j = 0,1$, $\alpha = 0,T$ є деякими сталими; $\left(\frac{d}{dt}\right)^m z : [0,T] \to \mathbb{H}_\oplus^{-m+1}$, $m = 0,1,2$ $z_0^0 \in \mathbb{H\!H}_+^1$, $z_1^0 \in \mathbb{H\!H}_+^0$; $g \in L^2(0,T)$, η задовольняє умову (6.92) (див. нижче). Вважаємо також, що p_j^α, $j = 0,1$, $\alpha = 0,T$, задовольняють умову (5.168).

Позначимо через z, z_0^0 та z_1^0 непарні продовження за x для z, z_0^0 z_1^0 відповідно. Скориставшись теоремою 3.10, бачимо, що z задовольняє систему

$$\mathrm{z}_{tt} = \mathcal{D}_{\eta\theta}^2 \mathrm{z} - p\mathrm{z} - 2\eta^2(0)\theta^2(0)g\delta, \qquad x \in \mathbb{R},\ t \in (0,T), \tag{6.90}$$

$$\mathrm{z}(\cdot,0) = \mathrm{z}_0^0, \quad \mathrm{z}_t(\cdot,0) = \mathrm{z}_1^0, \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{6.91}$$

де δ — це розподіл Дірака за x; $\left(\frac{d}{dt}\right)^m \mathrm{z} : [0,T] \to \widehat{\mathbb{H}}^{-m+1}$, $m = 0,1,2$; $\mathrm{z}_0^0 \in \widehat{\mathbb{H}}^1$, $\mathrm{z}_1^0 \in \widehat{\mathbb{H}}^0$. Вважаємо також, що η задовольняє умову

$$\eta(0)\theta^2(0)g(t) = -\,R\left\langle\!\!\left\langle \widehat{\mathbb{T}}^{-1}\mathrm{z}_0^0, \mathcal{R}_{00}(\cdot,t)\right\rangle\!\!\right\rangle$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{1}{2}\left\langle\!\!\left\langle \widehat{\mathbb{T}}^{-1}\mathrm{z}_0^0, U_0(\cdot,t)\right\rangle\!\!\right\rangle \\
&-R\left\langle\!\!\left\langle \widehat{\mathbb{T}}^{-1}\mathrm{z}_1^0, \mathcal{R}_{01}(\cdot,t)\right\rangle\!\!\right\rangle \\
&+\frac{1}{2}\left\langle\!\!\left\langle \widehat{\mathbb{T}}^{-1}\mathrm{z}_1^0, U_1(\cdot,t)\right\rangle\!\!\right\rangle, \qquad (6.92)
\end{aligned}
$$

де $\mathcal{R}=\begin{pmatrix}\mathcal{R}_{00} & \mathcal{R}_{01}\\ \mathcal{R}_{10} & \mathcal{R}_{11}\end{pmatrix}$ визначено формулою (5.161), $R=\frac{1}{2}\int_0^\infty r(\xi)\,d\xi$,

$$
\begin{aligned}
U_j(\xi,t)=\int_{-\infty}^{\infty}&\left(K_{y_1}(0,x)H(x)\right.\\
&\left.+K_{y_1}(0,-x)H(-x)\right)\mathcal{R}_{j0}(\xi-x)\,dx, \quad x\in\mathbb{R},\ t\in[0,T],\ j=0,1.
\end{aligned}
$$

Зрозуміло, що $U_j(\cdot,t)\in\widehat{H}^j$, $t\in[0,T]$, $j=0,1$. Нижче у висновку 6.34 ми доведемо, що для розв'язку z системи (6.31), (6.32) виконано умову

$$
\mathrm{z}_x(+0,t)=g(t) \quad \text{м. с. на } [0,T]. \qquad (6.93)
$$

отже, звуження цього розв'язку на $\mathbb{R}_+$ задовольняє систему (6.87)–(6.89). Таким чином, системи (6.87)–(6.89) і (6.90), (6.91) є еквівалентними, тому далі ми розглядатимемо систему (6.90), (6.91) замість (6.87)–(6.89). Позначимо $\mathrm{Z}^0=\begin{pmatrix}\mathrm{z}_0^0\\ \mathrm{z}_1^0\end{pmatrix}$. Бачимо, що $\mathrm{Z}^0\in\widehat{\mathbb{H}}^0$. Зрозуміло, що ця керована система має вигляд (1.33), (1.34).

Далі за допомогою операторів $\widehat{\mathbb{T}}=\mathbf{S}\widehat{\mathbf{T}}_r$ ми одержуємо властивості керованості системи (6.87)–(6.89) з властивостей керованості системи (5.180)–(5.181), яку було досліджено в розділі 5.4.

Аналогічно доведенню теореми 6.1, враховуючи (5.176), одержуємо наступну теорему.

Теорема 6.33. *Нехай* w *є розв'язком керованої системи* (5.180), (5.181) *для* $f = 0$ *і деякого* $\mathrm{W}^0 \in \widehat{\mathbf{H}}^1$. *Нехай також* $\mathrm{z}(\cdot,t) = \widehat{\mathbb{T}}\mathrm{w}(\cdot,t)$, $t \in [0,T]$. *Тоді* z *є розв'язком* (6.90), (6.91) *з* $\mathrm{Z}^0 = \widehat{\mathbb{T}}\mathrm{W}^0$ *та*

$$\eta(0)\theta^2(0)g(t) = -R\mathrm{w}(+0,t) + \int_0^\infty K_{y_1}(0,\xi)\mathrm{w}(\xi,t)\,d\xi,\ t \in [0,T], \quad (6.94)$$

і умову (6.93) *виконано. Крім того,*

$$\left[\!\left[\begin{pmatrix} \mathrm{z}(\cdot,t) \\ \mathrm{z}_t(\cdot,t) \end{pmatrix} \right]\!\right]^1 \le C_0 \left\vert\!\left\vert\!\left\vert \begin{pmatrix} \mathrm{w}(\cdot,t) \\ \mathrm{w}_t(\cdot,t) \end{pmatrix} \right\vert\!\right\vert\!\right\vert^1, \qquad t \in [0,T], \qquad (6.95)$$

де $C_0 > 0$ *є деякою сталою, що залежить від* T, ρ, k *та* γ.

Цілком аналогічно доведенню висновку 6.13 одержуємо наступний

Висновок 6.34. *Якщо* z *є розв'язком керованої системи* (6.90), (6.91) *для деякого* $\mathrm{Z}^0 \in \widehat{\mathbb{H}}^1$ *та* $g \in L^\infty(0,T)$, *що задовольняє* (6.92), *то* (6.93) *виконано.*

Аналогично теоремі 6.12 одержуємо наступну теорему.

Теорема 6.35. *Нехай* z *є розв'язком керованої системи* (6.90), (6.91) *для деякого* $\mathrm{Z}^0 \in \widehat{\mathbb{H}}^1$ *та* $g \in L^\infty(0,T)$, *що задовольняє* (6.92). *Нехай також* $\mathrm{w}(\cdot,t) = \widehat{\mathbb{T}}^{-1}\mathrm{z}(\cdot,t)$, $t \in [0,T]$. *Тоді* w *є розв'язком* (5.180), (5.181) *з* $\mathrm{W}^0 = \widehat{\mathbb{T}}^{-1}\mathrm{Z}^0$ *та* $f = 0$. *Крім того,*

$$\left\vert\!\left\vert\!\left\vert \begin{pmatrix} \mathrm{w}(\cdot,t) \\ \mathrm{w}_t(\cdot,t) \end{pmatrix} \right\vert\!\right\vert\!\right\vert^1 \le G_0 \left[\!\left[\begin{pmatrix} \mathrm{z}(\cdot,t) \\ \mathrm{z}_t(\cdot,t) \end{pmatrix} \right]\!\right]^1, \qquad t \in [0,T], \qquad (6.96)$$

де $G_0 > 0$ *є деякою сталою, що залежать лише від* T, ρ, k *та* γ.

Доведення. За аналогією з (6.41)і (6.42) в теоремі 6.12 одержуємо $f = 0$ і (6.96). $\square$

Таким чином, керована система (6.90), (6.91) із загальним хвильовим оператором є трансформацією за допомоги оператора $\widehat{\mathbb{T}}$ керованої системи (5.180), (5.181) з найпростішим хвильовим оператором, і навпаки: керована система (5.180), (5.181) є трансформацією за допомоги оператора $\widehat{\mathbb{T}}^{-1}$ керованої системи (6.90), (6.91).

З теорем 6.12, 6.14 одразу випливає наступний висновок.

Висновок 6.36. *Нехай* $\mathrm{Z}^0 \in \widehat{\mathbb{H}}^1$, $g \in L^\infty(0,T)$ *задовольняє* (6.92), $\mathrm{W}^0 = \widehat{\mathbb{T}}^{-1}\mathrm{Z}^0$ *і* $f = 0$. *Тоді задача* (6.90), (6.91) *є коректною тоді і лише тоді, коли коректною є задача* (5.180), (5.181).

Таким чином, беручи до уваги висновок 5.60, одержуємо наступний критерій коректності задачі (6.90), (6.91).

Висновок 6.37. *За умови* (5.168) *задача* (6.87), (6.89) *(та* (6.90), (6.91)*) є коректною в тому і лише тому випадку, коли виконано умову* (5.175). *У разі виконання цієї умови розв'язок* z *цієї задачі задовольняє оцінку:*

$$\left|\!\left|\!\left| \begin{pmatrix} \mathrm{z}(\cdot,t) \\ \mathrm{z}_t(\cdot,t) \end{pmatrix} \right|\!\right|\!\right|^1 \le C \left|\!\left|\!\left| \begin{pmatrix} \mathrm{z}_0^0 \\ \mathrm{z}_1^0 \end{pmatrix} \right|\!\right|\!\right|^1, \quad t \in [0,T], \tag{6.97}$$

де $C > 0$ *є сталою, яка залежать лише від* T, ρ, k *та* γ.

6.4. Допоміжні твердження до розділу 6

Наступні дві леми є аналогами теорем типу Ґронуолла. Їх доведення є цілком стандартним для тверджень цього типу.

Лема 6.38. *Нехай $y \in L^1(0,T)$, $\varphi_1 \in L^1(0,T)$ є додатними м.с. на $(0,T)$ функціями і $\varphi_2 > 0$ є сталою. Якщо*

$$y(t) \le \varphi_1(t) + \varphi_2 \int_0^t y(s)\, ds \quad \text{м.с. на } (0,T), \tag{6.98}$$

то

$$y(t) \le \varphi_1(t) + \varphi_2 \int_0^t \varphi_1(s) e^{\varphi_2(t-s)}\, ds \quad \text{м.с. на } (0,T). \tag{6.99}$$

Доведення. Позначимо $Y(t) = \varphi_2 \int_0^t y(s)\, ds$, $t \in [0,T]$. Тоді

$$y(t) \le \varphi_1(t) + Y(t) \quad \text{м.с. на } (0,T). \tag{6.100}$$

Диференціюючи Y, одержуємо

$$Y'(s) = \varphi_2 y(s) \le \varphi_2 \varphi_1(s) + \varphi_2 Y(s) \quad \text{м.с. на } (0,T). \tag{6.101}$$

Помножимо (6.101) на $e^{\varphi_2(t-s)}$ і проінтегруємо в межах від 0 до t. Оскільки функція $Y(s)e^{\varphi_2(t-s)}$ є абсолютно неперервною на $[0,t]$ за побудовою, то в результаті інтегрування одержуємо

$$Y(t) \le \varphi_2 \int_0^t \varphi_1(s) e^{\varphi_2(t-s)}\, ds, \qquad t \in [0,T]. \tag{6.102}$$

Підставляючи (6.102) в (6.100), одержуємо (6.99). Лему доведено. □

Лема 6.39. *Нехай $y \in L^1(0,T)$ є додатною м.с. на $(0,T)$ функцією і $\varphi_1 \ge 0$, $\varphi_2 > 0$ є сталими. Якщо*

$$y(t) \le \varphi_1 + \varphi_2 \int_0^t y(s)\, ds \quad \text{м.с. на } (0,T), \tag{6.103}$$

то

$$y(t) \le \varphi_1 e^{\varphi_2 t} \quad \text{м.с. на } (0,T). \tag{6.104}$$

Доведення. Позначимо $Y(t) = \varphi_1 + \varphi_2 \int_0^t y(s)\,ds$, $t \in [0,T]$. Тоді

$$y(t) \le Y(t) \quad \text{м.с. на } (0,T). \tag{6.105}$$

Диференціюючи Y, одержуємо

$$Y'(s) = \varphi_2 y(s) \le \varphi_2 Y(s) \quad \text{м.с. на } (0,T). \tag{6.106}$$

Помножимо (6.106) на $e^{\varphi_2(t-s)}$ і проінтегруємо в межах від 0 до t. Оскільки функція $Y(s)e^{\varphi_2(t-s)}$ є абсолютно неперервною на $[0,t]$ за побудовою, то в результаті інтегрування одержуємо

$$Y(t) - \varphi_1 e^{\varphi_2 t} \le 0, \qquad t \in [0,T]. \tag{6.107}$$

З (6.105) і (6.107), одержуємо (6.104). Лему доведено. □

Висновки до розділу 6

У цьому розділі для хвильових рівнянь зі змінними коефіцієнтами на півосі, керованого крайовою умовою Діріхле або крайовою умовою Неймана знайдено необхідні і достатні умови керованості як за заданий так і за вільний час. Також для хвильового рівняння зі змінними коефіцієнтами на півосі вивчено проблему стабілізовності за допомоги позиційного керування. Крім того, для цього рівняння досліджено коректність нелокальної крайової задачі.

РОЗДІЛ 7.

ПРИКЛАДИ

У цьому розділі розглянуто приклади, що ілюструють результати розділів 3, 5, 6.

Example 7.1. Нехай $q > 0$,

$$\begin{aligned} \mathrm{w}_0^0 =& xJ_0\left(\sqrt{1-x^2}\right)H(1-x^2), \\ \mathrm{w}_1^0 =& \frac{d}{dx}\left(H(1-x^2)\left(|x| - q\int_{|x|}^1 t^2\frac{J_1(q\sqrt{t^2-x^2})}{\sqrt{t^2-x^2}}\,dt\right)\right). \end{aligned}$$

Позначимо $\mathcal{U} = \Psi_1^{-1}\mathrm{w}_0^0$. Тоді $\mathcal{U}(t) = tH(1-t^2)$, $t \in \mathbb{R}$. Отже,

$$\begin{aligned} \widehat{\Psi}_1\Psi_1^{-1}\mathrm{w}_0^0 &= \Psi_1(\operatorname{sgn}(\cdot)\,\mathcal{U})' \\ &= \frac{d}{dx}\left(\mathcal{U}(x)\operatorname{sgn}x - q\int_{|x|}^\infty t\frac{J_1(q\sqrt{t^2-x^2})}{\sqrt{t^2-x^2}}\,dt\right) = \mathrm{w}_1^0. \end{aligned}$$

За теоремою 5.7 для системи (5.4), (5.5) стан $\mathrm{W}^0 = \begin{pmatrix} \mathrm{w}_0^0 \\ \mathrm{w}_1^0 \end{pmatrix}$ є L^∞-керованим за час $T \geq 1$. Керування $u(t) = \mathcal{U}(t)H(t)$, $t \in \mathbb{R}$, розв'язує проблему L^∞-керованості за час T для цього стану.

Example 7.2. Нехай $q > 0$, $n = \overline{0, \infty}$, $\mathrm{w}_0^0 = |x|^n e^{-q|x|} \operatorname{sgn} x$, $\mathrm{w}_1^0 = 0$. За теоремою 5.9 для системи (5.4), (5.5) стан $W^0 = \begin{pmatrix} \mathrm{w}_0^0 \\ \mathrm{w}_1^0 \end{pmatrix}$ є наближено L^∞-керованим за вільний час. Знайдемо керування, що розв'язують проблему наближеної L^∞-керованості для цього стану.

Нехай F, F_m, μ, μ_m, $m = \overline{1, \infty}$, є функціями з доведення теореми 2.17. Тоді умову (2.29) виконано і

$$\left\| \mathrm{w}_0^0 - \mathrm{w}_0^m \right\|_0^0 = \|F - F_m\|_0^0 \le L_{2n+2} \sqrt{\frac{2}{m}} \left(\frac{q^2+4}{q^2} \right)^{n+1}, \quad m \ge \frac{6}{q} \tag{7.1}$$

де $\mathrm{w}_0^m = \mathcal{F}^{-1} F_m$, $m = \overline{1, \infty}$. Позначимо

$$g_m^n = \sqrt{\frac{\pi}{2}} (-1)^n \operatorname{sgn} t \, \mathcal{F}_{\xi \to t}^{-1} (|\xi| \mu_m^{(n)} (\sqrt{q^2 - \xi^2}) / \sqrt{q^2 - \xi^2}), \qquad m, n = \overline{1, \infty}.$$

Скориставшись теоремою 2.14 і зауваженням 2.15, одержуємо, що $g_m^n \in N(\widehat{\Psi}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$, g_m^n є непарним і $\Psi g_m^n = \mathrm{w}_m^0$, $m = \overline{1, \infty}$. Позначимо

$$\mathcal{U}_{m,k}^n(t) = g_m^n(t) (H(t+k) - H(t-k)), \qquad t \in \mathbb{R}, \quad m, n, k = \overline{1, \infty}.$$

Тоді $\mathcal{U}_{m,k}^n$ є непарним, $m, n, k = \overline{1, \infty}$. Отже, $\mathcal{U}_{m,k}^n \in L^\infty(\mathbb{R})$, $m, n, k = \overline{1, \infty}$, і

$$\left\| g_m^n - \mathcal{U}_{m,k}^n \right\|_0^0 \le \left(2 \int_k^\infty \left| g_m^n(t) \right|^2 \, dt \right)^{1/2} \to 0, \quad \text{коли } k \to \infty. \tag{7.2}$$

Беручи до уваги теореми 2.6:(ii) та 2.7:(ii), для $m, n, k = \overline{1, \infty}$ одержуємо

$$\left\| \mathrm{w}_0^m - \Psi \mathcal{U}_{m,k}^n \right\|_0^0 \le \left\| g_m^n - \mathcal{U}_{m,k}^n \right\|_0^0, \quad \left\| 0 - \widehat{\Psi} \mathcal{U}_{m,k}^n \right\|_0^{-1} \le \left\| g_m^n - \mathcal{U}_{m,k}^n \right\|_0^0. \tag{7.3}$$

З оцінок (7.1)–(7.3), (2.51) для $m \ge \frac{6}{q}$ і $k \ge 1$ випливає

$$\left\| \mathrm{w}_0^0 - \Psi \mathcal{U}_{m,k}^n \right\|_0^0 \le L_{2n+2} \sqrt{\frac{2}{m}} \left(\frac{q^2+4}{q^2} \right)^{n+1}$$

$$+\left(2\int_k^\infty |g_m^n(t)|^2\,dt\right)^{1/2}, \tag{7.4}$$

$$\left\|\mathrm{w}_1^0-\widehat{\Psi}\mathcal{U}_{m,k}^n\right\|_0^{-1}\le\left(2\int_k^\infty |g_m^n(t)|^2\,dt\right)^{1/2}, \tag{7.5}$$

де $L_{2n+2}\le 2(4(n+1))!\sqrt{(8(n+1))!}5^{2(n+1)}/\pi$.

