НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНЫ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУР
ИМ. Б.И. ВЕРКИНА

На правах рукописи

Болотов Дмитрий Валерьевич

УДК 515.165.7

Топология и макроскопическая геометрия римановых многообразий

01.01.04 – геометрия и топология

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Научный консультант
Борисенко Александр Андреевич
член корр. НАН Украины,
доктор физ.-мат. наук, профессор

Харьков – 2016

Содержание

Введение

Актуальность темы исследования. Одной из важнейших задач геометрической топологии является установление связей между топологическими и геометрическими характеристиками многообразий и их отображений. Такие связи, в частности, позволяют находить топологические препятствия к существованию на гладком многообразии метрик, ограниченных дополнительными условиями на кривизну многообразия. Например, любая замкнутая поверхность обладает метрикой постоянной кривизны, которая задает одну из трех геометрий: сферическую, евклидову или гиперболическую, в зависимости от знака ее эйлеровой характеристики. Каждый из этих классов поверхностей можно охарактеризовать и другими способами, например, в первом классе поверхности имеют конечную фундаментальную группу, во втором – разрешимую, а в третьем – неразрешимую. Заметим, что фундаментальная группа риманова многообразия M имеет важную геометрическую интерпретацию: *она действует свободно и изометрично на универсальном накрытии* $\widetilde{M}$ *с поднятой римановой метрикой, а естественная факторизация по этому действию является изометрическим накрытием* $p : \widetilde{M} \to M$. В частности, универсальное накрытие $\widetilde{M}$ является $\pi_1(M)$-пространством. Поэтому *топология риманова многообразия находится в тесной связи с геометрией своего универсального накрытия*, а фундаментальная группа становится ключевым объектом исследования топологии римановых многообразий.

В трехмерном случае пространствами постоянной кривизны далеко не исчерпываются все трехмерные многообразия. Уильям Терстон предложил ослабить условие постоянства кривизны и отказаться от изотропности направлений. Получилось восемь геометрий. Несмотря на то, что даже терстоновскими многообразиями, т. е. многообразиями, которые наследуют одну из восьми геометрий, тоже не исчерпываются все замкнутые трехмерные многообразия, любое ориентируемое трехмерное многообразие можно разрезать на куски сферами и торами, каждый из которых после вклейки трехмерных дисков наследует одну из восьми упомянутых геометрий Терстона и является либо компактным, либо имеет конечный объем. Это в точности утверждение гипотезы Терстона о геометризации, которую не так давно доказал Григорий Перельман. Оказывается, что каждый класс замкнутых терстоновских многообразий, как и в двумерном случае, можно охарактеризовать свойством фундаментальной группы. Например, замкнутые гиперболические многообразия характеризуются тем, что их фундаментальная группа неразрешима и не содержит нормальной бесконечной циклической подгруппы.

Особый интерес у топологов, геометров и физиков вызывают римановы многообразия с дополнительными структурами, например, симплектические, контактные многообразия, или многообразия со структурой слоения. Среди замкнутых поверхностей только евклидовы, а именно тор и бутылка Клейна, обладают структурой одномерного слоения. Это следует из существования сечения касательного расслоения, что влечет тривиальность эйлеровой характеристики. Известно, что если слои слоения на торе являются геодезическими в некоторой, не обязательно евклидовой, метрике, т.е имеют нулевую кривизну в этой метрике, то касательное к слоению распределение принадлежит единственному гомотопичекому классу распределений на торе. В связи с этим возникает естественное предположение о *возможной связи между кривизной произвольного слоения на торе и гомотопическим типом касательного распределения.*

В отличие от двумерного случая, как показали Ликориш (1965) и Вуд (1969), всякое замкнутое трехмерное многообразие допускает некоторое слоение коразмерности один. Одним из направлений исследований в области геометрии слоений трехмерных римановых многообразий является внешняя геометрия слоений, т.е. геометрия, связанная со второй квадратичной формой слоения. Довольно яркий результат в этом направлении в 1979 году получил Д. Сулливан. Обобщив результат Джонсона и Витта для вполне геодезических слоений, он показал, что существуют топологические препятствия к существованию на замкнутых трехмерных многообразиях гармонических слоений, т.е. слоений, слои которых имеют нулевую среднюю кривизну. В частности, Сулливан доказал, что у таких слоений отсутствуют рибовские компоненты. Отсюда следует, что гармонические слоения не могут существовать на трехмерных замкнутых многообразиях с конечной фундаментальной группой, так как этот класс многообразий обязан содержать рибовскую компоненту согласно известной теореме Новикова.

Профессор Александр Андреевич Борисенко ввел следующие классы слоений на трехмерных многообразиях, которые определяются знаком внешней кривизны K_e слоев. Это седловые ($K_e \leq 0$), сильно седловые ($K_e < 0$), параболические ($K_e = 0$) и эллиптические слоения ($K_e \geq 0$). Заметим, что гармонические слоения являются седловыми, поэтому, учитывая отмеченные выше топологические препятствия к существованию гармонических слоений, возникают следующие естественные вопросы, которые поставил А. А. Борисенко:

- Всякое ли замкнутое трехмерное многообразие в некоторой метрике допускает седловое, сильно седловое или параболическое слоение? В частности, допускает ли сфера S^3 такие слоения и является ли рибовская компонента препятствием для существования параболических и седловых слоений?

- Что можно сказать о существовании параболических и седловых слоений на терстоновских или однородных многообразиях?

Заметим, что эллиптическое слоение без особенностей на замкнутом трехмерном многообразии задать нельзя.

В размерности большей трех, как показал Марков (1958), задача классификации замкнутых многообразий уже неразрешима. Отметим также тот факт, что любая конечно представимая группа может быть реализована, как фундаментальная группа некоторого четырехмерного замкнутого многообразия. Это говорит о том, что уже четырехмерный мир становится необозримым. Однако, в ряде важных случаев, мы все же можем получить информацию о топологии многообразия, даже без ограничения на размерность. Например, знаменитая теорема Картана-Адамара, доказанная Картаном в общем виде в 1928 году, утверждает, что универсальное накрытие полного n-многообразия неположительной секционной кривизны диффеоморфно $\mathbb{R}^n$. Это означает, что ни на каком многообразии, имеющем хотя бы одну нетривиальную старшую гомотопическую группой нельзя задать метрику неположительной секционной кривизны. Кроме того, фундаментальная группа замкнутого многообразия неположительной кривизны является бесконечной и не имеет кручения. В частности, такую метрику нельзя задать на полных многообразиях отделенной от нуля положительной кривизны Риччи. Это следует из теоремы Майерса, которая утверждает, что такие многообразия имеют ограниченный диаметр, в частности, имеют компактное универсальное накрытие, а значит конечную фундаментальную группу.

В 1991 году Г. Штак доказал слоеный аналог теоремы Картана-Адамара, а именно, он показал, что универсальное накрытие полного n-многообразия, допускающего для некоторой C^3-метрики слоение коразмерности один неположительной секционной кривизны диффеоморфно $\mathbb{R}^n$. Поскольку универсальное накрытие многообразий неположительной кривизны является равномерно стягиваемым, естественно возникает вопрос о возможности *обобщения результата Г. Штака на класс универсально равномерно стягивае-*

мых слоений. В этой же работе Г. Штаком был сформулирован следующий вопрос:

> *Существует ли на римановом многообразии, гомеоморфном сфере S^{2n+1}, $n \geq 2$, слоение коразмерности один неотрицательной секционной кривизны?*

Заметим, что стандартное слоение Риба дает положительный ответ на вопрос в трехмерном случае. Первые достижения в направлении данного вопроса были получены автором в его кандидатской диссертации, где был дан отрицательный ответ на поставленный вопрос в специальном случае, когда на сфере рассматривалась метрика положительной секционной кривизны. В настоящей диссертационной работе нами представлен исчерпывающий ответ на вопрос Г. Штака, который дан в рамках решения намного более общей задачи – это

> *описание структуры слоений коразмерности один неотрицательной кривизны и нахождение топологических препятствий к их существованию на замкнутых гладких многообразиях.*

Многообразия неотрицательной кривизны Риччи, в частности, неотрицательной секционой кривизны, оказались достаточно доступными в понимании их топологии. Отметим здесь замечательные работы Топоногова, Чигера, Громолла, Милнора, Маренича, Перельмана. Чигер и Громолл в 1971 году доказали, что любое полное многообразие неотрицательной секционной кривизны диффеоморфно нормальному расслоению над собственным компактным вполне выпуклым вполне геодезическим подмногообразием, которое называется душой. Отсюда следует, что фундаментальная группа такого многообразия конечно представима. Заметим, что до сих пор остается открытой гипотеза Милнора о конечной порожденности фундаментальной группы полного многообразия неотрицательной кривизны Риччи.

Знаменитая теорема о расщеплении Топоногова - Чигера - Громолла позволила показать, что фундаментальная группа замкнутого многообразия неотрицательной кривизны Риччи содержит конечно порожденную свободную абелеву группу конечного индекса, причем ранг этой группы совпадает с размерностью многообразия тогда и только тогда, когда многообразие является $K(\pi,1)$-пространством, что, в свою очередь, равносильно тому, что многообразие является плоским. Естественно поставить следующие вопросы для слоений:

- *Что можно сказать о фундаментальной группе замкнутого многообразия, допускающего слоение коразмерности один неотрицательной кривизны?*

- *Можно ли охарактеризовать плоские слоения среди слоений неотрицательной кривизны?*

- *Можно ли классифицировать замкнутые трехмерные многообразия, допускающие слоение неотрицательной кривизны?*

Довольно сложным оказался вопрос описания топологии замкнутых многообразий положительной скалярной кривизны. Одним из первых мощных результатов в этом направлении в 1963 году доказал Лихнерович. Он показал, что если M – замкнутое спиновое n-мерное многообразие положительной скалярной кривизны размерности $4n$, тогда A-род многообразия $\hat{A}(M) \in \mathbb{Z}$ равен нулю. Затем в 1974 году Хитчин доказал этот результат для обобщенного A-рода $\alpha(M) \in KO_n(*)$ со значениями в KO-гомологиях точки, а в 1983 году Розенберг доказал равенство нулю обобщенного A-рода $\alpha(M,f) \in KO_n(C^*(\pi))$ со значениями в $KO(C^*(\pi))$-гомологиях C^*-алгебры, построенной по фундаментальной группе π многообразия M и классифицирующему отображению $f : M \to B\pi$. Впоследствии Розенбергом была сформулирована гипотеза, сейчас именуемая гипотезой Розенберга - Громова - Лоусена, о том, что обобщенный А-род $\alpha(M,f)$ равен нулю для замкнутого спинового многообразия размерности ≥ 5 тогда и только тогда, когда многообразие обладает метрикой положительной скалярной кривизны. Эта гипотеза остается актуальной до сих пор для фундаментальных групп без кручения, хотя и доказана во многих важных специальных случаях.

В трехмерном случае вопрос с топологией многообразий положительной скалярной кривизны прояснили Громов и Лоусен, которые доказали, что замкнутое ориентируемое многообразие обладает метрикой положительной скалярной кривизны тогда и только тогда, когда в разложении Кнезера - Милнора многообразия отсутствуют $K(\pi,1)$-факторы. Это означает, что фундаментальная группа π такого многообразия должна быть свободным произведением групп конечного порядка и бесконечных циклических групп. Для таких групп известно, например, что $\operatorname{asdim}\pi \leq 1$. Здесь уместно упомянуть о *гипотезе Громова - Лоусена*, которая до сих пор является открытой проблемой. Гипотеза утверждает, что *замкнутые $K(\pi,1)$-многообразия не допускают метрики положительной скалярной кривизны.*

Случай неспиновых многообразий положительной скалярной кривизны оказался намного сложнее и загадочнее. Здесь даже неясно, допускает ли связная сумма $M = T^{4n}\#\mathbb{C}P^{2n},\ n > 1$ метрику положительной скалярной кривизны? В случае $n = 1$ отрицательный ответ на этот вопрос индуктивно следует из замечательного результата Шоена - Яо (1979) о том, что если $N \subset M$ глобально минимальное регулярное подмногообразие многообразия положительной скалярной кривизны M, то N также допускает метрику положительной скалярной кривизны. Условие на размерность обусловлено тем фактом, что всякий гомологический класс коразмерности один в размерности < 8 реализуется глобально минимальным подмногообразием без особенностей.

При изучении топологии многообразий положительной скалярной кривизны, Громов в середине 90-х ввел понятие макроскопической размерности $\dim_{\mathrm{mc}} M^n$ многообразия M^n, и высказал ряд интересных гипотез. Макроскопическая размерность определяется следующим образом:

$\dim_{mc} M^n \leq k$, *если найдется полиэдр размерности k и собственное непрерывное отображение $f : M^n \to P$ такие, что прообраз точек равномерно ограничен в M^n.*

Очевидно, что для триангулируемых, в частности, гладких многообразий имеем $\dim_{\mathrm{mc}} M^n \leq n$. Оказывается, что макроскопическая размерность универсального накрытия $\dim_{\mathrm{mc}} \widetilde{M}^n$ замкнутого многообразия M^n не зависит от выбора римановой метрики на M^n, если на $\widetilde{M}^n$ рассматривать поднятую метрику. Громов сформулировал ряд вопросов и гипотез относительно макроскопической размерности многообразий. Для удобства сформулируем их все в виде гипотез.

Гипотеза Громова о падении макроскопической размерности:

Если макроскопическая размерность универсального накрытия $\widetilde{M}^n$ произвольного замкнутого многообразия M^n удовлетворяет неравенству $\dim_{mc} \widetilde{M}^n \leq n-1$, то $\dim_{mc} \widetilde{M}^n \leq n-2$.

Гомотопический аналог гипотезы Громова о падении макроскопической размерности:

Если M^n – несущественно, т. е. отображение $f \to B\pi$, классифицирующее универсальное накрытие $\widetilde{M} \to M$, можно продеформировать на $(n-1)$-остов $B\pi^{(n-1)}$, то f можно продеформировать и на $(n-2)$-остов $B\pi^{(n-2)}$.

Гипотеза Громова о макроскопической размерности PSC-многообразий:

Для макроскопической размерности универсального накрытия $\widetilde{M}^n$ замкнутого многообразия M^n положительной скалярной кривизны имеет место неравенство $\dim_{mc}\widetilde{M}^n \leq n-2$.

Слабый вариант этой гипотезы утверждает, что по меньшей мере имеет место неравенство: $\dim_{\mathrm{mc}}\widetilde{M}^n \leq n-1$. Как показал Громов, положительное решение даже слабой гипотезы Громова влечет положительное решение гипотезы Громова - Лоусена. Гипотеза Громова имеет также и более *сильные варианты*, из которых она следует:

Классифицирующее отображение $f : M^n \to B\pi$ замкнутого PSC-многообразия M^n можно продеформировать на $(n-2)$-остов $B\pi^{(n-2)}$.

Макроскопическая размерность полного многообразия M^n отделенной от нуля положительной скалярной кривизны удовлетворяет неравенству $\dim_{mc} M^n \leq n-2$.

Последняя гипотеза доказана в трехмерном случае Громовым и Лоусеном, в то время как в высших размерностях гипотеза остается пока недоступной.

К сожалению, внимание математиков почему-то осталось в стороне от макроскопической размерности, в отличие от асимптотической размерности, также введенной Громовым, где за последнее время было получено большое число весомых результатов, в частности, по асимптотической размерности дискретных групп. Здесь хотелось бы отметить работы А. Дранишникова и его школы, а также львовскую топологическую школу. При этом практически все достижения по макроскопической размерности римановых многообразий, за исключением трехмерного случая, упомянутого выше, на момент начала наших исследований представляли собой лишь набросок идей М. Громова. Однако отметим, что именно эти идеи и дали толчок для начала наших самостоятельных исследований.

Ответы на поставленные выше вопросы и продвижение в решении сформулированных гипотез и проблем составляют главную часть настоящей диссертации. Также в диссертации даются частичные ответы на некоторые открытые вопросы, касающиеся топологических и макроскопических препятствий к существованию специальных классов отображений многообразий в евклидово пространство, которые описаны нами в отдельной главе.

Связь работы с научными программами, планами, темами. Диссертация выполнена в Математическом отделении Физико-технического института низких температур имени Б.И. Веркина НАН Украины в рамках научно- исследовательских работ «Геометрия “в целом” и топология римановых пространств и подмногообразий» (номер госрегистрации 0104U003033), «Геометрические и топологические свойства “в целом” поверхностей и римановых пространств с кривизной постоянного и переменного знака и их применения» (номер госрегистрации 0107U000947), «Геометрия “в целом” римановых и псевдоримановых пространств и ее применение в физике и механике» (номер госрегистрации 0112U002641).

Цель и задачи исследования: *Цель* диссертационной работы состоит в нахождении новых топологических и макроскопических характеристик римановых многообразий и их отображений.

Объектом исследования являются римановы многообразия, слоения коразмерности один, непрерывные и гладкие отображения многообразий в евклидово пространство.

Предметом исследования является макроскопическая размерность римановых многообразий, топологические характеристики римановых многообразий, допускающих слоение коразмерности один с ограничениями на внутреннюю или внешнюю кривизну слоев, а также топологические и макроскопические свойства специальных классов отображений многообразий в евклидово пространство.

Методами исследования являются классические методы римановой геометрии, современные методы дифференциальной и алгебраической топологии.

Основными задачами исследования являются:

- решение гипотезы Громова о падении макроскопической размерности универсального накрытия замкнутых многообразий;
- решение гипотезы Громова о макроскопической размерности универсального накрытия замкнутых многообразий положительной скалярной кривизны;
- описание топологической структуры слоений коразмерности один неотрицательной кривизны на замкнутых многообразиях;
- описание фундаментальной группы замкнутых многообразий, допускающих слоение коразмерности один неотрицательной кривизны;
- нахождение топологической характеризации плоских слоений среди слоений коразмерности один неотрицательной кривизны на замкнутых многообразиях;
- классификация замкнутых трехмерных многообразий, допускающих слоение неотрицательной кривизны;
- решение проблемы Г. Штака о существовании слоений коразмерности один неотрицательной кривизны на сферах;
- построение седловых слоений на трехмерных многообразиях;

- нахождение топологических и макроскопических препятствий к существованию специальных классов отображений в евклидово пространство.

Научная новизна полученных результатов. Все результаты, полученные в диссертации, являются новыми и состоят в следующем:

- доказано, что макроскопическая размерность универсального накрытия трехмерного замкнутого многообразия не может быть равной 2, что подтверждает гипотезу Громова о падении макроскопической размерности в трехмерном случае;

- в каждой размерности $n \geq 4$ построено несущественное гладкое спиновое замкнутое многообразие, макроскопическая размерность универсального накрытия которого равна $n-1$, что доставляет контрпример к гипотезе Громова о падении макроскопической размерности;

- показано, что, в отличие от спинового случая, в случае, если несущественное n-многообразие $(n \geq 5)$ является вполне неспиновым и его фундаментальная группа принадлежит классу FP_3, то для него имеет место гомотопический вариант гипотезы Громова о падении макроскопической размерности;

- показано, что гипотеза Громова о падении макроскопической размерности имеет место для вполне неспиновых многообразий размерности ≥ 5;

- показано, что если фундаментальная группа замкнутого спинового многообразия положительной скалярной кривизны удовлетворяет сильной гипотезе Новикова и условию Розенберга - Штольца, то макроскопическая размерность его универсального накрытия не превосходит

$n-2$. В частности, это подтверждает сильную гипотезу Громова в спиновом случае, когда фундаментальная группа многообразия является свободной абелевой группой, произведением свободных групп или имеет тип FL и асимптотическую размерность $\leq n+4$;

- показано, что универсальное накрытие полного риманова многообразия M с универсально равномерно стягиваемым слоением коразмерности является стягиваемым;

- дана классификация ориентируемых замкнутых трехмерных многообразий, допускающих слоение коразмерности один неотрицательной кривизны, из которой, в частности, следует, что не все трехмерные сферические формы допускают слоение неотрицательной кривизны;

- доказано, что слоение коразмерности один неотрицательной кривизны Риччи на замкнутом многообразии является слоением почти без голономии;

- доказано, что если слоение $\mathcal{F}$ коразмерности один неотрицательной кривизны Риччи на замкнутом многообразии M^n имеет слои с конечно порожденной фундаментальной группой или $\mathcal{F}$ является слоением неотрицательной секционной кривизны, то $\pi_1(M^n)$ является почти полициклической и
$$\operatorname{asdim} \pi_1(M^n) \leq n;$$

- дана топологическая характеризация плоских слоений, а именно, показано, что если слоение $\mathcal{F}$ коразмерности один неотрицательной кривизны Риччи на замкнутом многообразии M^n имеет слои с конечно порожденной фундаментальной группой или $\mathcal{F}$ является слоением неотрицательной секционной кривизны, то следующие условия равносильны:

– $\mathcal{F}$ является плоским;

– asdim $\pi_1(M^n) = n$;

– M^n является $K(\pi, 1)$-многообразием;

- доказано, что 3-связное замкнутое многообразие не допускает слоения коразмерности один неотрицательной секционной кривизны. Как частный случай, получено полное решение проблемы Г. Штака о существовании слоений коразмерности один неотрицательной секционной кривизны на сферах;

- доказано, что трехмерная сфера допускает седловое слоение коразмерности один. Приведены примеры сильно седловых слоений на однородных 3-многообразиях;

- дана оценка снизу числа рибовских компонент по гомотопическому типу слоения на торе T^2;

- дана оценка числа гомотопических типов слоений на T^2, имеющих кривизну слоев, ограниченную фиксированной константой;

- частично решена гипотеза Коэна-Ласка о частичной склейке орбиты $\mathbb{Z}_p$-пространства при отображении в евклидово пространство;

- в C^2-гладком случае дано решение проблемы Ю. Б. Зелинского о существовании 2-выпуклого вложения S^2 в E^4;

- доказан аналог теоремы Гильберта, а именно, доказана невозможность изометрического погружения пространства Лобачевского L^k в евклидово пространство E^n с плоской нормальной связностью в случае ограниченности длины вектора средней кривизны.

Практическое значение полученных результатов. Работа носит теоретический характер. Полученные результаты и методы исследований могут быть применены в римановой геометрии, теории слоений римановых многообразий, а также в тех разделах геометрической топологии, где речь идет о топологии гладких многообразий и их отображений.

Личный вклад автора. Содержание диссертации и основные положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные работы. В работе [9] вклад автора диссертации является определяющим. Результаты, принадлежащие соавтору, приводятся в диссертации по мере необходимости для полноты описания того круга вопросов и методов их решения, которые изучаются автором диссертации.

Апробация результатов. Материалы диссертации докладывались и обсуждались на геометрическом семинаре математического отделения ФТИНТ им. Б.И. Веркина НАН Украины (Харьков), городском геометрическом семинаре Харьковского национального университета им. В. Н. Каразина, на семинаре кафедры высшей геометрии и топологии МГУ им. М. М. Постникова «Алгебраическая топология и её приложения» (Москва, Россия), на семинаре "Топологія та її застосування"Львовского национального университета им. Ивана Франка, на семинаре кафедры геометрии Киевского национального университета им. Тараса Шевченка, на семинаре отдела топологии и семинаре комплексного анализа и теории потенциала института математики НАН Украины, на на рабочих семинарах IHES (Бюр-сюр-Иветт, Франция). Основные результаты диссертации были представлены на следующих конференциях: second Russian-German Geometry Meeting dedicated to 90-anniversary of A.D. Alexandrov (Санкт-Петербург, Россия, 2002), International Conference "Geometry and Foliations"(Киото, Япония, 2003), International Conference "Foliations 2005"(Лодзь, Польша, 2005), международная конференция по геометрии ”в целом” (Черкассы, 2003, 2005), international conference on Global Differential Geometry (Мюнстер, Германия, 2006), international M. M. Postnikov Memorial Conference «Algebraic Topology: Old and New» (Бедлево, Польша, 2007), 7 міжнародна конференція з геометрії та топології (Черкассы, 2007), международная конференция по геометрии, топологии и преподаванию геометрии (Черкассы, 2013), International conference «Geometric Group theory — Davis 60» (Бедлево, Польша, 2009), международная конференция «Геометрия "в целом" –Топология и их приложения» (Харьков, 2009), международная конференция «Метрическая геометрия поверхностей и многогранников» посвященная 100-летию со дня рождения Н.В.Ефимова (Москва, Россия, 2010), международная конференция «Современные проблемы математики и ее приложения в естественных науках и информационных технологиях» (Харьков, 2011), international conference «Low dimensional Topology and Geometry in Toulouse on the occasion of Michel Boileau' s 60 birthday» (Тулуза, Франция, 2013), международная конференция «Геометрия в Одессе-2014» (Одесса, 2014), II International Conference Analysis and Mathematical Physics (Харьков, 2014), International conference «Torus Actions in Geometry, Topology, and Applications» (Сколково, Россия, 2015). Также отдельные результаты диссертации были представлены на международной конференции "Geometry and topology of foliations" (Барселона, Испания, 2010), где автор был в качестве приглашенного докладчика.

Публикации. Результаты, полученные в диссертации, опубликованы в 37 научных публикациях, в том числе – в 21 статье [9, 3, 5, 8, 10, 18, 19, 20, 15, 16, 17, 14, 11, 12, 13, 21, 7, 6, 4, 2, 1] и в 16 тезисах конференций [22, 23, 24, 25, 29, 31, 32, 35, 37, 28, 36, 33, 30, 34, 26, 27].

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, обзора литературы, 5 глав, заключения и библиографии. Общий объем диссертации 267 страниц, из них 254 страницы текста, включая 11 рисунков. Библиография включает 131 наименований на 13 страницах.

В заключение автор благодарит своего научного консультанта член-корр. НАН Украины профессора А. А. Борисенко за внимание к работе, постановку некоторых задач и полезные дискуссии. Также автор хочет поблагодарить профессора университета Флориды (США) А. Дранишникова за соавторство и глубокое развитие идей автора в области макроскопической размерности. Наконец, автор высказывает благодарность профессору IHES (Франция) М. Громову за неоднократно предоставленную возможность посетить IHES и обсудить поставленные им проблемы, частичное решение которых является наиболее значимой частью настоящей диссертации.

Глава 1

Проблематика. Обзор литературы

В этой главе мы приведем необходимые определения и результаты, которые будут нами использованы в доказательствах, а также опишем круг проблем, являющихся основной целью исследования данной диссертационной работы.

1.1. Топология римановых многообразий

Известная теорема Гаусса - Бонне (1848) утверждает:

$$\int_{M^2} K ds = 2\pi\chi,$$

где K – гауссова кривизна, χ - эйлерова характеристика, равная $2-2g$, а g – род ориентируемой замкнутой поверхности M^2. Из теоремы Гаусса - Бонне следует, что препятствием к существованию на замкнутой поверхности метрики положительной кривизны является топологический инвариант, которым является эйлерова характеристика поверхности. В частности, такую метрику невозможно задать на поверхности рода $g > 0$ и, напротив, метрику неположительной кривизны невозможно задать на сфере или проективной плоскости. Оказывается, подобные ограничения на топологию многообразий положительной кривизны существуют и в высших размерностях. Так, например, теорема Майерса показывает, что положительность кривизны Риччи накладывает существенные ограничения на фундаментальную группу замкнутого многообразия. Майерс доказал следующий результат.

Теорема 1.1.1 ([38]) *Полное многообразие отделенной снизу положительной кривизны Риччи должно иметь ограниченный диаметр.*

Применяя теорему к универсальному накрытию получаем:

Теорема 1.1.2 (Теорема Майерса) *Полное многообразие отделенной от нуля положительной кривизны Риччи должно быть компактным, а его фундаментальная группа должна быть конечной.*

Следствие 1.1.3. *Полное многообразие отделенной от нуля положительной кривизны Риччи имеет нетривиальные старшие гомотопические группы, так как в противном случае универсальное накрытие должно быть стягиваемым, а значит некомпактным.*

В отличие от многообразий положительной кривизны, многообразия неположительной секционной кривизны, напротив, должны быть асферичны, что означает тривиальность старших гомотопических групп, а если многообразие замкнуто, то оно должно иметь бесконечную фундаментальную группу (см. [39]). Это следствие следующей известной теоремы.

Теорема 1.1.4 (Теорема Картана - Адамара) *Полное риманово n - мерное многообразие неположительной секционной кривизны имеет универсальное накрытие, диффеоморфное $\mathbb{R}^n$.*

По геометрии и топологии многообразий неотрицательной кривизны имеется целый ряд глубоких результатов благодаря замечательным работам Бишопа, Топоногова, Чигера, Громола, Милнора, Маренича, Перельмана, Вальшапа и других авторов. Мы приведем здесь некоторые из них, а именно те, которые существенно используются в данной диссертации (см. [40], [41], [42], [43], [44]).

Теорема 1.1.5 ([42]) *Пусть M - полное многообразие неотрицательной кривизны Риччи. Тогда M изометрично $N \times E^k$, где N не содержит пря-*

мых. M имеет максимум два конца, причем в случае двух концов M изометрично $P \times E$, где P компактно. Если M – замкнуто, то универсальное накрытие $\widetilde{M}$ изометрично $P \times E^k$, где P – компактно и односвязно.