Нехай зафіксовано будь-яке $\varepsilon>0$. Визначимо $m_\varepsilon\ge\frac{6}{q}$ таке, що

$$L_{2n+2}\sqrt{\frac{2}{m}}\left(\frac{q^2+4}{q^2}\right)^{n+1}<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Потім для цього m_ε знайдемо $k_\varepsilon\ge 1$ таке, що

$$\left(2\int_{k_\varepsilon}^\infty \left|g_{m_\varepsilon}^n(t)\right|^2\,dt\right)^{1/2}<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Беручи до уваги (7.4), (7.5), одержуємо

$$\left\|\mathrm{w}_0^0-\Psi\mathcal{U}_{m_\varepsilon,k_\varepsilon}^n\right\|_0^0<\varepsilon \quad \text{і} \quad \left\|\mathrm{w}_1^0-\widehat{\Psi}\mathcal{U}_{m_\varepsilon,k_\varepsilon}^n\right\|_0^{-1}<\varepsilon.$$

Таким чином, керування $u_{m,k}^n=\mathcal{U}_{m,k}H(t)\in L^\infty(\mathbb{R})$, $m,k=\overline{1,\infty}$, розв'язують проблему наближеної L^∞-керованості для стану W^0.

Example 7.3. Нехай $q>0$, $n=\overline{0,\infty}$, $\mathrm{w}_0^0=0$, $\mathrm{w}_1^0=|x|^n e^{-q|x|}\operatorname{sgn}x$. Відповідно до теореми 5.9 для системи (5.4), (5.5) стан $\mathrm{W}^0=\begin{pmatrix}\mathrm{w}_0^0\\ \mathrm{w}_1^0\end{pmatrix}$ є наближено L^∞-керованим за вільний час. Знайдемо керування, що розв'язують проблему наближеної L^∞-керованості для цього стану. Аналогічно тому, як це було зроблено у прикладі 7.2, скориставшись теоремою 2.13 замість теореми 2.14, для $m\ge\frac{6}{q}$ і $k\ge 1$ ми одержуємо

$$\left\|\mathrm{w}_0^0-\Psi\mathcal{U}_{m,k}^n\right\|_0^0\le\left(2\int_k^\infty |g_m^n(t)|^2\,dt\right)^{1/2}, \tag{7.6}$$

$$\left\|\mathrm{w}_1^0 - \widehat{\Psi}\mathcal{U}_{m,k}^n\right\|_0^{-1} \leq L_{2n+2}\sqrt{\frac{2}{m}}\left(\frac{q^2+4}{q^2}\right)^{n+1} + \left(2\int_k^\infty |g_m^n(t)|^2\,dt\right)^{1/2}, \qquad (7.7)$$

де

$$g_m^n = \sqrt{\frac{\pi}{2}}(-1)^{n+1} i\mathcal{F}_{\xi\to t}^{-1}\left(\operatorname{sgn}\xi\,\frac{\mu_m^{(n)}(\sqrt{q^2-\xi^2})}{\sqrt{q^2-\xi^2}}\right),$$

$\mathcal{U}_{m,k}^n(t) = g_m^n(H(t+k)-H(t-k))$, $t\in\mathbb{R}$, $\mathcal{U}_{m,k}^n\in L^\infty(\mathbb{R})$, $\mathcal{U}_{m,k}^n$ є непарними, $m,k=\overline{1,\infty}$, $L_{2n+2}\leq 2(4(n+1))!\sqrt{(8(n+1))!}5^{2(n+1)}/\pi$.

Зауваження 7.1. *Відомо, що*

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2q}l!}e^{qx}\left(\frac{d}{dx}\right)^l\left(x^l e^{-2qx}\right)\right\}_{l=0}^\infty$$

є ортонормованим базисом в $L^\infty(\mathbb{R}_+)$. Позначимо

$$\nu_l(x) = \sqrt{q}\sum_{n=0}^{l}\binom{l}{n}\frac{(-2q)^n}{n!}|x|^n e^{-q|x|}\operatorname{sgn}x, \qquad x\in\mathbb{R},\ l=\overline{0,\infty}.$$

Тоді $\{\nu_l\}_{l=0}^\infty$ є ортонормованим базисом в $\widetilde{H}_0^0$. Нехай $\mathrm{w}_0^0\in\widetilde{H}_0^0$, $\mathrm{w}_1^0=0$. Позначимо

$$\mathrm{w}_0^0 = \sum_{l=0}^\infty \omega_l\nu_l, \qquad \mathrm{w}_1^0 = 0,$$

$$\mathrm{w}_0^N = \sum_{l=0}^N \omega_l\nu_l, \qquad \mathrm{w}_1^N = 0, \qquad N=\overline{1,\infty},$$

де $\omega_l = \langle \mathrm{w}_0^0, \nu_l\rangle$, $l=\overline{0,\infty}$. Тоді ми маємо

$$\left\|\mathrm{w}_0^0-\mathrm{w}_0^N\right\|_0^0\to 0 \quad \textit{і} \quad \left\|\mathrm{w}_1^0-\mathrm{w}_1^N\right\|_0^0\to 0, \qquad \textit{коли } N\to\infty.$$

Скориставшись результатами приклада 7.2, ми можемо знайти керування, що розв'язують проблему наближеної L^∞-керованості за вільний час *для станів* $\begin{pmatrix} \mathrm{w}_0^N \\ \mathrm{w}_1^N \end{pmatrix}$, $N = \overline{1,\infty}$, *системи* (5.4), (5.5). *Отже, ми можемо знайти керування, що розв'язують проблему наближеної* L^∞*-керованості за вільний час для стану* $\begin{pmatrix} \mathrm{w}_0^0 \\ \mathrm{w}_1^0 \end{pmatrix}$ *системи* (5.4), (5.5). *У наступному прикладі ми реалізуємо цю схему.*

Example 7.4. Нехай $q > 0$, $\mathrm{w}_0^0 = xH(1-x^2)$, $\mathrm{w}_1^0 = 0$. За теоремою 5.7 стан $\mathrm{W}^0 = \begin{pmatrix} \mathrm{w}_0^0 \\ \mathrm{w}_1^0 \end{pmatrix}$ системи (5.4), (5.5) є наближено L^∞-керованим за заданий час $T > 0$ тоді і лише тоді, коли $T > 1$ і виконано умову (5.25). Скориставшись формулою (2.24), одержуємо

$$\widehat{\Psi}_1 \Psi_1^{-1} \mathrm{w}_0^0 = \Psi_1 \left(|t| I_0 \left(q\sqrt{1-t^2} \right) \right)' \neq 0 = \mathrm{w}_1^0.$$

Тому для всіх $T > 0$ стан W^0 системи (5.4), (5.5) не є наближено L^∞-керованим за заданий час T. У той же час, за теоремою 5.9 цей стан є наближено L^∞-керованим за вільний час. Скориставшись зауваженням 7.1 ми можемо знайти керування, що що розв'язують проблему наближеної L^∞-керованості за вільний час для стану W^0 системи (5.4), (5.5). Маємо

$$\mathrm{w}_0^0 = \sum_{l=0}^{\infty} \omega_l \nu_l,$$

де

$$\begin{aligned} \omega_l = \langle \mathrm{w}_0^0, \nu_l \rangle &= 2\sqrt{q} \sum_{n=0}^{l} \binom{l}{n} \frac{(-2q)^n}{n!} \int_0^1 x^{n+1} e^{-qx}\, dx \\ &= 2\sqrt{q} \sum_{n=0}^{l} \binom{l}{n} \frac{(2q)^n}{n!} \left(\frac{d}{dq} \right)^{n+1} \left(\frac{e^{-q} - 1}{q} \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{2}{q^{3/2}} \sum_{n=0}^{l} \binom{l}{n} (-2)^n (n+1) \sum_{m=n+2}^{\infty} \frac{q^m}{m!} e^{-q}, \quad l = \overline{0,\infty}. \quad (7.8)$$

Позначимо

$$\mathrm{w}_0^N = \sum_{l=0}^{N} \omega_l \nu_l, \qquad N = \overline{1,\infty}.$$

Тоді

$$\left\| \mathrm{w}_0^0 - \mathrm{w}_0^N \right\|_0^0 \to 0, \qquad \text{коли } N \to \infty.$$

Нехай зафіксовано довільне $\varepsilon > 0$. Визначимо $N = \overline{1,\infty}$ так, що

$$\left\| \mathrm{w}_0^0 - \mathrm{w}_0^N \right\|_0^0 < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (7.9)$$

Маємо

$$\mathrm{w}_0^N = \sqrt{q} \sum_{l=0}^{N} \omega_l \sum_{n=0}^{l} \binom{l}{n} \frac{(-2q)^n}{n!} |x|^n e^{-q|x|} \operatorname{sgn} x = \sum_{n=0}^{N} \Omega_n^N |x|^n e^{-q|x|} \operatorname{sgn} x,$$

де

$$\Omega_n^N = \frac{(-2q)^n}{n!} \sqrt{q} \sum_{l=n}^{N} \binom{l}{n} \omega_l$$

$$= \frac{(-1)^n}{n!} 2^{n+1} q^{n-1} \sum_{l=n}^{N} \binom{l}{n} \sum_{s=0}^{l} \binom{l}{s} (-2)^s (s+1) \sum_{m=s+2}^{\infty} \frac{q^m}{m!} e^{-q}, \quad n = \overline{0,N},$$

тут ми використали (7.8). Відповідно до прикладу 7.2 для кожного $n = \overline{0,N}$ ми можемо знайти непарну функцію $\mathcal{U}_\varepsilon^n \in L^\infty(\mathbb{R})$ таку, що $\operatorname{supp} \mathcal{U}_\varepsilon^n$ є фінітним,

$$\left\| |x|^n e^{-q|x|} \operatorname{sgn} x - \Psi \mathcal{U}_\varepsilon^n \right\|_0^0 < \frac{\varepsilon}{2(N+1)|\Omega_n^N|},$$

$$\left\| 0 - \widehat{\Psi} \mathcal{U}_\varepsilon^n \right\|_0^{-1} < \frac{\varepsilon}{2(N+1)|\Omega_n^N|}.$$

Тому для $\mathcal{U}_\varepsilon = \sum_{n=0}^{N} \Omega_n^N \mathcal{U}_\varepsilon^n$ маємо $\mathcal{U}_\varepsilon \in L^\infty(\mathbb{R})$, $\mathcal{U}_\varepsilon$ є непарним, $\operatorname{supp} \mathcal{U}_\varepsilon$ є фінітним,

$$\left\| \mathrm{w}_0^N - \Psi \mathcal{U}_\varepsilon \right\|_0^0 < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{i} \quad \left\| 0 - \widehat{\Psi} \mathcal{U}_\varepsilon \right\|_0^{-1} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Скориставшись (7.9), одержуємо

$$\left\| \mathrm{w}_0^0 - \Psi \mathcal{U}_\varepsilon \right\|_0^0 < \varepsilon \quad \text{i} \quad \left\| \mathrm{w}_1^0 - \widehat{\Psi} \mathcal{U}_\varepsilon \right\|_0^{-1} < \varepsilon.$$

Таким чином, керування $u_\varepsilon = \mathcal{U}_\varepsilon H(t) \in L^\infty(\mathbb{R})$, $\varepsilon > 0$, розв'язують проблему наближеної L^∞-керованості для стану W^0.

Зауваження 7.2. *Нехай* $\mathrm{w}_0^0 = 0$, $\mathrm{w}_1^0 \in \widetilde{H}_0^{-1}$. *За теоремою 1.1 простір* $\widetilde{H}_0^{-1}$ *є замиканням простору* $\widetilde{H}_0^0$ *за нормою* $\|\cdot\|_0^{-1}$. *Тому ми можемо знайти послідовність* $\left\{\mathrm{w}_1^M\right\}_{M=1}^{\infty} \subset \widetilde{H}_0^0$ *таку, що*

$$\left\| \left\| \begin{pmatrix} \mathrm{w}_0^0 \\ \mathrm{w}_1^0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathrm{w}_0^M \\ \mathrm{w}_1^M \end{pmatrix} \right\| \right\|^0 \to 0, \qquad \text{коли } M \to \infty,$$

де $\mathrm{w}_0^M = \mathrm{w}_0^0 = 0$. *Більш того, маємо*

$$\left\| \left\| \begin{pmatrix} \mathrm{w}_0^M \\ \mathrm{w}_1^M \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathrm{w}_0^{M,N} \\ \mathrm{w}_1^{M,N} \end{pmatrix} \right\| \right\|^0 \to 0, \qquad \text{коли } N \to \infty, \quad M = \overline{1, \infty},$$

якщо

$$\mathrm{w}_0^M = 0, \qquad \mathrm{w}_1^M = \sum_{l=0}^{\infty} \omega_l \nu_l, \qquad M = \overline{1, \infty}$$

$$\mathrm{w}_0^{M,N} = 0, \qquad \mathrm{w}_1^{M,N} = \sum_{l=0}^{N} \omega_l \nu_l, \qquad M, N = \overline{1, \infty}.$$

Тут $\omega_l^M = \langle \mathrm{w}_1^M, \nu_l \rangle$, $l = \overline{0, \infty}$. *Скориставшись результатом прикладу 7.3, для системи* (5.4), (5.5) *ми можемо знайти керування, що розв'язують* *проблему наближеної L^∞-керованості для стану* $\begin{pmatrix} \mathrm{w}_0^{M,N} \\ \mathrm{w}_1^{M,N} \end{pmatrix}$*, а, отже, і для стану* $\begin{pmatrix} \mathrm{w}_0^{M} \\ \mathrm{w}_1^{M} \end{pmatrix}$ *і для стану* $\begin{pmatrix} \mathrm{w}_0^{0} \\ \mathrm{w}_1^{0} \end{pmatrix}$. *У наступному прикладі реалізовано цю схему.*

Example 7.5. Нехай $q > 0$, $\mathrm{w}_0^0 = 0$, $\mathrm{w}_1^0 = \frac{2}{x}$. Відповідно до теореми 5.9 для системи (5.4), (5.5) стан $\mathrm{W}^0 = \begin{pmatrix} \mathrm{w}_0^{0} \\ \mathrm{w}_1^{0} \end{pmatrix}$ є наближено L^∞-керованим за вільний час. Скориставшись зауваженням 7.2, знайдемо керування, що розв'язують проблему наближеної L^∞-керованості для цього стану. Позначимо

$$\mathrm{V}_1^0 = \mathcal{F}\mathrm{w}_1^0 = -i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\operatorname{sgn}\sigma, \quad \mathrm{V}_1^M = \mathrm{V}_1^0(H(\sigma+M) - H(\sigma-M)),$$
$$\mathrm{w}_1^M = \mathcal{F}^{-1}\mathrm{V}_1^M, \qquad \mathrm{w}_0^M = 0, M = \overline{1,\infty}.$$

Зрозуміло, що $\mathrm{V}_1^M \in \widetilde{H}_0^0$, тому $\mathrm{w}_1^M \in \widetilde{H}_0^0$. Отже,

$$\left\|\mathrm{w}_1^0 - \mathrm{w}_1^M\right\|_0^{-1} = \left\|\mathrm{V}_1^0 - \mathrm{V}_1^M\right\|_{-1}^0 = \sqrt{\pi}\left(\int_M^\infty \frac{d\sigma}{1+\sigma^2}\right)^{1/2} = \sqrt{\pi \operatorname{arccot} M}.$$

Нехай зафіксовано довільне $\varepsilon > 0$. Визначимо $M > 0$ таке, що $\sqrt{\pi \operatorname{arccot} M} < \frac{\varepsilon}{3}$. Тоді

$$\left|\left|\left|\begin{pmatrix} \mathrm{w}_0^{0} \\ \mathrm{w}_1^{0} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathrm{w}_0^{M} \\ \mathrm{w}_1^{M} \end{pmatrix}\right|\right|\right|^0 < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{7.10}$$

Маємо

$$\mathrm{w}_1^M = \sum_{l=0}^\infty \omega_l^M \nu_l,$$

де

$$
\begin{aligned}
\omega_l^M &= \langle \mathrm{w}_1^M, \nu_l \rangle = \sqrt{q} \sum_{n=0}^{l} \binom{l}{n} \frac{(-2q)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{w}_1^M(x) |x|^n e^{-q|x|} \operatorname{sgn} x \, dx \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{q} \sum_{n=0}^{l} \binom{l}{n} \frac{(2q)^n}{n!} \left(\frac{d}{dq} \right)^n \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{V}_1^M(x) \frac{-i\sigma}{\sigma^2 + q^2} \\
&= -\sqrt{q} \sum_{n=0}^{l} \binom{l}{n} \frac{(2q)^n}{n!} \left(\frac{d}{dq} \right)^n \ln \frac{M^2 + q^2}{q^2} \\
&= -2\sqrt{q} \left(\ln \frac{M^2 + q^2}{q^2} + \sum_{n=1}^{l} \binom{l}{n} \frac{(-2)^(n-1)}{qn} \right. \\
&\left. + \sum_{n=1}^{l} \binom{l}{n} \frac{(-2q)^(n-1)}{qn(q^2 + M^2)^n} \sum_{0 \le 2k \le n} \binom{n}{2k} (-M^2)^k q^{n-2k} \right). \qquad (7.11)
\end{aligned}
$$

Позначимо

$$
\mathrm{w}_1^{M,N} = \sum_{l=0}^{N} \omega_l \nu_l, \qquad N = \overline{1, \infty}.
$$

Тоді

$$
\left\| \mathrm{w}_1^M - \mathrm{w}_1^{M,N} \right\|_0^0 \to 0, \qquad \text{коли } N \to \infty.
$$

Визначимо $N = \overline{1, \infty}$ таке, що

$$
\left\| \mathrm{w}_1^M - \mathrm{w}_1^{M,N} \right\|_0^0 < \frac{\varepsilon}{3}. \qquad (7.12)
$$

Маємо

$$
\begin{aligned}
\mathrm{w}_1^{M,N} &= \sqrt{q} \sum_{l=0}^{N} \omega_l^M \sum_{n=0}^{l} \binom{l}{n} \frac{(-2q)^n}{n!} |x|^n e^{-q|x|} \operatorname{sgn} x \\
&= \sum_{n=0}^{N} \Omega_n^{M,N} |x|^n e^{-q|x|} \operatorname{sgn} x,
\end{aligned}
$$

де

$$\Omega_n^{M,N} = \frac{(-2q)^n}{n!}\sqrt{q}\sum_{l=n}^{N}\binom{l}{n}\omega_l^M$$
$$= \frac{(-2q)^{n+1}}{n!}\sum_{l=n}^{N}\binom{l}{n}\left(\ln\frac{M^2+q^2}{q^2} + \sum_{n=1}^{l}\binom{l}{n}\frac{(-2)^(n-1)}{qn}\right.$$
$$\left. + \sum_{n=1}^{l}\binom{l}{n}\frac{(-2q)^(n-1)}{qn(q^2+M^2)^n}\sum_{0\le 2k\le n}\binom{n}{2k}(-M^2)^k q^{n-2k}\right),\ n=\overline{0,N},$$

тут ми скористались (7.11). Відповідно до прикладу 7.3 для кожного $n=\overline{0,N}$ ми можемо знайти функцію $\mathcal{U}_\varepsilon^n \in L^\infty(\mathbb{R})$ таку, що $\operatorname{supp}\mathcal{U}_\varepsilon^n$ є фінітним, $\mathcal{U}_\varepsilon^n$ є непарною,

$$\|0-\Psi\mathcal{U}_\varepsilon^n\|_0^0 < \frac{\varepsilon}{3(N+1)|\Omega_n^N|},$$
$$\left\||x|^n e^{-q|x|}\operatorname{sgn}x - \widehat{\Psi}\mathcal{U}_\varepsilon^n\right\|_0^{-1} < \frac{\varepsilon}{3(N+1)|\Omega_n^N|}.$$

Отже, для

$$\mathcal{U}_\varepsilon = \sum_{n=0}^{N}\Omega_n^{M,N}\mathcal{U}_\varepsilon^n$$

маємо $\mathcal{U}_\varepsilon \in\ L^\infty(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp}\mathcal{U}_\varepsilon$ є фінітним, $\mathcal{U}_\varepsilon$ є непарною,

$$\|0-\Psi\mathcal{U}_\varepsilon\|_0^0 < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{i} \quad \left\|\mathrm{w}_1^{M,N} - \widehat{\Psi}\mathcal{U}_\varepsilon\right\|_0^{-1} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

З (7.10), (7.12) ми одержуємо

$$\left\|\mathrm{w}_0^0 - \Psi\mathcal{U}_\varepsilon\right\|_0^0 < \varepsilon \quad \text{i} \quad \left\|\mathrm{w}_1^0 - \widehat{\Psi}\mathcal{U}_\varepsilon\right\|_0^{-1} < \varepsilon.$$

Таким чином, керування $u_\varepsilon = \mathcal{U}_\varepsilon H(t) \in L^\infty(\mathbb{R})$, $\varepsilon > 0$, розв'язують проблему наближеної L^∞-керованості для стану W^0.

Example 7.6. Нехай $\mathrm{w}_0^0 = 0$, $\mathrm{w}_1^0 = e^{-q|x|}$, $q > 0$. За теоремою 5.27, стан $\mathrm{W}^0 = \begin{pmatrix}\mathrm{w}_0^0\\ \mathrm{w}_1^0\end{pmatrix}$ системи (5.44), (5.45) є наближено L^∞-керованим за вільний час. Знайдемо керування, що розв'язують проблему наближеної L^∞-керованості для цього стану. Позначимо

$$\mathrm{v}_1^0(\sigma) = \left(\mathcal{F}\mathrm{w}_1^0\right)(\sigma) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{q}{\sigma^2+q^2}, \quad \nu(\sigma,\xi) = \frac{2i\xi}{\sigma^2+\xi^2}, \qquad \sigma\in\mathbb{R},\ \xi\in\mathbb{R}.$$

Маємо $\mathrm{v}_1^0(\sigma) = \frac{1}{\pi}\langle\Psi,\nu(\sigma,\cdot)\rangle$, $\sigma\in\mathbb{R}$, де $\Psi(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}i\delta(\xi-q)$, $\xi\in\mathbb{R}$. Позначимо також

$$\widehat{\Psi}_n(\xi) = 2iq\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left[\begin{array}{ll} n^2, & q-r_n\le\xi\le q \\ 0, & q<\xi \text{ or } \xi<q-r_n \end{array}\right., \qquad n\in\mathbb{N},$$

$$\widehat{\mathrm{v}}_1^n(\sigma) = \frac{1}{\pi}\left\langle\widehat{\Psi}_n,\nu(\sigma,\cdot)\right\rangle = 2qn^2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{q-r_n}^{q}\frac{\xi\,d\xi}{\xi^2+\sigma^2}, \qquad n\in\mathbb{N},$$

де $r_n = q-\sqrt{q^2-1/n^2}$. Позначаючи $\widehat{\mathrm{w}}_1^n = \mathcal{F}^{-1}\widehat{\mathrm{v}}_1^0$, одержуємо

$$\widehat{\mathrm{w}}_1^n = 2qn^2\int_{q-r_n}^{q} e^{-\xi|x|}\,d\xi = 2qn^2r_np_n(x)e^{-q|x|}, \qquad n\in\mathbb{N},$$

де $p_n(x) = \left(e^{r_n|x|}-1\right)/\left(r_n|x|\right)$. Оскільки $r_n\le 1/(qn^2)$, то $2qn^2r_n-1 = n^2r_n^2\le 1/(qn)^2$. Отже,

$$\left\|\mathrm{w}_1^0-\mathrm{w}_1^n\right\|_0^0 \le \frac{1}{n^2q^2}\left\|e^{-q|x|}\right\|_0^0 + 2\left\|e^{-q|x|}(1-p_n)\right\|_0^0.$$

Застосовуючи формулу Тейлора, одержуємо

$$p_n(x)-1\le\frac{r_n|x|}{2}e^{r_n|x|}\le\frac{|x|}{2qn^2}e^{|x|/(qn^2)}.$$

Отже,

$$\begin{aligned}\left\|\mathrm{w}_1^0-\mathrm{w}_1^n\right\| &\le \frac{1}{n^2q^2}\left(\left\|e^{-q|x|}\right\|_0^0 + q\left\|e^{-\left(q-1/\left(qn^2\right)\right)|x|}\right\|_0^0\right) \\ &\le \frac{3}{q^{5/2}n^2}, \qquad n^2\ge\frac{2}{q^2}.\end{aligned} \tag{7.13}$$

Позначимо

$$\widehat{G}_n(\xi) = \operatorname{sgn}\xi\widehat{\Psi}_n\left(\sqrt{q^2-\xi^2}\right)$$
$$= 2iq\operatorname{sgn}\xi\sqrt{\frac{\pi}{2}}\begin{bmatrix} n^2, & |\xi| \le \dfrac{1}{n} \\ 0, & |\xi| > \dfrac{1}{n}\end{bmatrix}, \qquad n \in \mathbb{N}, \quad (7.14)$$

$$G_n(\xi) = 2iq\sqrt{\frac{\pi}{2}}\begin{bmatrix} n^8\xi, & |\xi| \le \dfrac{1}{n^6} \\ n^2\operatorname{sgn}\xi, & \dfrac{1}{n^6} \le |\xi| \le \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n^6} \\ n^8\left(\dfrac{\operatorname{sgn}\xi}{n} - \xi\right), & \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n^6} \le |\xi| \le \dfrac{1}{n} \\ 0, & |\xi| > \dfrac{1}{n}\end{bmatrix}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (7.15)$$

Зрозуміло, що $\widehat{G}_n \in \widetilde{H}_0^0$ та $G_n \in \widetilde{H}_0^1$, $n \in \mathbb{N}$. Позначаючи $\widehat{g}_n = \mathcal{F}^{-1}\widehat{G}_n$, $g_n = \mathcal{F}^{-1}G_n$, $n \in \mathbb{N}$, одержуємо

$$\widehat{g}_n(t) = -\,2qn^2\int_0^{1/n}\sin(t\xi)\,d\xi$$
$$= -4qn^2\frac{\sin^2(t/(2n))}{t}, \quad t \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}, \qquad (7.16)$$
$$g_n(t) = 2qn^8\frac{d}{dt}\left(\int_0^{1/n^6}\cos(t\xi)\,d\xi - \int_{1/n-1/n^6}^{1/n}\cos(t\xi)\,d\xi\right)$$
$$-\,2qn^2\int_{1/n}^{1/n-1/n^6}\sin(t\xi)\,d\xi - 2qn^7\int_{1/n-1/n^6}^{1/n}\sin(t\xi)\,d\xi$$
$$= \frac{2qn^8}{t^2}\left(\sin\frac{t}{n} - \sin\left(\frac{t}{n} - \frac{t}{n^6}\right) - \sin\frac{t}{n^6}\right)$$
$$= -\,\frac{8qn^8}{t^2}\sin\frac{t}{2n}\sin\frac{t}{2n^6}\sin\left(\frac{t}{2n} - \frac{t}{2n^6}\right), \qquad t \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}. \quad (7.17)$$

Бачимо, що $\widehat{g}_n, g_n \in N(\Phi)$ and $g_n \in \widetilde{H}_1^0$, $n \in \mathbb{N}$. Маємо

$$\|\widehat{g}_n - g_n\|_0^0 = 4qn^8\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{1/n^6}\xi^2\,d\xi\right)^{1/2} = \sqrt{\frac{2\pi}{3}}\frac{2q}{n}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Оскільки supp $\left(\widehat{G}_n - G_n\right) \subset [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$, $n \in \mathbb{N}$, одержуємо

$$\begin{aligned}\left\|\widehat{\Psi}_n - \Psi_n\right\|_0^0 &= \left(\int_0^q \left|\widehat{G}_n\left(\sqrt{q^2-\xi^2}\right) - G_n\left(\sqrt{q^2-\xi^2}\right)\right|^2 d\xi\right)^{1/2} \\ &\le \left(\int_0^{1/n} \left|\widehat{G}_n(\mu) - G_n(\mu)\right|^2 \frac{\mu\, d\mu}{\sqrt{q^2-\mu^2}}\right)^{1/2} \\ &\le \frac{1}{\sqrt{qn}} \|\widehat{g}_n - g_n\|_0^0 \le \sqrt{\frac{2q\pi}{3}}\frac{2}{n^{3/2}}, \qquad n^2 \ge \frac{4}{3q^2}.\end{aligned}$$

Відповідно до 2.46, одержуємо

$$\|\widehat{\mathrm{v}}_1^n - \mathrm{v}_1^n\|_0^0 \le L_0 \left\|\widehat{\Psi}_n - \Psi_n\right\|_0^0 \le \sqrt{\frac{2q}{3\pi}}\frac{4}{n^{3/2}}, \qquad n^2 \ge \frac{4}{3q^2}, \tag{7.18}$$

де $\mathrm{v}_1^n(\sigma) = \frac{1}{\pi}\left\langle \Psi_n, \nu(\sigma,\cdot)\right\rangle$, $\sigma \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $L_0 \le \frac{2}{\pi}$. Позначаючи $\mathrm{w}_1^n = \mathcal{F}^{-1}\mathrm{v}_1^n$ і беручи до уваги (7.13), (7.16), одержуємо

$$\begin{aligned}\left\|\mathrm{w}_1^0 - \mathrm{w}_1^n\right\|_0^0 &\le \left\|\mathrm{w}_1^0 - \widehat{\mathrm{w}}_1^n\right\|_0^0 + \|\widehat{\mathrm{w}}_1^n - \mathrm{w}_1^n\|_0^0 \\ &\le \frac{3}{q^{5/2}n^2} + \sqrt{\frac{2q}{3\pi}}\frac{4}{n^{3/2}} \le \frac{3\left(1+q^2\right)^{3/2}}{q^{5/2}n^{3/2}}, \qquad n \ge \frac{2}{q^2}.\end{aligned} \tag{7.19}$$

Позначимо $\mathcal{U}_n(t) = g_n(t)H\left(n^{36} - t\right)$, $t \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Враховуючи (7.17), одержуємо

$$\begin{aligned}\|\mathcal{U}_n - g_n\|_1^0 &= \left(2\int_{n^{18}}^{\infty} \left(1+t^2\right)|g_n(t)|^2\, dt\right)^{1/2} \\ &\le 2qn^8\left(4\int_{n^{18}}^{\infty}\frac{dt}{t^2}\right)^{1/2} = \frac{4q}{n},\ n \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

З теореми 2.30 для $n \in \mathbb{N}$ випливає

$$\|\Phi\left(\mathcal{U}_n - g_n\right)\|_0^1 \le 2\frac{\left(1+q^2\right)^{3/4}}{q}\|\mathcal{U}_n - g_n\|_1^0 \le \left(1+q^2\right)^{3/4}\frac{8}{n}, \tag{7.20}$$

$$\left\|\widehat{\Phi}\left(\mathcal{U}_n - g_n\right)\right\|_0^0 \le 3\left(1+q^2\right)^{1/4}\|\mathcal{U}_n - g_n\|_1^0 \le \left(1+q^2\right)^{1/4}\frac{6q}{n}. \tag{7.21}$$

Беручи до уваги теорему 2.33, (7.14) та (7.15), маємо

$$\Phi\widehat{g}_n = \Phi g_n = 0 = \mathrm{w}_0^0, \quad \widehat{\Phi}\widehat{g}_n = \widehat{\mathrm{w}}_1^n, \quad \widehat{\Phi} g_n = \mathrm{w}_1^n, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{7.22}$$

Підсумовуючи (7.19)–(7.22), одержуємо

$$\begin{aligned} \left\|\mathrm{w}_0^0 - \Phi\mathcal{U}_n\right\|_0^1 &= \left\|\Phi\left(\mathcal{U}_n - g_n\right)\right\|_0^1 \le \left(1+q^2\right)^{3/4}\frac{8}{n}, && n \in \mathbb{N}, \\ \left\|\mathrm{w}_1^0 - \widehat{\Phi}\mathcal{U}_n\right\|_0^0 &\le \left\|\mathrm{w}_1^0 - \mathrm{w}_1^n\right\|_0^0 + \left\|\widehat{\Phi}\left(\mathcal{U}_n - g_n\right)\right\|_0^0 \\ &\le \frac{3\left(1+q^2\right)^{3/2}}{q^{5/2}n^{3/2}} + \left(1+q^2\right)^{1/4}\frac{6q}{n} \le \left(1+q^2\right)^2\frac{9}{q^{3/2}n}, && n \ge \frac{2}{q^2}. \end{aligned}$$

Таким чином, керування $u_n(t) = g_n(t)$, $t \in [0, T_n]$, $T_n = n^{18}$, $n \in \mathbb{N}$, розв'язують проблему наближеної L^∞-керованості для стану W^0. Крім того, скориставшись (5.47), для розв'язку w^n системи (5.44), (5.45) з $u = u_n$ і $T = T_n = n^{18}$ маємо

$$\begin{aligned} \left|\left|\left|\begin{pmatrix} \mathrm{w}^n(\cdot, T_n) \\ \mathrm{w}_t^n(\cdot, T_n)\end{pmatrix}\right|\right|\right|^1 &\le \frac{1}{q}\left|\left|\left|\begin{pmatrix} \mathrm{w}_0^0 - \Phi\mathcal{U}_n \\ \mathrm{w}_1^0 - \widehat{\Phi}\mathcal{U}_n\end{pmatrix}\right|\right|\right|^1 \\ &\le 18\frac{\left(1+q^2\right)^2}{q^{5/2}n} \to 0, \quad \text{коли } n \to \infty. \end{aligned}$$

Нижче у всіх прикладах позначимо через $\widehat{k}$, $\widehat{\rho}$ і $\widehat{\gamma}$ парні продовження k, ρ і γ, відповідно.

У прикладах 7.7–7.7 маємо $k = \rho$. Тоді $\sigma(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$, і $\sigma^{-1}(\lambda) = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Маємо

$$\eta = \sqrt{\widehat{\rho}}, \quad \theta = 1, \quad \text{та} \quad \frac{\eta}{\theta}\mathcal{D}_{\eta\theta}^m\varphi = \left(\sqrt{\widehat{\rho}}\varphi\right)^{(m)}, \quad m = 0, 1, 2.$$

Отже, $\varphi \in \mathbb{H}^m$ тоді і лише тоді, коли $\sqrt{\widehat{\rho}}\varphi \in H_0^m$, тому $f \in \mathbb{H}^{-m}$ тоді і лише тоді, коли $\sqrt{\widehat{\rho}} f \in H_0^{-m}$, $m = 0, 1, 2$. Таким чином, властивості простору $\mathbb{H}^m$ залежать від ρ.

Example 7.7. Нехай $\alpha > 0$,

$$\widehat{\rho} = \cosh(\alpha x), \quad \widehat{\gamma}(x) = \alpha^2/(4\cosh^2(\alpha x)), \qquad x \in \mathbb{R},$$

$\mathrm{Z}^0 \in \widetilde{\mathbb{H}}^0$ та $u \in L^\infty(0,T)$. Маємо $f \in \mathbb{H}^m$ тоді і лише тоді, коли $\sqrt{\cosh(\alpha x)} f \in H_0^m$, $m = \overline{-2,2}$. Зокрема, бачимо, що $\mathcal{S} \not\subset \mathbb{H}^2$, отже, $\mathbb{H}^{-2} \not\subset \mathcal{S}'$. Маємо

$$\begin{aligned} \nu(x) = \left(\mathcal{D}_{\eta\theta}\left(\theta^2\eta'/\eta\right)\right)(x) &= \frac{\widehat{\rho}''(x)}{2\widehat{\rho}(x)} + \left(\frac{\widehat{\rho}'(x)}{2\widehat{\rho}(x)}\right)^2 \\ &= \frac{\alpha^2}{4} + \frac{\alpha^2}{4\cosh^2(\alpha x)}, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Отже, умови (6.2) та (6.3) виконано для $q = \alpha/2$. Крім того, $r = 0$, тому умову (1.2) також виконано. Оскільки $r = 0$, маємо $\widetilde{\mathbf{T}}_r = \mathrm{Id}$, де Id є тотожнім оператором.

Розглянемо керовану систему (6.8), (6.9). Беручи до уваги теореми 6.8, 6.10 і позначаючи $\widehat{\mathrm{Z}}^0(x) = \sqrt{\cosh(\alpha x)}\mathrm{Z}^0(x)$, $x \in \mathbb{R}$, одержуємо, що

(i) стан Z^0 системи (6.8), (6.9) є наближено L^∞-керованим за заданий час $T > 0$ тоді і лише тоді, коли

$$\operatorname{supp} \mathrm{z}_0^0 \subset [-T, T], \tag{7.23}$$

$$\widehat{\mathrm{z}}_1^0 - \widehat{\Psi}_T \Psi_T^{-1} \widehat{\mathrm{z}}_0^0 = 0; \tag{7.24}$$

(ii) стан Z^0 системи (6.8), (6.9) є L^∞-керованим за заданий час $T > 0$ тоді і лише тоді, коли $\widehat{\mathrm{z}}_0^0 \in L^\infty(0,T)$ і виконано умови (7.23) та (7.24);

(iii) стан Z^0 системи (6.8), (6.9) є завжди наближено L^∞-керованим за вільний час.