Следствие 1.1.6. *Замкнутое многообразие неотрицательной кривизны Риччи является $K(\pi, 1)$-пространством тогда и только тогда, когда оно плоское.*

Следующие результаты Бишопа и Милнора описывают рост объема шаров и рост фундаментальной группы полного многообразия неотрицательной кривизны.

Теорема 1.1.7 ([40]) *Полное многообразие неотрицательной кривизны Риччи имеет полиномиальный рост. Это означает, что такой рост имеет функция объема шара в зависимости от его радиуса.*

Теорема 1.1.8 ([44]) *Фундаментальная группа полного многообразия неотрицательной кривизны Риччи, если она конечно порождена, имеет полиномиальный рост в метрике слов.*

Милнор высказал следующую, до сих пор нерешенную, гипотезу.

Гипотеза 1.1.9 (Гипотеза Милнора) *Фундаментальная группа полного многообразия неотрицательной кривизны Риччи всегда конечно порождена.*

Напомним известную теорему Громова.

Теорема 1.1.10 ([45]) *Конечно порожденная группа полиномиального роста содержит нильпотентную подгруппу конечного индекса.*

Следствие 1.1.11. *Из теоремм 1.1.8 и 1.1.10 немедленно следует, что фундаментальная группа полного многообразия неотрицательной кривизны Риччи, если она конечно порождена, содержит нильпотентную подгруппу конечного индекса.*

Заметим, что гипотеза Милнора верна в случае неотрицательной секционной кривизны, так как имеет место следующая глубокая теорема.

Теорема 1.1.12 ([43]) *Полное открытое многообразие M неотрицательной секционной кривизны диффеоморфно нормальному расслоению $\nu(S)$ компактного вполне выпуклого, вполне геодезического подмногообразия S в M. Подмногообразие S называется душой многообразия M.*

Для замкнутых многообразий неотрицательной секционной кривизны Чигер и Громолл получили следующий фундаментальный результат.

Теорема 1.1.13 ([43]) *Пусть M - замкнутое многообразие неотрицательной секционной кривизны. Существует последовательность изометрических накрытий:*

$$\widetilde{M} \overset{iso}{\simeq} P \times E^k \overset{\pi_1}{\to} \hat{M} \overset{\pi_2}{\to} M,$$

где P компактно и односвязно, а $\hat{M}$ диффеоморфно $M_1 \times T^k$, где M_1 - изометрически накрывается многообразием P, а T^k - плоский тор. В частности, $\pi_1(M)$ содержит подгруппу конечного индекса, изоморфную $\mathbb{Z}^k$, а если M является $K(\pi, 1)$ - пространством, то M - плоское.

Замечание 1.1.14 ([42], [46]) *В случае, если M - замкнутое многообразие неотрицательной кривизны Риччи, то $\pi_1(M)$ также содержит подгруппу конечного индекса, изоморфную $\mathbb{Z}^k$.*

Приведенные выше результаты Топоногова, Чигера и Громолла обобщают классические результаты Гаусса - Бонне и Кон-Фоссена в двумерном случае, из которых следует, что полная ориентируемая поверхность неотрицательной кривизны в размерности 2 изометрична одной из следующих поверхностей:

а) Сфера S^2 с метрикой неотрицательной кривизны;

б) Плоский тор T^2;

в) Плоский цилиндр $S^1 \times \mathbb{R}$ с евклидовой метрикой прямого произведения;

г) $\mathbb{R}^2$ с метрикой неотрицательной кривизны.

Как мы видим, имеются существенные топологические препятствия к существованию на многообразии метрики неотрицательной секционной кривизны или неотрицательной кривизны Риччи.

Более сложным вопросом оказался вопрос нахождения топологических препятствий к существованию метрики положительной скалярной кривизны. Поскольку одним из основных направлений исследований данной диссертации является изучение топологических и макроскопических свойств многообразий положительной скалярной кривизны (PSC-многообразий), следующий раздел посвящен более детальному описанию топологии таких многообразий.

1.2. Топология PSC-многообразий

Громов и Лоусен в [47] показали, что в разложении Кнезера - Милнора 2.9.1 трехмерного замкнутого многообразия M, допускающего метрику положительной скалярной кривизны, должны отсутствовать $K(\pi, 1)$-факторы.

В частности, это дает сущеснвенные ограничения на фундаментальную группу многообразия. В случае, когда размерность многообразия больше трех, фундаментальная группа уже может быть любой, так как любую конечно представимую группу можно реализовать как фундаментальную группу двумерного полиэдра, вложенного в пятимерное евклидово пространство. Можно показать, что гладкая граница маленькой трубки этого полиэдра с индуцированной метрикой и доставляет пример замкнутого многообразия положительной скалярной кривизны с заданной фундаментальной группой. Построенное таким образом многообразие не будет асферичным. Громов и Лоусен сформулировали гипотезу, которая до сих пор является окрытой проблемой, однако доказана во многих частных случаях [48].

Гипотеза 1.2.1 (Гипотеза Громова - Лоусена) *Замкнутое асферическое многообразие не допускает метрики положительной скалярной кривизны.*

Если в трехмерном случае все ориентируемые многообразия являются спиновыми, то в размерности больше трех это не так. Более того, оказалось, что подходы, применяемые к изучению топологии спиновых PSC-многообразий, не всегда применимы в неспиновом случае. Поэтому эти два случая надо рассматривать отдельно.

Обобщенный индекс оператора Дирака и топология спиновых PSC-многообразий

Определение 1.2.2. *Пусть V - векторное пространство размерности n с ортонормированным базисом $e_1, \dots, e_n$ и билинейной формой $(\, , \,)$. Алгеброй Клиффорда $Cl(V)$ векторного пространства V называется унитальная алгебра над $\mathbb{R}$ с образующими $e_1, \dots, e_n$ и соотношениями*

$$e_i e_j + e_j e_i = -2(e_i, e_j)$$

Умножение в алгебре Клиффорда $Cl(V)$ называется умножением Клиффорда.

Аддитивный базис алгебры $Cl(V)$ составляют элементы

$$e_1^{s_1} \dots e_n^{s_n},$$

где s_i равны 0 или 1. Поэтому $\dim_{\mathbb{R}} Cl(V) = 2^n$.

Если M – риманово многообразие, то в каждом касательном пространстве TM_x можно задать алгебру Клиффорда, ассоциированную с римановой метрикой. Таким образом, получается *расслоение Клиффорда $Cl(TM)$*, ассоциированное с главным расслоением $O(M)$ ортонормированных реперов:

$$Cl(TM) = O(M) \times_{O(n)} Cl(n),$$

где $Cl(n) := Cl(\mathbb{R}^n)$.

Из этого представления видно, что $Cl(TM)$ наделено связностью Леви - Чивита, согласованной с умножением Клиффора:

$$\nabla(ab) = \nabla(a)b + a\nabla(b)$$

для любых сечений a, b из $\Gamma(M, Cl(TM))$.

Комплексное расслоение S, слои которого S_x являются модулем над $Cl(TM)_x$ называется *расслоением спиноров*, если на нем заданы эрмитова метрика и связность такие, что

1. вектор $v \in TM_x$ действует на S_x как кососимметрический оператор

$$(vs_1, s_2) + (s_1, vs_2) = 0, \text{ для любых } s_1, s_2 \in \Gamma(M, S);$$

2. Связность на S согласована со связностью Леви - Чивита на TM, т.е. для любых двух векторных полей X, Y на M и сечения $s \in \Gamma(M, S)$

имеет место равенство

$$\nabla_X(Ys) = (\nabla_X Y)s + Y\nabla_X s.$$

Теперь определим оператор Дирака, ассоциированный с данным спинорным расслоением S на M.

Определение 1.2.3. *Оператором Дирака на S называется оператор, который в некотором ортонормированном базисе $e_1, \dots, e_n$ имеет вид:*

$$Ds = \sum_k e_k \cdot \nabla_k s,$$

где $\cdot$ обозначает клиффордово умножение.

Оказывается, что в качестве S можно взять расслоение $\wedge^* T^* M \otimes \mathbb{C}$, которое канонически изоморфно комплексному расслоению Клиффорда

$$Cl(TM) \otimes \mathbb{C}.$$

В этом случае имеет место естественная $\mathbb{Z}_2$-градуировка:

$$Cl(TM) \otimes \mathbb{C} = \mathbf{Cl}^0(TM) \oplus \mathbf{Cl}^1(TM) := \wedge^{even} T^* M \otimes \mathbb{C} \oplus \wedge^{odd} T^* M \otimes \mathbb{C}$$

При этом умножение Клиффорда приобретает вид:

$$e \cdot \omega = e \wedge \omega + e \lrcorner \omega,$$

где $e \in T^*(M)$, $\omega \in \wedge^* T^* M \otimes \mathbb{C}$, а $\lrcorner$ определяется формулой:

$$e \lrcorner \omega = (-1)^{nk+n+1} * (e \wedge *\omega),$$

где $*$ это оператор Ходжа, а k обозначает степень формы ω.

Оператор Дирака теперь можно переписать в виде

$$Ds = \sum_\alpha e_\alpha \wedge \nabla_\alpha s + \sum_\alpha e_\alpha \lrcorner \nabla_\alpha s = ds + d^* s.$$

И мы имеем

$$D = d + d^*,$$

где d^* оператор, формально сопряженный к оператору внешнего дифференцирования d.

Пусть $D^0 : \Gamma(\mathbf{Cl}^0(TM)) \to \Gamma(\mathbf{Cl}^1(TM))$ обозначает ограничение оператора D на четные формы. В этом случае хорошо известно, что

$$\text{ind } D^0 = \dim \mathbf{H}^{even}(M) - \dim \mathbf{H}^{odd}(M) = \chi(M).$$

Теперь вспомним, что имеют место изоморфизмы алгебр

$$Cl(n) \cong \mathbb{C}(2^k), \text{ для } n = 2k$$

и

$$Cl(n) \cong \mathbb{C}(2^k) \oplus \mathbb{C}(2^k), \text{ для } n = 2k + 1,$$

где $\mathbb{C}(n)$ обозначает алгебру комплексных матриц порядка n.

Рассмотрим случай $n = 2k$. Тогда имеется единственное неприводимое представление $Cl(n)$ в $\mathbb{C}(n)$. Пространство представления в этом случае имеет стандартное обозначение Δ_n и представление имеет вид:

$$\rho_{\Delta_n} : Cl(n) \to End(\Delta_n).$$

Ограничив это представление на подгруппу $Spin(n) \subset Cl(n)$ получаем пару неприводимых представлений

$$\rho_{\Delta_n^\pm} : Spin(n) \to GL_{\mathbb{C}}(\Delta_n^\pm),$$

$$\Delta_n^+ \oplus \Delta_n^- = \Delta_n, \ dim_{\mathbb{C}} \ \Delta_n^\pm = 2^{n/2-1}.$$

Напомним, что редукция к $Spin$-группе возможна, когда классы Штифеля - Уитни $w_1 = w_2 = 0$. Такие многообразия называется *спиновым.* В этом случае определяются комплексные векторные расслоения (расслоения спиноров) следующим образом:

$$S^{\pm} = Q \otimes_{Spin_n} \Delta_n^{\pm},$$

где Q - главное $Spin(n)$-расслоение. Определим

$$S(M) = S^{+}(M) \oplus S^{-}(M).$$

Ограничив оператор Дирака в этом случае на S^{+} и S^{-}, и обозначив эти ограничения через $D^{\pm}$, имеем:

$$D^{\pm} : \Gamma(M, S^{\pm}) \to \Gamma(M, S^{\mp})$$

Напомним, что сечения $\Gamma(M,S)$ называются *спинорами*. Введем на пространстве спиноров скалярное произведение

$$(\phi,\psi) = \int\limits_M < \phi,\psi > dvol$$

Пусть $\psi \in \ker\ D$. Такие спиноры называются *гармоническими*. Для них имеет место следующее неравенство (см. [49]):

$$0 = (D^2\psi,\psi) = (\nabla^*\nabla\psi + s\psi,\psi) = \|\nabla\psi\|^2 + (s\psi,\psi) \geq (s\psi,\psi),$$

где s - скалярная кривизна.

Отсюда немедленно следует, что если спиновое многообразие M имеет положительную скалярную кривизну, то пространство гармонических спиноров на нем вырождено.

Оператор Дирака D^{+} (D^{-}) является примером эллиптического оператора. Поэтому к нему применима теорема Атьи - Зингера об индексе (см. [50]). И мы имеем в случае, когда $n = 4k$:

$$\text{ind}\ D^{+} = \dim\ker D^{+} - \dim\text{coker}\ D^{+} = \hat{A}(M)$$

Но можно показать, что операторы D^+ и D^- сопряжены. Значит

$$\operatorname{coker}\ D^+ = \ker\ D^-$$

и

$$\operatorname{ind}\ D^+ = \dim\ker D^+ - \dim\ker\ D^- = \hat{A}(M)$$

Из сказанного немедленно получается следующий результат, принадлежащий Лихнеровичу [49].

Теорема 1.2.4 (Лихнерович) *Пусть M – замкнутое спиновое многообразие положительной скалярной кривизны размерности $4n$. Тогда $\hat{A}(M) = 0$.*

Н. Хитчин ввел следующее обобщение оператора Дирака. Рассмотрим $Cl(n)$ - линейное спинорное расслоение

$$\mathfrak{S} := Q \times_{Spin(n)} Cl(n)$$

Алгебра $Cl(n)$ действует на $\mathfrak{S}$ справа, сохраняя слои, поэтому пространство сечений $C^\infty(M, \mathfrak{S})$ наделяется структурой правого $\mathbb{Z}_2$-градуированного $Cl(n)$ - модуля. Напомним, что имеет место разложение

$$Cl(n) = Cl^0(n) \oplus Cl^1(n),$$

где $Cl^0(n)$ и $Cl^1(n)$ – собственные подпространства инволюции $\alpha : v \to -v$. Это дает разложение

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{S}^+ \oplus \mathfrak{S}^-.$$

Аналогично классическому случаю определяется оператор Дирака на $\mathfrak{S}$:

$$\mathfrak{D} = \sum e_j \cdot \nabla_{e_j} \sigma,$$

коммутирующий с правым действием $Cl(n)$, т.е. $\mathfrak{D}(\sigma\phi) = \mathfrak{D}(\sigma)\phi$, где $\sigma \in \Gamma(M, \mathfrak{S})$, а $\phi \in Cl(n)$. Аналогично классическому случаю имеем соответствующие операторы ограничений:

$$\mathfrak{D}^{\pm} : \Gamma(M, \mathfrak{S}^{\pm}) \to \Gamma(M, \mathfrak{S}^{\mp}).$$

Ядро $\ker\ \mathfrak{D}$ можно интерпретировать как $\mathbb{Z}_2$ – градуированный $Cl(n)$ – модуль (см. [51]), лежащий в группе Гротендика $\widehat{\mathfrak{M}}_n$ $\mathbb{Z}_2$ – градуированных $Cl(n)$ – модулей, а класс $[\ker\ \mathfrak{D}] \in \widehat{\mathfrak{M}}_n / i^* \widehat{\mathfrak{M}}_{n+1} \cong KO_n(*)$ – как элемент группы $KO_n(*)$, где $i^* : \widehat{\mathfrak{M}}_{n+1} \to \widehat{\mathfrak{M}}_n$ индуцировано включением $Cl(n) \to Cl(n+1)$. Элемент

$$\alpha(M) \coloneqq [\ker\ \mathfrak{D}] \in KO_n(*)$$

называется *индексом Клиффорда* оператора $\mathfrak{D}$. Можно показать, что $\alpha(M)$ зависит только от класса $[M] \in \Omega_n^{Spin}(*)$.

Напомним значения $KO_i(*)$:

$i \mod 8$	0	1	2	3	4	5	6	7
$KO_i(*)$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	0	$\mathbb{Z}$	0	0	0

При этом $\alpha(M) = \hat{A}(M)$, если $n = 0 \mod 8$ и $2\alpha(M) = \hat{A}(M)$, если $n = 4 \mod 8$. Отметим также, что существуют экзотические сферы Σ в размерностях $1, 2 \mod 8$ с $\alpha(\Sigma) \neq 0 \in KO_n(*) \cong \mathbb{Z}_2$.

Хитчин доказал следующую теорему, обобщающую результат Лихнеровича на произвольную размерность.

Теорема 1.2.5 ([52]) *Пусть M – замкнутое спиновое многообразие размерности n. Если на M можно задать метрику положительной скалярной кривизны, то $\alpha(M) = 0 \in KO_n(*)$.*

Следующее обобщение оператора Дирака учитывает фундаментальную группу многообразия $\pi = \pi_1(M)$. Построим редуцированную C^*-алгебру

$C^*(\pi)$. Для этого рассмотрим групповое кольцо $\mathbb{R}\pi$ и пополним его по операторной норме C^*-алгебры ограниченных операторов на

$$l^2(\pi) := \{f : \pi \to \mathbb{R} | \sum_{g\in\pi} |f(g)|^2 < \infty\}.$$

Действие $\mathbb{R}\pi$ на $l^2\pi$ является линейным расширением действия π на $l^2(\pi)$, которое определяется следующим образом:

$$\lambda(h) \circ (\sum_{g\in\pi} \lambda_g g) = (\sum_{g\in\pi} \lambda_g hg).$$

Здесь мы отождествили элементы $f \in l^2(\pi)$ с суммами вида

$$\sum_{g\in\pi} \lambda_g g : \sum_{g\in\pi} |\lambda_g|^2 < \infty.$$

Рассмотрим плоское бесконечномерное линейное расслоение

$$\nu(\pi) := E\pi \times_\pi C^*(\pi) \text{ над } B\pi.$$

Определим “скрученный” оператор Дирака следующим образом:

$$\mathfrak{D}_{f^*\nu(\pi)} : \Gamma(M, \mathfrak{S} \otimes f^*\nu(\pi)) \to \Gamma(M, \mathfrak{S} \otimes f^*\nu(\pi)),$$

где $f : M \to B\pi$ – классифицирующее отображение для универсального накрытия $\widetilde{M} \to M$. Сечения $\Gamma(M, \mathfrak{S} \otimes f^*\nu(\pi))$ являются $\mathbb{Z}_2$ – градуированным модулем над $Cl(n) \otimes C^*(\pi)$.

Теперь индекс $\mathfrak{D}_{f^*\nu(\pi)}$ можно понимать как элемент

$$KO_n(C^*(\pi)) := K_0(Cl(n) \otimes C^*(\pi)) :=$$

$$\{\text{Классы эквивалентности конечнопорожденных проективных}$$

$$Cl(n) \otimes C^*(\pi) - \text{модулей}\},$$

который представлен ядром достаточно малого компактного возмущения $\mathfrak{D}'_{f^*\nu(\pi)}$ оператора $\mathfrak{D}_{f^*\nu(\pi)}$. Заметим, что при этом результат не зависит от возмущения. Таким образом, мы получаем обобщенный индекс:

$$\alpha(M,f) = [\ker\ \mathfrak{D}'_{f^*\nu(\pi)}] \in KO_n(C^*(\pi)).$$

Можно показать, что $\alpha(M,f)$ зависит только от класса $[M,f] \in \Omega_n^{Spin}(B\pi)$.

Дж. Розенберг обобщил теорему Хитчина и доказал следующую теорему.

Теорема 1.2.6 ([53]) *Пусть M - спиновое многообразие размерности n и $f : M \to B\pi$ – классифицирующее отображение для универсального накрытия $\widetilde{M} \to M$. Тогда если M допускает метрику положительной скалярной кривизны, то $\alpha(M,f) = 0 \in KO_n(C^*(\pi))$.*

Оказывается, что $\alpha(M,f)$ можно представить как композицию:

$$\Omega_n^{Spin}(B\pi) \xrightarrow{D} ko_n(B\pi) \xrightarrow{\text{per}} KO_n(B\pi) \xrightarrow{\text{A}} KO_n(C^*(\pi)),$$

где D и per индуцированны соответствующими преобразованиями спектров (см. раздел 2.1) $D : \mathbf{MSpin} \to \mathbf{ko}$ и $\text{per} : \mathbf{ko} \to \mathbf{KO}$, а гомоморфизм

$$A : KO_n(B\pi) \to KO_n(C^*(\pi)) \tag{1.2.1}$$

это отображение Каспарова, которое описывается на языке KK-теории (см. [54]) и называется *assembly map*.

Напомним, что фундаментальным классом $[M]_{ko} \in ko_n(M)$ в ko - теории называется образ $D([M,id])$ фундаментального класса $[M,id] \in \Omega_n^{Spin}(M)$ в Ω^{Spin} – теории. По определению $[M]_{KO} = \text{per}([M]_{ko}) \in KO_n(M)$.

Если $f : M \to B\pi$ – классифицирующее отображение и $[M,f] \in \Omega_n^{Spin}(B\pi)$, то мы имеем:

$$D([M,f] = f_*[M]_{ko} \in ko_n(B\pi),$$

$$\text{per}(D([M,f]) = f_*[M]_{KO} \in KO_n(B\pi).$$

Гипотеза 1.2.7 (Гипотеза Розенберга - Громова - Лоусена) *Пусть M^n замкнутое спиновое многообразие, $\pi = \pi_1 M^n$, $n \geq 5$, и пусть $f : M^n \to B\pi$ классифицирующее отображение. Тогда M^n допускает метрику положительной скалярной кривизны тогда и толко тогда, когда*

$$A \circ per \circ f_*([M^n]_{ko}) = 0 \in KO_n(C_r^*(\pi)).$$

Замечание 1.2.8. *Томас Шик в [55] нашел контрпример к данной гипотезе. А именно, применяя хирургию к 5-мерному тору, он построил замкнутое 5-мерное спиновое многообразие с фундаментальной группой $\mathbb{Z}^4 \times \mathbb{Z}/3$, имеющее нулевой обобщенный индекс оператора Дирака и не допускающее метрики положительной скалярной кривизны. Однако заметим, что гипотеза до сих пор актуальна для фундаментальных групп без кручения.*

Замечание 1.2.9. *Случай $n = 4$ является исключительным, так как там возникают дополнительные препятствия, связанные с инвариантами Зайберга - Виттена.*

Гипотеза Розенберга - Громова - Лоусена тесно связана с еще одной известной, до сих пор недоказанной гипотезой, принадлежащей С. П. Новикову:

Гипотеза 1.2.10 (Сильная гипотеза Новикова) *Гомоморфизм*

$$A : KO_n(B\pi) \to KO_n(C^*(\pi))$$

является мономорфизмом.

Замечание 1.2.11. *Сильная гипотеза Новикова доказана для широкого класса групп (см. [56],[57]). Отдельно отметим работу Ю [58], в которой гипотеза доказана для групп, имеющих конечную асимптотическую* *размерность, а классифицирующее пространство которых имеет гомотопический тип конечного CW-комплекса, в частности, для свободных и свободных абелевых групп.*

Топология неспиновых PSC-многообразий

Вышеприведенные топологические препятствия к существованию метрик положительной скалярной кривизны касались случая спиновых многообразий и связаны с обобщенным индексом оператора Дирака на расслоении спиноров. Эти препятствия могут быть обобщены на случай неспиновых многообразий со спиновым универсальным накрытием (см. [48]). Такие многообразия называются *почти спиновыми*. Однако, это обобщение невозможно в случае, когда универсальное накрытие многообразия не является спиновым. Такие многообразия называются *вполне неспиновыми*. Оказывается, для таких многообразий верна следующая замечательная теорема Штольца -Янга (см. [48]).

Теорема 1.2.12. *Предположим, что N вполне неспиновое многообразие размерности ≥ 5 с классифицирующим отображением $f : N \to B\pi$, при этом выполняется равенство $f_*([N]) = u_*([M])$ для некоторого (не обязательно связного) многообразия M с положительной скалярной кривизной и отображением $u : M \to B\pi$. Тогда N допускает метрику положительной скалярной кривизны. В частности, всякое несущественное вполне неспиновое многообразие является PSC-многообразием.*

Напомним, что по Громову

> *многообразие M^n называется несущественным, если классифицирующее отображение $f : M^n \to B\pi$ можно продеформировать на $B\pi^{(n-1)}$.*

Доказательство теоремы 1.2.12 существенно опирается на следующий фундаментальный результат Громова и Лоусена о хирургии PSC - многообразий (см. [47]).

Теорема 1.2.13 (Теорема о хирургии) *Предположим, что многообразие N получено из PSC - многообразия M хирургиями вдоль сфер коразмерности ≥ 3. Тогда N также является PSC - многообразием.*

Теорема о хирургии также используется авторами в [48] при изучении топологии вполне неспиновых многообразий.

Следующий яркий результат Шоена - Яо [59] позволяет в ряде случаев применить индуктивный подход к нахождению препятствий к существованию метрик положительной скалярной кривизны.

Теорема 1.2.14. *Пусть $N \subset M$ глобально минимальное регулярное подмногообразие PSC-многообразия M. Тогда N – PSC-многообразие.*

До сих пор остается открытым следующий вопрос:

Вопрос 1.2.15. *Допускает ли связная сумма $M = T^{2n}\#\mathbb{C}P^n$ тора и комплексного проективного пространства (n-четно) метрику положительной скалярной кривизны?*

Замечание 1.2.16. *Для $n = 2$ отрицательный ответ следует по индукции из теоремы Шоена - Яо и факта о том, что всякий гомологический класс коразмерности один в размерности < 8 реализуется глобально минимальным подмногообразием без особенностей.*

Томас Шик в [55] обобщил теорему 1.2.14 и доказал следующий результат.

Теорема 1.2.17. *Пусть $\alpha \in H^1(X)$. Тогда для $3 \le k \le 8$ $\cap$-произведение с α отображает $H_k(X)^+$ в $H_{k-1}(X)^+$, где $H_i(X)^+ \subset H_i(X)$ подмножество гомологических классов, которые реализуются PSC-многообразиями.*

Завершим этот раздел формулировкой гипотезы, принадлежащей Дж. Розенбергу [60].

Гипотеза 1.2.18 (Гипотеза об S^1-стабильности) *Замкнутое связное n-многообразие M, $n > 4$ допускает метрику положительной скалярной кривизны тогда и только тогда, когда ее допускает $M \times S^1$.*

1.3. Макроскопические характеристики римановых многообразий

Как мы знаем, по теореме Майерса универсальное накрытие замкнутых двумерных многообразий положительной кривизны с поднятой метрикой компактно, а значит ограничено или по другому – имеет ограниченный прообраз при отображении в точку. М. Громов обратил внимание, что аналогично двумерному случаю, универсальное накрытие трехмерных PSC-многообразий с поднятой римановой метрикой либо компактно, либо имеет собственное непрерывное отображение на одномерный полиэдр с равномерно ограниченным прообразом точек и, в некотором смысле, напоминает границу трубчатой окрестности одномерного полиэдра в 4-мерном евклидовом пространстве (см. рис. 1.1).

Громов предположил, что подобная картина имеет место и в многомерном случае.

Чтобы описать сказанное более корректно, начнем с того, что дадим определение размерности $\dim_\varepsilon$, восходящее к Урысону, и данное Громовым в [61].

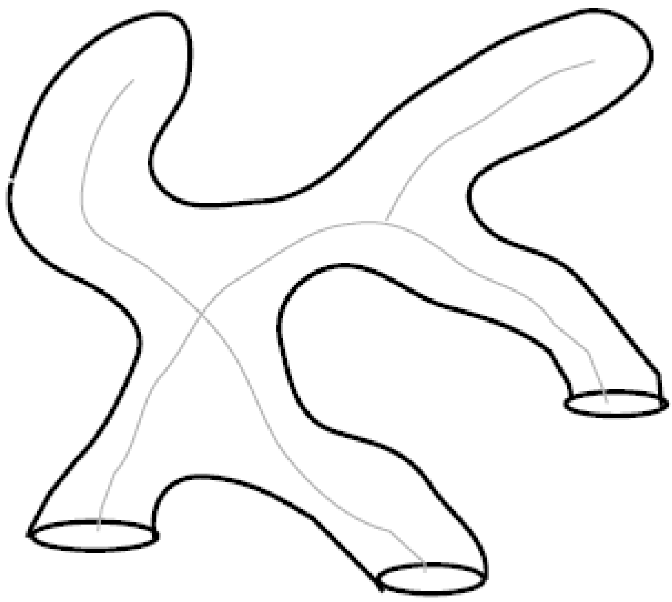

Рис. 1.1. $\dim_{mc} M = 1$.

Определение 1.3.1. *Для данного* ε *и метрического пространства* X *скажем, что* $\dim_\varepsilon(X) \le k$*, если существует* k *- мерный полиэдр* P^k *и собственное непрерывное отображение* $h : X \to P^k$ *такое, что* $Diam(h^{-1}(p)) \le \varepsilon$ *для произвольного* $p \in P^k$*. Скажем, что* $\dim_\varepsilon X = k$*, если* k *наименьшее из чисел, для которых выполнено* $\dim_\varepsilon X \le k$*.*

Пример 1.3.2 ($\dim_\varepsilon(S^2)$)

Рассмотрим стандартную единичную двумерную сферу $S^2 \subset E^3$. Нетрудно видеть, что если $\varepsilon < \pi$, то $\dim_\varepsilon(S^2) = 2$. Это следует из теоремы Улама - Борсука, которая утверждает, что любое непрерывное отображение сферы в плоскость склеивает хотя бы одну пару антиподальных точек. Действительно, любое непрерывное отображение сферы в граф поднимается в универсальное накрытие, которое является деревом. При этом образ сферы принадлежит конечному поддереву, которое вкладывается в $\mathbb{R}^2$. Очевидно также, что если $\varepsilon \ge \pi$, то $\dim_\varepsilon(S^2) = 0$. Заметим, что если вместо сферы рассмотреть эллипсоид Π, то проекция эллипсоида на большой диаметр показывает, что существует ε такое, что $\dim_{\varepsilon}(\Pi) = 1$.