Example 7.8. Нехай $\alpha > 0$,

$$\widehat{\rho} = 1/\cosh(\alpha x), \quad \widehat{\gamma}(x) = -3\alpha^2/(4\cosh^2(\alpha x)), \qquad x \in \mathbb{R},$$

$\mathrm{Z}^0 \in \widetilde{\mathbb{H}}^0$ та $u \in L^\infty(0,T)$. Маємо $f \in \mathbb{H}^m$ тоді і лише тоді, коли $f/\sqrt{\cosh(\alpha x)} \in H_0^m$, $m = \overline{-2,2}$. Зокрема, бачимо $\mathcal{S} \subset \mathbb{H}^2$, отже, $\mathbb{H}^{-2} \subset \mathcal{S}'$. Маємо

$$\begin{aligned}\nu(x) = \left(\mathcal{D}_{\eta\theta}\left(\theta^2\eta'/\eta\right)\right)(x) &= \frac{\widehat{\rho}''(x)}{2\widehat{\rho}(x)} + \left(\frac{\widehat{\rho}'(x)}{2\widehat{\rho}(x)}\right)^2 \\ &= \frac{\alpha^2}{4} + \frac{3\alpha^2}{4\cosh^2(\alpha x)}, \quad x \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Отже, умови (6.2) і (6.3) виконано $q = \alpha/2$. Крім того, $r = 0$, отже, умову (1.2) також виконано. Оскільки $r = 0$, маємо $\widetilde{\mathbf{T}}_r = \mathrm{Id}$.

Розглянемо керовану систему (6.8), (6.9). Беручи до уваги теореми 6.8, 6.10 і позначаючи $\widehat{\mathrm{Z}}^0(x) = \mathrm{Z}^0(x)/\sqrt{\cosh(\alpha x)}$, $x \in \mathbb{R}$, ми бачимо, що твердження (i)–(iii) прикладу 7.7 у цьому випадку також виконано.

Example 7.9. Нехай $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\widehat{\rho} = (1+x^2)^\alpha, \quad \widehat{\gamma}(x) = \alpha(\alpha-2)x^2/(1+x^2)^2, \qquad x \in \mathbb{R},$$

$\mathrm{Z}^0 \in \widetilde{\mathbb{H}}^0$ та $u \in L^\infty(0,T)$. Бачимо, що $\mathcal{S} \subset H_\alpha^m = \mathbb{H}^m$, отже, $\mathbb{H}^m = H_\alpha^m \subset \mathcal{S}'$, $m = \overline{-2,2}$. Маємо

$$\begin{aligned}\nu(x) = \left(\mathcal{D}_{\eta\theta}\left(\theta^2\eta'/\eta\right)\right)(x) &= \frac{\widehat{\rho}''(x)}{2\widehat{\rho}(x)} + \left(\frac{\widehat{\rho}'(x)}{2\widehat{\rho}(x)}\right)^2 \\ &= \frac{\alpha\left(1+(\alpha-1)x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^2}, \ x \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Отже, умови (6.2) та (6.3) виконано для $q = 0$. Крім того, $r = 0$, отже, умову (1.2) також виконано. Оскільки $r = 0$, маємо $\widetilde{\mathbf{T}}_r = \mathrm{Id}$.

Розглянемо керовану систему (6.8), (6.9). Беручи до уваги теорему 6.8 і позначаючи $\widehat{\mathrm{Z}}^0(x) = (1+x^2)^{\alpha/2}\mathrm{Z}^0(x)$, $x \in \mathbb{R}$, ми бачимо, що твердження (i) та (ii) прикладу 7.7 також виконано в цьому випадку. Оскільки $q = 0$, ми можемо переписати (7.24) наступним чином

$$\widehat{\mathrm{z}}_1^0 - \operatorname{sgn}(\cdot)\,\widehat{\mathrm{z}}_0^{0\prime} = 0. \tag{7.25}$$

Скориставшись теоремою 6.9, бачимо, що стан Z^0 системи (6.8), (6.9) є наближено L^∞-керованим за вільний час в тому і лише тому випадку, коли виконано умову (7.25).

Example 7.10. Нехай $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
&\widehat{k}(x) = (1+x^2)^{(\alpha+1)/2}, \qquad x \in \mathbb{R},\\
&\widehat{\rho}(x) = (1+x^2)^{(\alpha-1)/2}, \qquad x \in \mathbb{R},\\
&\widehat{\gamma}(x) = \frac{\alpha}{2}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{\left(|x|+\sqrt{1+x^2}\right)}\right), \qquad x \in \mathbb{R},
\end{aligned}$$

$\mathrm{Z}^0 \in \widetilde{\mathbb{H}}^0$ та $u \in L^\infty(0,T)$. Тоді $\eta(x) = (1+x^2)^{\alpha/4}$, $\theta(x) = (1+x^2)^{1/4}$, $\sigma(x) = \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$, $x \in \mathbb{R}$, $\sigma^{-1}(\lambda) = \sinh\lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Маємо

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\eta}{\theta}\varphi\right)(x) =& (1+x^2)^{(\alpha-1)/4}\varphi,\\
\left(\frac{\eta}{\theta}\mathcal{D}_{\eta\theta}\varphi\right)(x) =& \left(\theta(\eta\varphi)'\right)(x) = \frac{\alpha}{2}x(1+x^2)^{(\alpha-3)/4}\varphi + (1+x^2)^{(\alpha+1)/4}\varphi'\\
\left(\frac{\eta}{\theta}\mathcal{D}_{\eta\theta}^2\varphi\right)(x) =& \left(\theta\left(\theta^2(\eta\varphi)'\right)'\right)(x) = \left(\frac{\alpha^2}{4}x^2+\frac{\alpha}{2}\right)(1+x^2)^{(\alpha-5)/4}\varphi\\
&+(\alpha+1)x(1+x^2)^{(\alpha-1)/4}\varphi' + (1+x^2)^{(\alpha+3)/4}\varphi''.
\end{aligned}$$

Отже, $\varphi \in \mathbb{H}^0$ тоді і лише тоді, коли $(1+x^2)^{(\alpha-1)/4}\varphi \in H_0^0$; $\varphi \in \mathbb{H}^1$ тоді і лише тоді, коли $\varphi \in \mathbb{H}^0$ і $(1+x^2)^{(\alpha+1)/4}\varphi' \in H_0^0$; $\varphi \in \mathbb{H}^2$ тоді і лише тоді, коли $\varphi \in \mathbb{H}^2$ і $(1+x^2)^{(\alpha+3)/4}\varphi' \in H_0^0$. Тому $H_{(\alpha+2m-1)/2} \subset \mathbb{H}^m \subset H_{(\alpha-1)/2}$, $m = 0, 1, 2$. Маємо

$$\nu(x) = \left(\mathcal{D}_{\eta\theta}\left(\theta^2\eta'/\eta\right)\right)(x) = \theta^2\left(\theta^2\eta'/\eta\right)'(x) + \left(\theta^2\eta'/\eta\right)^2(x)$$
$$= \frac{\alpha^2}{4} + \frac{\alpha}{2}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)\frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Отже, умови (6.2) і (6.3) виконано для $q = \alpha/2$. Крім того, $r(\lambda) = \frac{\alpha}{2}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)e^{-|\lambda|}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, отже, умова (1.2) також є вірною. У цьому випадку ядра K та L операторів $\widetilde{\mathbf{T}}_r$, $\widetilde{\mathbf{T}}_r^{-1}$, $\widehat{\mathbf{T}}_r$ та $\widehat{\mathbf{T}}_r^{-1}$ було обчислено в роботі [23, Example 5.1]:

$$K(y) = \widetilde{K}_{y_2}(y) \quad \text{and} \quad L(y) = -\widetilde{L}_{y_1}(y), \qquad y_2 \geq y_1 \geq 0, \tag{7.26}$$

$$\widetilde{K}(y) = I_0\left(\sqrt{e^{-\frac{y_1}{2}}\left(e^{-\frac{y_1}{2}} - e^{-\frac{y_2}{2}}\right)}\right), \qquad y_2 \geq y_1 \geq 0, \tag{7.27}$$

$$\widetilde{L}(y) = J_0\left(\sqrt{e^{-\frac{y_2}{2}}\left(e^{-\frac{y_1}{2}} - e^{-\frac{y_2}{2}}\right)}\right), \qquad y_2 \geq y_1 \geq 0. \tag{7.28}$$

Розглянемо керовану систему (6.8), (6.9). Беручи до уваги теореми 6.8 та 6.10, одержуємо, що

(i) стан Z^0 системи (6.8), (6.9) є наближено L^∞-керованим за заданий час $T > 0$ тоді і лише тоді, коли виконано умови (6.24) і (6.25);

(ii) стан Z^0 системи (6.8), (6.9) є L^∞-керованим за заданий час $T > 0$ тоді і лише тоді, коли $(1+x^2)^{\alpha/4}\mathrm{z}_0^0 \in L^\infty(0,T)$ та виконано умови (6.24) і (6.25);

(iii) стан Z^0 системи (6.8), (6.9) є завжди наближено L^∞-керованим за вільний час.

Знайдемо явну формулу, що пов'язує розв'язки z системи (6.8), (6.9) та w системи (5.4), (5.5), де $\mathrm{z}(\cdot,t) = \mathbf{S}\widetilde{\mathbf{T}}_r\mathrm{w}(\cdot,t)$, $t \in [0,T]$. Щоб спростити обчислення, оберемо $\alpha = 1$. Тоді, $r(\lambda) = e^{-|\lambda|}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Скориставшись формулами (7.26), (7.27), маємо

$$\left(\widetilde{\mathbf{T}}_r\mathrm{w}(\cdot,t)\right)(\lambda) = \mathrm{w}(\lambda,t) + \frac{1}{4}\int_{|\lambda|}^{\infty} e^{-\frac{\lambda+\xi}{2}} \frac{I_1\left(\sqrt{e^{-\frac{\lambda}{2}}\left(e^{-\frac{\lambda}{2}} - e^{-\frac{\xi}{2}}\right)}\right)}{\sqrt{e^{-\frac{\lambda}{2}}\left(e^{-\frac{\lambda}{2}} - e^{-\frac{\xi}{2}}\right)}}\mathrm{w}(\xi,t)\,d\xi$$

для $\lambda \geq 0$, $t \in [0,T]$. Позначаючи $v = e^{-\frac{\lambda}{2}}$, $u = e^{-\frac{\xi}{2}}$ та $p = \sqrt{v(v-u)}$, одержуємо

$$\begin{aligned}\left(\widetilde{\mathbf{T}}_r\mathrm{w}(\cdot,t)\right)(-2\ln v) =& \mathrm{w}(-2\ln v,t) \\ & + \int_0^v v\frac{I_1\left(\sqrt{v(v-u)}\right)}{\sqrt{v(v-u)}}\mathrm{w}(-2\ln u,t)\,du \\ =& \mathrm{w}(-2\ln v,t) + \int_0^v I_1(p)\mathrm{w}\left(2\ln\frac{v}{v^2-p^2},t\right)\,dp.\end{aligned}$$

для $v \in (0,1]$, $t \in [0,T]$. Маємо

$$(\mathbf{S}\psi)(x) = \left(1+x^2\right)^{-1/4}\psi\left(\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right).$$

Отже,

$$\begin{aligned}\mathrm{z}(x,t) &= \left(\mathbf{S}\widetilde{\mathbf{T}}_r\mathrm{w}(\cdot,t)\right)(x) \\ &= \left(1+x^2\right)^{-1/4}\left(\mathrm{w}\left(\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right),t\right)\right. \\ &\quad \left. + \operatorname{sgn} x\int_0^{\frac{1}{\sqrt{|x|+\sqrt{1+x^2}}}} I_1(p)\mathrm{w}\left(2\ln\frac{\sqrt{|x|+\sqrt{1+x^2}}}{1-p^2\left(|x|+\sqrt{1+x^2}\right)},t\right)\,dp\right)\end{aligned}$$

для $x \in \mathbb{R}$, $t \in [0,T]$.

Зауваження 7.3. *Беручи до уваги приклади 7.7–7.10, бачимо, що для деяких k та ρ простір $\mathcal{S}$ є підпростором $\mathbb{H}^m$, але для деяких інших k та ρ простір $\mathcal{S}$ не є підпростором $\mathbb{H}^m$, $m = \overline{-2,2}$. Аналогічно, для деяких k та ρ простір $\mathbb{H}^m$ є підпростором $\mathcal{S}'$, але для деяких інших k та ρ простір $\mathbb{H}^m$ не є підпростором $\mathcal{S}'$, $m = \overline{-2,2}$.*

Example 7.11. Нехай $\alpha > 0$,

$$\begin{aligned}
\widehat{k}(x) &= (1+|x|)\left(1-\tanh^2 x\right), \\
\widehat{\rho}(x) &= \frac{1}{(1+|x|)\cosh^2 x}, \\
\widehat{\gamma}(x) &= (1+|x|)^2\left(2\tanh^2 x - 1\right) - (1+|x|)\tanh|x| - \frac{1}{4(1+|x|)}, \\
\mathrm{z}_0^0(x) &= \frac{H\left(\alpha^2 - x^2\right)}{\ln(1+\alpha)}\cosh x \int_{|x|}^{\alpha} I_0\left(\sqrt{\frac{\sqrt{1+\mu}-\sqrt{1+|x|}}{\sqrt{1+\mu}+\sqrt{1+|x|}}}\right)\frac{d\mu}{1+\mu}, \\
\mathrm{z}_1^0(x) &= \frac{H\left(\alpha^2 - x^2\right)}{\ln(1+\alpha)}\cosh x I_0\left(\sqrt{\frac{\sqrt{1+\alpha}-\sqrt{1+|x|}}{\sqrt{1+\alpha}+\sqrt{1+|x|}}}\right), \qquad x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Зрозуміло, що $\eta(x) = 1/\cosh x$, $\theta = \sqrt{1+|x|}$, $\sigma(x) = \operatorname{sgn} x \, \ln(1+|x|)$, $x \in \mathbb{R}$, $\sigma^{-1}(\lambda) = \operatorname{sgn}\lambda \left(e^{|\lambda|}-1\right)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Отже, $\varphi \in \mathbb{H}^0$ тоді і лише тоді, коли $\frac{\varphi}{\sqrt{1+|x|}\cosh x} \in H_0^0$; а $\varphi \in \mathbb{H}^1$ тоді і лише тоді, коли $\sqrt{1+|x|}\left(\frac{\varphi}{\cosh x}\right)' \in H_0^0$. Тому $\mathrm{Z}_0^0 = \begin{pmatrix} \mathrm{z}_0^0 \\ \mathrm{z}_1^0 \end{pmatrix} \in \widehat{\mathbb{H}}^1$. Маємо

$$\begin{aligned}
\nu(x) &= \left(\theta^2\left(\theta^2\frac{\eta'}{\eta}\right)'\right)(x) + \left(\theta^2\frac{\eta'}{\eta}\right)^2(x) \\
&= (1+|x|)^2\left(2\tanh^2 x - 1\right) - (1+|x|)\tanh|x| \\
&= \widehat{\gamma}(x) + \frac{1}{4(1+|x|)}, \qquad x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Отже, умову (6.2) і (6.3) виконано і для $q = 0$, $r(\lambda) = e^{-|\lambda|}/4$, $\lambda \in \mathbb{R}$, виконано умову (1.2).

Перетворимо керовану систему (6.31), (6.32) із заданими $\widehat{k}$, $\widehat{\rho}$, $\widehat{\gamma}$, Z^0 і $T > 0$ на систему (5.44), (5.45). Позначимо $\mathrm{W}^0 = \begin{pmatrix} \mathrm{w}_0^0 \\ \mathrm{w}_1^0 \end{pmatrix} = \widehat{\mathbf{T}}_r^{-1}\mathbf{S}^{-1}\mathrm{Z}^0$, $\mathrm{w}(\cdot,t) = \widehat{\mathbf{T}}_r^{-1}\mathbf{S}^{-1}\mathrm{z}(\cdot,t)$, $t \in [0,T]$. Для нашого r ядра K та L задані формулами (7.26)–(7.28). Позначаючи $A = \ln(1+\alpha)$ та використовуючи (7.26) і(7.27), одержуємо

$$\left(\mathbf{S}^{-1}\mathrm{z}_0^0\right)(\lambda) = \frac{1}{A} H\left(A^2 - \lambda^2\right) \int_{|\lambda|}^{A} \widetilde{K}(|\lambda|,\mu)\,d\mu, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Отже, для $\xi \in \mathbb{R}$ маємо

$$\begin{aligned}
\mathrm{w}_0^0(\xi) &= \left(\widehat{\mathbf{T}}_r^{-1}\mathbf{S}^{-1}\mathrm{z}_0^0\right)(\xi) \\
&= \frac{1}{A} H\left(A^2 - \xi^2\right) \left(\int_{|\xi|}^{A} \widetilde{K}(|\xi|,\mu)\,d\mu \right. \\
&\qquad\qquad \left. + \int_{|\xi|}^{A} L(|\xi|,\lambda) \int_{\lambda}^{A} \widetilde{K}(\lambda,\mu)\,d\mu\,d\lambda\right) \\
&= \frac{1}{A} H\left(A^2 - \xi^2\right) \int_{|\xi|}^{A} \left(\widetilde{K}(|\xi|,\mu) \right. \\
&\qquad\qquad \left. + \int_{|\xi|}^{\mu} L(|\xi|,\lambda)\widetilde{K}(\lambda,\mu)\,d\lambda\right) d\mu. \qquad (7.29)
\end{aligned}$$

Обчислимо

$$B(\xi,\mu) = \widetilde{K}(\xi,\mu) + \int_{\xi}^{\mu} L(\xi,\lambda)\widetilde{K}(\lambda,\mu)\,d\lambda, \qquad \mu \ge \xi \ge 0.$$

Оскільки K та L є ядрами операторів $\widehat{\mathbf{T}}_r$ та $\widehat{\mathbf{T}}_r^{-1}$, відповідно, то ми одержуємо

$$K(\xi,\mu) + L(\xi,\mu) + \int_{\xi}^{\mu} L(\xi,\lambda)K(\lambda,\mu)\,d\lambda = 0, \qquad \mu \ge \xi \ge 0.$$

Звідси, беручи до уваги (7.26), одержуємо $B_\mu(\xi,\mu) = 0$, $\mu \ge \xi \ge 0$. Оскільки $B(\xi,\xi) = \widetilde{K}(\xi,\xi) = 1$, $\xi \ge 0$, маємо $B(\xi,\mu) = 1$, $\mu \ge \xi \ge 0$. Тому з формули (7.29) одержуємо

$$\mathrm{w}_0^0(\xi) = \frac{1}{A} H\left(A^2-\xi^2\right) \int_{|\xi|}^{A} d\mu = \frac{A-|\xi|}{A} H\left(A^2-\xi^2\right), \qquad \xi \in \mathbb{R}.$$

Також маємо

$$\begin{aligned}\left(\mathbf{S}^{-1}\mathrm{z}_1^0\right)(\lambda) =& \frac{1}{A} H\left(A^2-\lambda^2\right)\widetilde{K}(|\lambda|,A), \qquad \lambda \in \mathbb{R},\\ \mathrm{w}_1^0(\xi) = \left(\widehat{\mathbf{T}}_r^{-1}\mathbf{S}^{-1}\mathrm{z}_1^0\right)(\xi) =& \frac{1}{A} H\left(A^2-\xi^2\right) B(|\xi|,A)\\ =& \frac{1}{A} H\left(A^2-\xi^2\right),\ \xi \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Оскільки умову (5.60) (і (5.62)) для W^0 виконано, з теореми 5.25 випливає, що стан W^0 системи (5.44), (5.45) є L^∞-керованим за будь-який час $T \ge A$. Нехай $T \ge A$. Позначимо

$$u(t) = \frac{1}{A} H\left(A^2-t^2\right), \qquad t \in [0,T].$$

Тоді

$$\mathrm{w}(\xi,t) = \frac{(A-t)-|\xi|}{A} H\left((A-t)^2-\xi^2\right), \qquad \xi \in \mathbb{R},\ t \in [0,T],$$

є єдиним розв'язком системи (5.44), (5.45). Бачимо, що $\mathrm{w}(\xi,A) = \mathrm{w}_t(\xi,A) = 0$. Тому керування v розв'язує проблему L^∞-керованості системи (5.44), (5.45) за час T для W^0.