М. Громов обобщил предыдущее определение и ввел следующее фундаментальное понятие:

Определение 1.3.3. *Макроскопическая размерность метрического пространства X не превышает k, или $\dim_{mc} X \le k$, если существует k - мерный полиэдр P^k и собственное непрерывное отображение $h : X \to P^k$ такое, что $Diam(h^{-1}(p)) \le \varepsilon$ для некоторого $\varepsilon > 0$ и произвольного $p \in P^k$. Скажем, что $\dim_{mc} X = k$, если k наименьшее из чисел, для которых выполнено $\dim_{mc} X \le k$.*

Замечание 1.3.4. *Все метрические пространства предполагаются собственными, т. е. пространствами, в которых каждый замкнутый шар компактен.*

Следующий пример показывает, что не всякое коограниченное непрерывное отображение является собственным.

Пример 1.3.5. *Пример несобственного равномерно коограниченного отображения.*

Рассмотрим на плоскости $\mathbb{R}^2$ два подмножества: $A := \{(x,y)|\ xy = 1\}$ и $B := \{(x,y)|\ x = y,\ x \in [-1,1]\}$. Обозначим $X = A \cup B$. Пусть $P := C \cup D$, где $C = \{(x,y)|\ y = 0\}$, а $D = \{(x,y)|\ y = sin\ \pi x,\ x \in [-1,1]\}$. Рассмотрим отображение $f : X \to P$ как вертикальные проекции: $f|_A : A \to C$ и $f|_B : B \to D$ (см. рис 1.2). Очевидно, что для любой окрестности U начала координат $(0,0)$ множество $f^{-1}U$ – неограниченно, а значит f не является собственным.

Замечание 1.3.6. *Вместо X можно рассмотреть гладкое многообразие M, являющееся границей регулярной трубчатой окрестности U_X пространства $X \subset \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$ в $\mathbb{R}^3$, заменив f на композицию $f \circ r|_M$, где $r : U_X \to X$ – естественная ретракция.*

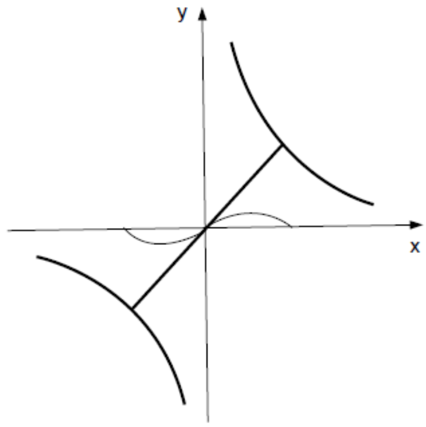

Рис. 1.2. Несобственное коограниченное отображение.

Из определения видно, что макроскопическая размерность равна нулю для компактных метрических пространств. Поэтому она интересна для рассмотрения геометрии полных некомпактных метрических пространств, в частности, открытых римановых многообразий.

Для PL многообразия M^n, очевидно, имеем $\dim_{\mathrm{mc}} M^n \le n$. То же верно и для C^1 - многообразия, ввиду теоремы Уайтхеда о триангулируемости [62].

Естественно спросить: *при каких достаточных условиях достигается равенство* $\dim_{mc} M^n = n$?

Прежде, чем предоставить частичный ответ на этот вопрос, напомним следующее определение.

Определение 1.3.7. *Метрическое пространство называется равномерно стягиваемым если существует неубывающая функция $Q : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, что всякий шар радиуса r стягивается внутри шара радиуса $Q(r)$. Будем называть функцию Q функцией равномерности.*

Аналогично определяется понятие равномерной k - связности:

Определение 1.3.8. *Метрическое пространство называется равномерно k - связным если существует неубывающая функция $Q : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, что всякая k - сфера внутри шара радиуса r стягивается внутри шара радиуса $Q(r)$.*

Пример 1.3.9 (Равномерно стягиваемые пространства с $Q = Id$)

В качестве примера равномерно стягиваемого пространства можно привести евклидово пространство E^n или пространство Лобачевского L^n произвольной размерности n. Более того, всякое односвязно риманово многообразие M неположительной секционной кривизны является равномерно стягиваемым с функцией равномерности $Q(r) = r$. Это следует из того, что экспоненциальное отображение $\exp : T_xM \to M$ является диффеоморфизмом (Картан - Адамар).

Громов доказал следующее утверждение.

Утверждение 1.3.10 ([61]) *Пусть риманово многообразие M^n – равномерно стягиваемо. Тогда $\dim_{mc} M^n = n$.*

Следствие 1.3.11. $\dim_{mc} E^n = \dim_{mc} L^n = n$.

Следующий пример показывает, что $\dim_{\mathrm{mc}}$ не является топологическим инвариантом.

Пример 1.3.12 ($\dim_{\mathrm{mc}} \mathbb{R}^2$)

Зададим поверхность F уравнением $z = e^{\frac{1}{1-x^2-y^2}}$, где $0 \le \sqrt{x^2+y^2} < 1$. Это поверхность вращения, гомеоморфная $\mathbb{R}^2$. Очевидно, что $\dim_{\mathrm{mc}} F = 1$. Для этого достаточно рассмотреть ортогональную проекцию F^2 на ось Oz (см. рис. 1.3). С другой стороны напомним, что из следствия 1.3.11 следует, что $\dim_{\mathrm{mc}}(E^2) = 2$.

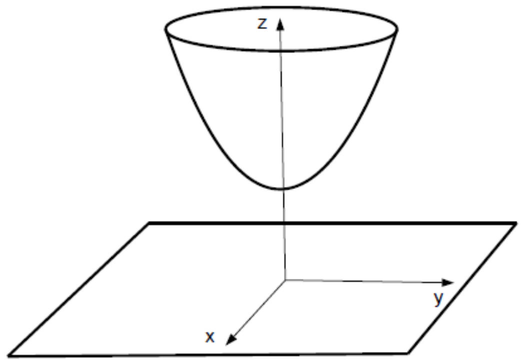

Рис. 1.3. $\dim_{\mathrm{mc}} F = 1$.

Замечание 1.3.13. *Заметим, что если мы рассмотрим замкнутое риманово многообразие M^n, и будем рассматривать на универсальном накрытии $\widetilde{M}^n$ поднятую метрику, то $\dim_{mc} \widetilde{M}^n$ не будет зависеть от выбора римановой метрики на M^n. Это следует из того, что тождественное отображение универсального накрытия M^n будет непрерывной квази-изометрией относительно поднятых метрик. Более того, нетрудно показать, что для произвольного гомеоморфизма $f : (M^n, g_1) \to (M^n, g_2)$ с произвольными метриками g_1, g_2 на M, поднятый гомеоморфизм $\widetilde{f}$: $(\widetilde{M}^n, \widetilde{g}_1) \to (\widetilde{M}^n, \widetilde{g}_2)$ будет квази-изометрией. Это доказывает, что $\dim_{mc} \widetilde{M}^n$ является топологическим инвариантом M^n. Напомним, что отображение метрических пространств $f : (X, d_1) \to (Y, d_2)$ называется квази-изометрией, если для любых $x, y \in X$ существуют константы A, B, C ($A \geq 1, B \geq 0, C \geq 0$) такие, что*

$$\frac{1}{A} d_1(x,y) - B \leq d_2(f(x), f(y)) \leq A d_1(x,y) + B$$

и

$$\forall y \in Y\, \exists x \in X : d_2(f(x), y) \leq C.$$

Громов сформулировал ряд гипотез и проблем относительно макроскопической размерности римановых многообразий и их универсальных накрытий, частичным ответам на которые посвящена часть диссертационной работы.

Гипотеза 1.3.14 (О падении макроскопической размерности) *Пусть M^n – замкнутое многообразие размерности n. Если $\dim_{mc} \widetilde{M}^n < n$, то $\dim_{mc} \widetilde{M}^n < n-1$.*

Замечание 1.3.15. *Пусть M^n - компактное риманово многообразие, и классифицирующее отображение $f : M^n \to B\pi$ есть отображение в k-остов* [1] *$B\pi^{(k)}$, тогда поднятие данного отображения до отображения универсальных накрытий $\widetilde{f} : \widetilde{M}^n \to E\pi^{(k)}$ гарантирует нам, что $\dim_{mc} \widetilde{M}^n \leq k$, если метрику на $\widetilde{M}^n$ предполагать поднятой из M^n.*

Следуя Громову, сформулируем гомотопический аналог гипотезы 1.3.14.

Гипотеза 1.3.16. *Если M^n несущественно, то классифицирующее отображение $f : M^n \to B\pi$ можно продеформировать на $B\pi^{(n-2)}$.*

Ясно, что если M несущественно, то из гипотезы 1.3.16 и замечания 1.3.15 немедленно следует гипотеза 1.3.14.

Теперь поясним, почему гипотезы 1.3.14 и 1.3.16 резонны. На уровне когомологий гипотеза 1.3.16 не имеет препятствий, т.е $f^*(H^{n-1}(B\pi)) = 0$, так как предположив, что $f^*(c) \neq 0$, учитывая изоморфизм в первых когомологиях, индуцированный изоморфизмом фундаментальных групп, найдем

[1] Напомним, что i - *мерным остовом* $P^{(i)}$ клеточного комплекса P называется объединение клеток размерности, не превосходящей i.

элемент $f^*(d) \in H^1(M^n)$, двойственный к $f^*(c)$, откуда $f^*(c \cup d) \neq 0$, что невозможно, так как f стягивается в $B\pi^{n-1}$.

В данной диссертационной работе автором приводится положительное решение гипотез 1.3.14 и 1.3.16 в частных случаях и отрицательное решение в общем случае.

Определение 1.3.17. *Рационально существенным называется замкнутое n - мерное многообразие, образ фундаментального класса $[M^n]$ которого нетривиален в рациональных гомологиях $H_n(B\pi, \mathbb{Q})$ относительно гомоморфизма, индуцированного классифицирующим отображением $f : M^n \to B\pi$.*

Очередным и довольно естественным является следующий вопрос, сформулированный Громовым.

Вопрос 1.3.18. *Верно ли, что макроскопическая размерность универсального накрытия рацианально существенного n-мерного многообразия равна n?*

Отрицательный ответ на этот вопрос был дан А. Дранишниковым в [63]. Им же в [64] было показано, что для аменабельных групп ответ на вопрос 1.3.18 положителен.

Теперь сформулируем несколько гипотез Громова о макроскопической размерности PSC -многообразий, которые являются одним из основных предметов изучения данной диссертационной работы.

Гипотеза 1.3.19. *Пусть M^n есть полное PSC-многообразие размерности n и скалярная кривизна $Sc(M^n) > c > 0$. Тогда $\dim_{mc} M^n \leq n - 2$.*

Замечание 1.3.20. *В случае $n = 2$ справедливость гипотезы следует из того, что риманово многообразие секционной кривизны $K \geq K_0 > 0$, как и любое пространство Александрова кривизны отделенной от нуля положительной константой, имеет ограниченный диаметр (см. теорему Майерса 1.1.1), а значит имеет нулевую макроскопическую размерность. Случай $n = 3$ доказан в [47].*

Гипотеза 1.3.21 (Гипотеза Громова) *Пусть M^n – замкнутое PSC- многообразие размерности n. Тогда $\dim_{mc} \widetilde{M}^n \leq n - 2$.*

Гипотеза 1.3.22 (Сильная гипотеза Громова) *Классифицирующее отображение $f : M^n \to B\pi$ замкнутого PSC-многообразия M^n можно продеформировать на $(n-2)$-остов $B\pi^{(n-2)}$.*

Замечание 1.3.23. *Замечание 1.3.15 влечет, что гипотеза Громова следует из сильной гипотезы Громова. Кроме того гипотеза Громова немедленно следует из гипотезы 1.3.19, которую также можно считать ее сильным аналогом.*

Асимптотическая размерность групп

Введем понятие асимптотической размерности метрического пространства, которое было дано Громовым в [65]. Эта размерность на сегодняшний день более изучена, чем макроскопическая, и имеет широкое применение в теории групп.

Определение 1.3.24. *asdim $X = n$, если для любого равномерно ограниченного открытого покрытия $\mathcal{V}$ существует равномерно ограниченное покрытие $\mathcal{U}$ кратности $n+1$ такое, что $\mathcal{V} \prec \mathcal{U}$ (любой элемент покрытия $\mathcal{V}$ содержится в некотором элементе покрытия $\mathcal{U}$), и не существует такого покрытия меньшей кратности.*

Из определения легко следует, что если asdim $X = n$, то существует равномерно коограниченное отображение $h : X \to P^n$ в нерв покрытия $\mathcal{U}$. Отсюда получаем неравенство asdim $X \geq \dim_{\text{mc}} X$.

Введем норму $||*||_S$ на конечно порожденной группе G с конечным множеством образующих $S = S^{-1}$: норма $||g||_S$ элемента $g \in G$ это минимальная длина слова, составленного из элементов S , представляющего g. Теперь по норме определим метрику, которая называется метрикой слов d_S на G, и определяется следующим образом: $d_S(g,h) = ||g^{-1}h||_S$.

Оказывается, что если G конечно порождена, то асимптотическая размерность asdim G, как метрического пространства с метрикой слов, не зависит от выбора конечного множества S образующих группы G.

Напомним некоторые свойства асимптотической размерности (см.[66]):

1. asdim $\pi_1(M)$ = asdim $\widetilde{M}$, где $\widetilde{M}$ – универсальное накрытие с поднятой метрикой замкнутого многообразия M;

2. для метрического произведения имеем:

   asdim $(X \times Y) \leq$ asdim X + asdim Y;

3. если $X \subset Y$, то asdim $X \leq$ asdim Y;

4. asdim $X = 0$ если X ограничено.

5. asdim $\pi_1(M) \geq \dim M$, если M является замкнутым $K(\pi,1)$ – многообразием;

6. asdim $H \leq$ asdim G для любой подгруппы $H \subset G$;

7. asdim H = asdim G для любой подгруппы $H \subset G$ конечного индекса;

8. пусть $f : G \to H$ гомоморфизм, тогда asdim $G \leq$ asdim $\ker f$ + asdim $\mathrm{Im} f$;

9. пусть A и B конечно порожденные группы, причем asdim $A = n$ и asdim $B \leq n$. Тогда asdim $A * B = \max\{n, 1\}$.

Определение 1.3.25. *Группа G называется полициклической, если она содержит субнормальную серию (каждая подгруппа G_{i+1} нормальна в G_i)*

$$1 = G_n \subset G_{n-1} \subset \cdots \subset G_0 = G \tag{1.3.1}$$

такую, что каждая группа G_i/G_{i+1} является циклической.

Известно (см. [67], [68]), что класс групп, для которых существует субнормальная серия (1.3.1), где каждая фактор-группа G_i/G_{i+1} является или циклической или конечной группой, совпадает с классом почти полициклических групп, т.е. групп содержащих полициклическую подгруппу конечного индекса.

Определение 1.3.26. *Числом Хирша $h(G)$ почти полициклической группы G называется число бесконечных циклических факторов G_i/G_{i+1} в (1.3.1). Заметим, что это число не зависит от субнормальной серии (1.3.1).*

Для почти полициклической группы G имеем следующую теорему:

Теорема 1.3.27 ([66])

1. *asdim G = asdim $\ker f$ + asdim Imf.*

2. *asdim $G = h(G)$, где $h(G)$ – число Хирша группы G.*

Эти свойства асимптотической размерности применяются нами при изучении топологии замкнутых многообразий, допускающих слоение коразмерности один неотрицательной кривизны. Обзору теории слоений мы посвятим следующий раздел.

1.4. Слоения на римановых многообразиях

Определение слоения

Говорят, что на многообразии M^n задано слоение $\mathcal{F}$ размерности p или коразмерности q $(p + q = n)$, если на многообразии задано разбиение p - мерными подмногообразиями (слоями слоения): $M^n = \coprod\limits_i F_i$, и задан *слоеный атлас* $\mathcal{U} = \{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$, где в каждой слоеной карте с координатами $(x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_q)$ связная компонента слоя выглядит как плоскость

$$y_1 = const, \ldots, y_q = const.$$

Функции перехода

$$g_{ij} = \varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : \varphi_j(U_i \cap U_j) \to \varphi_i(U_i \cap U_j)$$

в этом случае имеют вид

$$g_{ij}(x, y) = (\hat{g}_{ij}(x, y), \bar{g}_{ij}(y)), \tag{1.4.1}$$

где $x \in \mathbb{R}^p, y \in \mathbb{R}^q$.

Атлас $\mathcal{U} = \{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$, в дальнейшем, предполагается как минимум C^2 - гладким и хорошим. Последнее означает следующее:

1) $\mathcal{U}$ - локально конечно;

2) U_λ - относительно компактны в M и $\varphi_\lambda(U_\lambda) = (-1, 1)^n \subset \mathbb{R}^n$;

3) $\overline{U_i \cup U_j} \subset W_{ij}$, где (W_{ij}, ψ_{ij}) - слоеная карта, не обязательно принадлежащая $\mathcal{U}$.

Пусть $\pi : (-1, 1)^n \to (-1, 1)^q$ - естественная проекция, сопоставляющая точке ее последние q координат.

Прообраз $P_\lambda \coloneqq \varphi_\lambda^{-1}(\pi^{-1}(x))$ называется локальным слоем. Пространство локальных слоев обозначим через Q_λ. Ясно, что $Q_\lambda \simeq (-1,1)^q$ и

$$U_\lambda = \bigcup_{x\in(-1,1)^q} \varphi_\lambda^{-1}(\pi^{-1}(x)).$$

Слоение $\mathcal{F}$, заданное на многообразии M, называется *ориентируемым*, если ориентируемо касательное к $\mathcal{F}$ распределение. Слоение $\mathcal{F}$ называется *трансверсально ориентируемым*, если ориентируемо нормальное к $\mathcal{F}$ распределение. Заметим, что в том случае, когда M ориентируемо, из ориентируемости слоения следует трансверсальная ориентируемость, и наоборот.

Голономия

В этом разделе мы определим понятие голономии слоя и приведем серию важных результатов, связанных с голономией, которые мы существенно используем в дальнейшем.

Пусть $l : [0,1] \to L$ замкнутый путь лежащий на слое $L \in \mathcal{F}$. В [69] показано, что тогда существует такая цепь слоеных окрестностей $\mathcal{C} = \{U_0, \dots, U_{n-1}, U_n = U_0\}$, покрывающая $l([0,1])$, что:

a) Существует такое разбиение отрезка $[0,1] : 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$, что $l([t_i, t_{i+1}]) \subset U_i,\ i = 0, \dots, n-1$;

b) Если пересечение $P_i \cap U_{i+1} \neq \varnothing$, то оно связно. Это означает, что локальный слой P_{i+1} определяется однозначно.

Можно показать, что множество точек $z \in U_0$, допускающих цепь $\mathcal{C}$, т.е. точек, однозначно определяющих локальные слои $P_i \in U_i$ из условия, что $z \in P_0$ и $P_i \cap P_{i+1} \neq \varnothing$, $i = 0, \dots, n-1$, является открытым в U_0. Значит существует некоторая насыщенная (состоящая из локальных слоев) открытая окрестность O локального слоя P_0 для которой определено следующее отображение.

$$\Gamma(\pi \circ \varphi_0(P_0(z)) = \pi \circ \varphi_0(P_n(z)),$$

где $z \in O$.

В [69] показано, что построенный локальный диффеоморфизм $\Gamma : V_0 \to (-1,1)^q$, некоторой окрестности нуля $V_0 \subset (-1,1)^q$ в $(-1,1)^q$ определяет гомоморфизм

$$\Psi : \pi_1(L) \to G_q$$

фундаментальной группы слоя $\pi_1(L)$ в группу ростков диффеоморфизмов G_q в начале координат $0 \in \mathbb{R}^q$. Этот гомоморфизм определен с точностью до внутреннего автоморфизма и называется *голономией* слоя L, а его образ - *группой голономии* слоя L.

Заметим, что если слоение трансверсально ориентируемо и имеет коразмерность один, то определена односторонняя голономия

$$\Psi^+ : \pi_1(L) \to G_q^+$$

слоя L, принимающая значение в группе ростков диффеоморфизмов в 0, определенных на полуинтервалах $[0,\varepsilon)$.

Следующая теорема широко известна. Это теорема стабильности Риба, которая названа по имени ее автора и основателя теории слоений Жоржа Риба.

Теорема 1.4.1 ([70]) *Пусть $\mathcal{F}$ - слоение коразмерности один на компактном многообразии M. Предположим, K - компактный слой, имеющий конечную фундаментальную группу. Тогда все слои компактны. Если слоение трансверсально ориентируемо, то M является расслоением над S^1 или I со слоем K (граница M предполагается состоящей из слоев $\mathcal{F}$).*

Эта теорема является следствием локальной стабильности Риба, которая утверждает, что в условиях теоремы существует окрестность компактного слоя, где слоение выглядит как прямое произведение слоя на интервал.

Следующий результат Кантвела и Конлона является обобщением теоремы локальной стабильности Риба в размерности 3 на некомпактные слои.

Теорема 1.4.2 ([71]) *Если голономия собственного (вложенного) слоя L, гомеоморфного ориентируемой поверхности со счетным числом концов и конечным числом ручек, тривиальна, то слоение в некоторой насыщенной окрестности L гомеоморфно прямому произведению $L \times \mathbb{R}$.*

В следующей теореме У. Терстон обобщил теорему Риба для произвольной размерности, ослабив ограничение на фундаментальную группу ограничением на первые когомологии.

Теорема 1.4.3 ([72]) *Пусть $\mathcal{F}$ - трансверсально ориентируемое слоение коразмерности один класса C^1 на компактном многообразии M с компактным слоем K таким, что $H^1(K;\mathbb{R}) = 0$. Тогда M является расслоением над S^1 или I со слоем K.*

Дж.Плант и У.Терстон изучали голономию слоя, имеющего полиномиальный рост и доказали следующую теорему.

Теорема 1.4.4 ([73]) *Если группа голономии слоя трансверсально ориентируемого C^2 - слоения коразмерности один имеет полиномиальный рост, то она является свободной абелевой.*

Нисимори [74] доказал следующую важную теорему, описывающую поведение слоения в окрестности компактного слоя с абелевой голономией .

Теорема 1.4.5 (Теорема Нисимори) *Пусть $\mathcal{F}$ трансверсально ориентируемое C^r - слоение коразмерности один на ориентируемом n - мерном многообразии M и F_0 - компактный слой $\mathcal{F}$. Предположим, что $2 \leq r \leq \infty$. Пусть T трубчатая окрестность F_0 и U_+ есть объединение F_0 и связной компоненты $T \backslash F_0$. Предположим, что $\Psi^+(\pi_1(F_0))$ является абелевой группой, тогда имеет место лишь одна из следующих возможностей.*

1) *Для всех окрестностей V слоя F_0 ограничение слоения $\mathcal{F}|_{V \bigcap U_+}$ имеет компактный слой отличный от F_0.*

2) *Существует окрестность V слоя F_0 такая, что все слои $\mathcal{F}|_{V \bigcap U_+}$ за исключением F_0 плотны в $V \bigcap U_+$. В этом случае $\Psi^+(\pi_1((F_0))$ является свободной абелевой группой ранга ≥ 2.*

3) *Существует окрестность V слоя F_0 и связное, коразмерности один, ориентируемое подмногообразие N в F_0, обладающее следующими свойствами. Определим через F_* компактное многообразие с границей, полученное вклейкой двух копий N_1 и N_2 многообразия N в $F_0 \backslash N$, так что $\partial F_* = N_1 \bigcup N_2$. Пусть $f : [0, \varepsilon) \to [0, \delta)$ сжимающий C^r диффеоморфизм такой что $f(0) = 0$. Обозначим через X_f фактор-многообразие, полученное из $F_* \times [0, \varepsilon)$ отождествлением $(x, t) \in N_1 \times [0, \varepsilon)$ и $(x, f(t)) \in N_2 \times [0, \delta)$. После факторизации мы получаем фактор - слоение F_f на X_f. Утверждается, что тогда для некоторого f, описанного выше, существует C^r диффеоморфизм $h : V \bigcap U_+ \to X_f$, который отображает каждый слой $\mathcal{F}|_{V \bigcap U_+}$ на некоторый слой F_f. $\mathcal{F}|_{V \bigcap U_+}$ однозначно определяет гомологический класс $[N] \in H_{n-2}(F_0, \mathbb{Z})$, а росток в нуле отображения f однозначен с точностью до сопряженности. В этом случае $\Psi^+(\pi_1((F_0))$ является бесконечной циклической группой.*

Определение 1.4.6. *Слоение называется слоением без голономии, если голономия каждого слоя тривиальна.*

С.П. Новиков доказал следующую теорему.

Теорема 1.4.7 ([75]) *Если C^2 - слоение коразмерности один на замкнутом многообразии является слоением без голономии, то многообразие является расслоением над окружностью.*

Определение 1.4.8. *Слоение называется слоением почти без голономии, если все некомпактные слои имеют тривиальную голономию.*

Определение 1.4.9. *Скажем, что компактное подмножество B замкнутого многообразия M со слоением $\mathcal{F}$ коразмерности один является блоком, если B – связное многообразие с краем, являющееся насыщенным множеством, то есть множеством, являющимся объединением слоев.*

Иманиши доказал серию важных результатов, которые мы, несколько модифицируя, объединим в следующую теорему.

Теорема 1.4.10 ([76]) *Предположим, что B – блок почти без голономии, внутренность которого не содержит компактных слоев, тогда:*

1) *Все слои внутри блока диффеоморфны типичному слою L, и B может быть двух типов:*

   A) *B - плотный блок: каждый типичный слой $L \subset int\, B$ плотен в B;*

   B) *B - собственный блок: каждый типичный слой $L \subset int\, B$ является собственным (вложенным подмногообразием) в B.*

2) В обеих случаях

$$\widetilde{int\ B} \simeq \widetilde{L} \times \mathbb{R} \tag{1.4.2}$$

3) Существует точная последовательность:

$$1 \to \pi_1(L) \to \pi_1(B) \xrightarrow{\phi} \mathbb{Z}^k \to 0 \tag{1.4.3}$$

4) Блок B является собственным, тогда и только тогда, когда $k = 1$. В этом случае $int\ B$ является расслоением над окружностью с типичным слоем L.

Замечание 1.4.11. *Из* (1.4.2) *следует, что $k \geq 1$ в* (1.4.3).

Минимальные множества. Рост слоев

С точки зрения динамических систем, слоение является обобщением локально свободного действия группы Ли на многообразии, в частности, действия группы действительных чисел. Следующее понятие заимствовано из теории динамических систем.

Определение 1.4.12. *Минимальным множеством в слоеном многообразии называется замкнутое насыщенное множество, не содержащее в себе другого замкнутого насыщенного множества.*

Следующая важнейшая теорема, принадлежащая Дж. Планту, описывает минимальные множества слоений коразмерности один, имеющие слои субэкспоненциального роста (имеется ввиду рост объема риманова шара в зависимости от радиуса).

Теорема 1.4.13 (Теорема Планта [77]) *Если слои C^2-слоения коразмерности один на компактном многообразии имеют субэкспоненциальный рост объема шаров, то всякое минимальное множество является либо всем многообразием, либо компактным слоем.*

Одной из основных задач, которая исследуется в диссертации, является нахождение топологических препятствий к существованию на замкнутом римановом многообразии слоения коразмерности один неотрицательной кривизны. Под слоением неотрицательной кривизны мы понимаем следующее.

Определение 1.4.14. *Мы будем говорить, что слоение $\mathcal{F}$ на римановом многообразии M является слоением неотрицательной секционной кривизны (неотрицательной кривизны Риччи), если все слои этого слоения в индуцируемой метрике имеют неотрицительную секционную кривизну (неотрицательную кривизну Риччи).*

Теорема Планта имеет очень важное значение для изучения геометрии и топологии слоений неотрицательной кривизны. Действительно, из теоремы 1.1.7 следует, что слоение неотрицательной кривизны Риччи имеет полиномиальный рост слоев и удовлетворяет условиям теоремы 1.4.13.