Тепер знайдемо керування, що розв'язує проблему L^∞-керованості системи (6.31), (6.32) за час $T \ge A$ і розв'язок цієї системи для Z^0. Для $t \in [0,T]$ позначимо

$$v(t) = u(t) - \frac{1}{2}\mathrm{w}(+0,t)\int_0^\infty r(\xi)\,d\xi + \int_0^\infty K_{y_1}(0,\xi)\mathrm{w}(\xi,t)\,d\xi$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{A} H\left(A^2-t^2\right)\left(1-\frac{1}{8}(A-t)+\int_0^{A-t} \widetilde{K}_{y_1 y_2}(0,\xi)\left((A-t)-\xi\right)\, d\xi\right) \\
&= \frac{1}{A} H\left(A^2-t^2\right)\Bigg(1-\frac{1}{8}(A-t) \\
&\qquad\qquad -\widetilde{K}_{y_1}(0,0)(A-t)+\int_0^{A-t} \widetilde{K}_{y_1}(0,\xi)\, d\xi\Bigg) \\
&= \frac{1}{A} H\left(A^2-t^2\right)\left(1+\int_0^{A-t} \frac{I_1\left(\sqrt{1-e^{-\frac{\xi}{2}}}\right)}{2\sqrt{1-e^{-\frac{\xi}{2}}}}\left(\frac{1}{2}e^{-\frac{\xi}{2}}-1\right)\right) d\xi \\
&= \frac{1}{A} H\left(A^2-t^2\right)\left(I_0\left(\sqrt{1-\frac{e^{\frac{t}{2}}}{\sqrt{1+\alpha}}}\right)-\widetilde{I}\left(\sqrt{1-\frac{e^{\frac{t}{2}}}{\sqrt{1+\alpha}}}\right)\right),
\end{aligned}
$$

де

$$
\widetilde{I}(p) = 2\int_0^p \frac{I_1(\mu)}{1-\mu^2}\, d\mu, \qquad p \in \mathbb{R}.
$$

За теоремою 6.12, керування v розв'язує проблему L^∞-керованості системи (6.31), (6.32) за час T і розв'язок цієї системи для Z^0. Крім того, ми можемо явно знайти розв'язок цієї системи. Маємо

$$
\begin{aligned}
\left(\widehat{\mathbf{T}}_r \mathrm{w}(\cdot,t)\right)(\lambda) &= \mathrm{w}(\lambda,t)+\int_{|\lambda|}^{\infty} \widetilde{K}_{y_2}(|\lambda|,\xi)\mathrm{w}(\xi,t)\, d\xi \\
&= \frac{1}{A} H\left((A-t)^2-\lambda^2\right)\int |\lambda|^{A-t}\widetilde{K}(|\lambda|,\xi)\, d\xi.
\end{aligned}
$$

Отже,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{z}(x,t) &= \left(\mathbf{S}\widehat{\mathbf{T}}_r Z(\cdot,t)\right)(x) \\
&= \frac{H\left(\left(e^{A-t}-1\right)^2-x^2\right)}{A}\int_{\ln(1+|x|)}^{A-t} \widetilde{K}(\ln(1+|x|),\xi)\, d\xi \\
&= H\left(\left((1+\alpha)e^{-t}-1\right)^2-x^2\right)\frac{\cosh x}{\ln(1+\alpha)} \\
&\quad\times \int_{|x|}^{(1+\alpha)e^{-t}-1} I_0\left(\sqrt{\frac{\sqrt{1+\mu}-\sqrt{1+|x|}}{\sqrt{1+\mu}+\sqrt{1+|x|}}}\right)\frac{d\mu}{1+\mu},
\end{aligned}
$$

$$x \in \mathbb{R},\ t \in [0,T],$$

є єдиним розв'язком системи (6.31), (6.32).

Example 7.12. Нехай

$$\widehat{k}(x) = \widehat{\rho}(x) = \frac{1}{1+x^2}, \qquad \widehat{\gamma}(x) = -\frac{2+x^4}{(1+x^2)^2}, \qquad x \in \mathbb{R},$$
$$\mathrm{z}_0^0(x) = 0, \qquad \mathrm{z}_1^0(x) = e^{-|x|}\sqrt{1+x^2}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Зрозуміло, що $\eta(x) = \sqrt{\widehat{\rho}(x)}$, $\theta(x) = 1$, $\sigma(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$, $\sigma^{-1}(\lambda) = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Тоді

$$\frac{\eta}{\theta}\mathcal{D}_{\eta\theta}^m = (1+x^2)^{-1/2}\left(\frac{d}{dx}\right)^m, \qquad m = 1, 2.$$

Отже, $\varphi \in \mathbb{H}^m$ тоді і лише тоді, коли $\varphi \in H_{-1}^m$, $m = -1, 0, 1$. Тому $\mathrm{Z}_0^0 = \begin{pmatrix} \mathrm{z}_0^0 \\ \mathrm{z}_1^0 \end{pmatrix} \in \widehat{\mathbb{H}}^1$. Маємо

$$\begin{aligned} \nu(x) &= \left(\theta^2\left(\theta^2\frac{\eta'}{\eta}\right)'\right)(x) + \left(\theta^2\frac{\eta'}{\eta}\right)^2(x) \\ &= \left(\frac{x}{1+x^2}\right)' + \left(\frac{x}{1+x^2}\right)^2 = \frac{2x^2-1}{(1+x^2)^2} = 1 + \widehat{\gamma}(x), \qquad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Отже, умову (6.2) і (6.3) виконано і для $q = 1$, $r = 0$ виконано умову (1.2). За теоремою 6.8 стан Z^0 системи (6.31), (6.32) не є наближено L^∞-керованим за будь-який час $T > 0$ тому, що умову (6.49) не виконано для цього стану. Проте, з теореми 6.21 випливає, що стан Z^0 системи (6.31), (6.32) є наближено L^∞-керованим за вільний час.

Знайдемо керування, що розв'язують проблему наближеної L^∞-керованості для стану Z^0 системи (6.31), (6.32) за вільний час. Позначимо $W^0\begin{pmatrix} w_0^0 \\ w_1^0 \end{pmatrix} = \widehat{\mathbf{T}}_r^{-1}\mathbf{S}^{-1}Z^0 = \eta Z^0 = (1+x^2)^{-1/2}Z^0$. Маємо $w_0^0(\xi) = 0$ та $w_1^0(\xi) = e^{-|\xi|}$, $\xi \in \mathbb{R}$. Позначимо $T_n = n^{18}$, $n = \overline{1,\infty}$. У прикладі 7.6 було показано, що керування

$$u_n(t) = -\frac{8n^8}{t^2}\sin\frac{t}{2n}\sin\frac{t}{2n^6}\sin\left(\sin\frac{t}{2n} - \frac{t}{2n^6}\right), \quad t \in [0, T_n],\ n = \overline{1,\infty},$$

розв'язують проблему наближеної L^∞-керованості для стану W^0 системи (5.44), (5.45) за вільний час. З теореми 6.12 випливає, що керування $v_n(t) = v_n(t)$, $t \in [0, T_n]$, $n = \overline{1,\infty}$, розв'язують проблему наближеної L^∞-керованості для стану Z^0 системи (6.31), (6.32) за вільний час.

Відмітимо, що для кожного $t \in \mathbb{R}$ маємо $\mathcal{U}_n(t) \to \mathcal{U}(t) \equiv t$, коли $n \to \infty$, де $\mathcal{U}_n(t) = u_n(t)H\left(T_n^2 - t^2\right)$, $n = \overline{1,\infty}$. Отже, $\{\mathcal{U}_n\}_{n=1}^\infty$ не збігається ні в $L^2(\mathbb{R})$ ні в $L^\infty(\mathbb{R})$.

Example 7.13. Нехай

$$\begin{aligned}
\widehat{k}(x) =&(1+|x|)\cosh^2 x, \qquad \widehat{\rho}(x) = \frac{\cosh^2 x}{1+|x|}, && x \in \mathbb{R},\\
\widehat{\gamma}(x) =&(1+|x|)^2 + (1+|x|)\tanh|x| - \frac{2+|x|}{4(1+|x|)\cosh x}, && x \in \mathbb{R},\\
z_0^0(x) =&\frac{8}{\cosh x}I_2\left(\frac{1}{\sqrt{1+|x|}}\right), \qquad z_1^0(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}z_0^0(x), && x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Зрозуміло, що $\eta(x) = \cosh x$, $\theta = \sqrt{1+|x|}$, $\sigma(x) = \operatorname{sgn} x\ \ln(1+|x|)$, $x \in \mathbb{R}$, $\sigma^{-1}(\lambda) = \operatorname{sgn}\lambda\left(e^{|\lambda|} - 1\right)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Отже, $\varphi \in \mathbb{H}^0$ тоді і лише тоді, коли $\frac{\cosh x}{\sqrt{1+|x|}}\varphi \in H_0^0$; а $\varphi \in \mathbb{H}^1$ тоді і лише тоді, коли $\sqrt{1+|x|}\,(\varphi\cosh x)' \in H_0^0$.

Тому $\mathrm{Z}^0 = \begin{pmatrix} \mathrm{z}_0^0 \\ \mathrm{z}_1^0 \end{pmatrix} \in \widehat{\mathbb{H}}^1$. Маємо

$$\begin{aligned}\nu(x) &= \left(\theta^2 \left(\theta^2 \frac{\eta'}{\eta}\right)'\right)(x) + \left(\theta^2 \frac{\eta'}{\eta}\right)^2 (x) \\ &= (1+|x|)^2 - (1+|x|)\tanh|x| = \widehat{\gamma}(x) + \frac{1}{4} + \frac{1}{4(1+|x|)}, \ x \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Отже, умову (6.2) і (6.3) виконано і для $q = 1/2$, $r(\lambda) = e^{-|\lambda|}/4$, $\lambda \in \mathbb{R}$, виконано умову (1.2). За теоремою 6.8 стан Z^0 системи (6.31), (6.32) не є наближено L^∞-керованим за будь-який час $T > 0$ тому, що умову (6.49) не виконано для цього стану. Проте, з теореми 6.21 випливає, що стан Z^0 системи (6.31), (6.32) є наближено L^∞-керованим за вільний час.

Знайдемо керування, що розв'язують проблему наближеної L^∞-керованості для стану Z^0 системи (6.31), (6.32) за вільний час. Позначимо $\mathrm{W}^0 = \begin{pmatrix} \mathrm{w}_0^0 \\ \mathrm{w}_1^0 \end{pmatrix} = \widehat{\mathbf{T}}_r^{-1}\mathbf{S}^{-1}\mathrm{Z}^0 = \eta \mathrm{Z}^0 = (1+x^2)^{-1/2}\mathrm{Z}^0$. Для нашого r ядра K та L задані формулами (7.26)–(7.28). Маємо $\left(\mathbf{S}^{-1}\mathrm{z}_0^0\right)(\lambda) = 8I_2\left(e^{-\frac{|\lambda|}{2}}\right)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Позначаючи $a = e^{-\frac{|\xi|}{2}}$ і $b = e^{-\frac{\lambda}{2}}$, одержуємо

$$\begin{aligned}&\left(\widehat{\mathbf{T}}_r^{-1}\mathbf{S}^{-1}\mathrm{z}_0^0\right)(\xi) \\ &\quad = 8I_2\left(e^{-\frac{|\xi|}{2}}\right) - 2\int_{|\xi|}^{\infty} e^{-\frac{|\xi|+\lambda}{2}} \frac{J_1\left(\sqrt{e^{-\frac{\lambda}{2}}\left(e^{-\frac{|\xi|}{2}} - e^{-\frac{\lambda}{2}}\right)}\right)}{\sqrt{e^{-\frac{\lambda}{2}}\left(e^{-\frac{|\xi|}{2}} - e^{-\frac{\lambda}{2}}\right)}} I_2\left(e^{-\frac{\lambda}{2}}\right) d\lambda \\ &\quad = 8I_2(a) - 4a\int_0^a \frac{J_1\left(\sqrt{b(a-b)}\right)}{\sqrt{b(a-b)}} I_2(b)\, db \qquad (7.30)\end{aligned}$$

Позначаючи $n = k - m$, маємо

$$
\begin{aligned}
4a \int_0^a & \frac{J_1\left(\sqrt{b(a-b)}\right)}{\sqrt{b(a-b)}} I_2(b)\, db \\
&= 4a \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+1)!m!(m+2)!2^{2m+2n+3}} \int_0^a (a-b)^n b^{2m+n+2}\, db \\
&= 4a \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n a^{2m+2n+3}(2m+n+2)!}{(n+1)!m!(m+2)!(2m+2n+3)!2^{2m+2n+3}} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=m}^{\infty} \frac{(-1)^{k+m} a^{2k+4}(k+m+2)!}{(k-m+1)!m!(m+2)!(2k+3)!2^{2k+1}} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k a^{2k+4}}{(k+1)!(2k+3)!2^{2k+1}} \sum_{m=0}^{k} \binom{k+1}{m} (-1)^m \frac{(k+m+2)!}{(m+2)!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^{2k+4}}{(k+1)!(k+3)!2^{2k+1}}
\end{aligned}
$$

тому, що

$$
\begin{aligned}
\sum_{m=0}^{k} & \binom{k+1}{m} (-1)^m \frac{(k+m+2)!}{(m+2)!} \\
&= \left(x^{k+2}(1-x)^{k+1}\right)\Big|_{x=1} + (-1)^k \frac{(2k+3)!}{(k+3)!} = (-1)^k \frac{(2k+3)!}{(k+3)!}.
\end{aligned}
$$

Беручи до уваги (7.30), одержуємо

$$
\left(\widehat{\mathbf{T}}_r^{-1}\mathbf{S}^{-1}\mathrm{z}_0^0\right)(\xi) = 8I_2\left(e^{-\frac{|\xi|}{2}}\right) - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^{2k+4}}{(k+1)!(k+3)!2^{2k+1}} = a^2 = e^{-|\xi|}. \tag{7.31}
$$

Отже,

$$
\mathrm{w}_0^0(\xi) = e^{-|\xi|}, \qquad \mathrm{w}_1^0(\xi) = -\frac{\sqrt{3}}{2} e^{-|\xi|}, \qquad \xi \in \mathbb{R}.
$$

Тому

$$
\mathrm{w}(\xi, t) = e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}t} e^{-|\xi|}, \qquad \xi \in \mathbb{R}, \quad t \in [0, T_n],
$$

є єдиним розв'язком системи (5.44), (5.45) з $u = u_n$ і $T = T_n$. Тут $u_n(t) = e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}t}$, $t \in [0, T_n]$, $\{T_n\}_{n=1}^{\infty} \subset (0, \infty)$ є зростаючою послідовністю, і $T_n \to \infty$, коли $n \to \infty$. Маємо

$$\left|\!\left|\!\left| \begin{pmatrix} \mathrm{w}(\cdot, T_n) \\ \mathrm{w}_t(\cdot, T_n) \end{pmatrix} \right|\!\right|\!\right|^1 \leq e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}T_n} \to 0, \quad \text{коли } n \to \infty.$$

Застосовуючи теорему 6.12, бачимо, що $\mathrm{z}(\cdot, t) = \mathbf{S}\widehat{\mathbf{T}}_r \mathrm{w}(\cdot, t)$, $t \in [0, T_n]$, є єдиним розв'язком системи (6.31), (6.32) з $v = v_n$ і $T = T_n$, де

$$v_n(t) = e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}t} \left(-\frac{9}{8} + \int_0^{\infty} K_{y_1}(0, \xi) e^{-\xi}\, d\xi \right), \quad t \in [0, T_n], \tag{7.32}$$

і

$$\left|\!\left|\!\left| \begin{pmatrix} \mathrm{z}(\cdot, T_n) \\ \mathrm{z}_t(\cdot, T_n) \end{pmatrix} \right|\!\right|\!\right|^1 \to 0, \quad \text{коли } n \to \infty.$$

Таким чином, керування v_n, $n = \overline{1, \infty}$, розв'язують проблему наближеної L^{∞}-керованості для стану Z^0 системи (6.31), (6.32) за вільний час.