Следствие 1.4.15. *Либо все слои слоения неотрицательной кривизны Риччи всюду плотны, либо замыкание каждого слоя содержит компактный слой.*

Замечание 1.4.16. *Рост слоя тесно связан с ростом псевдогруппы голономии слоя. Напомним, что функции $\bar{g}_{ij}$ в (4.3.1) удовлетворяют условию коцикла: $\bar{g}_{ij} = \bar{g}_{ik}\bar{g}_{kj}$ и порождают псевдогруппу локальных диффеоморфизмов $Q := \coprod_{\lambda} Q_\lambda$, называемую псевдогруппой голономии слоения $\mathcal{F}$. Обозна-*

чим ее через $\mathcal{P}$*, а систему образующих через* Γ*. Заметим, что если многообразие замкнуто, то псевдогруппа голономии конечно порождена. Пусть* $\mathcal{P}(y) = \{z \in Q | \exists g \in \mathcal{P} : z = g(y)\}$ *- орбита точки* $y \in Q$*. Нетрудно видеть, что орбиту* $\mathcal{P}(y)$ *можно отождествить с* $\sigma(Q) \cap L$*, где* $\sigma : Q \to M$ *- трансверсальное сечение, ограничение которого на* Q_i *является сечением* $\sigma_i : Q_i \to U_i$ *проекции* $\pi \circ \varphi_i : U_i \to Q_i$*. Обозначим через* $\|g(x)\|$ *наименьшее* l *такое, что* $g(x) = h_l \circ \cdots \circ h_l(x)$*, где* $h_i \in \Gamma \cup \Gamma^{-1}$*. Теперь введем расстояние на* $\mathcal{P}(x)$*.*

$$d(x,y) = \min_{g(x)=y} \|g(x)\|.$$

Функция $\gamma_{\mathcal{P}(x)} : n \to \#\{y \in \mathcal{P}(x) | d(x,y) \le n\}$ *называется функцией роста орбиты* $\mathcal{P}(x)$*. В [78, Ch. IX] показано, что порядок роста* $gr(\mathcal{P}(x))$ *не зависит от выбора образующих* Γ *и от точки орбиты* $x \in \mathcal{P}(x)$*. Там же доказывается, что для замкнутых многообразий*

$$gr(\mathcal{P}(x)) = gr(L, g_L). \tag{1.4.4}$$

Здесь L *- слой с индуцированной метрикой* g_L*, соответствующий орбите* $\sigma(Q) \cap L$ *точки* x*, а* $gr(L, g_L)$ *- порядок роста функции объема слоя* L*. При этом в (1.4.4) берется ограничение функции объема на* $\mathbb{N}$*. Напомним, что две неотрицательные функции* f *и* g*, принадлежащие* $C(\mathbb{R}^+)$ *имеют тот же порядок роста, если существуют положительные константы* a, b, c, d *такие, что* $ag(bx) \le f(x) \le cg(dx)$ *для* $x \ge x_0$*.*

Определение 1.4.17. *Слой* L *называется пружинным, если он бесконечно наматывается сам на себя. Это означает, что существует замкнутая петля* γ *на* L*, такая, что* $\Psi^+([\gamma])$ *является элементом бесконечного порядка в односторонней группе голономии, который представляется сжимающим отображением* $\Gamma^+ : [0,1) \to [0,1)$*, и существует значение* $x \in (0,1)$*, соответствующее локальному слою, принадлежащему* L*.*

Теорема 1.4.18 ([78]) *Пружинный слой имеет экспоненциальный рост.*

Следствие 1.4.19. *Слоение неотрицательной кривизны Риччи не имеет пружинных слоев.*

Следующий вопрос поставлен Г. Штаком в [79].

Вопрос 1.4.20. *Допускают ли сферы S^{2n+1}, $n \geq 2$ слоение коразмерности один неотрицательной секционной кривизны?*

Замечание 1.4.21. *Стандартное слоение Риба на S^3 дает пример слоения неотрицательной кривизны для стандартной метрики сферы.*

В данной диссертационной работе мы доказываем, что ответ на вопрос 1.4.20 является отрицательным.

Слоения с универсальной равномерностью

Г. Штак доказал следующую теорему, являющуюся естественным слоеным аналогом теоремы Картана - Адамара.

Теорема 1.4.22 ([79]) *Пусть $(M^n, \mathcal{F})$ - C^3-слоение коразмерности 1 на полном римановом многообразии M^n, слои которого имеют неположительную секционную кривизну в индуцированной метрике. Тогда универсальное накрытие $\widetilde{M}^n$ диффеоморфно $\mathbb{R}^n$.*

Напомним, что односвязное полное риманово многообразие неположительной секционной кривизны является равномерно стягиваемым с тождественной функцией равномерности.

Как будет показано в четвертой главе, теорема 1.4.22 имеет естественное обобщение на более общий класс слоений, а именно слоений, чьи слои имеют равномерно стягиваемые универсальные накрытия с общей функцией равномерности. Такие слоения назовем *универсально равномерно стягиваемыми.* Оказывается, существует необходимое условие для того, чтобы слоение коразмерности один имело стягиваемые слои:

Теорема 1.4.23 ([80]) *Пусть $(N, \mathcal{F})$ - гладкое многообразие с трансверсально ориентируемым C^1 - слоением F коразмерности 1 на нем. Если при некотором $k \geq 2$ группа $\pi_k(N)$ нетривиальна, то у $\mathcal{F}$ найдется такой слой F, что для некоторого $j \in 1 \leq j \leq k$, группа $\pi_j(F)$ нетривиальна.*

По аналогии, слоения, чьи слои имеют равномерно k - связные универсальные накрытия с общей функцией равномерности назовем *универсально равномерно k - связными.*

Важным примером универсально равномерно односвязных слоений являются слоения, универсальные накрытия слоев которого имеют *кокомпактную группу* изометрий, как например, слоения, образованные орбитами локально свободного действия групп Ли с левоинвариантной метрикой. Имеет место следующая важная теорема, доказанная Адамсом и Штаком.

Теорема 1.4.24 ([81]) *Пусть M полное риманово многообразие со слоением $\mathcal{F}$ на нем. Предположим, что существует изометрическое накрытие $p : \hat{L} \to L$ слоя $L \overset{i}{\hookrightarrow} M$, имеющее кокомпактную группу изометрий. Если $L' \subset \bar{L}$, то существует последовательность изометрий $g_i : \hat{L} \to \hat{L}$ такая, что последовательность отображений $i \circ p \circ g_i : \hat{L} \to M$ сходится равномерно на компактных множествах к отображению $f : \hat{L} \to M$, чей образ является слоем L', а индуцированное отображение на образ $p' : \hat{L} \to L'$ является изометрическим накрытием.*

Адамс и Ферри доказали слоеный аналог теоремы о расщеплении Чигера - Громолла:

Теорема 1.4.25 ([82]) *Минимальное множество слоения неотрицательной кривизны Риччи с трансверсально инвариантной мерой содержит слои, изометричные риманову произведению $N \times E^k$, где N – компактно.*

Из работы Планта [83] следует, что минимальное множество слоения коразмерности один, имеющее полиномиальный рост слоев, в частности, слоение неотрицательной кривизны Риччи, имеет трансверсально инвариантную меру. Из теоремы 1.4.13 получаем следствие.

Следствие 1.4.26. *Если слоение коразмерности один замкнутого многообразия неотрицательной кривизны Риччи не содержит компактных слоев, то все слои всюду плотны и среди них имеются слои, расщепляющиеся в прямое произведение $N \times E^k$, где N – компактно.*

Как будет показано, эти результаты имеют ключевое значение в описании топологической структуры слоений неотрицательной кривизны.

Внешняя геометрия слоений трехмерных многообразий

Пусть (M, g) гладкое ориентируемое компактное риманово трехмерное многообразие и $\mathcal{F}$ гладкое трансверсально ориентируемое слоение коразмерности один на M.

Пусть L интегрируемое распределение касательное к $\mathcal{F}$, а ΓL – пространство гладких сечений расслоения L.

Напомним понятие второй квадратичной формы слоения.

Определение 1.4.27. *Пусть ∇ связность Леви - Чивита на M, а $X, Y \in \Gamma L$ – гладкие сечения L. Вторая фундаментальная форма слоения $\mathcal{F}$ определяется следующей формулой:*

$$B(X, Y) = g(\nabla_X Y, \xi),$$

где ξ единичное векторное поле ортогональное $\mathcal{F}$.

Нетрудно показать, что на сечениях $X : |X| = 1$ вторая квадратичная форма, соответствующая симметричной билинейной форме B приобретает вид:

$$B(X,X) = g([X,\xi],X).$$

Определение 1.4.28. *Оператор Вайнгартена $W : \Gamma L \to \Gamma L$ это симметрический билинейный оператор, определенный соотношением:*

$$g(\nabla_X Y,\xi) = g(W(X),Y).$$

Напомним определение следующих классов слоений, возникающих на трехмерных многообразиях:

1. $B \equiv 0$ — **вполне геодезическое** слоение (слои - вполне геодезические подмногообразия).

2. $trW \equiv H = 0$ — **гармоническое** слоение (слои - минимальные подмногообразия).

3. $B = \lambda G$ — **вполне омбилическое** слоение (слои - вполне омбилические подмногообразия).

4. $B(x) \neq \lambda G(x)\ \forall x \in M$ — **омбилически свободное** слоение (слои не содержат омбилических точек).

Прежде, чем дать следующие определения, напомним формулу Гаусса:

$$K - K_\sigma = K_e := det\ W,$$

где K_e это внешняя кривизна, равная по определению разности гауссовой кривизны слоя K и секционной кривизны K_σ в направлении, касательном к слою.

Следующие классы были предложены для рассмотрения профессором А. Борисенко (см. [84]). Им же была сформулирована проблема существования этих классов слоений на замкнутых трехмерных римановых многообразиях.

5. $K_e \equiv 0$ — **параболическое** слоение
6. $K_e \geq 0$ — **эллиптическое** слоение
7. $K_e \leq 0$ — **седловое** слоение
8. $K_e < 0$ — **сильно седловое** слоение

Замечание 1.4.29. *Все классы слоений аналогично определяются и для случая распределений.*

Оказывается, что существуют интегральные препятствия к существованию некоторых классов слоений. Одно из них это известная интегральная формула, принадлежащая Ж. Рибу:

$$\int_M H d\mu = 0,$$

где $d\mu$ — форма объема на M. Из этой формулы, например, следует, что на замкнутом многообразии не существует эллиптического неплоского слоения коразмерности один.

Ю. Аминов (см. [85]) установил следующее замечательное интегральное равенство:

$$\int_M Ric(\xi, \xi) d\mu = 2 \int_M K_e d\mu,$$

из которого, в частности, следует, что замкнутое трехмерное риманово многообразие неотрицательной кривизны Риччи не допускает сильно седлового слоения коразмерности один. Здесь ξ обозначает единичное векторное поле, ортогональное к $\mathcal{F}$.

Напомним определение рибовской компоненты.

Пример 1.4.30 (Слоение Риба)

Пусть (r, z) - полярные координаты на $\mathbb{R}^2$. Рассмотрим 1-форму

$$h(r)dr + (1 - h(r))dz,$$

где $h(r)$ - гладкая монотонно возрастающая нечетная функция такая, что:

$$h(r) = 0 \text{ при } r = 0 \text{ и } h(r) = 1 \text{ при } r = 1.$$

В цилиндрических координатах (r, ϕ, z) $(0 \le r \le 1)$ на $\mathbb{R}^3$ эта форма задает слоение на $D^2 \times \mathbb{R}$, где D^2 - диск радиуса 1. Нетрудно видеть, что это слоение опускается на полноторий $D^2 \times S^1$ после факторизации по действию группы $\mathbb{Z}$ параллельными переносами вдоль оси Oz. Склеив два полнотория по общему компактному слою можно получить слоение на линзовых пространствах $L_{p/q}$, на $S^2 \times S^1$ а также на трехмерной сфере S^3. В последнем случае слоение является классическим слоением Риба, а сам слоеный полноторий называется рибовской компонентой (см. рис. 1.4).

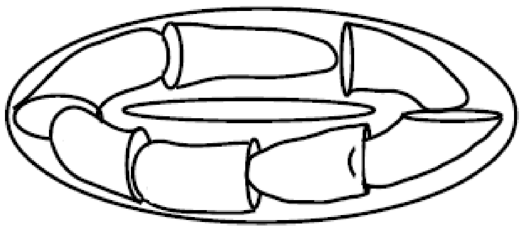

Рис. 1.4. Рибовская компонента.

Нетрудно видеть, что единственным компактным слоем слоения Риба является тор $T^2 = \partial D^2 \times S^1$.

Определение 1.4.31. *Обобщенной рибовской компонентой называется ориентированное компактное многообразие с границей вместе с трансверсально ориентируемым слоением коразмерности один касательным к краю, причем трансверсальное векторное поле на границе должно быть направлено всюду внутрь или всюду во вне многообразия.*

Сергей Петрович Новиков доказал следующую глубокую теорему.

Теорема 1.4.32 ([75]) *Пусть $\mathcal{F}$ – C^2-слоение коразмерности один на компактном трехмерном многообразии M^3. Если гомоморфизм $i_* : \pi_1(L) \to \pi_1(M^3)$, индуцирован вложением $i : L \to M^3$, имеет ненулевое ядро для некоторого слоя $L \in \mathcal{F}$, тогда $\mathcal{F}$ содержит рибовскую компоненту.*

Как следствие, С. П. Новиков получил следующий результат.

Теорема 1.4.33 ([75]) *Пусть M^3 – компактное ориентируемое трехмерное многообразие. Если $\pi_1(M^3)$ конечна, тогда C^2-слоение коразмерности один на M содержит рибовскую компоненту.*

Теперь приведем блестящую теорему, принадлежащую Дэнису Салливану.

Теорема 1.4.34 ([86]) *Гармоническое слоение не содержат обобщенных рибовских компонент.*

Этот результат обобщает аналогичный результат Джонсона и Витта [87] для вполне геодезических слоений.

Из теоремы Д. Сулливана 1.4.34 и теоремы Новикова 1.4.33 следует:

Следствие 1.4.35. *S^3 не допускает гармонического слоения ни для какой метрики.*

Этьен Гиз и Марко Брунела в работе [88] показали как устроены вполне омбилические слоения на трехмерных многообразиях, в частности, они показали, что, для некоторой метрики на S^3 стандартное слоение Риба $(S^3, \mathcal{F}_{Reeb})$ является вполне омбилическим.

В своей кандидатской диссертации автор доказал, что на S^3 стандартное слоение Риба $(S^3, \mathcal{F}_{Reeb})$ является параболическим для некоторой римановой метрики неотрицательной секционной кривизны. Однако, все еще оставался открытым вопрос существования седлового слоения на трехмерной сфере для какой либо метрики. В настоящей диссертации мы доказываем, что слоение Риба $(S^3, \mathcal{F}_{Reeb})$ является седловым для некоторой римановой метрики, что отвечает на вопрос, поставленный А. А. Борисенко. Более того, мы приводим примеры седловых слоений на однородных многообразиях и предлагаем способ их построения на произвольных трехмерных многообразиях.

1.5. Выводы к первой главе

В первой главе было представлено следующее:

- приведен краткий исторический обзор результатов по топологии римановых многообразий, в частности, по топологии многообразий неотрицательной секционной кривизны и неотрицательной кривизны Риччи;

- представлен K-теорный подход к получению топологических препятствий, а именно, обобщенного индекса оператора Дирака, к существованию на замкнутом спиновом многообразии с нетривиальной фундаментальной группой метрики положительной скалярной кривизны. Также описаны подходы Яо, Розенберга, Штольца и Янга к топологии PSC-многообразий в неспиновом случае;

- введено понятие макроскопической размерности и сформулированы проблемы Громова о макроскопической размерности римановых многообразий, в частности, о макроскопической размерности многообразий положительной скалярной кривизны, решению которых посвящена третья глава диссертации. Приведен необходимый обзор результатов по теории асимптотической размерности дискретных групп;

- введены необходимые понятия и дан обзор результатов по топологии, а также внутренней и внешней геометрии слоений. Сформулированы вопросы по теории слоений, решению которых посвящена четвертая глава диссертации, в частности, вопросы существования разных классов слоений на римановых многообразиях.

Глава 2

Конструкции и методы современной алгебраической топологии

Основным техническим инструментом диссертационной работы является мощный аппарат алгебраической топологии. Эта глава посвящена краткому изложению тех понятий и конструкций алгебраической топологии, которые мы существенно используем в доказательствах и которые не являются общеизвестными, как например, клеточные или сингулярные гомологии.

2.1. Обобщенные теории гомологий и когомологий

Любые теории гомологий и когомологий можно описать единым образом на языке теории гомотопий, используя понятие спектра.

Определение 2.1.1. *Спектр это последовательность клеточных пространств K_n, $n \in \mathbb{Z}$ и отображений $k_n : SK_n \to K_{n+1}$, сохраняющих отмеченные точки, где SK_n обозначает приведенную надстройку пространства K_n. Напомним, что n - ая приведенная надстройка определяется следующим образом: $S^nX = S^n \wedge X = S^n \times X/S^n \vee X$.*

$\wedge$ – произведение обладает следующими свойствами:

$$X \wedge Y \cong Y \wedge X,$$

$$(X \wedge Y) \wedge Z \cong X \wedge (Y \wedge Z).$$

Определение 2.1.2. *Пусть $\mathbf{K} = (K_n, k_n)$ – спектр. Гомологии и когомологии в $\mathbf{K}$ определяются следующим образом:*

$$H_n(X; \mathbf{K}) = \lim_{l \to \infty} \pi_{n+l}(X_+) \wedge K_l.$$

Прямой предел определяется сквозными отображениями:

$$\pi_{n+l}(X_+) \wedge K_l \xrightarrow{S} \pi_{n+l+1} S((X_+) \wedge K_l) \cong \pi_{n+l+1}(X_+) \wedge SK_l \xrightarrow{k_n} \pi_{n+l+1}(X_+) \wedge K_{l+1},$$

где отображение S ставит в соответствие сфероиду $f : S^k \to X$ приведенную надстройку f, т.е. сфероид $Sf : S^{k+1} \to \Sigma X \to SX$. Аналогично определяются когомологии:

$$H^n(X;\mathbf{K}) = \lim_{l\to\infty}[S^l X_+; K_{n+l}]_0,$$

где $[X,Y]_0$ обозначает множество гомотопических классов отображений из X в Y, сохраняющих отмеченные точки, а $X_+ = X \coprod *$.

Замечание 2.1.3. $[SX,Y]_0 = [X,\Omega Y]_0$, *где ΩY обозначает пространство петель, поэтому во множестве $[X,\Omega Y]_0$ возникает естественная групповая структура, так как ΩY является H - пространством (см. [89]). Отметим также, что группа $[S^2X,Y]_0$ – абелева.*

Если в определении X_+ заменить на X, то получатся приведенные (ко)гомологии $\widetilde{h}$. Относительные группы (ко)гомологий с коэффициентами в спектре $\mathbf{K} = \{K_l\}$ определяются так:

Определение 2.1.4.

$$H_n(X,A;\mathbf{K}) = \lim_{l\to\infty} \pi_{n+l}(X/A) \wedge K_l,$$

и

$$H^n(X,A;\mathbf{K}) = \lim_{l\to\infty}[S^l(X/A); K_{n+l}]_0.$$

Пример 2.1.5 (Классическая теория гомологий)

Спектр $\mathbf{H}(G)$, состоящий из пространств Эйленберга - Маклейна $K(G,i)$ и гомотопических эквивалентностей $K(G,i) \to \Omega K(G,i+1)$ определяет обычные (сингулярные) гомологии и когомологии с коэффициентами в группе G.

Пример 2.1.6 (Стабильные гомотопические группы)

Спектр, состоящий из сфер S^i и гомотопических эквивалентностей $S^i \to \Omega S^{i+1}$ определяет так называемые стабильные гомотопические и когомотопические группы $\pi_i^s(X)$ и $\pi_s^i(X)$. Оказывается, что стабильные гомотопические группы тесно связаны группами стабильно оснащенными кобордизмами.

Определение 2.1.7. *Оснащением подмногообразия V^k замкнутого многообразия M^n называется гладкое вложение $\phi : V \times \mathbb{R}^{n-k} \to M$ такое, что $\phi(p,0) = p$ для всех $p \in V$. Образ ϕ это ни что иное, как трубчатая окрестность U_V подмногообразия V в $\mathbb{R}^{n-k}$. Если W^{k+1} есть оснащенное подмногообразие многообразия $M \times I$, трансверсальное краю. Тогда подмногообразия $V_1 := W \cap (M \times \{0\})$ и $V_2 := W \cap (M \times \{1\})$ называются оснащенно бордантными. Не исключается случай и $(M \times \{1\}) = \varnothing$. В этом случае многообразие $M \times 0$ оснащенно бордантно нулю.*

Если M^n это сфера S^n, то V называется *стабильно оснащенным* многообразием. В этом случае имеем $TV \oplus \varepsilon^{n-k} \cong \varepsilon^n$, где ε^i обозначает тривиальное расслоение размерности i. Многообразие (W,τ) с краем $(V_1,\tau_1) \coprod (V_2,\tau_2)$ называется *стабильно оснащенным бордизмом* между оснащенными многообразиями (V_1,τ_1) и (V_2,τ_2), где τ_1, τ_2 индуцированные тривиализации посредством тривиализациии τ.

Пусть $\Omega^{fr}_{k,M}$ обозначает множество классов оснащенных бордизмов $k-$мерных оснащенных подмногообразий M^n. Рассмотрим отображение

$$F : M \to S^{n-k} \simeq \mathbb{R}^{n-k} \bigcup \infty,$$

которое в трубчатой окрестности U_V есть проекция $\phi(p,v) \to v$, а в дополнении к трубчатой окрестности $F(M \setminus U_V) = \infty$. Оснащенный бордизм задает гомотопию $F_t : M \to S^{n-k}$. Заметим, что V есть прообраз регулярного значения $F^{-1}(0)$.

Определение 2.1.8. *Пара (V, τ), состоящая из подмногообразия $V = F^{-1}(p)$ и оснащения $\tau = F^{-1}(v)$ называется многообразием Понтрягина, где (p, v) – оснащенное регулярное значение отображения F.*

Все рассуждения без труда переносятся на компактные многообразия с краем. В этом случае требуется, чтобы подмногообразия и бордизмы не пересекали $\partial M \times I$. Верна следующая теорема (см. [90]).

Теорема 2.1.9. *Имеет место биекция $\Omega^{fr}_{k,M} \to [(M, \partial M), (S^{n-k}, s_0)]$.*

Определение 2.1.10. *Пусть (V_i, τ_i, g_i), $i = 1.2$, пара стабильно оснащенных многообразия вместе с непрерывными отображениями $g_i : V_i \to X$, $i = 1, 2$. Скажем, что (V_i, τ_i, g_i) стабильно оснащенно бордантны, если существует стабильно оснащенный бордизм (W, τ), соединяющий (V_1, τ_1) и (V_2, τ_2). Для каждого $i \in \mathbb{Z}_+$ стабильно оснащенные замкнутые многообразия размерности i образуют группу $\Omega^{fr}_i(X)$.*

Оказывается, имеет место следующий изоморфизм.

$$\Omega^{fr}_i(X) \cong \pi^s_i(X_+).$$

Замечание 2.1.11. *Для отрицательных i в приведенных примерах спектр доопределяется точками.*

Чтобы рассмотреть дальнейшие важные примеры спектров, напомним некоторые сведения из теории расслоений.

Пусть $F \to E \to B$ - локально тривиальное расслоение с базой B, типичным слоем F и тотальным пространством E. Пусть G - структурная группа данного расслоения. Известно, что классифицировать такие расслоения с точностью до изоморфизма можно на языке отображений в классифицирующее пространство BG. А именно, каждому расслоению соответствует так называемое классифицирующее отображение $f : B \to BG$, причем два таких отображения гомотопны тогда и только тогда, когда соответствующие расслоения изоморфны. Напомним, что классифицирующее пространство BG зависит только от структурной группы G и определено однозначно с точностью до гомотопической эквивалентности. Например, если E - k-мерное векторное расслоение со структурной группой $O(k)$, то классифицирующим пространством будет бесконечномерное пространство Грассмана $Gr(k,\infty) = \bigcup_{n\geq 0} G(k,k+n)$, обозначаемое обычно как $BO(k)$. В ориентируемом случае, когда структурная группа редуцируется к $SO(k)$, это будет пространство ориентируемых k - мерных плоскостей $Gr^{+}(k,\infty)$, обозначаемое $BSO(k)$.

Можно рассматривать классы стабильной эквивалентности векторных расслоений, а именно, считать два расслоения μ и ν над B - эквивалентными, если существуют тривиальные расслоения N_1 и N_2 над B, такие что $\mu \oplus N_1 \cong \nu \oplus N_2$. В этом случае классифицирующим пространством будет пространство $BO = \varinjlim BO(k)$ (соответственно $BSO = \varinjlim BSO(k)$). Например, известная теорема Уитни гласит, что любое гладкое многообразие можно реализовать, как вложенное гладкое подмногообразие в евклидовом пространстве достаточно большой размерности. Можно показать, что класс стабильной эквивалентности нормального расслоения не зависит от вложения и корректно определяет класс стабильного нормального расслоения.

Аналогичные рассмотрения верны и для комплексных векторных расслоений. Соответствующее классифицирующее пространство для стабильных комплексный векторных расслоений обозначается BU и соответствует

группе
$$U = \bigcup_{k=1}^{\infty} U(k).$$

Наконец, если расслоение является регулярным накрытием, в частности, универсальным накрытием, то классифицирующим пространством для универсального накрытия является асферическое пространство $B\pi$, а классифицирующее отображение

$$f : B \to B\pi$$

для универсального накрытия индуцирует изоморфизм фундаментальных групп. Напомним, что асферическое пространство это пространство, чье универсальное накрытие стягиваемо. Такие пространства имеют тривиальные гомотопические группы, за исключением фундаментальной группы, то есть являются $K(\pi,1)$ - пространствами.

Пример 2.1.12 (К-теория)

Комплексная K - теория соответствует периодическому спектру $\mathbf{KU} = (K_n, k_n)$, где $K_{2n+1} = U \times \mathbb{Z}$, а $K_{2n} = BU \times \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}$. При этом $k_n : K_n \to \Omega K_{n+1}$ - гомотопические эквивалентности. Это знаменитая периодичность Ботта. Соответствующие группы (ко)гомологий обозначаются $K_*(X)$ $(K^*(X))$.

Вещественная K - теория, соответствующая спектру $\mathbf{KO} = (K_n, k_n)$, также имеет периодический спектр, где $k_n : K_n \to \Omega K_{n+1}$ – гомотопические эквивалентности, но уже с периодом 8, первые два пространства которого $SO \times \mathbb{Z}$ и $BSO \times \mathbb{Z}$. Соответствующие группы (ко)гомологий обозначаются $KO_*(X)$ $(KO^*(X))$.

Классическое определение K-теории через группу Гротендика, построенную на классах стабильно эквивалентных расслоений, можно найти, например, в [89].

Пример 2.1.13 (Бордизмы и кобордизмы)

Напомним, что два n -многообразия M и N называются *бордантными*, если существует $n+1$ - многообразие W, называемое пленкой или бордизмом, чья граница есть $M \coprod N$. Если M и N являются ориентированными (или спиновыми) многообразиями, требуется, чтобы W было ориентируемым (или спиновым) и индуцировало ориентацию на границе $\partial W = M \coprod -N$. В этом случае говорят об ориентированной (спиновой) бордантности двух многообразий. Так же можно ввести понятие G - бордантности для произвольных G - многообразий с G - структурой (см. [91]). Более общо, пусть $f : M \to X$ и $g : N \to X$ непрерывные отображения в пространство X. Скажем, что пары (M, f) и (N, g) G - бордантны, если существует G - многообразие W с границей $\partial W = M \coprod -N$ и непрерывное отображение $F : W \to X$, ограничение которого на M и N дает f и g соответственно. Дизъюнктное объединение таких пар задает абелеву группу $\Omega_n^G(X)$ в которой нулевой элемент соответствует пустому множеству, а обратный к $[M, f]$ есть $[-M, f]$. Заметим, что группа $\Omega_n^G(*)$ совпадает с группой обычных G – бордизмов. В дальнейшем в основном нам важны будут случаи ориентированных ($G = SO$), $Spin$-бордизмов ($G = Spin$) и $Spin^c$-бордизмов ($G = Spin^c$). Если G тривиальна, то мы получаем оснащенные бордизмы, которые описаны нами в 2.1.10.

Группы бордизмов также образуют теорию гомологий. Соответствующий спектр **MG** состоит из пространств Тома $\{MG_l\}$ тавтологических расслоений (см. [91]). Соответствующие группы когомологий $\Omega_G^*(X)$ называются группами G – кобордизмов пространства X.

Все описанные теории (ко)гомологий $h_*(h^*)$ называются экстраординарными теориями. Они удовлетворяют всем аксиомам Эйленберга - Стинрода, кроме аксиомы размерности, которая требует равенство нулю всех гомологий точки, кроме нулевых. Более того, гомологии $h_i(*)$ точки могут быть нетривиальными и для отрицательных i, как например в случае действительной или комплексной K - теорий. Более того они периодичны, так как периодичен спектр. Однако, всякому спектру $\mathbf{E}$ можно сопоставить спектр $\mathbf{e}$ вместе с морфизмом $f : \mathbf{e} \to \mathbf{E}$, который называется *связным накрытием*, обладающие следующими свойствами:

1. $\pi_i(\mathbf{e}) := \lim_{n\to\infty} \pi_{i+n}(e_n) = 0$ для $i < 0$,

2. $f_* : \pi_i(\mathbf{e}) \to \pi_i(\mathbf{E})$ - изоморфизм для $i \geq 0$.

Спектр обладающий свойством 1 называется *связным.* Связные спектры для периодических $\mathbf{K}$ и $\mathbf{KO}$ - теорий обозначаются $\mathbf{k}$ и $\mathbf{ko}$ соответственно, а связные накрытия обозначаются $\mathrm{per} : \mathbf{k} \to \mathbf{K}$ и $\mathrm{per} : \mathbf{ko} \to \mathbf{KO}$ соответственно.

Напомним понятие морфизма спектров.

Определение 2.1.14. *Пусть $E = \{E_n, s_n\}$ и $F = \{F_n, t_n\}$ два спектра. Преобразованием (морфизмом) $f : E \to F$ двух спектров E и F называется семейство непрерывных отображений $f_n : E_n \to F_n$ таких, что $f_{n+1}s_n = t_n \circ Sf_n$ для всех n.*

Замечание 2.1.15. *Все вышеприведенные группы экстраординарных когомологий являются мультипликативными, т.е. $h^*(X)$ это мультипликативное кольцо с $1 \in h^0(X)$. Более того, предполагается наличие умножения:*

$$h^p(X, A) \otimes h^q(X, B) \to h^{p+q}(X, A \cup B),$$

где все умножения должны быть естественны по отношению к индуцированным гомоморфизмам. В частности, $h^*(pt)$ является градуированным *ассоциативным кольцом с единицей, а $h^*(X,A)$ оказывается модулем над кольцом $h^*(pt)$.*

2.2. Гомологии и когомологии с локальными коэффициентами

Во многих вопросах топологии и геометрии возникает необходимость применять (ко)гомологии, учитывающие действие фундаментальной группы. Одним из таких объектов являются (ко)гомологии с локальными коэффициентами. Прежде, чем их определить, напомним некоторые алгебраические конструкции. Ниже все пространства предполагаются клеточными или гомотопически эквивалентные им.

Определение 2.2.1. *Групповым кольцом $\mathbb{Z}\pi$ группы π называются формальные конечные линейные комбинации*

$$\sum_i m_i g_i,\ \ m_i \in \mathbb{Z},\ \ g_i \in \pi.$$

Умножение в $\mathbb{Z}\pi$ определяется следующим образом:

$$(\sum_i m_i g_i)(\sum_i n_i h_i) = \sum_{i,j}(m_i n_j)(g_i h_j).$$

Пусть A – абелева группа, и

$$\rho : \pi \to \mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}}(A) \tag{2.2.1}$$

есть гомоморфизм в группу автоморфизмов группы A. Тогда представление ρ наделяет A структурой $\mathbb{Z}\pi$ – модуля посредством действия

$$(\sum_i m_i g_i)\cdot a = \sum_i m_i \rho(g_i)(a).$$

Обратное также имеет место. Если A – левый модуль над $\mathbb{Z}\pi$, то существует представление (2.2.1) заданное по правилу:

$$g \to (a \to ga),$$

где ga понимается как умножение $a \in A$ на $g \in \mathbb{Z}\pi$.

Теперь рассмотрим универсальное накрытие $\widetilde{X} \to X$ пространства X с $\pi_1(X) = \pi$. Отождествляя π с группой преобразований накрытия, мы получаем на сингулярном комплексе $S_*(\widetilde{X})$ структуру правого $\mathbb{Z}\pi$ – модуля, где действие элемента $g \in \pi$ на симплекс

$$\sigma : \Delta^k \to \widetilde{X}$$

переводит его в симлекс $\sigma \cdot g$, полученный композицией σ и соответствующим преобразованием универсального накрытия:

$$g : \widetilde{X} \to \widetilde{X}.$$

Осталось продолжить действие с π на $\mathbb{Z}\pi$ по линейности. Теперь дадим определение гомологий с локальными коэффициентами.

Определение 2.2.2. *Пусть A – произвольный $\mathbb{Z}\pi$-модуль. Тогда гомологии $H_*(X; A)$ пространства X с локальными коэффициентами в A это гомологии комплекса*

$$S_*(\widetilde{X}) \otimes_{\mathbb{Z}\pi} A.$$

Если модуль A определен представлением (2.2.1), пишут $H_*(X; A_\rho)$ вместо $H_*(X; A)$, и говорят, что $H_*(X; A_\rho)$ это гомологии X с подкрученными коэффициентами посредством представления ρ.

Замечание 2.2.3. *Оказывается, что гомологии CW-комплекса X с локальными коэффициентами в модуле A совпадают с эквивариантными локально конечными гомологическими группами $H_*^{lf,\pi}(\widetilde{X}; A)$, которые определяются как группы гомологий комплекса бесконечных локально конечных* *инвариантных цепей*

$$C_n^\pi(\widetilde{X};A) = \{ \sum_{e\in E_n(\widetilde{X})} \lambda_e e|\ \lambda_{ge} = g\lambda_e,\ \ \lambda_e \in A\},$$

где $E_n(Y)$ обозначает множество n-мерных клеток клеточного пространства Y.

Для определения когомологий с локальными коэффициентами, определим для начала на $S_*(\widetilde{X})$ структуру левого $\mathbb{Z}\pi$ – модуля положив

$$g\cdot z := z\cdot g^{-1}.$$

Дадим определение когомологий с локальными коэффициентами.

Определение 2.2.4. *Пусть A – произвольный $\mathbb{Z}\pi$-модуль. Тогда когомологии $H^*(X;A)$ пространства X с локальным коэффициентами в A это гомологии комплекса*

$$Hom_{\mathbb{Z}\pi}(S_*(\widetilde{X}), A).$$

Если модуль A определен представлением (2.2.1), то когомологии с локальными коэффициентами обозначают $H^*(X;A_\rho)$, и называют когомологии с подкрученными коэффициентами посредством ρ.

Приведем важные примеры.

Пример 2.2.5 (A – тривиален)

Если представление (2.2.1) тривиально, то мы получаем обычные сингулярные (ко)гомологии с коэффициентами в группе A.

Пример 2.2.6 ($A = \mathbb{Z}\pi$)

Пусть $A = \mathbb{Z}\pi$ с тавтологическим представлением

$$\rho : \pi \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}\pi),$$

$$\rho(g) = (\sum m_h h \to \sum m_h gh).$$

Тогда имеем:

$$S_* \widetilde{X} \otimes_{\mathbb{Z}\pi} \mathbb{Z}\pi = S_* \widetilde{X},$$

и мы получаем:

$$H_k(X; \mathbb{Z}\pi) = H_k(\widetilde{X}; \mathbb{Z}).$$

Заметим, что для когомологий, вообще говоря, подобное равенство неверно, однако, если X – компактно, то мы имеем следующий изоморфизм:

$$H^k(X; \mathbb{Z}\pi) \cong H^k_c(\widetilde{X}; \mathbb{Z}).$$

Пример 2.2.7 (Гомологии групп)

Рассмотрим случай, когда X является $K(\pi, 1)$ – пространством. В этом случае гомологии и когомологии пространства X с локальными коэффициентами A совпадают с гомологиями $H_*(\pi; A)$ и когомологиями $H^*(\pi; A)$ группы π в модуле A, которые определяются через проективную резольвенту $\mathbb{Z}$ над $\mathbb{Z}\pi$ (см. [39]). Поэтому определение (ко)гомологий группы через локальные (ко)гомологии $K(\pi, 1)$ – пространства можно считать альтернативным определением (ко)гомологий группы π.

В дальнейшем нам понадобится понятие *когомологической размерности* $\mathrm{cd}(\pi)$ дискретной группы π.

Определение 2.2.8. *$cd(\pi) = \sup\{n :$ существует $\mathbb{Z}\pi$- модуль A для которого $H^n(\pi; A) \neq 0\}$*

Замечание 2.2.9. *Можно показать, что если $cd(\pi) < \infty$, то π не содержит кручения (см. [39]).*

Напомним определение *геометрической размерности* $\operatorname{geom}\dim(\pi)$.

Определение 2.2.10. *geom dim*$(\pi) \coloneqq \min\{\dim X\}$, *где* X *– клеточное* $K(\pi,1)$*- пространство.*

Нетрудно доказать, что $\operatorname{cd}(\pi) \leq \operatorname{geom}\dim(\pi)$ (см. [39]). Как показали Эйленберг и Ганя [92]

$$\operatorname{cd}(\pi) = \operatorname{geom}\dim(\pi), \text{при } \geq 3. \tag{2.2.2}$$

Замечание 2.2.11. *Очевидно также, что имеет место равенство и в случае* $cd(\pi) = 0$. *В случае* $cd(\pi) = 1$ *равенство* $cd(\pi) = geom\ dim(\pi)$ *доказано Столлингсом для конечно порожденных групп и Суоном в общем случае (см. [39]). Вопрос для* $cd(\pi) = 2$ *до сих пор открыт.*

2.3. Ориентируемость и двойственность Пуанкаре

В этом разделе мы ограничимся рассмотрением только замкнутых многообразий.

Определение 2.3.1. *Многообразие размерности* n *называется* R *– ориентируемым, если существует фундаментальный класс* $[M] \in H_n(M;R)$ *такой, что для каждого* $x \in M$ *образ* $[M]$ *относительно гомоморфизма*

$$H_n(M;R) \to H_n(M, M \setminus \{x\};R) = H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{x\};R) = R$$

есть единица кольца R.

Определение 2.3.2. *Многообразие называется ориентируемым, если оно* $\mathbb{Z}$ *– ориентируемо.*

Заметим, что не всякое многообразие является ориентируемым. Препятствием является когомологический класс (первый класс Штифеля -Уитни) $w_1(M) \in H^1(M;\mathbb{Z}_2)$, который можно определить как элемент w группы $\mathrm{Hom}(\pi_1(M),\mathbb{Z}_2)$ следующим образом:

$$w:\pi_1(M)\to\{\pm 1\} \tag{2.3.1}$$

где $w([\gamma]) = 1$ тогда и только тогда, когда γ сохраняет ориентацию. Поэтому

Многообразие ориентируемо тогда и только тогда, когда $w_1(M) = 0$.

Замечание 2.3.3. *Любое многообразие является $\mathbb{Z}_2$ – ориентируемым.*

Двойственность Пуанкаре определяется с помощью операции высечения (см. [89]):

$$\cap : H_i(M;R)\otimes H^j(M;R)\to H_{i-j}(M;R),$$

которая определяется следующим образом. Достаточно определить $\cap$ на сингулярных симплексах

$$\{f:\Delta_{[0,1\ldots i]}\to M\}\in C_i(M;R),$$

продолжив по линейности на все цепи. Пусть $c\in C^j(M;R)$ – сингулярная коцепь. Обозначим через f' – ограничение $f|_{\Delta_{[0,1\ldots j]}}$, а через f'' ограничение $f|_{\Delta_{[j\ldots i]}}$. Тогда

$$a\cap c = c(f')f''.$$

Теперь определим изоморфизм (двойственность) Пуанкаре:

$$[M]\cap - : H^j(M;R)\to H_{n-j}(M;R).$$

Аналогичный изоморфизм имеет место, когда мы кольцо R заменим на произвольный $\mathbb{Z}\pi$-модуль A, определенный представлением

$$\rho : \pi \to \mathrm{Aut}(A),$$

где $\pi = \pi_1(M)$. Заметим, что

$$\mathrm{Aut}(Z) = \{\pm 1\}.$$

Рассмотрим локальные коэффициенты $\mathbb{Z}_w$, соответствующие представлению (2.3.1). Для любого, в том числе неориентируемого многообразия M имеем:

$$H_n(M; \mathbb{Z}_w) \cong \mathbb{Z}.$$

Определим фундаментальный класс $[M]$ как образующую $H_n(M; \mathbb{Z}_w)$. Пусть A_w-модуль, заданный представлением

$$\rho_w : \pi \to \mathrm{Aut}(A),$$

$$g \to w(g)\rho(g^{-1}).$$

Тогда двойственность Пуанкаре определяется изоморфизмом:

$$[M] \cap - : H^j(M; A) \to H_{n-j}(M; A_w).$$

В частности, когда M ориентируемо и $A = \mathbb{Z}\pi$, мы имеем:

$$[M] \cap - : H^j_c(\widetilde{M}; \mathbb{Z}) \cong H^j(M; \mathbb{Z}\pi) \to H_{n-j}(M; \mathbb{Z}\pi) \cong H_{n-j}(\widetilde{M}; \mathbb{Z}).$$

Замечание 2.3.4. *Часто изоморфизм $[M]\cap$ и обратный к нему обозначают через PD (Poincaré Duality) и говорят, что класс $PD(a)$ является двойственным к a.*

Замечание 2.3.5. *Отметим также еще один из вариантов двойственности Пуанкаре для ориентируемых многообразий:*

$$H^{lf}_i(M; \mathbb{Z}) \cong H^{n-i}(M; \mathbb{Z}),$$

где H_*^{lf} обозначает гомологии с локально конечными носителями.

Понятие ориентируемости, фундаментального класса и двойственности Пуанкаре в произвольной h – теории гомологий не является столь наглядным. Эти понятия тесно связаны с *изоморфизмом Тома*, наличие которого обеспечивает существование фундаментального класса, а значит и двойственности Пуанкаре. Напомним, как строится класс Тома и изоморфизм Тома в когомологиях де-Рама $H^*_{DR}(M) \cong H^*(M;\mathbb{R})$ гладкого ориентируемого многообразия M.

Определение 2.3.6 ([93]) *Класс Тома ориентируемого p – мерного векторного расслоения E над гладким замкнутым многообразием P это когомологический класс $\Phi(E) \in H^p_{DR}(E)$, ограничение которого на каждый слой F есть образующая старших когомологий с компактными носителями $H^p_c(F)$ слоя F. Класс Тома $\Phi(NP) \in H^p_{DR}(M)$ нормального расслоения NP (которое естественно отождествляется с трубчатой окрестностью P) к замкнутому ориентируемому подмногообразию P коразмерности p ориентируемого многообразия M и является двойственным по Пуанкаре к P.*

Умножение на класс Тома задает изоморфизм Тома когомологий:

$$\wedge\Phi : H^*(P;\mathbb{R}) \cong H^*(NP;\mathbb{R}) \to H^{*+p}_{cv}(NP;\mathbb{R}) \cong H^{*+p}(T(NP);\mathbb{R}),$$

где H^*_{cv} обозначает когомологии с компактными носителями вдоль слоев, а $T(\xi)$ обозначает пространство Тома расслоения ξ. Напомним, как определяется пространство Тома. Для этого фиксируем некоторую метрику на ξ. Пусть $D(\xi)$ и $S(\xi)$ определяют соответственно шаровое и граничное сферическое расслоения. Тогда

$$T(\xi) \coloneqq D(\xi)/S(\xi).$$

В случае произвольного (в том числе неориентируемого) многообразия изоморфизм Тома и фундаментальный класс определяются аналогично, но уже с коэффициентами в $\mathbb{Z}_2$. Оказывается, что в этом случае существует тесная связь между классами Штифеля -Уитни $w_i(\xi)$ расслоения ξ и классом Тома. А именно

$$w_i(\xi) = \phi^{-1} Sq^i \phi(1),$$

где

$$\phi : H^*(P;\mathbb{Z}_2) \cong H^*(NP;\mathbb{Z}_2) \overset{\cup\Phi}{\to} H^{*+p}(T(NP);\mathbb{Z}_2) -$$

изоморфизм Тома с коэффициентами в $\mathbb{Z}_2$, а Sq^i это i - й квадрат Стинрода, который характеризуется следующими свойствами:

1) Для каждой пары пространств $Y \subset X$ и неотрицательных целых чисел n, i определен аддитивный гомоморфизм

$$Sq^i : H^n(X,Y;\mathbb{Z}_2) \to H^{n+i}(X,Y;\mathbb{Z}_2);$$

2) Если $f : (X,Y) \to (X',Y')$ - непрерывное отображение пар, то

$$Sq^i \circ f^* = f^* \circ Sq^i;$$

3) Если $a \in H^n(X,Y;\mathbb{Z}_2)$, тогда $Sq^0(a) = a$, $Sq^n(a) = a \cup a$ и $Sq^i(a) = 0$ для $i > n$;

4) Справедлива формула Картана:

$$Sq^k(a \cup b) = \sum_{i+j=k} Sq^i(a) \cup Sq^j(b).$$

Напомним, что класс Тома имеет следующие свойства:

а) Если e есть класс эйлера E, тогда верна формула Тома - Ву:

$$\Phi(e) = u \cup u. \tag{2.3.2}$$

b)

$$s^*(u) = e.$$

Ориентация расслоения определяется и для произвольной h – теории когомологий следующим образом.

Определение 2.3.7. *Векторное расслоение ξ называется ориентируемым по отношению к теории h или h – ориентируемым, если существует элемент $u \in T(\xi)$, $n = \dim \xi$, такой, что гомоморфизм*

$$\widetilde{h}^n(T(\xi)) \to \widetilde{h}^n(S^n),$$

индуцированный вложением в $T(\xi)$ пополненного слоя $\xi_x^* = \xi_x \cup \infty \simeq S^n$, переходит в элемент вида ϵs_h^n, где ϵ – обратимый элемент кольца $h^0(pt)$, а s_h^n – образующая $\widetilde{h}^n(S^n)$. Всякий элемент u с этим свойством называется h – ориентацией расслоения ξ или, по аналогии с предыдущим, классом Тома.

Теперь можно, аналогично классическому случаю, определить гомоморфизм Тома как умножение на u:

$$h^q(X) \xrightarrow{\cdot u} \widetilde{h}^{q+n}(T(\xi)) \tag{2.3.3}$$

Можно показать, что гомоморфизм Тома является на самом деле изоморфизмом Тома.

Теперь рассмотрим стабильное нормальное расслоение NM замкнутого гладкого многообразия M размерности m, вложив его в $\mathbb{R}^k$ для достаточно большого $k \in \mathbb{Z}_+$. Если NM h-ориентируемо, то гомологии $h_*(M)$ можно определить по другому следующим образом:

$$h_*(M) \cong \widetilde{h}^{k-*}(T(NM)). \tag{2.3.4}$$

Изоморфизм Тома (2.3.3) определяет изоморфизм двойственности Пуанкаре:

$$h_*(M) \cong h^{m-*}(M).$$

Замечание 2.3.8. *Заметим, что K-ориентируемость многообразия M эквивалентна наличию на касательном (или стабильном нормальном) расслоении $Spin^c$-структуры, в то время, как KO-ориентируемость многообразия эквивалентна наличию на касательном (или стабильном нормальном) расслоении $Spin$-структуры.*

2.4. Спектральные последовательности

Стандартным методом вычисления гомологий и когомологий являются спектральные последовательности.

Одной из таких спектральных последовательностей является *спектральная последовательность Атьи -Хирцебруха* (см. [89]). Она дает возможность вычислить (ко)гомологии $h_*(X)$ клеточного пространства X для произвольной (экстраординарной) теории (ко)гомологий, зная (ко)гомологии точки и стандартные (ко)гомологии пространства, наделенного естественной фильтрацией остовами:

$$\varnothing = X^{(-1)} \subset X^{(0)} \subset \cdots \subset X^{(n)} = X.$$

В гомологиях это фильтрация индуцирует следующую фильтрацию:

$$0 = F_*^{(-1)} \subset F_*^{(0)} \subset \cdots \subset F_*^{(n)} = h_*(X), \tag{2.4.1}$$

где $F_q^{(i)}$ это образы гомоморфизмов $h_q(X^{(i)}) \to h_q(X)$. Существует последовательность групп и гомоморфизмов (E_{pq}^m, d_m) такая, что

$$E_{pq}^{m+1} = H(E_{pq}^m, d_m) := \ker d_m / Im\ d_m, \text{где}$$

$$d_m : E^m_{pq} \to E^m_{p-m,q+m-1}, d^2_m = 0,$$

$$E^2_{pq} = H_p(X, h_q(*)),$$

$$\sum_{p+q=s} E^\infty_{pq} = Gh_s(X),$$

где $Gh_s(X) = \oplus_i F^{(i)}_s / F^{(i-1)}_s$ присоединенная градуированная группа к $h_s(X)$ относительно фильтрации (2.4.1). Заметим, что когда $F^{(i)}_s$ являются векторными пространствами, то имеет место изоморфизм $Gh_s(X) \cong h_s(X)$. При этом говорят, что спектральная последовательность (E^m_{pq}, d_m) сходится к $h_*(X)$, и пишут

$$H_*(X; h_*(pt)) \Rightarrow h_*(X).$$

Обобщением этой спектральной последовательности является спектральная последовательность расслоения (E, B, F, p), для которой мы имеем:

$$E^2_{pq} = H_p(B, h_q(F)),$$

$$\sum_{p+q=s} E^\infty_{pq} = Gh_s(E).$$

В этом случае спектральная последовательность (E^m_{pq}, d_m) сходится к $h_*(E)$.

Если действие фундаментальной группы на гомологии слоя нетривиально, то надо рассматривать локальные коэффициенты.

Теперь предположим, что $p : E \to B$ – регулярное накрытие, заданное свободным действием дискретной группы G на E. Рассмотрим диагональное действие G на $E \times EG$, где EG – универсальное накрытие классифицирующего $K(G, 1)$ – пространства BG. Тогда пространство орбит $E \times_G EG$ с одной стороны является расслоением над B со стягиваемым слоем EG, а значит гомотопически эквивалентно B. А с другой стороны $(E \times_G EG)$ является расслоением над BG со слоем E, поэтому существует спектральная последовательность с

$$E^2_{pq} \cong H_p(BG; \{H_q(E)\}),$$

где $\{H_q(E)\}$ – локальная система коэффициентов, соответствующая действию $\pi_1(BG)$ на $H_q(E)$, которая сходится к гомологиям $H_*(B)$ пространства B. Для когомологий все рассмотрения аналогичны.

2.5. Элементы теории препятствий

Предположим, что у нас задано непрерывное отображение

$$f : K^{(n-1)} \to Y$$

$(n-1)$ - мерного остова клеточного пространства K в пространство Y. Естественно спросить, когда его можно продолжить на n – мерный остов $K^{(n)}$. Понятно, что продолжение возможно тогда и только тогда, когда для каждой клетки σ_α сфероид

$$f : \partial\sigma_\alpha \to Y$$

гомотопен нулю. Это означает, что коцепь

$$\lambda(f) \in C^n(K; \pi_{n-1}(Y))$$

равна тождественно нулю тогда и только тогда, когда f можно продолжить на $K^{(n)}$.

Предположим, что $\lambda(f) \neq 0$. *Можно ли изменить отображение на* $K^{(n-1)}$, *не трогая его на* $K^{(n-2)}$ *так, чтобы* $\lambda(f)$ *стало бы тождественным нулем?*

Оказывается, верна следующая теорема (см. [89]).

Теорема 2.5.1.

1. *$\lambda(f)$ является коциклом;*

2. *f можно продолжить на $K^{(n)}$, возможно меняя на $K^{(n-1)}$, не трогая его на $K^{(n-2)}$ тогда и только тогда, когда $[\lambda(f)] = 0 \in H^n(K;\pi_{n-1}(Y))$.*

Замечание 2.5.2. *Группа коэффициентов $\pi_{n-1}(Y)$ понимается здесь как $\mathbb{Z}\pi$-модуль, где $\pi = \pi_1(K)$, а структура модуля на $\pi_{n-1}(Y)$ возникает посредством действия образа гомоморфизма $f_* : \pi_1(K) \to \pi_1(Y)$ на $\pi_{n-1}(Y)$.*

Аналогичная теорема имеет место и в случае, когда требуется продолжить сечение расслоения (F, E, B, p) с $(n-1)$ - мерного остова базы B расслоения E со слоем F на n – мерный остов. При этом разрешается, как и раньше, менять сечение $\lambda : B^{(n-1)} \to E$, не трогая его на $B^{(n-2)}$. В этом случае препятствием является класс

$$[\lambda] \in H^n(B;\pi_{n-1}(F)).$$

Здесь также рассматривается локальная система коэффициентов, возникающая из действия $\pi = \pi_1(B)$ на $\pi_{n-1}(F)$, и превращающая $\pi_{n-1}(F)$ в $\mathbb{Z}\pi$-модуль.

Замечание 2.5.3. *Задача о продолжении непрерывного отображения $f : X \to Y$ равносильна задаче продолжения сечения тривиального расслоения*

$$X \times Y \xrightarrow{pr} X,$$

которое понимается как график f.

2.6. Грубо эквивариантная теория (ко)гомологий

Данная теория гомологий построена А. Н. Дранишниковым в [94] как обобщение эквивариантной теории. Для начала напомним понятие эквивариантных гомологий.

Пусть X – локально конечный CW-комплекс с фундаментальной группой π, а $\widetilde{X}$ – его универсальное накрытие. Пусть $E_n(Y)$ обозначает множество n-мерных клеток клеточного пространства Y.

Аналогично эквивариантным гомологиям (см. замечание 2.2.3) можно определить грубо эквивариантные гомологии $H_*^{lf,ce}(\widetilde{X};L)$, определяя грубо эквивариантные цепи следующим образом:

$$C_n^{ce}(\widetilde{X};L) = \{ \sum_{e\in E_n(\widetilde{X})} \lambda_e e | \text{ множество } \{\gamma^{-1}\lambda_{ge}|\gamma\in\pi\} \subset L$$

$$\text{конечно порождено (как абелева группа) для всякой клетки } e\}.$$

Группа грубо эквивариантных когомологий определяется как когомологии коцепного комплекса, элементами которого являются гомоморфизмы

$$\phi : C_n(\widetilde{X}) \to L$$

такие, что множество

$$S_{\phi,c} = \{\gamma^{-1}\phi(\gamma c)|\gamma\in\pi\}$$

является конечным для каждой цепи $c \in C_n(\widetilde{X})$. Заметим, что в случае, когда $S_{\phi,c}$ состоит из одного элемента мы получаем классические эквивариантные когомологии $H_\pi^*(\widetilde{X};L)$, равные, как и в гомологическом случае, когомологиям с локальными коэффициентами $H^*(X;L)$.

Имеют место естественные гомоморфизмы

$$ec_*^K : H_*(K;L) = H_*^{lf,\pi}(\widetilde{K};L) \to H_*^{lf,ce}(\widetilde{K};L)$$

и

$$ec_K^* : H_*(K;L) = H_\pi^*(\widetilde{K};L) \to H_{ce}^*(\widetilde{K};L)$$

индуцированные естественными вложениями

$$C^*_\pi(\widetilde{K};L) \subset C^*_{ce}(\widetilde{X};L) \text{ и } C^\pi_*(\widetilde{X};L) \subset C^{ce}_*(\widetilde{X};L).$$

Имеет место функториальность в категории грубо эквивариантных клеточных отображений. Последнее означает следующее.

Определение 2.6.1. *$g : \widetilde{X} \to \widetilde{Y}$ – грубо эквивариантно, если множество*

$$\bigcup_{\gamma in \pi} \{\gamma^{-1} g(\gamma e)\}$$

совпадает с конечным подкомплексом $K \subset \widetilde{Y}$ для каждой клетки $e \in \widetilde{X}$.

Как и в классическом случае имеет место следующее утверждение [94].

Утверждение 2.6.2. *Пусть X и Y – клеточные комплексы со свободным действием группы π.*

A) Каждое грубо эквивариантное клеточное отображение $f : X \to Y$ индуцирует гомоморфизмы грубо эквивариантных (ко)гомологий:

$$f_* : H^{fl,ce}_*(X;L) \to H^{fl,ce}_*(Y;L)$$

и

$$f^* : H^*_{ce}(Y;L) \to H^*_{ce}(X;L).$$

B) Если два отображения $f_1, f_2 : X \to Y$ в смысле клеточной грубо эквивариантной гомотопии $H : X \times [0,1] \to Y$ (т.е. грубо эквивариантны и клеточны для каждого $t \in [0,1]$), то они индуцируют одинаковые гомоморфизмы грубо эквивариантных (ко)гомологий: $(f_1)_* = (f_2)_*$ и $(f_1)^* = (f_2)^*$.

Рассмотрим открытое n-мерное PL-многообразие с фиксированной триангуляцией и фундаментальной группой π. Рассмотрим на M также двойственную триангуляцию, которая определяет взаимно -однозначное соответствие между множествами клеток. При этом каждой k-мерной клетке e сопоставляется $n-k$-мерная клетка e^*. Тогда имеет место изоморфизм Пуанкаре:

$$Hom_\pi(C_k(\widetilde{M}); L) \xrightarrow{PD_k} C^{lf,\pi}_{n-k}(\widetilde{M}; L),$$

где PD_k отображает коцепь $\pi : C_k(\widetilde{M}) \to L$ в коцепь $\sum_{e \in E_{n-k}(\widetilde{M})} \phi(e^*)e$. На языке $\cap$-произведения двойственность Пуанкаре имеет классический вид:

$$PD_k(\phi) = \phi \cap [\widetilde{M}],$$

где фундаментальный класс $[\widetilde{M}]$ имеет вид $[\widetilde{M}] = \sum_{e \in E_n(\widetilde{M})} e$.