Нарешті, обчислимо v_n, $n = \overline{1, \infty}$. Беручи до уваги (7.26)–(7.28), одержуємо

$$K_{y_1}(0, \xi) = \frac{1}{8} e^{-\frac{\xi}{2}} \left(\frac{I_1(\mu)}{\mu} + \frac{I_2(\mu)}{2} + \frac{I_2(\mu)}{\mu^2} \right) \bigg|_{\mu = \sqrt{1 - e^{-\frac{\xi}{2}}}}.$$

Тому, позначаючи $a = e^{-\frac{\xi}{2}}$, маємо

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} K_{y_1}(0, \xi) e^{-\xi}\, d\xi &= -\frac{1}{4} \int_0^1 \left(\frac{I_1(\mu)}{\mu} + \frac{I_2(\mu)}{2} + \frac{I_2(\mu)}{\mu^2} \right) \bigg|_{\mu = \sqrt{1-a}} a^2\, da \\ &= -\sum_{m=0}^{\infty} \frac{4(m+1)(m+2)+1}{m!(m+2)!2^{2m+5}} \int_0^1 (1-a)^m a^2\, da \\ &= -\sum_{m=0}^{\infty} \frac{4(m+1)(m+2)+1}{(m+2)!(m+3)!2^{2m+4}} \int_0^1 (1-a)^m a^2\, da \end{aligned}$$

$$= -2\left(I_3(1) + I_1(1)\right) + \frac{9}{8}.$$

Враховуючи (7.32), одержуємо

$$u_n(t) = -2\left(I_3(1) + I_1(1)\right) e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}t}, \qquad t \in [0, T_n], \quad n = \overline{1, \infty}.$$

Example 7.14. Нехай $\alpha > 0$,

$$\mathrm{z}_0^0(x) = x_1 \ln \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - |x|^2}}{|x|} H(\alpha^2 - |x|^2), \qquad x \in \mathbb{R}^2$$
$$\mathrm{z}_1^0(x) = -\frac{x_1}{|x|^2} \frac{\alpha^2 + 2|x|^2}{\sqrt{\alpha^2 - |x|^2}}, \qquad x \in \mathbb{R}^2.$$

Дослідимо керованість стану $\mathrm{Z}^0 = \begin{pmatrix} \mathrm{z}_0^0 \\ \mathrm{z}_1^0 \end{pmatrix}$ системи (5.77), (5.79) за заданий час $T > 0$. Для цього скористаємося висновком 5.41. Позначимо

$$\mathrm{w}_0^0 = \mathbf{\Psi}^{-1} \mathrm{z}_0^0, \qquad \mathrm{w}_1^0 = \mathbf{\Psi}^{-1} \mathrm{z}_1^0$$

і знайдемо $\overline{\mathrm{z}}_0^0$, $\overline{\mathrm{z}}_1^0$ такі, що

$$\mathrm{z}_0^0(x) = \frac{\partial}{\partial x_1} \overline{\mathrm{z}}_0^0(|x|), \quad \mathrm{z}_1^0(x) = \frac{\partial}{\partial x_1} \overline{\mathrm{z}}_1^0(|x|), \qquad x \in \mathbb{R}^2.$$

Маємо

$$\overline{\mathrm{z}}_0^0(r) = \frac{1}{2} H(\alpha^2 - r^2) \left(r^2 \ln \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - r^2}}{r} - \alpha \sqrt{\alpha^2 - r^2} \right),$$
$$\overline{\mathrm{z}}_0^0(r) = H(\alpha^2 - r^2) \left(\alpha \ln \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - r^2}}{r} - 2\sqrt{\alpha^2 - r^2} \right).$$

За теоремою 4.16 одержуємо

$$\mathrm{w}_0^0(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{d}{d\xi} \int_{|\xi|}^{\infty} \frac{r \overline{\mathrm{z}}_0^0(r)}{\sqrt{r^2 - \xi^2}} \, dr$$

$$
\begin{aligned}
=&\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{d}{d\xi}\left(H(\alpha^2-\xi^2)\int_{|\xi|}^{\alpha}\left(r^2\ln\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2-r^2}}{r}\right.\right.\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\left.\left.-\alpha\sqrt{\alpha^2-r^2}\right)\frac{r\,dr}{\sqrt{r^2-\xi^2}}\right)\\
=&\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{d}{d\xi}\left(H(\alpha^2-\xi^2)\int_{0}^{\sqrt{\alpha^2-\xi^2}}\left(\left(u^2+\xi^2\right)\ln\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2-\xi^2-u^2}}{\sqrt{u^2+\xi^2}}\right.\right.\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\left.\left.-\alpha\sqrt{\alpha^2-\xi^2-u^2}\right)du\right)\\
=&\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{d}{d\xi}\left(H(\alpha^2-\xi^2)\left(\alpha\int_{0}^{\sqrt{\alpha^2-\xi^2}}\frac{u^3/3+\xi^2u}{u^2+\xi^2}\frac{u\,du}{\sqrt{\alpha^2-\xi^2-u^2}}\right.\right.\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\left.\left.-\frac{\pi}{4}\alpha\left(\alpha^2-\xi^2\right)\right)\right) \qquad (7.33)
\end{aligned}
$$

Маємо

$$
\begin{aligned}
&\int_{0}^{\sqrt{\alpha^2-\xi^2}}\frac{u^3/3+\xi^2u}{u^2+\xi^2}\frac{u\,du}{\sqrt{\alpha^2-\xi^2-u^2}}\\
&\quad=\frac{1}{3}\int_{0}^{\sqrt{\alpha^2-\xi^2}}\left(u^2+2\xi^2\right)\frac{du}{\sqrt{\alpha^2-\xi^2-u^2}}\\
&\qquad\qquad-\frac{2}{3}\xi^4\int_{0}^{\sqrt{\alpha^2-\xi^2}}\frac{du}{(u^2+\xi^2)\sqrt{\alpha^2-\xi^2-u^2}}\\
&\quad=\frac{1}{3}\int_{0}^{\pi/2}\left(\left(\alpha^2-\xi^2\right)\sin^2\varphi\right)\,d\varphi-\frac{2}{3}\xi^4\int_{0}^{\pi/2}\frac{d\varphi}{(\alpha^2-\xi^2)\sin^2\varphi+\xi^2}
\end{aligned}
$$

Продовжуючи (7.33), маємо

$$
\mathrm{w}_0^0(\xi)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}H(\alpha^2-\xi^2)\left(\alpha\xi-\xi^2\operatorname{sgn}\xi\right).
$$

Знову скориставшись теоремою 4.16, одержуємо

$$
\begin{aligned}
\mathrm{w}_1^0(\xi)=&\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{d}{d\xi}\int_{|\xi|}^{\infty}\frac{r\bar{\mathrm{z}}_1^0(r)}{\sqrt{r^2-\xi^2}}\,dr\\
=&\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{d}{d\xi}\left(H(\alpha^2-\xi^2)\int_{|\xi|}^{\alpha}\left(\alpha\ln\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2-r^2}}{r}\right.\right.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - 2\sqrt{\alpha^2 - r^2}\Big) \frac{r\,dr}{\sqrt{r^2-\xi^2}}\Bigg)\\
=&\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{d}{d\xi}\left(H(\alpha^2-\xi^2)\int_0^{\sqrt{\alpha^2-\xi^2}}\left(\alpha\ln\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2-\xi^2-u^2}}{\sqrt{u^2+\xi^2}}\right.\right.\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\left.\left.-2\sqrt{\alpha^2-\xi^2-u^2}\right)du\right)\\
=&\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{d}{d\xi}\left(H(\alpha^2-\xi^2)\left(\alpha^2\int_0^{\sqrt{\alpha^2-\xi^2}}\frac{u^2\,du}{(u^2+\xi^2)\sqrt{\alpha^2-\xi^2-u^2}}\right.\right.\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\left.\left.-\frac{\pi}{2}\left(\alpha^2-\xi^2\right)\right)\right)\\
=&\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{d}{d\xi}\left(H(\alpha^2-\xi^2)\left(\frac{\pi}{2}\xi^2\right.\right.\\
&\qquad\qquad\left.\left.-\alpha^2\xi^2\int_0^{\sqrt{\alpha^2-\xi^2}}\frac{du}{(u^2+\xi^2)\sqrt{\alpha^2-\xi^2-u^2}}\right)\right)\\
=&\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{d}{d\xi}\left(H(\alpha^2-\xi^2)\left(\xi^2-\alpha|\xi|\right)\right)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}H(\alpha^2-\xi^2)\left(2\xi-\alpha\operatorname{sgn}\xi\right).
\end{aligned}
$$

Таким чином, за теоремою 5.17 стан $\mathrm{W}^0 = \begin{pmatrix} \mathrm{w}_0^0 \\ \mathrm{w}_1^0 \end{pmatrix} \in \widetilde{\mathbf{H}}_0^{-1/2[1/2]}$ системи (5.4), (5.5) є L^∞-керованим за час $T > \alpha$, оскільки умови виконано (5.38)–(5.40). Крім того, керування

$$
u(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} H(\alpha^2 - t^2)(\alpha t - t^2), \qquad t \in [0, T],
$$

розв'язує проблему L^∞-керованості для цього стану. За висновком 5.41 і теоремою 5.42 стан $\mathrm{Z}^0 \in \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{H}}}^{-1/2}$ системи (5.77), (5.79) є L^∞-керованим за час $T > \alpha$ і керування u розв'язує проблему L^∞-керованості для цього стану.

Example 7.15. Нехай

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{z}_0^0(x) = \frac{1}{(1+|x|^2)^{3/2}},\\
&\mathrm{z}_1^0(x) = -\frac{2}{\pi}\left(\frac{|x|^2-2}{(1+r^2)^{5/2}}\ln\frac{\sqrt{1+|x|^2}+1}{\sqrt{1+|x|^2}-1}+\frac{3}{2(1+|x|r^2)^2}\right), \quad x\in\mathbb{R}^2.
\end{aligned}
$$

Оскільки умову (5.98) для стану $\mathrm{Z}^0 = \begin{pmatrix}\mathrm{z}_0^0\\ \mathrm{z}_1^0\end{pmatrix} \in \widehat{\mathbf{H}}^{1/2}$ системи (5.93), (5.95) не виконано, то за теоремою 5.50 цей стан не є (наближено) L^∞-керованим за будь-який заданий час. Дослідимо для цього стану наближену керованість за вільний час. Бачимо що умову (5.96) для стану Z^0 системи (5.93), (5.95) виконано. З'ясуємо, чи виконано умову (5.97). За теоремою 4.22 одержуємо

$$
\begin{aligned}
\left(\mathbf{\Phi}^{-1}\mathrm{z}_0^0\right)(\xi) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_\xi^\infty \frac{r\,dr}{(1+r^2)^{3/2}\sqrt{r^2-\xi^2}}\\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \frac{dp}{(1+\xi^2+p^2)^{3/2}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1+\xi^2}, \quad \xi\in\mathbb{R}. \quad (7.34)
\end{aligned}
$$

Скориставшись теоремою 4.21 і (7.34), замінюючи ξ на $r\cosh v$ та підставляючи $\tanh v = p$, маємо

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{\Phi}\left(\operatorname{sgn}(\cdot)\ \left(\mathbf{\Phi}^{-1}\mathrm{z}_0^0\right)'\right)(x) = -\int_{|x|}^\infty \frac{(3\xi^2-1)\,d\xi}{(1+\xi^2)^3\sqrt{\xi^2-|x|^2}}\\
&\quad= -\int_0^\infty \frac{3|x|^2\cosh^2 v-1}{(1+|x|^2\cosh^2 v)^3}\,dv = -\int_0^1 \frac{(3|x|^2-1+p^2)(1-p^2)}{(1+|x|^2-p^2)^3}\\
&= 4|x|^4\int_0^1\frac{dp}{(1+|x|^2-p^2)^3} - 5|x|^2\int_0^1\frac{dp}{(1+|x|^2-p^2)^2} + \int_0^1\frac{dp}{1+|x|^2-p^2}\\
&\quad= -\frac{3}{2(1+|x|^2)^2} - \frac{|x|^2-2}{(1+|x|^2)^{5/2}}\ln\frac{\sqrt{1+|x|^2}+1}{\sqrt{1+|x|^2}-1} = \mathrm{z}_1^0(x), \quad x\in\mathbb{R}^2.
\end{aligned}
$$

Отже, умову (5.97) виконано. Тому, застосовуючи теорему 5.51, бачимо, що стан Z^0 системи (5.93), (5.95) є наближено L^∞-керованим за вільний час. Знайдемо керування, що розв'язують проблему L^∞-керованості для цього стану. Позначимо $\mathrm{w}_0^0 = \boldsymbol{\Phi}^{-1}\mathrm{z}_0^0$, $\mathrm{w}_1^0 = \boldsymbol{\Phi}^{-1}\mathrm{z}_1^0$. Зрозуміло, що умову (5.39) для стану $\mathrm{W}^0 = \begin{pmatrix} \mathrm{w}_0^0 \\ \mathrm{w}_1^0 \end{pmatrix} \in \widehat{\mathbf{H}}_0^{1/2[1/2]}$ системи (5.44), (5.45) виконано. Для побудови таких керувань скористаємося схемою, розглянутою в доведенні теореми 5.24, зокрема, формулою (5.56). За (7.34) маємо

$$\mathrm{w}_0^0(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1+\xi^2}, \qquad \xi \in \mathbb{R}.$$

Для $T_n = n$, $n \in \mathbb{N}$, маємо

$$\sqrt{T_n}\mathrm{w}_0^0(T_n) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{n}{1+n^2} \to 0, \qquad \text{коли } n \to \infty.$$

Позначимо

$$\begin{aligned}
\widehat{u}_n(t) &= \frac{\mathrm{w}_0^0(0)H(T_n^2-t^2)}{\mathrm{w}_0^0(0)-\mathrm{w}_0^0(T_n)}\left(\mathrm{w}_0^0(t)-\mathrm{w}_0^0(T_n)\right) \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)H(n^2-t^2)\left(\frac{1}{1+t^2}-\frac{1}{1+n^2}\right) \\
\widetilde{u}_n(t) &= \widehat{u}_n'(t) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)H(n^2-t^2)\frac{2t}{(1+t^2)^2}, \quad t \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

У доведенні теореми показано, що керування $u_n(t) = \widetilde{u}_n(t)$, $t \in [0, T_n]$, розв'язують проблему L^∞-керованості для стану системи $\mathrm{W}^0 \in \widehat{\mathbf{H}}_0^{1/2[1/2]}$ системи (5.44), (5.45). Отже, ці керування розв'язують проблему L^∞-керованості і для стану $\mathrm{Z}^0 \in \widehat{\mathbf{H}}^{1/2}$ системи (5.93), (5.95).

Example 7.16. Нехай

$$\widehat{k}(x) = (1+|x|)\cosh^2 x, \qquad \widehat{\rho}(x) = \frac{\cosh^2 x}{1+|x|}, \qquad x \in \mathbb{R},$$

$$\widehat{\gamma}(x) = (1+|x|)^2 + (1+|x|)\tanh|x| - \frac{2+|x|}{4(1+|x|)\cosh x}, \qquad x \in \mathbb{R},$$

$$\zeta(t) = 8I_2(1) - 8\left(1 - e^{-\frac{t}{2}}\right) I_2\left(\sqrt{1-e^{-\frac{t}{2}}}\right) - 4\sqrt{1-e^{-\frac{t}{2}}} I_1\left(\sqrt{1-e^{-\frac{t}{2}}}\right), \qquad t > 0.$$

Зрозуміло, що $\eta(x) = \cosh x$, $\theta = \sqrt{1+|x|}$, $\sigma(x) = \operatorname{sgn} x \, \ln(1+|x|)$, $x \in \mathbb{R}$, $\sigma^{-1}(\lambda) = \operatorname{sgn}\lambda \left(e^{|\lambda|} - 1\right)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Отже, $\varphi \in \mathbb{H}^0$ тоді і лише тоді, коли $\frac{\cosh x}{\sqrt{1+|x|}}\varphi \in H_0^0$; а $\varphi \in \mathbb{H}^1$ тоді і лише тоді, коли $\sqrt{1+|x|}\,(\varphi\cosh x)' \in H_0^0$. Маємо

$$\nu(x) = \left(\theta^2\left(\theta^2\frac{\eta'}{\eta}\right)'\right)(x) + \left(\theta^2\frac{\eta'}{\eta}\right)^2(x)$$
$$= (1+|x|)^2 - (1+|x|)\tanh|x| = \widehat{\gamma}(x) + \frac{1}{4} + \frac{1}{4(1+|x|)}, \ x \in \mathbb{R}.$$

Отже, умову (6.2) і (6.3) виконано і для $q = 1/2$, $r(\lambda) = e^{-|\lambda|}/4$, $\lambda \in \mathbb{R}$, виконано умову (1.2). Розглянемо проблему стабілізації системи (6.57), (6.58) за допомогою позиційного керування (6.59), де $b_0 = 1/4 - b^2 = -3/4$, $b_1 = -2b = -2$, $b = 1$. За теоремою 6.27 система (6.57), (6.58) є стабілізовною, якщо виконано умову

$$1 = b > \sqrt{2}M_0 \int_0^\infty (1+\xi)|r(\xi)|\,d\xi, \tag{7.35}$$

де $M_0 > 0$ є сталою з оцінки (1.4). Перевіримо її. Скориставшись формулами (7.26), (7.27) для ядра K, для $y_2 > y_1 > 0$ одержуємо

$$|K(y)| \le \frac{1}{4}e^{-\frac{y_1+y_2}{2}} \max_{\mu\in[0,1]}\left|\frac{I_1(\mu)}{\mu}\right| \le \frac{1}{4}I_1(1)e^{-\frac{y_1+y_2}{2}} = M_0\sigma_0\left(\frac{y_1+y_2}{2}\right),$$

де $M_0 = I_1(1)$,

$$\sigma_0(\mu) = \int_\mu^\infty |r(\xi)|\,d\xi = \frac{1}{4}e^{-\mu}, \qquad \mu > 0.$$

Маємо

$$\sqrt{2}M_0\int_0^\infty(1+\xi)|r(\xi)|\,d\xi = M_0\frac{\sqrt{2}}{4}\int_0^\infty(1+\xi)e^{-\xi}d\xi$$
$$= \frac{M_0}{\sqrt{2}} = \frac{I_1(1)}{\sqrt{2}} \leq \frac{\sinh 1}{\sqrt{2}} = \frac{e^2-1}{2\sqrt{2}e} < 1 = b.$$

Таким чином, умову (7.35) виконано, тому за теоремою 6.27 система (6.57), (6.58) є стабілізовною.

Знайдемо тепер розв'язок цієї системи із заданим керуванням для початкового стану $\mathrm{Z}^0 = \begin{pmatrix}\mathrm{z}_0^0\\ \mathrm{z}_1^0\end{pmatrix}$, де $\mathrm{z}_0^0(x) = \frac{8}{\cosh x}I_2\left(\frac{1}{\sqrt{1+|x|}}\right)$, $\mathrm{z}_1^0(x) = 0$, $x\in\mathbb{R}$. Маємо $\mathrm{Z}^0 \in \widetilde{\mathbb{H}}^0$. Позначимо

$$\mathrm{W}^0 = \begin{pmatrix}\mathrm{w}_0^0\\ \mathrm{w}_1^0\end{pmatrix} = \widetilde{\mathbf{T}}_r^{-1}\mathbf{S}^{-1}\mathrm{Z}^0 = \eta\mathrm{Z}^0 = (1+x^2)^{-1/2}\mathrm{Z}^0$$

і розглянемо задачу (5.105), (5.106) з керуванням (5.107), де $b_0 = -1$, $b_1 = -2$. Для нашого r ядра K та L задані формулами (7.26)–(7.28). Скориставшись формулою (7.31), одержуємо

$$\mathrm{w}_0^0(\xi) = \operatorname{sgn}\xi e^{-|\xi|}, \quad \mathrm{w}_1^0(\xi) = 0, \qquad \xi\in\mathbb{R}.$$

Позначимо $\omega(t) = e^{-t}$, $t>0$. Скориставшись формулами (1.26), (5.111), (5.113), (5.114), одержуємо розв'язок задачі (5.105), (5.106) із зазначеним керуванням:

$$\mathrm{w}(\xi,t) = e^{-\xi}H(\xi-t) - e^{\xi}H(-\xi-t)$$
$$+ e^{-t}H(t^2-\xi^2)\operatorname{sgn}\xi, \qquad \xi\in\mathbb{R}, \quad t>0. \qquad (7.36)$$

Тоді

$$\left|\left|\left|\begin{pmatrix} \mathrm{w}(\cdot,t) \\ \mathrm{w}_t(\cdot,t) \end{pmatrix}\right|\right|\right|^0 \le e^{-t}\sqrt{1+4t} \to 0, \quad \text{коли } t \to +\infty. \tag{7.37}$$

Обчислимо $\widetilde{\mathrm{z}}(\cdot,t) = \mathbf{S}\widetilde{\mathbf{T}}_r \mathrm{w}(\cdot,t)$, $t \ge 0$. Оскільки $\widetilde{\mathrm{z}}$ є непарною за x, то обчислення будемо проводити для $x > 0$. Враховуючи (7.26), (7.27), одержуємо

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathrm{z}}(x,t) =& \mathrm{w}(x,t) + \int_x^\infty K(x,\xi)\mathrm{w}(\xi,t)\,d\xi \\
=& H(t-x)\left(e^{-t} + e^{-t}\int_x^\infty K(x,\xi)\,d\xi + \int_t^\infty K(x,\xi)e^{-\xi}\,d\xi\right) \\
&+ H(x-t)\left(e^{-x}\int_x^\infty K(x,\xi)e^{-\xi}\,d\xi\right) \\
=& H(t-x)\int_t^\infty \widetilde{K}(x,\xi)e^{-\xi}\,d\xi + H(x-t)\int_x^\infty \widetilde{K}(x,\xi)e^{-\xi}\,d\xi
\end{aligned} \tag{7.38}$$

Позначивши $a = e^{-\frac{t}{2}}$, $v = e^{-\frac{x}{2}}$, $u = e^{-\frac{\xi}{2}}$ для $x \le t \le \xi$, маємо $u \le a \le v$ та

$$\begin{aligned}
&\int_t^\infty \widetilde{K}(x,\xi)e^{-\xi}\,d\xi = \int_t^\infty I_0\left(\sqrt{e^{-\frac{x}{2}}\left(e^{-\frac{x}{2}} - e^{-\frac{\xi}{2}}\right)}\right)e^{-\xi}\,d\xi \\
&=2\int_0^a I_0\left(\sqrt{v(v-u)}\right)u\,du = 2\sum_{m=0}^\infty \frac{v^m}{2^{2m}(m!)^2}\int_0^a (v-u)^m u\,du \\
&=2\sum_{m=0}^\infty \frac{v^{2m+2}}{2^{2m}m!(m+2)!} - 2\sum_{m=0}^\infty \frac{v^m(v-a)^{m+2}}{2^{2m}m!(m+2)!} - 2a\sum_{m=0}^\infty \frac{v^m(v-a)^{m+1}}{2^{2m}m!(m+1)!} \\
&=8I_2(v) - 8\frac{v-a}{v}I_2\left(\sqrt{v(v-a)}\right) - 4\sqrt{\frac{v-a}{v}}I_1\left(\sqrt{v(v-a)}\right)
\end{aligned}$$

Враховуючи (7.38), одержуємо

$$\widetilde{\mathrm{z}}(x,t) = 8I_2\left(e^{-\frac{|x|}{2}}\right)\operatorname{sgn} x - \left(8\left(1 - e^{|x|-t}2\right)I_2\left(\sqrt{e^{-\frac{|x|}{2}}\left(e^{-\frac{|x|}{2}} - e^{-\frac{t}{2}}\right)}\right)\right)$$

$$+4\sqrt{1-e^{|x|-t}2}\,I_1\left(\sqrt{e^{-\frac{|x|}{2}}\left(e^{-\frac{|x|}{2}}-e^{-\frac{t}{2}}\right)}\right)\right)H(t^2-x^2)\operatorname{sgn}x, \quad x\in\mathbb{R}.$$

Зокрема, $\widetilde{\mathrm{z}}(+0,t)=\zeta(t)$, $t>0$. Отже, за теоремою 6.23 та висновком 6.24 $\mathrm{z}=\widetilde{\mathrm{z}}$ є розв'язком системи (6.57), (6.58) із знайденим для неї керуванням та задовольняє умову

$$\left|\!\left|\!\left|\begin{pmatrix}\mathrm{z}(\cdot,t)\\ \mathrm{z}_t(\cdot,t)\end{pmatrix}\right|\!\right|\!\right|^0 \le L_0\left|\!\left|\!\left|\begin{pmatrix}\mathrm{w}(\cdot,t)\\ \mathrm{w}_t(\cdot,t)\end{pmatrix}\right|\!\right|\!\right|^0$$
$$\le L_0e^{-t}\sqrt{1+4t}\to 0,\ \text{коли } t\to+\infty.$$

де $L_0>0$ є деякою сталою, що залежать лише від даних рівняння (6.57) та керування (6.59), тобто, від ρ, k, γ та b.

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі введено та досліджено нові оператори перетворення $\widetilde{\mathbb{T}} = \mathbf{S}\widetilde{\mathbf{T}}_r$ та $\widehat{\mathbb{T}} = \mathbf{S}\widehat{\mathbf{T}}_r$ для диференціального оператора $\dfrac{1}{\rho(x)}\dfrac{d}{dx}\left(k(x)\dfrac{d}{dx}(\cdot)\right)$ і нові простори $\mathbb{H}^m$, $m = \overline{-2,2}$, соболєвського типу та розроблено теорію їх застосування до задач теорії керування та теорії крайових задач.

Крім того, введено і досліджено оператори впливу Ψ та Φ (а також їх модифікації $\widehat{\Psi}$ та $\widehat{\Phi}$), які є небієктивними аналогами операторів перетворення, та застосовано їх для одержання критеріїв керованості хвильового рівняння зі сталими коефіцієнтами з керуванням в умові Діріхле або умові Неймана.

Також введено і досліджено оператори перетворення $\boldsymbol{\Psi}$ та $\boldsymbol{\Phi}$ і простори соболєвського типу $H_0^{s[1/2]}$ та $H^0_{s[1/2]}$, $s \in \mathbb{R}$, для двовимірного оператора Лапласа Δ, визначеного на радіально симетричних розподіах.

Застосовуючи оператори впливу (Ψ, $\widehat{\Psi}$, Φ та $\widehat{\Phi}$) та їх властивості, одержано критерії керованості для хвильового рівняння зі сталими коефіцієнтами і сталим потенціалом, керованого крайовими умовами Діріхле або крайовими умовами Неймана.

Застосовуючи оператори перетворення $\boldsymbol{\Psi}$ та $\boldsymbol{\Phi}$, доведено, що двовимірне хвильове рівняння зі сталими коефіцієнтами на півплощині, кероване крайовою умовою Діріхле або крайовою умовою Неймана імпульсного типу, відтворює властивості одновимірного хвильового рівняння зі сталими коефіцієнтами на півосі, керованого крайовою умовою Діріхле або крайовою умовою Неймана, відповідно. Тут перша проблема розглядається в класичних просторах Соболева, а друга — у модифікованих просторах $H_0^{s[1/2]}$ соболєвського типу. Таким чином, критерій керованості для двовимірного хвильового рівняння на півплощині одержано з критерію керованості одновимірного хвильового рівняння на півосі.

Доведено стабілізовність хвильового рівняння зі сталими коефіцієнтами за допомоги позиційного керування без запізнення та за допомоги позиційного керування із запізненням. Також, одержано критерії коректності нелокальної крайової задачі для хвильового рівняння зі сталими коефіцієнтам і сталим потенціалом.

Застосовуючи оператори перетворення $\widetilde{\mathbb{T}} = \mathbf{S}\widetilde{\mathbf{T}}_r$ та $\widehat{\mathbb{T}} = \mathbf{S}\widehat{\mathbf{T}}_r$ доведено, що хвильове рівняння зі змінними коефіцієнтами на півосі, кероване крайовою умовою Діріхле або крайовою умовою Неймана, відтворює властивості керованості хвильового рівняння зі сталими коефіцієнтами і сталим потенціалом на півосі, кероване крайовою умовою Діріхле або крайовою умовою Неймана, відповідно. Тут перша керована система розглядається в модифікованих просторах $\mathbb{H}^m$ соболєвського типу, а друга — в класичних просторах Соболєва H^m. Таким чином, критерій керованості для хвильового рівняння зі змінними коефіцієнтами одержано з критерію керованості для хвильового рівняння зі сталими коефіцієнтами.

Застосовуючи оператор перетворення $\widetilde{\mathbb{T}} = \mathbf{S}\widetilde{\mathbf{T}}_r$, доведено стабілізовність за допомоги позиційного керування для хвильового рівняння зі змінними коефіцієнтами з відповідного результату для рівняння зі сталими коефіцієнтами. За допомоги операторів перетворення $\widetilde{\mathbb{T}} = \mathbf{S}\widetilde{\mathbf{T}}_r$ та $\widehat{\mathbb{T}} = \mathbf{S}\widehat{\mathbf{T}}_r$ одержано також критерії коректності нелокальної крайової задачі для хвильового рівняння зі змінними коефіцієнтам з відповідних результатів для рівняння зі сталими коефіцієнтами.

Таким чином, усі основні результати цієї роботи, одержані для хвильового рівняння зі сталими коефіцієнтами, узагальнено за допомоги операторів перетворення $\widetilde{\mathbb{T}} = \mathbf{S}\widetilde{\mathbf{T}}_r$ та $\widehat{\mathbb{T}} = \mathbf{S}\widehat{\mathbf{T}}_r$ на випадок хвильового рівняння зі змінними коефіцієнтами.

Усі основні результати дисертації подано з повними математичними доведеннями. Одержані результати носять теоретичний характер. Вони поглиблюють наші знання про диференціальні оператори другого порядку зі сталими і змінними коефіцієнтами та їх зв'язок з формуванням нових операторів перетворення і нових просторів соболєвського типу. У роботі розроблено методику застосування операторів перетворення до задач теорії керування і теорії крайових задач. Ця методика і, власне, самі результати можуть бути використані в теорії диференціальних рівнянь, математичній фізиці, теорії просторів соболєвського типу та інших розділах математики.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

[1] Ammar Khodja F. *Stabilisation de l'équation des ondes par un contrôleur dynamique* / Khodja F. Ammar, A. Benabdallakh // C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I Math. — 1995. — V. 321, No. 2. — P. 195–198.

[2] Antosik P. *Theory of Distributions. The Sequential Approach* / P. Antosik, J. Mikusiński, R. Sikorski. — Amsterdam — Warsawa: Elsevier, 1973. — 273 p.

[3] Bastos W.D. *On exact boundary controllability for linearly coupled wave equations* / W.D. Bastos, A. Spezamiglio, C.A. Raposo // J. Math. Anal. Appl. — 2011. — V. 381. — P. 557–564.

[4] Bellman R. *Differential-Difference Equations* / R. Bellman, K.L. Cooke. — New York — London: Academic Press, 1963. — 462 p.

[5] Boyadrhiev K.N. *Strong stability of Hilbert space contraction semi-groups* / K.N. Boyadrhiev, N. Levan // Stud. Sci. Math. Hung. — 1995. — V. 30, No. 304. — P. 165–182.

[6] Boyer F. *On the penalised HUM approach and its applications to the numerical approximation of null-controls for parabolic problems* / F. Boyer // ESAIM: Proceedings. — 2013. — V. 41. — P. 15–58.

[7] Castro C. *Exact controllability of the 1-D wave equation from a moving interior point* / C. Castro // ESAIM: Control, Optim. Calc. Var. — 2013. — V. 19. — P. 301–316.

[8] Curtain R.F. *Equivalence of input-output stability and exponential stability for infinite dimensional systems* / R.F. Curtain // Math. Syst. Theory. — 1988. — V. 21. — P. 19–48.

[9] Datko R. *An example of the effect of time delays in boundary feedback stabilization of wave equations* / R. Datko, J. Lagnese, M.P. Polis // SIAM J. Contr. Optim. — 1986. — V. 24. — P. 152–156.

[10] Dolecki S. *A general theory of observation and control* / S. Dolecki, D.R. Russel // SIAM J. Control Optim. — 1977. — V. 15. — P. 185–220.

[11] Dreher M. *Edge Sobolev spaces and weakly hyperbolic equations* / M. Dreher, I. Witt // Ann. Mat. Pura Appl. — 2002. — V. 180. — P. 451-482.

[12] Dutrifoy A. *A simple justification of the singular limit for equatorial shallow-water dynamics* / A. Dutrifoy, S. Schochet, A.J. Majda // Comm. Pure Appl. Math. — 2009. — V. 62. — P. 322–333.

[13] Eckhardt J. *Direct and inverse spectral theory of singular left-defnite Sturm–Liouville operators* / J. Eckhardt // J. Differential Equations. — 2012. — V. 253. — P. 604–634.

[14] Fanelli F. *Weak observability estimates for 1-D wave equations with rough coeffcients* / F. Fanelli, E. Zuazua // Ann. Inst. H. Poincaré (C) Non Linear Analysis. — 2015. — V. 32. — P. 245–277.

[15] Fardigola L.V. *On stabilizability of evolution systems of partial differential equations on* $\mathbb{R}^n \times [0, +\infty)$ *by feedback control* / L.V. Fardigola // Вісник Харк. ун-ту. Сер. Матем., прикл. матем і мех. — 2000. — № 475. — С. 183–194.

[16] Fardigola L.V. *On stabilizability of evolution systems of partial differential equations on* $\mathbb{R}^n \times [0, +\infty)$ *by time-delayed feedback controls* / L.V. Fardigola // Central Europ. J. Math. — 2003. — V. 1, No. 2. — P. 141–155.

[17] Fardigola L.V. *On stabilizability of evolution partial differential equations on* $\mathbb{R}^n \times [0, +\infty)$ *by time-delayed feedback controls* / L.V. Fardigola, M.V. Lobanova // Mat. Fiz., Anal., Geom. — 2003. — V. 10, No. 2. — P. 188–204.

[18] Fardigola L.V. *On controllability problems for the wave equation on a half-plane* / L.V. Fardigola // J. Math. Phys., Anal., Geom. — 2005. — V. 1. — P. 93–115.

[19] Fardigola L.V. *Controllability problems for the string equation on a half-axis with a boundary control bounded by a hard constant* / L.V. Fardigola // SIAM J. Control Optim. — 2008. — V. 47. — P. 2179–2199.

[20] Fardigola L.V. The Fourier transform method in controllability problems for the finite string equation with a boundary control bounded by a hard constant / L.V. Fardigola // Further Progress in Analysis. Proc. 6th Int. ISAAC Congress. Ankara, Turkey, Aug. 13–18, 2007. — World Scientific. — 2009. — P. 337–346.

[21] Fardigola L.V. *Controllability problems for the 1-d wave equation on a half-axis with the Dirichlet boundary control* / Larissa V. Fardigola // ESAIM: Control, Optim. Calc. Var. — 2012. — V. 18. — P. 748–773.

[22] Fardigola L.V. *Controllability problems for the 1-d wave equations on a half-axis with Neumann boundary control* / Larissa V. Fardigola // Mathematical Control and Related Fields. — 2013. — V. 3. — P. 161–183.

[23] Fardigola L.V. *Transformation operators of the Sturm–Liouville problem in controllability problems for the wave equation on a half-axis* / Larissa V. Fardigola // SIAM J. Control Optim. — 2013. — V. 51. — P. 1781–1801.

[24] Fardigola L.V. *Transformation operators in controllability problems for the wave equations with variable coefficients on a half-axis controlled by*

the Diriclet boundary condition / Larissa V. Fardigola // Mathematical Control and Related Fields. — 2015. — V. 5. — P. 31–53.

[25] Fardigola L.V. *Modified Sobolev spaces in controllability problems for the wave equation on a half-plane* / L.V. Fardigola // J. Math. Phys., Anal., Geom. — 2015. — V. 11. — P. 18–44.

[26] Fardigola L.V. *Transformation operators and modified Sobolev spaces in controllability problems on a half-axis* / L.V. Fardigola // J. Math. Phys., Anal., Geom. — 2016. — V. 12. — P. 17–47.

[27] Fardigola L.V. *Non-local boundary-value problems in an infinite layer for linear partial evolutional systems with integral boundary conditions* / L.V. Fardigola // International Conference "Boundary-Value Problems, Special Functions and Fractional Calculus", Feb. 16–20, 1996: Book of abstracts. — Minsk, 1996. — P. 128–129.

[28] Fardigola L.V. *On two-point boundary-value problems in a layer for partial differential equationswith variable coefficients* / L.V. Fardigola // Conference on Differential Equations and their Applications, Aug. 25–29, 1997: Enlarged Abstracts. — Brno, 1997. — P. 117–118.

[29] Fardigola L.V. *On stabilizability of evolution partial differential equations by time-delayed feedback control* / L.V. Fardigola, M.V. Lobanova // International Akhiezer Centenary Conference "Theory of Functions and Mathematical Physics", Aug. 13–17, 2001: Book of abstracts. — Kharkiv, 2001. — P. 21–22.

[30] Fardigola L.V. *The Markov power moment problem in problems of null-controllability and approximate null-controllability for the wave equation on a half-axis* / L.V. Fardigola, G.M. Sklyar // International Akhiezer Centenary Conference "Theory of Functions and Mathematical Physics", Aug. 13–17, 2001: Book of abstracts. — Kharkiv, 2001. — P. 23–24.

[31] Fardigola L.V. *On stabilizability of evolution systems of partial differential equations by time-delayed feedback contol* / L.V. Fardigola // 1st Ukrainian Congress of Mathematics , Aug. 21–23, 2001: Book of abstracts. — Kyiv, 2001. — P. 35.

[32] Fardigola L.V. *The Markov power moment problem in the problem of partial null-controllability for the wave equation on a half-axis* / L.V. Fardigola // International Conference "Inverse Problems and Nonlinear Equations", Aug. 12–16, 2002: Book of abstracts. — Kharkiv, 2002. — P. 27.

[33] Fardigola L.V. *The Markov power moment problem in controllability problems for the traverse vibration equation on a half-axis* / Larissa V. Fardigola // Second International Conference "Mathematical Analysis and Economics", Apr. 1–4, 2003: Book of abstracts. — Kharkiv, 2003. — P. 15-16.

[34] Fardigola L. *On the null-controllability problem for the wave equation on a half-plane and the Markov power moment problem* / Larissa

Fardigola // International Conference "Nonlinear Partial Differential Equations", Alushta, Sep. 15–21, 2003: Book of abstracts. — Donetsk, 2003. — P. 15-16.

[35] Fardigola L.V. *On the null-controllability problem for the wave equation on a half-plane and the Markov power moment problem* / Larissa V. Fardigola // First Karazin Scientific Readings Dedicated to the Bicentenary of Karazin Kharkiv Nationl University, Kharkiv, June 14–16, 2004: Book of abstracts. — Kharkiv, 2004. — P. 16.

[36] Fardigola L.V. *Controllability problems for the wave equation on a half-axis* / L.V. Fardigola // International Conference on Differential Equations Dedicated to the 100th Anniversary of Ya.B. Lopatinsky, Sep. 12–17, 2006: Book of abstracts. — Lviv, 2006. — P. 87-88.

[37] Fardigola L.V. *Controllability problems for the string equation on a halh-axis* / L.V. Fardigola // International Conference "Differential Equations and Related Topics" dedocated to I.G. Petrovskii, May 21–26, 2007: Book of abstracts. — Moscow, 2007. — P. 90.

[38] Fardigola L.V. *On controllability problems for the 1-d wave equation on a half-axis* / L.V. Fardigola // "Lyapunov Memorial Conference": International Conference on the Occasion of the 150th Birthday of Aleksandr Mikhailoviv Lyapunov, May 21–26, 2007: Book of abstracts. — Kharkiv, 2007. — P. 42.