Изоморфизм PD_k естественно продолжается до изоморфизма грубо эквивариантных (ко)цепей:

$$Hom_{ce}(C_k(\widetilde{M}); L) \xrightarrow{PD_k} C^{lf,ce}_{n-k}(\widetilde{M}; L).$$

Более того, имеет место следующая коммутативная диаграмма:

$$\begin{array}{ccc}
H^k(M; L) & \longrightarrow & H^k_{ce}(\widetilde{M}; L) \\
{\scriptstyle \cap[\widetilde{M}]}\big\downarrow & & {\scriptstyle \cap[\widetilde{M}]}\big\downarrow \\
H_{n-k}(M; L) & \longrightarrow & H^{lf,ce}_{n-k}(\widetilde{M}; L)
\end{array}$$

Как показал А. Дранишников [94], на языке грубо эквивариантных когомологий можно определить первое препятствие к ограниченному продолжению непрерывного эквивариантного клеточного отображения следующим образом.

Пусть $\widetilde{f} : \widetilde{X} \to \widetilde{Y}$ – поднятие на универсальное накрытие клеточного отображения $f : X \to Y$ конечного клеточного комплекса в локально конечный клеточный комплекс. Мы хотим продолжить ограничение $\widetilde{f}^{(n-1)}$:

$\widetilde{X}^{(n-1)} \to \widetilde{Y}^{(n-1)}$ отображение f до отображения $\widetilde{f}^{(n)} : \widetilde{X}^{(n)} \to \widetilde{Y}^{(n-1)}$, причем так, чтобы $\widetilde{f}^{(n)}$ находилось на ограниченном расстоянии от $\widetilde{f} : \widetilde{X} \to \widetilde{Y}$ (т.е. расстояние между образами точек отличались не более чем на фиксированную константу). Для стандартной задачи π-эквивариантного продолжения (см. выше) возникает препятствующая коцепь $C^n_{\widetilde{f}}$, которая равна нулю тогда и только тогда, когда существует π-эквивариантное продолжение. Класс когомологий $o^n_f = [C^n_{\widetilde{f}}]$ принадлежит группе $H^n_\pi(X; L) = H^n(X; L)$. Для существования ограниченного, не обязательно π-эквивариантного, продолжения $\widetilde{f}^{(n-1)}$ имеет место следующая теорема.

Теорема 2.6.3 ([94]) *Пусть $\widetilde{f} : \widetilde{X} \to \widetilde{Y}$ – поднятие на универсальное накрытие клеточного отображения $f : X \to Y$ конечного клеточного комплекса в локально конечный клеточный комплекс, индуцирующего изоморфизм фундаментальных групп. Тогда*

(i) $\widetilde{f}^{(n-1)} : \widetilde{X}^{(n-1)} \to \widetilde{Y}^{(n-1)}$ имеет ограниченное продолжение на $X^{(n)}$ тогда и только тогда, когда $C^n_{\widetilde{f}} = 0$.

(ii) $\widetilde{f}^{(n-2)} : \widetilde{X}^{(n-2)} \to \widetilde{Y}^{(n-1)}$ имеет ограниченное продолжение на $X^{(n)}$ тогда и только тогда, когда $C^n_{\widetilde{f}} = \delta(\Psi)$, где $\Psi \in C^{n-1}_{ce}$ - грубо эквивариантная коцепь.

2.7. Грубые когомологии

Понятие грубых когомологий принадлежит Дж. Ро [95].

Определение 2.7.1. *Пусть $f : M \to N$ не обязательно непрерывная функция между метрическими пространствами M и N. Скажем, что f – равномерно борнологично, если для каждого $R > 0$ существует $S > 0$ такие, что $d(f(x), f(x')) < S$ для любых $x,\ x' \in M$ таких, что $d(x, x') < R$.*

Определение 2.7.2. *Скажем, что* $f,\ g : M \to N$ *борнотопны и писать* $f \approx g$, *если существует константа* $R > 0$ *такая, что для всех* $x \in M$ *имеем* $d(f(x), g(x)) < R$. *Более того, если* $f : M \to N$ *и* $h : N \to M$ *– равномерно борнологичные борелевские отображения такие, что* $fh \approx 1_N$ *и* $hf \approx 1_M$, *то мы скажем, что* f *– борнотопическая эквивалентность, а пространства* M *и* N *– борнотопически эквивалентны.*

Определение 2.7.3. *Пусть* $Pen(M, R) = \{x \in N : d(x, M) \leq R\}$. *Скажем, что* M *является* ω *– плотным в* N, *если существует* $R > 0$ *такое, что* $N = Pen(M, R)$.

Нетрудно показать, что если M ω – плотно в N, тогда вложение $i : M \to N$ – борнотопическая эквивалентность.

Пусть M – метрическое пространство. Определим метрику на декартовом произведении M^{q+1} следующим образом:

$$d((x_0, \dots, x_q), (y_0, \dots, y_q)) = \max\{d(x_o, y_0), \dots, d(x_q, y_q)\}.$$

Определение 2.7.4. *Пусть* M *– метрическое пространство. Грубый комплекс* $CX^*(M)$ *это пространство локально ограниченных борелевских функций*

$$\phi : M^{q+1} \to \mathbb{R},$$

которые удовлетворяют следующему условию: для каждого $R > 0$, *множество*

$$\sup(\phi) \cap Pen(\Delta; R),$$

где $\Delta \subset M^{q+1}$ *обозначает мультидиагональ*

$$\{(x, \dots, x) : x \in M\},$$

является относительно компактным в M^{q+1}. *Дифференцирование в комплексе* $CX^*(M)$ *такое же, как в когомологиях Александера - Спеньера [95]:*

$$\partial\phi(x_0,\dots,x_q) = \sum_{i=0}^{q}(-1)^i\phi(x_0,\dots,\hat{x}_i,\dots,x_q).$$

Когомологии комплекса $CX^*(M)$ называются *грубыми когомологиями*, и обозначаются $HX^*(M)$.

Утверждение 2.7.5 ([95]) *Борнотопные отображения индуцируют один и тот же изоморфизм в грубых когомологиях. В частности, борнотопически эквивалентные пространства имеют изоморфные грубые когомологии.*

Пусть $H_c^*(M)$ обозначают когомологии Александера - Спеньера с компактными носителями. Напомним, что q – коцепь в этой теории есть в точности класс функций $z : M^{q+1} \to \mathbb{R}$, локально нулевых на дополнении компактного множества. Две такие функции эквивалентны, если они совпадают в окрестности диагонали. Существует естественное отображение, называемое *характеристическим отображением*,

$$c : HX^q(M) \to H_c^q(M), \tag{2.7.1}$$

которое сопоставляет коциклу ϕ его ограничение на $\mathrm{Pen}(\Delta; R)$ для некоторого R. Верна следующая теорема.

Теорема 2.7.6 ([95]) *Если M является равномерно стягиваемым пространством, то характеристическое отображение* (2.7.1) *является изоморфизмом для любого q.*

Имеет место функториальность грубых когомологий относительно равномерно борнологичных борелевских отображений $f : M \to N$, индуцирующих преобразование грубых комплексов

$$f^* : CX(N) \to CX(M)$$

по правилу

$$(f^*(\phi)(x_0,\dots,x_q) = \phi(f(x_o),\dots,f(x_q)).$$

Более того, имеет место коммутативная диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} HX^i(N) & \xrightarrow{f^*} & HX^i(M) \\ \downarrow{\scriptstyle c} & & \downarrow{\scriptstyle c} \\ H^i_c(N) & \xrightarrow{f^*_c} & H^i_c(M) \end{array}$$

Используя анти-Чеховскую систему равномерных покрытий метрического пространства можно определить грубые гомологии этого пространства, двойственные его грубым когомологиям, равно как и любую другую грубую hx_* -теорию, в частности, грубую K-теорию гомологий KX_* (см. [95]). При этом существует аналог assembly map Каспарова, определенный для стандартной K-теории (см. (1.2.1)):

$$A : KX_*(Y) \to K_*(C^*(Y)).$$

При этом имеет место следующая гипотеза.

Гипотеза 2.7.7 (Грубая гипотеза Баума -Конна) A *– изоморфизм.*

2.8. Кручение Уайтхеда и теорема об s-кобордизме

Пусть $GL(N,A)$ обозначает группу всех невырожденных матриц над ассоциативным кольцом с единицей A. Определим последовательность вложений

$$GL(1,A) \subset GL(2,A) \subset GL(3,A) \subset \dots$$

следующим образом

$$\begin{pmatrix} & & & 0 \\ & M & & \vdots \\ & & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

где $M \in GL(N, A)$ вкладывается в $GL(N+1, A)$.

Группа $G(A) := \bigcup_i GL(i, A)$ называется бесконечной полной линейной группой.

Группой Уайтхеда $K_1 A$ называется факторгруппа

$$GL(A)/[GL(A), GL(A)]$$

группы $GL(A)$ по своему коммутанту $[GL(A), GL(A)]$. Элемент $[-1] \in K_1 A$, являющийся образом элемента

$$(-1) \in GL(1, A) \subset GL(A),$$

либо нулевой, либо имеет порядок 2. Факторгруппу $K_1 A/(0, [-1])$ обозначим через $\bar{K}_1 A$.

Если мы рассмотрим в качестве A групповое кольцо $\mathbb{Z}\pi$. Тогда имеется естественное включение $i : \pi \to \bar{K}_1 \mathbb{Z}\pi$, где каждый элемент $p \in \pi$ можно представить как 1×1 матрицу

$$(p) \in GL(1, \mathbb{Z}\pi) \subset GL(\mathbb{Z}\pi)$$

Определение 2.8.1. *Факторгруппа* $Wh(\pi) := \bar{K}_1 \mathbb{Z}\pi / i(\pi)$ *называется группой Уайтхеда группы* π.

Нетрудно видеть, что Wh – ковариантный функтор, т. е. любой гомоморфизм

$$f : \pi_1 \to \pi_2$$

порождает гомоморфизм

$$f_* : Wh(\pi_1) \to Wh(\pi_2)$$

Более того, можно показать, что если $f : \pi_1 \to \pi_2$ – внутренний автоморфизм, то гомоморфизм $f_* : Wh(\pi_1) \to Wh(\pi_2)$ тождественен.

Группа Уайтхеда тесно связана с кручением $\tau(C) \in \bar{K}_1 A$ ацикличного (т.е. с тривиальными гомологиями) цепного комплекса (над кольцом A)

$$C : C_n \xrightarrow{\partial} C_{n-1} \xrightarrow{\partial} \dots \xrightarrow{\partial} C_1 \xrightarrow{\partial} C_0.$$

$\tau(C)$ определяется следующим образом. Как всегда пусть циклы это

$$Z_i = \ker \partial : C_i \to C_{i-1},$$

а границы это

$$B_{i-1} = Im\ \partial : C_i \to C_{i-1} \cong C_i / Z_i$$

Пусть c_i – базис C_i, а b_i – базис B_i. Нетрудно видеть, что $\{b_i, \widetilde{b}_{i-1}\}$ образуют новый базис C_i. Здесь $\widetilde{b}_{i-1}$ – поднятие базиса b_{i-1} в C_i. Обозначим через $[c_i/\{b_i, \widetilde{b}_{i-1}\}] \in \bar{K}_1 A$ класс, который представляет матрица перехода от c_i к $\{b_i, \widetilde{b}_{i-1}\}$. Тогда

$$\tau(C) := \sum_i (-1)^i [c_i/\{b_i, \widetilde{b}_{i-1}\}]$$

Пусть (K, L) – клеточная пара, причем вложение $L \subset K$ является гомотопической эквивалентностью. Комплекс $C(\widetilde{K}, \widetilde{L})$ является свободным над $\mathbb{Z}\pi$, где $\pi_1(K) = \pi$. Более того, комплекс $C(\widetilde{K}, \widetilde{L})$ ацикличен. Если c_p базис $C_p(K, L)$, то его поднятие $\widetilde{c}_p$ неоднозначно, поэтому кручение $\tau(C(\widetilde{K}, \widetilde{L}))$ не является корректно определенным, однако его образ в группе Уайтхеда $Wh(\pi)$ группы π уже корректно определен.

Определение 2.8.2. *Образ кручения $\tau(C(\widetilde{K}, \widetilde{L}))$ в факторгруппе $Wh(\pi)$ называется кручением Уайтхеда $\tau(K, L)$.*

Напомним следующую важную теорему (см. [96]).

Теорема 2.8.3. *(Теорема об s-кобордизме) Предположим, что W – компактное гладкое многообразие с границей $\partial W = M_1 \coprod M_2$, где* $\dim\ W \geq 6$, *и включения границ являются гомотопической эквивалентностью, а кручение Уайтхеда $\tau(W, M_i) \in Wh(\pi_1(W))$ равно нулю (хотя бы для одного из $i \in \{1, 2\}$), то W диффеоморфно $M_i \times I$.*

Замечание 2.8.4. *Тройку (W, M_1, M_2), удовлетворяющую условию теоремы 2.8.3 называют s-кобордизмом. Если в условии теоремы убрать требование на кручение Уайтхеда, то такой кобордизм называется h-кобордизмом. Если же $W \simeq M_i \times I$, то кобордизм называется тривиальным.*

Фридман и Течнер обобщили данный результат на 5-мерный топологический случай, правда с некоторыми ограничениями на фундаментальную группу. Необходимую нам часть результата Фридмана - Течнера мы сформулируем в следующей теореме.

Теорема 2.8.5 ([97]) *Предположим, что W^5 - компактное пятимерное многообразие с границей $\partial W^5 = M_1 \coprod M_2$ и включения границ является гомотопической эквивалентностью, а кручение Уайтхеда*

$$\tau(W^5, M_i) \in Wh(\pi_1(W^5))$$

равно нулю (хотя бы для одного из $i \in \{1, 2\}$). Тогда, если $\pi_1(W^5)$ имеет субэкспоненциальный рост, то W^5 гомеоморфно $M_i^4 \times I$.

Замечание 2.8.6. *В четырехмерном случае теорема об s-кобордизме верна только в очень специальных случаях.*

Фаррел и Хсианг доказали следующий важный результат.

Теорема 2.8.7 ([98]) $Wh(\pi_1(M)) = 0$ *для любого замкнутого плоского риманова многообразия* M. *В частности, для плоских многообразий размерности* ≥ 5 *всякий* h*-кобордизм является* s*-кобордизмом.*

Замечание 2.8.8. *Заметим, что фундаментальная группа плоского многообразия имеет полиномиальный рост.*

2.9. Топология трехмерных многообразий

Разложение трехмерного многообразия на неприводимые компоненты

Определение 2.9.1. *Замкнутое ориентируемое трехмерное многообразие* M *называется неприводимым, если всякая вложенная разделяющая двумерная сфера ограничивает в* M *трехмерный шар.*

Оказывается, любое замкнутое ориентируемое трехмерное многообразие можно представить единственным образом с точностью до гомеоморфизма как связную сумму неприводимых многообразий [99]. А именно, имеет место следующее разложение:

$$M = \Sigma_1 \# \ldots \# \Sigma_n \# k(S^2 \times S^1) \# K_1 \# \ldots \# K_m, \tag{2.9.1}$$

где Σ_i накрываются гомотопической сферой, а значит, согласно доказанной Перельманом гипотезе Пуанкаре, накрывается сферой S^3. Многообразия K_j это $K(\pi, 1)$ – пространства. Такое разложение называют *примарным разложением* или разложением Кнезера - Милнора.

Определение 2.9.2. *Замкнутая вложенная поверхность в трехмерном многообразии* M *называется несжимаемой, если вложение этой поверхности в* M *индуцирует мономорфизм фундаментальных групп.*

Приведем важную теорему Эванса - Мозера о классификации неприводимых трехмерных многообразий с разрешимой фундаментальной группой и несжимаемым краем.

Теорема 2.9.3 ([100]) *Если компактное ориентируемое неприводимое трехмерное многообразие с несжимаемой границей имеет разрешимую фундаментальную группу, то оно гомеоморфно либо* $T^2 \times I$*, либо* $\mathcal{K}$*, где* $\mathcal{K}$ *это скрученное* I*-расслоение над бутылкой Клейна.*

Следующий глубокий результат Столлингса дает достаточные условия для того, чтобы трехмерное неприводимое многообразие являлось расслоением над окружностью.

Теорема 2.9.4 ([101]) *Пусть* M^3 *это компактное неприводимое трехмерное многообразие. Предположим, что имеется эпиморфизм* $\pi_1(M^3) \to \mathbb{Z}$ *с конечно порожденным ядром, которое не изоморфно* $\mathbb{Z}_2$*. Тогда* M^3 *является расслоением над* S^1*.*

Структура слоений Зейферта на трехмерных многообразиях

Слоения Зейферта это такие компактные трехмерные многообразия, которые допускают слоение, все слои которого являются окружностью.

Отметим, что не все компактные трехмерные многообразия допускают структуру слоения Зейферта. Например, гиперболические формы, т.е. замкнутые трехмерные многообразия, допускающие метрику постоянной отрицательной секционной кривизны, таковыми не являются. В отличие от расслоения, факторпространство по слоям слоения Зейферта, вообще говоря, не является многообразием, однако является *двумерным орбиобразием.* Это означает, что каждая точка имеет окрестность, гомеоморфную факторпространству $\mathbb{R}^2$ по действию некоторой конечной группы. Кроме того, должно выполняться определенное условие согласованности действия относительно включений окрытых множеств (см. [102]). В качестве примера можно рассмотреть слоеный полноторий, полученный из тривиального расслоения цилиндра $D^2 \times I$ отрезками $x \times I$, после отождествления верхнего и нижнего оснований посредством поворота на угол $2\pi l/n$, где l и n взаимно просты. Факторпространством по слоям этого слоения будет орбиобразие $D^2(n)$, гомеоморфное диску с центром в *конической точке*. Склеив два слоеных полнотория нетрудно получить структуру слоения Зейферта на S^3, $S^2 \times S^1$, а так же на линзовом пространстве $L_{p/q} = S^3/\mathbb{Z}_q$ с образующей $\rho \in \mathbb{Z}_q$, действующей по правилу:

$$\rho(z_1, z_2) = (e^{2\pi i/q} z_1, e^{2\pi ip/q} z_2),$$

где S^3 понимается, как единичная сфера в $\mathbb{C}^2$.

Рассмотрим единственное, с точностью до гомеоморфизма, I - расслоение над бутылкой Клейна с ориентируемым тотальным пространством. Такое расслоение называется *скрученным расслоением* и обозначается через $\mathcal{K}$. Нетрудно убедиться, что границей $\mathcal{K}$ является тор. Кроме того, на $\mathcal{K}$ можно задать две структуры слоения на окружности, одна из которых это расслоение с базой лист Мебиуса. Если приклеить к $\mathcal{K}$ полноторий по некоторому диффеоморфизму тора, то, за исключением двух особых случаев, каждое из слоений может быть продолжено внутрь полнотория до некоторого слоения на окружности. Такое многообразие называется *призматическим пространством* и является факторпространством сферического пространства по свободному действию конечной группы изометрий (см. [102]). Это многообразие допускает в точности две структуры слоения Зейферта, одна из которых имеет базу $P^2(n)$, гомеоморфную орбиобразию $D^2(n)$ с приклеенным к границе листом Мебиуса. Если же склеить две копии пространства $\mathcal{K}$ по некоторому торическому диффеоморфизму, то получится, так называемое, *торическое полурасслоение* (см. [103]). Отметим, что лишь в частных случаях склейки полученное многообразие будет слоением Зейферта.

2.10. Выводы ко второй главе

Во второй главе описываются основные конструкции и методы алгебраической топологии, которые используются при доказательствах основных утверждений диссертации. А именно описаны:

- теория обобщенных (ко)гомологий, а также приведены примеры тех обобщенных теорий, которые непосредственно применяются при вычислениях;
- теория (ко)гомологий с локальными коэффициентами и эквивариантная теория (ко)гомологий;
- теория препятствий с локальными коэффициентами;
- метод спектральных последовательностей;
- двойственность Пуанкаре для различных теорий гомологий;
- грубая и грубо эквивариантная теория (ко)гомологий;
- кручения Уайтхеда и теорема об s-кобордизме;
- конструкция Кнезера - Милнора примарного разложения ориентируемого замкнутого трехмерного многообразия на неприводимые компоненты и приведены необходимые результаты, описывающие топологию неприводимых многообразий в специальных случаях;
- конструкция слоений Зейферта на трехмерных многообразиях.

Глава 3

Макроскопическая размерность и проблемы Громова

Эта глава посвящена частичному решению проблем Громова о макроскопической размерности, сформулированных в первой главе. Результаты этой главы представлены в следующих работах автора: [3, 5, 8, 13, 9].

3.1. Макроскопическая размерность трехмерных многообразий

Следующая теорема подтверждает гипотезу Громова 1.3.14 о падении макроскопической размерности универсального накрытия замкнутого многообразия размерности 3.

Теорема 3.1.1. *Пусть M – замкнутое риманово многообразие размерности 3, а $\widetilde{M}$ – его универсальное накрытие. Тогда* $\dim_{mc} \widetilde{M} \neq 2$.

Доказательство. Доказательство теоремы можно привести не привлекая грубых когомологий, однако мы приведем оригинальное доказательство, данное нами в [3], тем самым освещая весь спектр идей, работающих в данной тематике.

Так как речь в теореме идет об универсальном накрытии, то, переходя сначала к ориентируемому двулистному накрытию, можно всегда предполагать M ориентируемым.

Рассмотрим разложение Кнезера - Милнора (2.9.1) многообразия M. Заклеим разделяющие сферы в связной сумме разложения (2.9.1) трехмерными дисками, а затем заклеим многообразием $D^3 \times S^1$ каждое из k штук

$S^2 \times S^1$ по естественномму гомеоморфизму $\partial(D^3 \times S^1) \simeq S^2 \times S^1$. Нетрудно видеть, что после приклеивания, мы не изменили фундаметнальную группу M. Продолжим на полученное пространство, которое мы обозначим через V, риманову метрику.

Рассмотрим универсальное накрытие $\widetilde{V}$ с поднятой метрикой, после чего заклеим каждое из $\widetilde{\Sigma}_i \simeq S^3$ четырехмерными дисками и продолжим на них риманову метрику ds^s следующим образом:

$$d\sigma^2 = dr^2 + r^2 ds^2. \tag{3.1.1}$$

Полученное пространство обозначим через $\widetilde{W}$. Покажем, что пространство $\widetilde{W}$ равномерно стягиваемо.

Первым делом стянем разделяющие сферы в точки в связной сумме (2.9.1) и продеформируем все точки в одну, чтобы получился букет пространств. Затем радиально деформируем каждое из k штук $D^3 \times S^1$ на окружность $0 \times S^1$. Получится букет пространств, представляющих собой окружности, $K(\pi, 1)$ – пространства и Σ_i, $i = 1 \ldots, n$. Эта гомотопия, обозначим ее через F_t, поднимается до равномерной (короткой) гомотопии $\widetilde{F}_t$ в универсальном накрытии. Это означает, что каждая точка сдвигается в процессе гомотопии на расстояние не больше фиксированной константы ($\mathrm{Diam}\ V$). В универсальном накрытии мы получим стягиваемое пространство с приклеенными по точке сферами S^3 (образами сфер $\widetilde{\Sigma}_i$). Так как все сферы $\widetilde{\Sigma}_i \simeq S^3$ равномерно ограничены в $\widetilde{V}$, то после их заклеивания дисками D_i^4, $i = 1, \ldots, n$, и доопределяя на них метрику (3.1.1), мы получаем равномерно стягиваемое пространство $\widetilde{W}$.

Обратим внимание, что по построению $\partial\widetilde{W} = \widetilde{M}$ и $\widetilde{M}$ является ω – плотным в $\widetilde{W}$. Заметим также, что если в разложении (2.9.1) отсутствуют $K(\pi, 1)$ – слагаемые, то $\widetilde{W}$ равномерно деформируется в дерево. Для этого достаточно рассмотреть гомотопию:

$$\Psi_t = \begin{cases} \widetilde{F}_{2t}, & \text{если } 0 \le t \le \frac{1}{2}; \\ \widetilde{\Phi}_{2t-1}, & \text{если } \frac{1}{2} \le t \le 1; \end{cases}$$

где $\widetilde{\Phi}_t$ – гомотопия, сжимающая диски D_i^4, $i = 1, \ldots, n$, в точку. Легко видеть, что прообраз любой точки $\Psi_1^{-1}(x)$ дерева равномерно ограничен. Кроме того, нетрудно убедиться, что будет равномерно ограничено и ограничение прообраза $\Psi_1^{-1}(x)$ отображения Ψ_1 на границу $\partial\widetilde{W} = \widetilde{M}$, если на ограничении рассматривать внутреннюю метрику. Значит $\dim_{\mathrm{mc}} \widetilde{M} \le 1$. Поэтому, достаточно показать, что если в разложении (2.9.1) присутствует $K(\pi, 1)$ – слагаемое, то $\dim_{\mathrm{mc}} \widetilde{M} = 3$. Предположим, что это не так, и существует K_j в разложении (2.9.1). Это означает, что $\dim_{\mathrm{mc}} \widetilde{M} < 3$ и существует коограниченное собственное отображение $\psi : \widetilde{M} \to P^2$ в двумерный полиэдр P^2. Покажем, что существует отображение $p : P^2 \to \widetilde{W}$, такое, что композиция $p \circ \psi$ борнотопно вложению $i : \widetilde{M} \to \widetilde{W}$. Для этого сначала триангулируем P^2 так, чтобы прообраз звезды каждой вершины был равномерно ограничен константой R_0. Определим p на 0 – остове $(P^2)^{(0)}$ как сечение ψ. Применяя свойство равномерной стягиваемости, продолжим сечение последовательно на $(P^2)^{(1)}$ и на все P^2 таким образом, что образ $p(\sigma^i)$ лежит в R_i – окрестности $p(\sigma^i)^{(0)}$, где R_i это константы, которые определяются функцией Q в определении равномерно стягиваемого пространства. Легко видеть, что $d(x, p \circ \psi(x)) \le C$ для всех $x \in \widetilde{M}$.

Замечание 3.1.2. *p – собственное отображение, так как $p \circ \psi$ собственное.*

Покажем, что вложение $i : \widetilde{M} \to \widetilde{W}$ индуцирует нетривиальное отображение в H_c^3. Рассмотрим последовательность вложений:

$$D^3 \subset \widetilde{K}_j \cap \widetilde{M} \subset \widetilde{W},$$

где D^3 – открытый маленький шар в $\widetilde{W}$. Так как $\widetilde{M}$ – ориентируемое многообразие, вложение

$$D^3 \subset \widetilde{K}_j \cap \widetilde{M}$$

индуцирует изоморфизм в H_c^3. Так как H_c^* является ковариантным функтором относительно вложений открытых множеств, и контровариантным функтором относительно вложений замкнутых множеств, то, учитывая, что $\widetilde{M} \subset \widetilde{W}$ – замкнутое подмножество, имеем коммутативную диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
H_c^3(D^3) \arrow[r] \arrow[d] & H_c^3(\widetilde{M}) \\
H_c^3(\widetilde{W}) \arrow[r, equal] & H_c^3(\widetilde{W}) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Отсюда следует нетривиальность $i^* : H_c^3(\widetilde{W}) \to H_c^3(\widetilde{M})$.

Для завершения доказательства теоремы 3.1.1 нам осталось рассмотреть коммутативную диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
HX^3(\widetilde{M}) \arrow[d, "c_1"'] & HX^3(\widetilde{W}) \arrow[l, "h_1^*"'] \arrow[r, "i_1^*"] \arrow[d, "c"'] & HX^3(\widetilde{M}) \arrow[d, "c_1"'] \\
H_c^3(\widetilde{M}) & H_c^3(\widetilde{W}) \arrow[l, "h_2^*"'] \arrow[r, "i_2^*"] & H_c^3(\widetilde{M})
\end{tikzcd}$$

где i_1, i_2 индуцированы вложением $i : \widetilde{M} \to \widetilde{W}$, i_1^*, i_2^* индуцированы отображением $p \circ \psi : \widetilde{M} \to \widetilde{W}$, а c, c_1 и c_2 это характеристические отображения. Так как $\widetilde{W}$ равномерно стягиваемо, $\widetilde{M}$ является ω – плотным в $\widetilde{W}$, а $p \circ \psi$ борнотопно i, то гомоморфизмы c, i_1^*, h_1^* являются изоморфизмами. А так как нами выше бала доказана нетривиальность i_2^*, то c_1 – нетривиальный гомоморфизм. Но с другой стороны гомоморфизм h_2^* должен быть тривиален, так как он индуцирован сквозным отображением через двумерный полиэдр P^2. Поэтому, гомоморфизм c_1 должен быть тривиален. Это противоречие доказывает, что предположение о том, что $\dim_{\mathrm{mc}} \widetilde{M} < 3$ неверно. А так как $\dim_{\mathrm{mc}} \widetilde{M} \leq \dim \widetilde{M}$, получаем $\dim_{\mathrm{mc}} \widetilde{M} = 3$, что и требовалось доказать. ∎

Замечание 3.1.3. *Если M несущественно, то оно не содержит $K(\pi, 1)$-факторы в разложении Кнезера - Милнора* (2.9.1). *Поэтому, если $\pi_1(M)$ из теоремы 3.1.1 не имеет кручения, то $\pi_1(M)$ либо тривиальна, либо $B\pi_1(M)$ гомотопически эквивалентно букету окружностей, а значит в этом случае подтверждается гипотеза Громова 1.3.16.*

3.2. Контрпример к гипотезе Громова о падении макроскопической размерности

Оказывается, гипотеза Громова 1.3.14 о падении макроскопической размерности не подтверждается для $n \geq 4$. Здесь существенным оказалось наличие спиновой структуры на многообразии.