[39] Fardigola L.V. *The Fourier transform method and the Markov power moment problem in controllability problems for the wave equation on a half-axis* / L.V. Fardigola // 6th International ISAAC Congress, Aug. 13 – 18, 2007: Book of abstracts. — Ankara, 2007. — P. 33.

[40] Fardigola L. *Influence operators in controllability problems for the wave equation on a half-axis* / Larissa Fardigola // International Conference V.Ya. Skorobohatko Mathematical Conference, Sep. 19–23, 2011: Book of abstracts. — Drohobych, 2011. — P. 87-88.

[41] Fardigola L.V. *Influence operators in controllability problems for the string equation on a half-axis* / L.V. Fardigola // "Complex Analysis and its Applications" International Conference Dedicated to the 70th Anniversary of A.F. Grishin, Aug. 15–18, 2011: Book of abstracts. — Kharkiv, 2011. — P. 19–20.

[42] Fardigola L.V. *Controllability problems for the 1-d wave equation on a half-axis controlled by the Dirichlet boundary condition* / L.V. Fardigola // "Spectral Theory and Differential Equations" International Conference in Honor of Vladimir A. Marchenko's 90th Birthday, Aug. 20–24, 2012: Book of abstracts. — Kharkiv, 2012. — P. 33-34.

[43] Fardigola L. *On transformation operators in controllability problems for the wave equations with variable coefficients on a half-axis controlled by the Dirichlet boundary condition* / Larissa Fardigola // II Internati-

onal Conference "Analysis and Mathematical Physics, June 16–20, 2014: Book of abstracts. — Kharkiv, 2014. — P. 12.

[44] Fardigola L. *On the wave equation controlled by the Dirichlet boundary condition on a half-axis* / Larissa Fardigola // III International Conference "Analysis and Mathematical Physics, June 15–19, 2015: Book of abstracts. — Kharkiv, 2015. — P. 7-8.

[45] Fardigola L. *On transformation operators and modified Sobolev spaces in controllability problems for the wave equations with variable coefficients* / Larissa Fardigola // International Conference V. Skorobohatko Mathematical Conference, Aug. 25–28, 2015: Book of abstracts. — Drohobych, 2015. — P. 37.

[46] Feng H. *Output feedback stabilization of an unstable wave equation withgeneral boundary observartion* / Hongyinping Feng, Bao-Zhu Guo // Automatica. — 2014. — V. 50. — P. 3164–3172.

[47] Floridia G. *Approximate controllabilty for nonlinear degenerate parabolic problems with bilinear control* / G. Floridia // J. Differential Equations. — 2014. — V. 257. — P. 3382–3422.

[48] Georgiev V. *Decay estimates for hyperbolic systems* / V. Georgiev, S. Lucente, G. Ziliotti // Hokkaido Math. J. — 2004. — V. 33. — P. 83–113.

[49] Guesmia A. *Sur des inégalités itégrales et applications à la stabilité de quelques systèmes distribués non dissipatifs* / Aïssa Guesmia // Dissertationes Mathematicae. — 2015. — V. 506. — 52 p.

[50] Gugat M. *L^p-optimal boundary control of the wave equation: On the weekness of the bang-bang princiole* / M. Gugat, G. Leugering, G.M. Sklyar // SIAM J. Control Optim. — 2005. — V. 44. — P. 49–74.

[51] Gugat M. *Optimal distributed control of the wave equation subject to state constraints* / M. Gugat, A. Keimer, G. Leugering // ZAMM Angew. Math. Mech. — 2009. — V. 89. — P. 420–444.

[52] Gugat M. *A note on the approximation of Dirichlet boundary control problems for the wave equation on curved domains* / M. Gugat, J. Sokolowski // Applicable Analyis. — 2012. — V. 92. — P. 2200–2214.

[53] Hörmander L. *The Analisis of Linear Partial Differential Operators: in 4 v* / L. Hörmander. — Berlin—Heidelberg—New York—Tokyo: Springer—Verlag, 1983—1985. — . — V. 1: Distribution Theory and Fourier Analysis. — 1983. — 440 p.

[54] Jaulent J. *One-dimensional inverse Schrödinger scattering problem with energy-dependent potential potemtial I, II* / M. Jaulent, C. Jean // Ann. Inst. H. Poincaré Sect. A (N.S.). — 1976. — V. 25. — P. 105–137.

[55] Jaulent J. *Solution of a Schrödinger inverse scattering problem with a polynomial spectral dependence in the potemtial* / M. Jaulent, C. Jean // J. Math. Phys. — 1982. — V. 23. — P. 258–266.

[56] Khalilov F.A. *Matrix generalisation of the modified Korteweg—de Vries equation* / F.A. Khalilov, E.Ya. Khruslov // Inverse Problems. — 1990. — V. 6. — P. 193–204.

[57] Khalina K.S. *Controllability problems for the non-hamogeneous string that is fixed at the right end point and has the Dirichlet boundary control at the left end point* / K.S. Khalina // J. Math. Phys., Anal., Geom. — 2011. — V. 7. — P. 34–58.

[58] Khalina K.S. *On the Neumann boundary c ontrollaility for the non-homogeneous string on a segment* / K.S. Khalina // J. Math. Phys., Anal., Geom. — 2011. — V. 7. — P. 333–351.

[59] Khalina K.S. *On the Neumann boundary controllability for a non-homogeneous string on a half-axis* / K.S. Khalina // J. Math. Phys., Anal., Geom. — 2012. — V. 8. — P. 307–335.

[60] Khurshuddyan A.Zh. *Generalized control with compact support for systems with distributed parameters* / Asatur Zh. Khurshuddyan // Arch. Contr. Sci.. — 2015. — V. 25, No. 1. — P. 5–20.

[61] Korobov V.I. *Lokal and global exact controllability in Hilbert space* / V.I. Korobov, G.M. Sklyar // Mat. Fiz., Anal., Geom. — 1997. — V. 4, No. 1/2. — P. 84–103.

[62] Lasiecka I. *Exact controllability of the wave equation with Neumann boundary control* / I. Lasiecka, R. Triggiani // Appl. Math. Optim.. — 1989. — V. 19. — P. 243–290.

[63] Lions J.-L. *Contrôlabilité exacte des systèmes distribués* / J.-L. Lions // C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I Math. — 1986. — V. 302. — P. 471–475.

[64] Logemann H. *Destabilizing effect of small time delays on feedback controlled descriptor systems* / H. Logemann // Math. Syst. Theory. — 1988. — V. 21. — P. 19–48.

[65] Lui Y. *Some sufficient conditions for the controllability of the wave equation with variable coefficients* / Y. Lui // Acta Appl. Math. — 2013. — V. 128. — P. 181–191.

[66] Privat Y. *Optimal location of controllers for the one-dimensional wave equation* / Y. Privat, E. Trélat, E. Zuazua // Ann. Inst. Poincaré Anal Non Linéaire. — 2013. — V. 30. — P. 1097–1126.

[67] Rebarber R. *Robustness wih respect to delays for exponential stability of distributed parameter systems* / R. Rebarber, S. Townley // SIAM J. Contr. Optim. — 1998. — V. 37, No. 1. — P. 230–244.

[68] Russel D.L *Controllability and stabilizability theory for linear partial differential equations: recent progress and open questions* / David L. Russel // SIAM Review. — 1978. — V. 20, No. 4. — P. 639–739.

[69] Seck Ch. *Contrôlabilité exacte de l'équation des ondes dans des espaces de Sobolev non réguliers pour un ouvert polygonal* / Ch. Seck, G. Bayili, A. Séne, M.T. Niane // Afr. Mat. — 2012. — V. 23. — P. 1–9.

[70] Shubov M.A. *Spectral decomposition method for controlled damped string reduction of control time* / M.A. Shubov // Applicable Analysis. — 1998. — V. 68. — P. 241–259.

[71] Sklyar G.M. *The Markov power moment problem in problems of controllability and frequency extinguishing for the wave equation on a half-axis* / G.M. Sklyar, L.V. Fardigola // J. Math. Anal. Appl. — 2002. — V. 276. — P. 109–134.

[72] Sklyar G.M. *The Markov trigonometric moment problem in problems of controllability and frequency extinguishing for the wave equation on a half-axis* / G.M. Sklyar, L.V. Fardigola // Mat. Fisika, Analiz, Geom. — 2002. — V. 9, No. 2. — P. 233–242.

[73] Triebel H. *Hybrid Function Spaces, Heat and Navier–Stokes Equations* / Hans Triebel. — Zürich: Europ. Math. Soc. Publ. Hous, 2014. — 185 p.

[74] Triggiani R. *On the stabilizability problem in Banach space* / R. Triggiani // J. Math. Anal. Appl.. — 1975. — V. 52. — P. 383–403.

[75] Zabczyk J. *Mathematical Control Theory: An Introduction* / Jerzy Zabczyk. — Boston—Basel—Berlin: Birkhäuser, 1992. — 260 p.

[76] Zerrik E. *An output stabilization of bilinear distributed system* / E. Zerrik, Y. Benslimane, A. El Jai // Int. J. Math. Anal. — 2013. — V. 7, No. 4. — P. 195–211.

[77] Zerrik E. *Regional target control of the wave equation* / E. Zerrik, R. Larhrissi // Int. J. Sys. Sci. — 2001. — V. 32. — P. 1233 — 1242.

[78] Zhang X. *A unified controllability/observability theory for some stochastic and deterministic partial differential equations* / X. Zhang // Proc. Int. Congr. Math. (Hyderabad, India). — 2010. — V. 4. — P. 3008–3034.

[79] Zhang Zh. *Strichartz estimates and local wellposedness for the Schrödinger equation with the twisted sub-laplacian* / Zh. Zhang, Sh. Zheng // Proc. Centre Math. & Its Appl. Australian Nat. Univ.. — 2010. — V. 44. — P. 233–243.

[80] Zuazua E. *Controllability and observability of partial differential equations: some results and open problems* / E. Zuazua // Handbook of Differential Equations: Evolutionary Equationsl. — 2006. — V. 3. — P. 527-621.

[81] Абдукаримов М.Ф. *Задача граничного управления для одномерного урвнения Клейна–Гордона–Фока с переменным коэфициентом. Случай управления смещениями на двух концах* / М.Ф. Абдукаримов, Л.В. Крицков // Дифф. уравн. — 2013. — Т. 49, № 8. — С. 1036–1046.

[82] Белишев М.И. *Об одной задаче управления для волнового уравнения в* $\mathbb{R}^3$ / М.И. Белишев, А.Ф. Вакуленко // Зап. научн. сем. ПОМИ. — 2006. — Т. 332. — С. 19–37.

[83] Борок В.М. *Корректно разрешимые краевые задачи в бесконечном слое для систем линейных уравнений в частных производных* / В.М. Борок // Изв. АН СССР. — 1971. — Т. 35, № 1. — С. 185–201.

[84] Борок В.М. *Критерий абсолютной $\overline{c}$-устойчивости уравнений в частных производных* / В.М. Борок // Дифф. уравн. — 1988. — Т. 24, № 3. — С. 438–444.

[85] Борок В.М. *Квазирегулярные краевые задачи в полосе* / В.М. Борок // Изв. вузов. Мат. — 1989. — № 11. — С. 3–9.

[86] Владимиров В.С. *Уравнения математической физики* / В.С. Владимиров. — Москва: Наука, 1988. — 512 с.

[87] Виленц И.Л. *Классы единственности решения общей краевой задачи в слое для систем линейных дифференциальных уравнений в частных производных* / И.Л. Виленц // Докл. АН УССР. Секц. А. — 1974. — № 3. — С. 195–197.

[88] Волевич Л.Р. *Обобщенные функции и уравнения в свертках* / Л.Р. Волевич, С.Г. Гиндикин. — Москва: Наука, 1994. — 336 с.

[89] Гельфанд И.М. *Пространства основных и обобщенных функций* / И.М. Гельфанд, Г.Е. Шилов. — Москва: ФИЗМАТГИЗ, 1958. — 307 с.

[90] Гельфанд И.М. *Об определении дифференциального уравнения по его спектральной функции* / И.М. Гельфанд, Б.М. Левитан // Изв. АН СССР. — 1951. — Т. 88, № 4. — С. 593–596.

[91] Дезин А.А. *Общие вопросы теории граничных задач* / А.А. Дезин. — Москва: Наука, 1980. — 307 с.

[92] Ильин В.А. *О граничном управлении на одном конце процессом, описываемым телеграфным уравнением* / В.А. Ильин, Е.И. Моисеев // Докл. РАН. — 2002. — Т. 387, № 5. — С. 600–603.

[93] Кальная Е.С. *Исследование проблемы управляемомти для волнового уравнения на отрезке* / Е.С. Кальная, Л.В. Фардигола // XI Міжнародна конференція ім. акад. М. Кравчука, 18–20 травня 2006: зб. доп.. — Київ, 2006. — С. 119.

[94] Коробов В.И. *К вопросу о сильной стабилизируемости сжимающих систем в гильбертовых пространствах* / В.И. Коробов, Г.М. Скляр // Дифф. уравн. — 1984. — Т. 20, № 11. — С. 1862–1869.

[95] Левин Б.Я. *Преобразования типа Фурье и Лапласа при помощи решений дифференциального уравнения второго порядка* / Б.Я. Левин // Докл. АН СССР. — 1956. — Т. 106, № 2. — С. 187–190.

[96] Левитан Б.М. *Теория операторв обобщенного сдвига* / Б.М. Левитан. — М.: Наука, 1973. — 312 с.

[97] Макаров А.А. *О необходимых и достаточных условиях корректной разрешимости краевой задачи в слое для систем дифференциальных уравнений в частных производных* / А.А. Макаров // Дифф. уравн. — 1981. — Т. 17, № 2. — С. 320–324.

[98] Мамян А.Х. *Общие граничные задачы в слое* / А.Х. Мамян // Докл. АН СССР. — 1982. — Т. 267, № 2. — С. 292–296.

[99] Марченко В.А. *Операторы Штурма—Лиувилля и их приложения* / В.А. Марченко. — К.: Наукова думка, 1977. — 331 с.

[100] Михайлец В.А. *Пространства Хермандера, интерполяция и эллиптические задачи* / В.А. Михайлец, А.А. Мурач // Праці Ін-ту мат НАН України. — 2010. — Т. 84. — 372 с.

[101] Моисеев Е.И. *Оптимальное граничное упраление смещением на одном конце струны при заданой упругоц силе на другом конце* / Е.И. Моисеев, А.А. Холомеева // Тр. Ин-та мат. и мех. УрО РАН. — 2002. — Т. 387, № 5. — С. 600–603.

[102] Нахушев А.М. *О нелокальных задачах со смещением и их связи с нагруженными уравнениями* / А.М. Нахушев // Дифф. уравн. — 1985. — Т. 21, № 1. — С. 95–101.

[103] Нелокальні крайові задачі для рівнянь зі частинними похідними / [Б.Й. Пташник, В.С. Ільків, І.Я. Кмить, В.М. Поліщук]. — К.: Наукова думка, 2002. — 415 с.

[104] Повзнер А.Я. *О дифференциальных уравнениях типа Штурма–Лиувилля на полуоси* / А.Я. Повзнер // Мат. сб. — 1948. — Т. 23, № 65. — С. 3–52.

[105] Самарский А.А. *О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений* / А.А. Самарский // Дифф. уравн. — 1980. — Т. 16, № 11. — С. 1925–1935.

[106] Скубачевский А.А. *Нелокальные краевые задачи со сдвигом* / А.А. Скубачевский // Мат. заметки. — 1985. — Т. 38, № 4. — С. 587–598.

[107] Фардигола Л.В. *Нелокальная краевая задача в слое для эволюционного уравнения второго порядка по времрнной переменной* / Л.В. Фардигола // Дифф. уравн. — 1995. — Т. 31, № 4. — С. 662–671.

[108] Фардигола Л.В. *Нелокальные двухточечные краевые задачм в слое с дифференциальными операторами в краевом условии* / Л.В. Фардигола // УМЖ. — 1995. — Т. 47, № 8. — С. 1128–1134.

[109] Фардигола Л.В. *Интегральная краевая задача в слое для системы линейных дифференциальных уравнений в частных производных* / Л.В. Фардигола // Мат. сб. — 1995. — Т. 186, № 11. — С. 123–144.

[110] Фардигола Л.В. *О нелокальной двухточечной краевой задаче в слое для уравнения с переменными коэффициентами* / Л.В. Фардигола // Сиб. мат. журн. — 1997. — Т. 38, № 2. — С. 424–438.

[111] Фардигола Л.В. *Критерий стабилизируемости во всем пространстве дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами* / Л.В. Фардигола // Дифф. уравн. — 2000. — Т. 36, № 12. — С. 1699–1706.

[112] Фардигола Л.В. *Про можливість стабілізації еволюційних систем диференціальних рівнянь з частинними похідними на* $\mathbb{R}^n \times [0, +\infty)$ *за допомогою одновимірних позиційних керувань* / Л.В. Фардигола, Ю.В. Шевелева // УМЖ. — 2002. — Т. 54, № 9. — С. 1289–1296.

[113] Фардигола Л.В. *Прблеми керованості для хвильового рівняння* / Л.В. Фардигола, К.С. Халіна // УМЖ. — 2007. — Т. 59, № 7. — С. 939–952.

[114] Фардигола Л.В. *Прблеми керованості крайовими умовами Неймана для рівняння струни на півосі* / Л.В. Фардигола // Доп. НАНУ. — 2009. — № 10. — С. 36–41.

[115] Фардигола Л.В. *Проблеми керованості для хвильового рівняння на півплощині та модифіковані простори Соболєва* / Л.В. Фардигола // Доп. НАНУ. — 2015. — № 9. — С. 18-24.

[116] Фардигола Л.В. *О стабилизируемости систем дифференциальных уравнений в частных производных во всем пространстве с помощью одномерных позиционных упрвлений* / Л.В. Фардигола, Ю.В. Шевелева // International Akhiezer Centenary Conference “Theory of

Functions and Mathematical Physics", Aug. 13–17, 2001: Book of abstracts. — Kharkiv, 2001. — p. 22–23.

[117] Фардигола Л.В. *О стабилизируемости систем дифференциальных уравнений в частных производных во всем пространстве с помощью одномерных позиционных упрвлений* / Л.В. Фардигола // Український математичний конгрес, 27–29 сер. 2009: Book of abstracts. — Київ, 2009. — p. 43.

[118] Халіна К.С. *Проблеми крайової керованості для рівняння коливання неоднорідної струни на півосі* / К.С. Халіна // УМЖ. — 2012. — Т. 64, № 4. — С. 525–541.

[119] Халіна К.С. *Про керованість крайовими умовами Діріхле для неоднорідної струни на півосі* / К.С. Халіна // Доп. НАНУ. — 2012. — № 10. — С. 24-29.

[120] Хруслов Е.Я. *Одномерные обратные задачи электродинамики* / Е.Я. Хруслов // Ж. вычисл. мат. и мат. физ. — 1985. — Т. 25. — С. 548–561.