Наша цель доказать следующую теорему.

Теорема 3.2.1. *Для каждого $n \geq 4$ существует замкнутое несущественное спиновое многообразие M^n, имеющее макроскопическую размерность универсального накрытия* $\dim_{mc} \widetilde{M}^n = n - 1$.

Рассмотрим расслоение на окружности $S^3 \times S^1 \to S^2 \times S^1$, полученное умножением расслоения Хопфа $S^3 \to S^2$ на S^1. Теперь рассмотрим тривиальное расслоение $T^4 = S^1 \times T^3 \to T^3$ и возьмем его связную сумму над S^1 с построенным выше расслоением

$$M^4 = S^3 \times S^1 \#_{S^1} T^4$$

вдоль маленьких расслоенных трубок вокруг фиксированных слоев с естественной тривиализацией, определяемой расслоениями. Тогда имеем:

A. M^4 есть тотальное пространство S^1 – расслоения

$$p : M^4 \to M^3 = S^2 \times S^1 \# T^3;$$

B. $\pi := \pi_1(M^4) = \pi_1(M^3)$;

C. $B\pi = S^1 \vee T^3$ и $\dim_{\text{mc}} M^4 \leq 3$.

Действительно, классифицирующее отображение $f : M^4 \to B\pi$ может быть поднято до собственного коограниченного (диаметром $\text{Diam}(M^4)$) отображения $\widetilde{f} : \widetilde{M}^4 \to E\pi := \widetilde{B\pi}$ универсальных накрытий;

D. $f : M^4 \to B\pi$ может быть определено как композиция отображений:

$$M^4 \xrightarrow{p} S^2 \times S^1 \# T^3 \xrightarrow{f_1} S^2 \times S^1 \vee T^3 \xrightarrow{f_2} S^1 \vee T^3,$$

где f_1 сжимает разделяющую сферу S^2 в точку, f_2 это композиция проекции $S^2 \times S^1$ на второй сомножитель и тождественного отображения на T^3 - компоненте.

Пусть $g : S^1 \vee T^3 \to S^3$ – отображение степени один, сжимающее S^1 в точку. Тогда композиция

$$\mu = g \circ f_2 \circ f_1 : M^3 \to S^3$$

имеет степень 1.

Теорема 3.2.2. *Отображение $f : M^4 \to B\pi$ нельзя продеформировать на 2-остов $B\pi$.*

Пусть $\pi : E \to M^3$ двумерное векторное расслоение, ассоциированное с расслоением $p : M^4 \to M^3$. Пусть E_0 определяет E без нулевого сечения $s : M^3 \hookrightarrow E$, а $j : M^4 \hookrightarrow E_0$ можно понимать, как расслоение единичных векторов E в некоторой метрике.

Следующая диаграмма гомотопически коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} M^4 & \overset{j}{\hookrightarrow} & E_0 \\ \downarrow p & & \downarrow \\ M^3 & \overset{s}{\hookrightarrow} & E \end{array}$$

Очевидно, что j и s это гомотопические эквивалентности. Тогда имеет место изоморфизм Тома

$$\Phi : H^k(M^3; \Lambda) \to H^{k+2}(E, E_0; \Lambda),$$

имеющий вид:

$$\Phi(x) = (\pi^* x) \cup u,$$

где Λ есть кольцо с единицей, а u обозначает класс Тома (см. раздел 2.3).

Пусть

$$M_p \ = \ M^4 \times I/(x \times 1 \sim p(x))$$

обозначает цилиндр отображения $p : M^4 \to M^3$. Тогда мы имеем естественное вложение

$$i_1 : M^4 \to M^4 \times 0 \subset M_p, \qquad \text{и} \qquad i_2 : M^3 \to M^3 \times 1 \subset M_p$$

и естественную ретракцию $r : M_p \to M_3$. Легко видеть, что M_p есть в точности D^2-расслоение, ассоциированное с расслоением единичных векторов $p : M^4 \to M^3$ и $r|_{M^4} = p$.

Вспомним, что пространство Тома $T(E)$ это одноточечная компактификация E. Для простоты обозначим $T(E)$ через T. Ясно, что T гомеоморфно фактор - пространству M_p/M^4 и

$$H^*(T, \infty; \Lambda) \cong H^*(E, E_0; \Lambda) \tag{3.2.1}$$

есть кольцевой изоморфизм (см. [104]).

Предположим, что $g \circ f : M^4 \to S^3$ гомотопно нулю. Тогда мы можем продолжить отображение $\mu : M_3 \times 1 \to S^3$ до отображения $G : T \to S^3$. Это означает, что композиция

$$M^3 \xrightarrow{i_2} M_p \longrightarrow T \xrightarrow{G} S^3$$

имеет $\deg = 1$ и $G^* : H^3(S^3, s_0; \Lambda) \to H^3(T, \infty; \Lambda)$ нетривиальна.

Пусть $a \in H^*(E, E_0; \Lambda)$ определяет класс, соответствующий классу $G^*(\bar{s})$ по изоморфизму (3.2.1), где $\bar{s}$ есть образующая $H^3(S^3, \Lambda)$.

Рассмотрим следующую точную последовательность пары :

$$H^3(E, E_0; \Lambda) \overset{\xi}{\to} H^3(E; \Lambda) \overset{\psi}{\to} H^3(E_0; \Lambda)$$

Так как E гомотопически эквивалентно M^3, мы имеем

$$H^i(E; \Lambda) = H^i(M^3; \Lambda).$$

Ясно, что $s^*\xi(a) = \mu^*(\bar{s})$. (Заметим, что $\mu^*(\bar{s})$ есть образующая $H^3(M^3; \Lambda)$).

Напомним, что $e \mod 2$ равен второму классу Штифеля -Уитни w_2, который не равен нулю. Действительно, ограничение E на вложенную сферу $i : S^2 \subset M^3$ есть векторное расслоение, ассоциированное с расслоением Хопфа, поэтому $i^* w_2 \neq 0$. По изоморфизму Тома, найдется класс $z \in H^1(M^3; \mathbb{Z}_2)$, такой что $\Phi(z) = a$, поэтому

$$s^*\xi(a) = z \cup w_2 = \{\text{образующая } H^3(M^3; \mathbb{Z}_2)\}.$$

Заметим, что $w_1(M^3) = 0$, так как M^3 ориентируемо.

Покажем, что $Sq^2(\Phi(z)) \neq 0$. Используя свойства квадратов Стинрода, нетрудно видеть, что $Sq^1(z) = Sq^2(z) = 0$. Применяя формулу Тома -Ву (2.3.2), мы имеем:

$$Sq^2(\Phi(z)) = \pi_* z \cup Sq^2(u) =$$

$$\pi_* z \cup u \cup u =$$

$$\pi_* z \cup \Phi(w_2) = \Phi(z \cup w_2) \neq 0.$$

С другой стороны $0 = G^*(Sq^2(\bar{s})) = Sq^2(G^*(\bar{s})) \neq 0$. Это противоречие означает, что $g \circ f : M^4 \to S^3$ не гомотопно нулю, и $f : M^4 \to B\pi$ не может быть продеформировано в 2-остов пространства $B\pi$.

Следствие 3.2.3. *Пусть $p : M^4 \to M^3$ отображение, построенное в теореме 3.2.1. Многообразие Понтрягина $(p^{-1}(m), p^*(w))$ не оснащенно бордантно нулю, где (m, w) есть любая оснащенная точка M^3.*

Действительно, из доказанного и теоремы 2.1.9 следует, что если $s \in S^3$ есть регулярная точка $g \circ f : M^4 \to S^3$, тогда многообразие Понтрягина

$$(f^{-1}(g^{-1}(s), f^*(g^*(v)) = (p^{-1}(m), p^*(w))$$

не оснащенно бордантно нулю, где v есть оснащение s, а

$$(m, w) = (\mu^{-1}(s), (\mu^*(v)).$$

Лемма 3.2.4. *Пусть $\widetilde{f} : \widetilde{M}^4 \to E\pi$ есть поднятие классифицирующего отображения в универсальное накрытие. Если $\dim_{mc} \widetilde{M}^4 \leq 2$, то существует короткая гомотопия $\widetilde{F} : \widetilde{M}^4 \times I \to \widetilde{B\pi}$ отображения $\widetilde{f}$ такая что $\widetilde{F}(x, 0) = \widetilde{f}(x)$ и $\widetilde{F}(x, 1)$ есть сквозное отображение*

$$\widetilde{F}(x, 1) : \widetilde{M}^4 \to P^2 \to \widetilde{B\pi},$$

где P^2 есть двумерный подиэдр.

Замечание 3.2.5. *Короткая гомотопия означает, что*

$$\rho(\widetilde{f}(x), \widetilde{F}(x, t)) \leq \text{const}$$

для каждого $x \in \widetilde{M}^4$, $t \in I$, где через ρ обозначена функция расстояния на $E\pi$, поднятая с $B\pi$.

Пусть $h : \widetilde{M}^4 \to P$ собственное коограниченное непрерывное отображение в полиэдр P. Используя симплициальную аппроксимацию h и барецентрическое подразделение P, мы можем считать, что h такое собственное симплициальное отображения между $\widetilde{M}^4$ и P, что прообраз звезды каждой вершины равномерно ограничен. Так как $\widetilde{f}$ является квази-изометрией, образ $\widetilde{f}(h^{-1}(St(v)))$ прообраза звезды каждой вершины $v \in P$ ограничен некоторой константой d. Пусть M_h есть цилиндр h с естественной триангуляцией, состоящей из триангуляций $\widetilde{M}^4$, P и симплексов

$$\{v_0, \dots, v_k, h(v_k), \dots, h(v_p)\},$$

где $\{v_0, \dots, v_p\}$ есть симплекс в $\widetilde{M}^4$ $(v_0 < v_1 < \dots, < v_p)$.

Рассмотрим отображение

$$\widetilde{f_0} : (M_h)^0 \to E\pi$$

из 0- остова $(M_h)^0$ пространства M_h, которое совпадает с $\widetilde{f}$ на нижнем основании $(M_h)^0$ и равно композиции отображений $\widetilde{f} \circ t_0$ на верхнем основании $(M_h)^0$, где $t_0 : (P)^0 \to M^4$ есть сечение h заданное на 0-остове $(P)^0$. Так как $E\pi$ является равномерно стягиваемым, мы можем продолжить $\widetilde{f_0}$ на M_h, используя функцию Q из определения равномерно стягиваемого пространства. По построению, $\widetilde{f_0}$ - образ любых двух соседних вершин M_h лежит внутри шара радиуса d. Поэтому мы можем продолжить отображение $\widetilde{f_0}$ до отображения

$$\widetilde{f_1} : (M_h)^1 \to E\pi$$

так, что

$$\rho(\widetilde{f}(x), \widetilde{f_1}(x,t)) \le d, \; x \in (M^4)^0.$$

$\widetilde{f_1}$ - образ границы любого 2 - мерного симплекса M_h лежит внутри шара радиуса $3d$. Поэтому мы можем продолжить $\widetilde{f_1}$ до отображения

$$\widetilde{f_2} : (M_h)^2 \to E\pi$$

так, что

$$\rho(\widetilde{f}(x), \widetilde{f}_2(x,t)) \leq 4Q(3d),\ x \in (M^4)^1.$$

Аналогично, продолжим $\widetilde{f}_2$ до отображений

$$\widetilde{f}_3, \ldots, \widetilde{f}_5,$$

определенных на остовах $(M_h)^3, \ldots, (M_h)^5 = M_h$ соответственно. Отсюда получаем, что

$$\rho(\widetilde{f}(x), \widetilde{f}_5(x,t)) \leq c,$$

где c – константа.

Теорема 3.2.6. $\dim_{mc} \widetilde{M}^4 = 3$.

Доказательство. Пусть $q : \widetilde{B\pi} \to E\pi/(E\pi \setminus D^3) \cong S^3$ есть фактор-отображение, где D^3 – вложенный открытый 3-мерный шар.

Предположим, что $\dim_{\mathrm{mc}} \widetilde{M}^4 \leq 2$ и $h : \widetilde{M}^4 \to P$ есть собственное коограниченное непрерывное отображение в некоторый 2-мерный полиэдр P. Пусть $W \subset \widetilde{M}^4$ компактное гладкое многообразие с границей такое, что W содержит шар произвольного фиксированного радиуса r. Так как $\widetilde{f}$ является квази-изометрией, то используя лемму 3.2.4, мы можем выбрать r достаточно большим, чтобы $\overline{D}^3 \subset \widetilde{f}(W)$ и $\widetilde{F}(\partial W \times I) \cap \overline{D}^3 = \varnothing$, где $\widetilde{F}$ определяет короткую гомотопию из леммы 3.2.4. Получаем гомотопию: $q \circ \widetilde{F} : (W, \partial W) \times I \to (S^3, s_0)$, которая отображает $\partial W \times I$ в отмеченную точку s_0. Так как $\dim P = 2$, то из леммы 3.2.4 следует, что $q \circ \widetilde{F}(x,1)$ гомотопно нулю. Поэтому $q \circ \widetilde{F}(x,0) = q \circ \widetilde{f}$ гомотопно нулю (а значит $q \circ \widetilde{f}$ гладко гомотопно нулю). Пусть (s, v) оснащенное регулярное значение S^3 для отображения $q \circ \widetilde{f}$. Тогда многообразие Понтрягина $(\widetilde{f}^{-1} \circ q^{-1}(s), \widetilde{f}^* q^*(v))$ должно быть оснащенно бордантно нулю. Пусть $(\widetilde{\Omega}, w)$ есть оснащенный нуль - бордизм в $W \times I$ с границей $(\widetilde{f}^{-1} \circ q^{-1}(s), \widetilde{f}^* q^*(v))$.

Рассмотрим накрывающее отображение $\tau : \widetilde{M}^4 \times I \to M^4 \times I$. Тогда $\tau(\widetilde{f}^{-1} \circ q^{-1}(s), \widetilde{f}^* q^*(v))$ есть вложенное оснащенное подмногообразие в M^4, которое совпадает с многообразием Понтрягина $(p^{-1}(m), p^*(\nu))$ для некоторого регулярного оснащенного значения $(m, \nu) \in M^3$. Поэтому $\tau(\widetilde{\Omega}, w)$ есть погруженное оснащенное подмногообразие $M^4 \times I$. Используя теорему Уитни о вложении ([46]), мы можем немного пошевелить $\tau(\widetilde{\Omega}, w)$ вне окрестности границы, чтобы получить оснащенный нуль-бордизм, заклеивающий $\tau(\widetilde{f}^{-1} \circ q^{-1}(s), \widetilde{f}^* q^*(v))$. Но это невозможно по следствию 3.2.3.

В общем случае контрпример доставляет многообразие $M^n = M^{4+k}$, которое является тотальным пространством расслоения над $M^3 \times T^k$, которое индуцировано проекцией $pr : M^3 \times T^k \to M^3$ и расслоением $p : M^4 \to M^3$. Обратим внимание, что класс z, двойственный к w_2 в этом случае можно представить в виде чашечного произведения одномерных классов, поэтому, как и раньше, используя свойства квадратов Стинрода, имеем $Sq_1(z) = Sq_2(z) = 0$. Остальная часть доказательства четырехмерного случая переносится без изменений. ∎

3.3. Макроскопическая размерность спиновых PSC -многообразий

В связи с гипотезами Громова сразу же возникает вопрос: *допускает ли построенное многообразие M^n в теореме 3.2.1 метрику положительной скалярной кривизны?* Тогда это был бы контрпример к гипотезам 1.3.21 и 1.3.22. Покажем, что ответ на этот вопрос отрицательный, что подтверждает резонность гипотез Громова.

Прежде всего заметим, что M^n – спиновое многобразие, так как будучи тотальным пространством ориентируемого S^1-расслоения над ориентируемым параллелизуемым многообразием оно параллелизуемо. Поэтому, по теореме Розенберга 1.2.6 если M^n является PSC-многообразием, то $\alpha(M,f) = 0 \in KO_n(C^*(\pi))$.

Докажем следующую теорему.

Теорема 3.3.1. *Пусть M^n замкнутое спиновое PSC-многообразие и $\pi = \pi_1 M^n$. Предположим, что $\operatorname{cd}\pi \le n-1$ и сильная гипотеза Новикова верна для π. Тогда $f : M^n \to B\pi$ можно продеформировать в $B\pi^{(n-2)}$, что подтверждает гипотезу Громова 1.3.16.*

Доказательство.

Пусть M – ориентируемое замкнутое n-мерное спиновое многообразие с фундаментальной группой π. Так как $\operatorname{cd}\pi \neq 2$ для $n = 3$, мы будем считать, что $n \ge 4$.

Предположим, что $\operatorname{cd}\pi = n-1$ и $[M] = 0 \in \Omega_n^{Spin}(*)$. Так как $\operatorname{cd}\pi = n-1$ и $n \ge 4$, из (2.2.2) следует, что мы можем считать $\dim B\pi = n-1$. При этом мы считаем, что пространство $B\pi$ является CW - комплексом и $B\pi/B\pi^{(n-2)}$ есть букет $(n-1)$-сфер. Рассмотрим следующую композицию отображений:

$$M \xrightarrow{f} B\pi \xrightarrow{p} B\pi/B\pi^{(n-2)},$$

где p есть фактор-отображение на $B\pi/B\pi^{(n-2)}$.

Мы будем считать, что M имеет клеточное разбиение, имеющее по единственной клетке в размерностях 0 и n, кроме того предполагаем f клеточным отображением. Этого всегда можно добиться с помощью гомотопии.

Пусть $f^{(n-2)}$ обозначает ограничение f на $(n-2)$-остов M. Первое препятствие $[c_f^{n-1}]$ к продолжению $f^{(n-2)}$ на $(n-1)$-остов принадлежит группе $H^{n-1}(M;\pi_{n-2}(B\pi^{(n-2)}))$. По теореме Гуревича имеем:

$$\pi_{n-2}(B\pi^{(n-2)}) \cong H_{n-2}(B\pi^{(n-2)};\mathbb{Z}[\pi])$$

есть свободный $\mathbb{Z}[\pi]$-модуль. Поэтому ввиду двойственности Пуанкаре, получаем изоморфизм:

$$H^k(M;\oplus_i\mathbb{Z}[\pi]) \cong H^k_c(\widetilde{M};\oplus_i\mathbb{Z}) \cong H_{n-k}(\widetilde{M};\oplus_i\mathbb{Z}). \tag{3.3.1}$$

Так как $H_1(\widetilde{M};\oplus_i\mathbb{Z}) = 0$, мы можем продолжить $f^{(n-2)}$ до отображения $f^{(n-1)} : M^{(n-1)} \to B\pi^{(n-2)}$, изменяя в случае необходимости $f^{(n-2)}$ на $(n-2)$-остове и не трогая $f^{(n-2)}$ на $(n-3)$-остове.

Так как $B\pi$ является $K(\pi,1)$-пространством, мы можем продолжить $f^{(n-1)}$ до отображения $\hat{f} : M \to B\pi$. В дальнейшем мы будем обозначать отображение $\hat{f}$ через f.

Заметим, что первое препятствие $c^n_f \in C^n(M,\pi_{n-1}(B\pi^{(n-2)}))$ к продолжению $f^{(n-1)}$ на все M может быть представлена в виде композиции $\mathbb{Z}[\pi]$-модульных гомоморфизмов:

$$c^n_f : C_n(M,\mathbb{Z}[\pi]) \cong \pi_n(M,M^{(n-1)}) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(M^{(n-1)}) \xrightarrow{f^{(n-1)}_*} \pi_{n-1}(B\pi^{(n-2)}).$$

Рассмотрим следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccc}
\pi_n(M,M^{(n-1)}) & \xrightarrow{f_*} & \pi_n(B\pi,B\pi^{(n-2)}) \\
\downarrow{\scriptstyle\partial} & & \downarrow{\scriptstyle\partial} \\
\pi_{n-1}(M^{(n-1)}) & \xrightarrow{f^{(n-1)}_*} & \pi_{n-1}(B\pi^{(n-2)})
\end{array}$$

Заметим, что

$$\pi_n(B\pi,B\pi^{(n-2)}) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(B\pi^{(n-2)})$$

является изоморфизмом. Это нетрудно увидеть из точной последовательности пары $(B\pi,B\pi^{(n-2)})$, так как $\pi_i(B\pi) = 0$ для $i \geq 2$.

Вспомним, что $n \geq 4$ и $\mathrm{geom}\ \dim(\pi) = n-1$. Отсюда

$$\pi_n(B\pi,B\pi^{(n-2)}) \cong \pi_n(E\pi,E\pi^{(n-2)}) \cong \pi_n(E\pi/E\pi^{(n-2)})$$

является свободным $\mathbb{Z}_2[\pi]$-модулем.

Используя двойственность Пуанкаре для $\mathbb{Z}[\pi]$-модуля $\Lambda = \pi_n(E\pi/E\pi^{(n-2)})$ получим:

$$H^n(M;\Lambda) \cong \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}[\pi]} \mathbb{Z} \cong \oplus_i \mathbb{Z}_2.$$

Рассмотрим коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} \pi_n(M, M^{(n-1)}) & \overset{f_*}{\to} & \pi_n(B\pi, B\pi^{(n-2)}) \\ \downarrow{\scriptstyle \otimes\mathbb{Z}} & & \downarrow{\scriptstyle \otimes\mathbb{Z}} \\ \pi_n(M, M^{(n-1)}) \otimes \mathbb{Z} & \overset{\bar{f}_*}{\to} & \pi_n(B\pi, B\pi^{(n-2)}) \otimes \mathbb{Z} \end{array}$$

Ясно, что

$$\pi_n(M, M^{(n-1)}) \otimes \mathbb{Z} \cong \pi_n(M/M^{(n-1)}) \cong \pi_n(S^n)$$

и мы имеем:

$$\pi_n(B\pi, B\pi^{(n-2)}) \otimes \mathbb{Z} \cong \pi_n(B\pi/B\pi^{(n-2)}) \cong \pi_n(\bigvee_i S^{n-1}).$$

Отсюда мы заключаем, что

$$[c_f] = (\bar{f}_* \circ \otimes\mathbb{Z})(c),$$

где c является образующей свободного модуля $\pi_n(M, M^{(n-1)})$, а $[c_f]$ представляется отображением (как элемент гомотопической группы $\pi_n(\bigvee_i S^{n-1})$):

$$M/M^{(n-1)} \cong S^n \overset{\bar{f}}{\to} B\pi/B\pi^{(n-2)} \cong \bigvee_i S^{n-1},$$

Рассмотрим следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccccc} M & \xrightarrow{q} & S^n & \xrightarrow{id} & S^n \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \bar{f}} & & \downarrow{\scriptstyle h} \\ B\pi & \xrightarrow{p} & \bigvee_i S^{n-1} & \xrightarrow{p_k} & S^{n-1} \end{array}$$

Предположим, что для некоторого k отображение $p_k \circ \bar{f}$ не гомотопно нулю, где p_k есть проекция на k-слагаемое букета. Отображение

$$p_k \circ p \circ f : M \to S^{n-1}$$

индуцирует композицию гомоморфизмов:

$$p_{k*} \circ p_* \circ f_* : KO_n(M) \to KO_n(S^{n-1}).$$

Ясно, что если

$$p_{k*} \circ p_* \circ f_*[M]_{KO} = (h \circ q)_*[M]_{KO} \neq 0,$$

тогда $f_*[M]_{KO} \neq 0$.

Лемма 3.3.2. *Пусть* $\Omega_n^{Spin}(S^{n-1})$ *есть* n*-я группа* $Spin$*-бордизмов* S^{n-1}*. Тогда* $[(M, h \circ q)] = [(S^n, h)]$ *в* $\Omega_n^{Spin}(S^{n-1})$*.*

Доказательство. Так как $[M] = 0 \in \Omega_n^{Spin}(*)$, существует $(n+1)$-мерное спиновое многообразие W с $\partial W = M$. Пусть $B \subset W$ маленький открытый шар и

$$i : D^n \times I \to W \setminus B$$

определяет регулярную нормальную окрестность трансверсального отрезка

$$i : 0 \times I \to W \setminus B$$

такого, что $i(0,0) \in M$ и $i(0,1) \in \partial \overline{B} \cong S^n$. Определим следующее отображение:

$$i(D^n \times I) \overset{\text{ретракция}}{\to} i(D^n \times 0) \overset{\text{фактор}}{\to} i(D^n \times 0)/i(\partial D^n \times 0) \cong S^n \overset{h}{\to} S^{n-1}.$$

Продолжим его до отображения

$$F : W \setminus B \to S^{n-1}$$

постоянным отображением вне $i(D^n \times I)$.

Ясно, что ограничение F на M гомотопно $h \circ q$, а ограничение F на $\partial \bar{B}$ гомотопно h.

Так как $(h \circ q)_*[M]_{KO}$ зависит только от класса $Spin$ – бордизма в $\Omega_n^{Spin}(S^{n-1})$, из леммы 3.3.2 мы получаем, что $(h \circ q)_*[M]_{KO} = h_*[S^n]_{KO}$. ∎

Покажем, что $[h] \in \pi_1^s$ представляет ненулевой элемент $h_*[S^n]_{KO}$ в $KO_n(S^{n-1})$. По предположению h не гомотопно нулю. Поэтому h должно быть гомотопно $(n-3)$-й надстройке $H : S^n \to S^{n-1}$ отображения Хопфа $S^3 \to S^2$. Отображение h индуцирует гомоморфизм $H_* : KO_n(S^n) \to KO_n(S^{n-1})$. Однако, $H_*[S^n]_{KO} \neq 0$. Действительно, пусть $\bar{S}^1$ есть окружность с нетривиальной спиновой структурой и $pr : S^{n-1} \times \bar{S}^1 \to S^{n-1}$ есть проекция. Используя оснащенную хирургию вдоль окружности $\bar{S}^1$ легко видеть, что:

$$[(S^n, H)] = [(S^{n-1} \times \bar{S}^1, pr)] \in \Omega_n^{Spin}(S^{n-1}).$$

Но

$$KO_n(S^{n-1}) = KO_n(\mathbb{R}^{n-1}) \oplus KO_n(*).$$

Более того, $pr_*[(S^{n-1} \times \bar{S}^1)]_{KO}$ есть образующая

$$KO_n(\mathbb{R}^{n-1}) \;\cong\; KO_{n-1}(\mathbb{R}^{n-1}) \otimes KO_1(*) \;\cong\; \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}_2 \;\cong\; \mathbb{Z}_2$$

и

$$h_*[S^n]_{KO} = H_*[S^n]_{KO} = pr_*[(S^{n-1} \times \bar{S}^1)]_{KO} \neq 0.$$

Таким образом $(h \circ q)_*[M]_{KO}$ и $f_*[M]_{KO}$ не равны нулю.

Поэтому, если сильная гипотеза Новикова справедлива для $\pi_1(M)$, то по теореме Розенберга 1.2.6 M не допускает метрики положительной скалярной кривизны. И мы заключаем, что если M допускает метрику положительной скалярной кривизны, то $[\bar{f}] = 0$. Поэтому f можно продеформировать в $B\pi^{(n-2)}$, а значит $\dim_{\mathrm{mc}} \widetilde{M} \leq n-2$.

В случае, если $[M] \neq 0 \in \Omega_n^{Spin}(*)$ рассмотрим многообразие $M \times S^1$, представляющее $0 \in \Omega_{n+1}^{Spin}(*)$. Ясно, что $M \times S^1$ допускает метрику положительной скалярной кривизны, если такую метрику допускает M.

Рассмотрим следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccccccc}
M \times S^1 & \xrightarrow{S} & SM & \xrightarrow{Sq} & S^{n+1} & \xrightarrow{id} & S^{n+1} \\
{\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle Sf} & & \downarrow{\scriptstyle S\bar{f}} & & \downarrow{\scriptstyle Sh} \\
B\pi \times S^1 & \xrightarrow{S} & SB\pi & \xrightarrow{Sp} & \bigvee_i S^n & \xrightarrow{p_k} & S^n
\end{array}$$

где символ S обозначает приведенную надстройку.

Для естественного клеточного разбиения $M \times S^1$ результат для M следует из предыдущих рассуждений для $M \times S^1$, учитывая, что если $h \sim H$, то $Sh \sim SH$. ■

Следствие 3.3.3. *Примеры M^n, построенные в теореме 3.2.1 не допускают метрики положительной скалярной кривизны.*

Доказательство. Заметим, что $\pi_1(M^n) \cong (\mathbb{Z} * \mathbb{Z}^3) \times \mathbb{Z}^k$ удовлетворяет сильной гипотезе Новикова (см. [56],[57]), а значит M^n удовлетворяет условиям теоремы 3.3.1. Поэтому если M^n является PSC-многообразием, то результат теоремы 3.3.1 будет противоречить теореме 3.2.1. ■

Теперь мы обобщим теорему 3.3.1 на гораздо более широкий класс фундаментальных групп. А именно мы докажем следующую теорему.

Теорема 3.3.4. *Предположим, что группа π содержит подгруппу π' конечного индекса, удовлетворяет следующим двум условиям:*

1. *π' удовлетворяет сильной гипотезе Новикова.*

2. *Отображение $per : ko_n(B\pi') \to KO_n(B\pi')$ инъективно.*

Тогда гипотеза Громова справедлива для спиновых многообразий M^n с фундаментальной группой $\pi_1(M^n) = \pi$.

Замечание 3.3.5. *Будем называть второе условие на фундаментальную группу условием Розенберга - Штольца или (RS)-условием, так как Розенберг и Штольц впервые рассмотрели это условие при доказательстве гипотезы Громова -Лоусена [48].*

Прежде, чем приступить к доказательству теоремы, докажем ряд технических утверждений.

Для начала напомним следующее утверждение из гомологической алгебры.

Лемма 3.3.6. *Коммутативная диаграмма с точными строками*

$$\begin{tikzcd} & A' \arrow[r] \arrow[d, "f'"'] & A \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & A'' \arrow[r] \arrow[d, "f''"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & C' \arrow[r] & C \arrow[r] & C'' & \end{tikzcd}$$

определяет точную последовательность

$$ker(f') \to ker(f) \to ker(f'') \to coker(f') \to coker(f) \to coker(f'').$$

Вспомним, что группой коинвариантов для π-модуля M называется группа $M \otimes_{\mathbb{Z}\pi} \mathbb{Z}$.

Пусть $p : E \to B$ универсальное накрытие со стягиваемым E. В этом случае p есть проекция на пространство орбит свободного клеточного π-действия, где $\pi = \pi_1(B)$.

Теорема 3.3.7. *Для $n \geq 4$, индуцированный гомоморфизм*

$$p_* : \pi_n(E/E^{(n-2)}) \to \pi_n(B/B^{(n-2)})$$

пропускается через группу коинвариантов: $p_* = \bar{p}_* \circ q_*$,

$$q_* : \pi_n(E/E^{(n-2)}) \to \pi_n(E/E^{(n-2)})_\pi$$

где $\bar{p}_*$ инъективно.

Доказательство. Заметим, что для $n \geq 4$,

$$\pi_n(E/E^{(n-2)}) = \pi_n^s(E, E^{(n-2)}) \text{ и } \pi_n(B/B^{(n-2)}) = \pi_n^s(B, B^{(n-2)}).$$

Обратим внимание, что $\pi_*^s(E, E^i)$ имеет структуру π-модуля посредством действия π.

Отображение p индуцирует отображение π_*^s-гомологических последовательностей троек

$$(E^{(n)}, E^{(n-1)}, E^{(n)}) \text{ и } (E^{(n)}, B^{(n-1)}, B^{(n)}),$$

а также следующие две коммутативные диаграммы:

$$\begin{tikzcd}
\pi_{n+1}^s(E^{(n)}, E^{(n-1)}) \arrow[r, "\bar{j}"] \arrow[d, "p_*^1"'] & \pi_n^s(E^{(n-1)}, E^{(n-2)}) \arrow[r] \arrow[d, "p_*^2"'] & \bar{K} \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] & 0 \\
\pi_{n+1}^s(B^{(n)}, B^{n+1}) \arrow[r, "j"] & \pi_n^s(B^{(n-1)}, B^{(n-2)}) \arrow[r] & K \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

где $K, \bar{K}$ есть коядра $j, \bar{j}$ и

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \bar{H} \arrow[r] \arrow[d, "\beta"'] & \pi_n^s(E^{(n)}, E^{(n-1)}) \arrow[r, "\bar{i}"] \arrow[d, "p_*^3"'] & \pi_{n-1}^s(E^{(n-1)}, E^{(n-2)}) \arrow[d, "p_*^4"'] \\
0 \arrow[r] & H \arrow[r] & \pi_n^s(B^{(n)}, B^{(n-1)}) \arrow[r, "i"] & \pi_{n-1}^s(B^{(n-1)}, B^{(n-2)})
\end{tikzcd}$$

где H и $\bar{H}$ ядра i и $\bar{i}$. Заметим, что гомоморфизмы p_*^3 и p_*^4 являются прямыми суммами гомоморфизма аугментации

$$\epsilon : \mathbb{Z}\pi \to \mathbb{Z}.$$

Гомоморфизмы p_*^1 и p_*^2 являются прямыми суммами $\mod 2$ гомоморфизма аугментации

$$\bar{\epsilon} : \mathbb{Z}_2\pi \to \mathbb{Z}_2.$$

Заметим, что $p_*^i \otimes_\pi 1_{\mathbb{Z}}$ есть изоморфизм для $i = 1, 2, 3, 4$. Умножая тензорно первую диаграмму на $\mathbb{Z}$ над $\mathbb{Z}\pi$ мы получим коммутативную диаграмму с двумя вертикальными изоморфизмами. Применяя 5-лемму имеем изоморфизм

$$\alpha' = \alpha \otimes_\pi 1_{\mathbb{Z}}.$$

Мы утверждаем, что $\beta' = \beta \otimes_\pi 1_{\mathbb{Z}}$ есть мономорфизм. Заметим, что $ker(\beta) \subset ker(p_*^3) = \oplus I(\pi)$, где $I(\pi)$ идеал аугментации.

Утверждение 3.3.8. $ker(\beta) \otimes_\pi \mathbb{Z} = 0$.

Доказательство. Пусть $x = \sum x_i$, $x_i \in I(\pi)$. Достаточно показать, что $x_i \otimes_\pi 1 = 0$ для всякого x_i. Заметим, что $x_i = \sum n_j(\gamma_j - e)$, $\gamma_j \in \pi$, $n_J \in \mathbb{Z}$. Имеем $(\gamma - e) \otimes_\pi 1 = 0$, так как

$$(\gamma - e) \otimes_\pi 1 = \gamma \otimes_\pi 1 - e \otimes_\pi 1 = \gamma\ e \otimes_\pi 1 - e \otimes_\pi 1 = e \otimes_\pi \gamma\ 1 - e \otimes_\pi 1 = 0.$$

Умножая тензорно на $\mathbb{Z}$ над $\mathbb{Z}\pi$ точную последовательность

$$ker(\beta) \to \bar{H} \to im(\beta) \to 0$$

имеем изоморфизм

$$\beta_0 = \beta \otimes id : \bar{H} \otimes_\pi \mathbb{Z} = \bar{H}_\pi \to im(\beta) \otimes_\pi \mathbb{Z} = im(\beta).$$

Тогда β' является мономорфизмом как композиция изоморфизма β_0 и вложения $im(\beta) \to H$. ∎

Рассмотрим диаграмму коротких точных последовательностей:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \bar{K} \arrow[r, "\bar{\phi}"] \arrow[d, "\alpha"'] & \pi_n^s(E^{(n)}, E^{(n-2)}) \arrow[r, "\bar{\psi}"] \arrow[d, "p_*"'] & \bar{H} \arrow[r] \arrow[d, "\beta"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r, "\phi"] & \pi_n^s(B^{(n)}, B^{(n-2)}) \arrow[r, "\psi"] & H \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Применим тензорное умножение на $\mathbb{Z}$ над $\mathbb{Z}\pi$ к этой диаграмме, чтобы получить следующую коммутативную диаграмму с точными строками

$$\begin{tikzcd}
 & \bar{K}_\pi \arrow[r, "\bar{\phi}"] \arrow[d, "\alpha'"'] & \pi_n^s(E^{(n)}, E^{(n-2)})_\pi \arrow[r, "\bar{\psi}"] \arrow[d, "\tilde{p}_*"'] & \bar{H}_\pi \arrow[r] \arrow[d, "\beta'"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r, "\phi"] & \pi_n^s(B^{(n)}, B^{(n-2)}) \arrow[r, "\psi"] & H.
\end{tikzcd}$$

Лемма 3.3.6 влечет мономорфность $\tilde{p}_*$.

Нам понадобится следующий факт.

Утверждение 3.3.9. $p_* : \pi_n(E/E^{(n-1)}) \to \pi_n(B/B^{(n-1)})$ *есть эпиморфизм.*

Доказательство. Заметим, что $\pi_n(B/B^{(n-1)})$ порождается сферами букета n-сфер

$$B^{(n)}/B^{(n-1)} = \vee S^n.$$

Для каждой образующей $\sigma^n/\partial\sigma^n$ для любого поднятия $\bar{\sigma}^n$ n-симплекса σ^n, фактор $\bar{\sigma}^n/\partial\bar{\sigma}^n$ определяет сфероид, который отображается в $\sigma^n/\partial\sigma^n$. ∎

Следствие 3.3.10. *Для $n \geq 4$ индуцированный гомоморфизм*

$$p'_* : \pi_n^s(E/E^{(n-1)}) \to \pi_n^s(B/B^{(n-1)})$$

является эпиморфизмом.

Теперь рассмотрим диаграмму, порожденную триплетами $(E, E^{(n)}, E^{(n-2)})$ и $(B, B^{(n)}, B^{(n-2)})$:

$$\begin{array}{ccccccc}
\pi_{n+1}^s(E, E^{(n)}) & \longrightarrow & \pi_n^s(E^{(n)}, E^{(n-2)}) & \longrightarrow & \pi_n^s(E, E^{(n-2)}) & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\pi_{n+1}^s(B, B^{(n)}) & \longrightarrow & \pi_n^s(B^{(n)}, B^{(n-2)}) & \longrightarrow & \pi_n^s(B, B^{(n-2)}) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

и умножим ее тензорно на $\mathbb{Z}$ над $\mathbb{Z}\pi$. Получим следующую коммутативную диаграмму с точными строками.

$$\begin{array}{ccccccc}
\pi_{n+1}^s(E, E^{(n)})_\pi & \longrightarrow & \pi_n^s(E^{(n)}, E^{(n-2)})_\pi & \longrightarrow & \pi_n^s(E, E^{(n-2)})_\pi & \longrightarrow & 0 \\
\Big\downarrow{\scriptstyle p'_*} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \tilde{p}_*} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \bar{p}_*} & & \\
\pi_{n+1}^s(B, B^{(n)}) & \longrightarrow & \pi_n^s(B^{(n)}, B^{(n-2)}) & \longrightarrow & \pi_n^s(B, B^{(n-2)}) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Так как p'_* является эпиморфизмом и $\tilde{p}_*$ – мономорфизм, по моно-версии 5-леммы получаем, что $\bar{p}_*$ является мономорфизмом, что и требовалось доказать. ∎

Докажем следующее утверждение.

Утверждение 3.3.11. *Пусть X есть $(n-1)$ связный $(n+1)$-мерный CW комплекс. Тогда X гомотопически эквивалентно букету сфер размерности n и $n+1$ вместе с Муровскими пространствами $M(\mathbb{Z}_m, n)$.*

Доказательство. Это следствие теоремы о минимальной клеточной структуре (см. утверждение 4C.1 и пример 4C.2 в [105]). ∎

Утверждение 3.3.12. *Естественное преобразование спектров $\pi^s_*(pt) \to ko_*(pt)$ индуцирует изоморфизм $\pi^s_n(K/K^{(n-2)}) \to ko_n(K/K^{(n-2)})$ для любого CW комплекса K.*

Доказательство. Так как оба спектра π^s и ko связны, достаточно показать, что

$$\pi^s_n(K^{(n+1)}/K^{(n-2)}) \to ko_n(K^{(n+1)}/K^{(n-2)})$$

является изоморфизмом. Рассмотрим диаграмму, порожденную точной последовательностью пары $(K^{(n+1)}/K^{(n-2)}, K^{(n)}/K^{(n-2)})$:

$$\begin{array}{ccccccc}
\oplus\mathbb{Z} & \longrightarrow & \pi^s_n(K^{(n)}/K^{(n-2)}) & \longrightarrow & \pi^s_n(K^{(n+1)}/K^{(n-2)}) & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\oplus\mathbb{Z} & \longrightarrow & ko_n(K^{(n)}/K^{(n-2)}) & \longrightarrow & ko_n(K^{(n+1)}/K^{(n-2)}) & \longrightarrow & 0.
\end{array}$$

Так как левые и правые вертикальные стрелки являются изоморфизмами, то достаточно показать, что

$$\pi^s_n(K^{(n)}/K^{(n-2)}) \to ko_n(K^{(n)}/K^{(n-2)})$$

является изоморфизмом.

Заметим, что

$$\pi_n(S^k) \to ko_n(S^k)$$

есть изоморфизм для $k = n, n-1$. Согласно утверждению 3.3.11 достаточно показать, что

$$\pi^s_n(M(\mathbb{Z}_m, n-1)) \to ko_n(M(\mathbb{Z}_m, n-1))$$

есть изоморфизм для любых m и n. Это следует из 5-леммы, примененной к корасслоению

$$S^{n-1} \to S^{n-1} \to M(\mathbb{Z}_m, n-1).$$

■

Утверждение 3.3.13. *Ориентируемое n-многообразие M тогда и только тогда несущественно, когда $f_*([M]) = 0 \in H_n(B\pi)$ для отображения $f: M \to B\pi$, классифицирующего универсальное накрытие M.*

Доказательство. Если M допускает классифицирующее отображение $f: M \to B\pi^{(n-1)}$, тогда ясно, что $f_*([M]) = 0$.

Пусть $f_*([M]) = 0$ для некоторого отображения $f: M \to B\pi(M)$, индуцирующего изоморфизм фундаментальных групп. Пусть

$$o_n(f) \in H^n(M; \pi_{n-1}(F))$$

есть первое препятствие к деформации f на $(n-1)$-мерный остов $B\pi^{(n-1)}$ и пусть $o_n(1_{B\pi}) \in H^n(B\pi; \pi_{n-1}(F))$ есть первое препятствие к ретракции $B\pi$ на $(n-1)$-остов. Здесь F определяет гомотопический слой вложения $B\pi^{(n-1)} \to B\pi$ и $\pi_{n-1}(F)$ рассматривается как π-модуль. Так как f_* индуцирует изоморфизм фундаментальных групп, имеем

$$f_*: H_0(M; \pi_{n-1}(F)) = \pi_{n-1}(F)_\pi \to H_0(B\pi; \pi_{n-1}(F)) = \pi_{n-1}(F)_\pi$$

есть изоморфизм. Тогда

$$f_*([M] \cap o_n(f)) = f_*([M]) \cap o_n(1_{B\pi}) = 0.$$

Из двойственности Пуанкаре получаем $o_n(f) = 0$. ■

Имеет место следующее утверждение.

Утверждение 3.3.14. *Ориентируемое спиновое n-многообразие M несущественно, если индуцируемый гомоморфизм $f_*([M]_{ko}) \in ko_n(B\pi)$ нулевой для классифицирующего отображения $f : M \to B\pi$.*

Доказательство. Заметим, что ko-фундаментальный класс $[M]_{ko}$ спинового n-многообразия переходит в образующую $ko_n(S^n) = \mathbb{Z}$ при отображении степени один $g : M \to S^n$.

Существует естественное преобразование $T : \mathbf{ko} \to \mathbf{H}(\mathbb{Z})$ спектра $\mathbf{ko}$ в спектр Эйленберга - Маклейна $\mathbf{H}(\mathbb{Z})$, которое индуцировано 0-мерными когомологиями спектра $\mathbf{ko}$ (см. [91]). Так как на n-мерной сфере это преобразование индуцирует изоморфизм n-гомологических групп $ko_n(S^n) \to H_n(S^n)$, оно отображает $\mathbf{ko}$-фундаментальный класс $[M]_{ko}$ в фундаментальный класс $[M]$. Из коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd} ko_n(M) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "T_M"'] & ko_n(B\pi) \arrow[d, "T_{B\pi}"'] \\ H_n(M) \arrow[r, "f_*"] & H_n(B\pi) \end{tikzcd}$$

следует, что $f_*([M]) = 0$. Утверждение 3.3.13 завершает доказательство. ∎

Лемма 3.3.15. *Пусть M замкнутое несущественное n-многообразие, $n \geq 4$, с $\pi = \pi_1(M)$, наделенное структурой CW- комплекса. Тогда M допускает классифицирующее отображение $\bar{f} : M \to B\pi$ для универсального накрытия такое, что*

$$\bar{f}(M) \subset B\pi^{(n-1)} \text{ и } \bar{f}(M^{(n-1)}) \subset B\pi^{(n-2)}.$$

Доказательство. Пусть $f : M \to B\pi$ классифицирующее отображение универсального накрытия многообразия M. Мы можем считать, что

$$f|_{M^{(2)}} : M^{(2)} \to B\pi^{(2)}$$

является тождественным отображением.

Мы можем также считать, что $f : M \to B\pi^{(n-1)}$ – клеточное отображение. Рассмотрим первое препятствие $o^{n-1} \in H^{n-1}(M; \pi_{n-2}(F))$ к деформации f на $(n-2)$-остов $M^{(n-2)}$, которое на языке расслоений (в смысле Серра) есть ни что иное, как первое препятствие к поднятию $f : M \to B$ в тотальное пространство E расслоения $F \to E \to B$, соответствующего вложению $B\pi^{(n-2)} \hookrightarrow B\pi^{(n-1)}$. Напомним, что всякое отображение в гомотопической категории можно интерпретировать, как расслоение в смысле Серра.

Так как $\pi_{n-2}(F) \cong \pi_{n-1}(B\pi^{(n-1)}, B\pi^{(n-2)})$ является свободным $\mathbb{Z}\pi$-модулем, мы получаем

$$H^{n-1}(M; \pi_{n-2}(F)) \overset{PD}{\cong} H_c^{n-1}(\widetilde{M}; \oplus\mathbb{Z}) \cong H_1(\widetilde{M}; \oplus\mathbb{Z}) = 0.$$

Отсюда получаем: $o_{n-1} = 0$.

Пусть

$$f^{(n-1)} : M^{(n-1)} \to B\pi^{(n-2)}$$

есть результат деформации $f|_{M^{(n-1)}}$ на $B\pi^{(n-2)}$, совпадающий с f на $M^{(n-3)}$.

Для продолжения $f^{(n-1)}$ до искомого отображения $\bar{f} : M \to B\pi^{(n-1)}$ достаточно показать, что индуцированный гомоморфизм

$$\pi_{n-1}(B\pi^{(n-2)}) \to \pi_{n-1}(B\pi^{(n-1)}) \tag{3.3.2}$$

тривиален. Этот гомоморфизм поднимается до гомоморфизма гомотопических групп универсальных накрытий:

$$\pi_{n-1}(E\pi^{(n-2)}) \to \pi_{n-1}(E\pi^{(n-1)}). \tag{3.3.3}$$

Так как $E\pi^{(n-2)}$ стягивается в $E\pi$, по теореме о клеточной апроксимации $E\pi^{(n-2)}$ стягивается в $E\pi^{(n-1)}$. Это означает, что гомоморфизм (3.3.3) является нулевым. Так как мы имеем изоморфизм:

$$\pi_i(E\pi^{(k)}) \cong \pi_i(B\pi^{(k)}),\ i > 1$$

получаем, что гомоморфизм (3.3.2) является нулевым, и мы получаем искомое отображение:

$$\bar{f} : M \to B\pi^{(n-1)}.$$

Ясно, что для $n \geq 5$ это отображение индуцирует изоморфизм фундаментальных групп. Это также верно и для $n = 4$, так как g тождественно на 1-остове, а 2-остовы M и $B\pi$ совпадают.

∎

Лемма 3.3.16. *Пустсь $f : M \to B\pi$ классифицирующее отображение универсального накрытия замкнутого спинового n-мерного многообразия, $n > 3$. Предположим, что $f_*([M]_{ko}) = 0$. Тогда f гомотопно отображению $g : M \to B\pi^{(n-2)}$.*

Доказательство. По утверждению 3.3.14 мы можем считать, что

$$f(M) \subset B\pi^{(n-1)}.$$

По лемме 3.3.15 мы можем так же считать, что

$$f(M^{(n-1)}) \subset B\pi^{(n-2)}.$$

Кроме того, всегда можно сделать клеточное разбиение M с одной n-клеткой. Так же как и в доказательстве утверждения 3.3.14 можно показать, что первое препятствие к деформации отображения f на $(n-2)$-остов представляется коциклом

$$c_f : \pi_n(M, M^{(n-1)}) \to \pi_n(B\pi, B\pi^{n-2}),$$

который определяет когомологический $o_f = [c_f]$, образ которого при мономорфизме (см. теорему 3.3.7)

$$\pi_n(B\pi, B\pi^{(n-2)})_\pi \hookrightarrow \pi_n(B\pi/B\pi^{(n-2)})$$

есть $\bar{f}_*(1)$, где гомоморфизм

$$\bar{f}_* : \pi_n(M/M^{(n-1)}) = \mathbb{Z} \to \pi_n(B\pi/B\pi^{(n-2)})$$

индуцирован отображением фактор-пространств

$$\bar{f} : M/M^{(n-1)} \to B\pi/B\pi^{(n-2)}.$$

Допустим, что препятствие $[c_f]$ не нулевое. Покажем, что

$$\bar{f}_* : ko_n(S^n) \to ko_n(B\pi/B\pi^{n-2})$$

является нетривиальным.

Итак, пусть $\bar{f}_*(1)$ определяет нетривиальный элемент $\pi_n(B\pi/B\pi^{(n-2)})$. Условие $n > 3$ гарантирует, что $\bar{f}_*(1)$ лежит в стабильной гомотопической группе. По утверждению 3.3.12, элемент $\bar{f}_*(1)$ "выживает" при композиции

$$\pi_n(B\pi/B\pi^{(n-2)}) \to \pi_n^s(B\pi/B\pi^{(n-2)}) \to ko_n(B\pi/B\pi^{(n-2)}).$$

Из коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc}
\pi_n(S^n) & \xrightarrow{\bar{f}_*} & \pi_n(B\pi/B\pi^{(n-2)}) \\
\downarrow \cong & & \downarrow \cong \\
\pi_n^s(S^n) & \xrightarrow{\bar{f}_*} & \pi_n^s(B\pi/B\pi^{(n-2)}) \\
\downarrow \cong & & \downarrow \cong \\
ko_n(S^n) & \xrightarrow{\bar{f}_*} & ko_n(B\pi/B\pi^{(n-2)})
\end{array}$$

следует $\bar{f}_*(1) \neq 0$ для ko_n.

Теперь результат леммы 3.3.16 следует из следующей коммутативной диаграммы:

$$\begin{array}{ccc}
ko_n(M) & \xrightarrow{f_*} & ko_n(B\pi) \\
\downarrow g_* & & \downarrow \cong \\
ko_n(S^n) & \xrightarrow{\bar{f}_*} & ko_n(B\pi/B\pi^{(n-2)})
\end{array}$$

Действительно, вспомним, что ko-фундаментальный класс $[M]_{ko}$ спинового n-многообразия переходит в образующую $ko_n(S^n) = \mathbb{Z}$ при отображении степени один $g : M \to S^n$. ∎

Доказательство теоремы 3.3.4

Пусть M замкнутое спиновое n-мерное многообразие, допускающее метрику положительной скалярной кривизны. Тогда его конечнолистное накрытие M' соответствующее подгруппе π' является спиновым многообразием с положительной скалярной кривизной. По теореме 1.2.6

$$\alpha \circ per \circ f_*([M']_{ko}) = 0.$$

Условие на π' дает нам, что $f_*([M']_{ko}) = 0$ для классифицирующего отображения $f : M' \to B\pi'$. Тогда по лемме 3.3.16 f гомотопно $g : M' \to B\pi'^{(n-2)}$. Индуцированное отображение универсальных накрытий $\widetilde{M}' \to E\pi'^{(n-2)}$ дает нам неравенство $\dim_{\mathrm{mc}} \widetilde{M} \le n-2$, так как $\widetilde{M}' = \widetilde{M}$.

Следствие 3.3.17. *Гипотеза Громова выполняется для n-мерного многообразия M с фундаментальной группой $\pi_1(M) = \pi$, имеющей $vcd(\pi) \le n+4$, удовлетворяющей сильной гипотезе Новикова.*

Доказательство. Рассмотрим подгруппу конечного индекса π' с $cd(\pi) \le n+4$. Покажем, что per является изоморфизмом в размерности n для π'. Пусть $\mathbf{F} \to ko \to KO$ расслоение спектров, индуцированное морфизмом $ko \to KO$. Тогда $\pi_k(\mathbf{F}) = 0$ для $k \ge 0$ и

$$\pi_k(\mathbf{F}) = \pi_{k+1}(KO) = KO_{k+1}(pt) = 0$$

если $k = -2, -3, -4 \mod 8$. Из $\mathbf{F}$-гомологической последовательности Атьи-Хирцебруха для $B\pi$ следует, что $H_n(B\pi; \mathbf{F}) = 0$, так как все элементы на n-диагонали в $E^2_{*,*}$ нулевые. Из коэффициентной точной последовательности для гомологий

$$H_n(B\pi; \mathbf{F}) \to ko_n(B\pi) \to KO_n(B\pi) \to \dots$$

следует, что $per : ko_n(B\pi) \to KO_n(B\pi)$ является мономорфизмом. ∎

Следствие 3.3.18. *Гипотеза Громова выполняется для замкнутых спиновых n - мерных многообразий M с фундаментальной группой $\pi_1(M) = \pi$ имеющей конечное $B\pi$ и удовлетворяющей неравенству $\operatorname{asdim} \pi \le n + 4$.*

Доказательство.

Это следует из следующих фактов:

1) сильная гипотеза Новикова справедлива для таких групп π ([56],[57]),

2) следствия 3.3.17,

3) неравенства $\operatorname{cd}(\pi) \le \operatorname{asdim} \pi$, доказанного в [106]. ∎

Следствие 3.3.19. *Гипотеза Громова выполняется для спиновых n-мерных многообразий M с фундаментальной группой $\pi_1(M) = \pi$ равной произведению свободных групп $F_1 \times \dots \times F_n$. В частности, для свободных абелевых групп.*

Доказательство. Для приведенных гомологий с коэффициентами в спектре $\mathbf{E}$ имеет место формула

$$H_i(X \times S^1; \mathbf{E}) \cong H_i(X; \mathbf{E}) \oplus H_{i-1}(X; \mathbf{E}) \oplus H_i(S^1),$$

из которой следует, что если $ko_*(X) \to KO_*(X)$ является мономорфизмом, то

$$ko_*(X \times S^1) \to KO_*(X \times S^1)$$

также мономорфизм. Индукцией по m, используя последовательность Майера-Вьеторриса, эту формулу можно обобщить следующим образом

$$H_i(X \times (\bigvee_m S^1); \mathbf{E}) \cong H_i(X; \mathbf{E}) \oplus \bigoplus_m (H_{i-1}(X; \mathbf{E}) \oplus H_i(S^1)).$$

Поэтому,

$$ko_*(X \times (\bigvee_m S^1)) \to KO_*(X \times (\bigvee_m S^1))$$

является мономорфизмом. ∎

Следствие 3.3.20. *Гипотеза Громова выполняется для замкнутых спиновых n- мерных многообразий M с абелевой фундаментальной группой.*

Доказательство. Это следует из того, что всякая конечно порожденная абелева группа содержит свободную абелеву подгруппу конечного индекса. ∎

3.4. Гипотеза Громова о падении макроскопической размерности в неспиновом случае

В неспиновом случае мы имеем иную картину. Прежде всего заметим, что по теореме 1.2.12 замкнутое ориентируемое несущественное вполне неспиновое многообразие размерности $n \geq 5$ является PSC-многообразием. Кроме того, как будет показано ниже, теорема 3.2.1 не может быть обобщена на случай вполне неспиновых многообразий размерности $n \geq 5$.

Предварительные результаты

В этом подразделе мы приведем некоторые важные результаты, полученные А. Дранишниковым [94] в грубо эквивариантной категории, аналогичные тем, которые были получены нами в эквивариантной категории.

Теорема 3.4.1. *Пусть M – замкнутое ориентируемое n- мерное многообразие, и пусть $\widetilde{f} : \widetilde{M} \to E\pi$ лифт классифицирующего отображения $f : M \to B\pi$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1. $\dim_{mc} \widetilde{M} \le n-1$*;*

2. $\widetilde{f}$ *можно равномерно ограниченно продеформировать к отображению*

$$g : \widetilde{M} \to E\pi^{(n-1)};$$

3. $\widetilde{f}_*([\widetilde{M}]) = 0$ *в* $H_n^{lf}(E\pi)$*, где* $[\widetilde{M}]$ *фундаментальный класс, а* H_*^{lf} *обозначает гомологии с локально конечными носителями.*

Доказательство. Доказательство полностью аналогично доказательству утверждения 3.3.13 с заменой эквивариантной категории на грубо эквивариантную категорию с привлечением грубо эквивариантных когомологий и грубо эквивариантной теории препятствий (см. раздел 2.6). В частности, аналогично эквивариантной теории, результат следует из вырожденности препятствующего класса $o^n_{\widetilde{f}}$. А именно, доказывается следующее:

$$\dim_{\mathrm{mc}} \widetilde{M} < n \Leftrightarrow 0 = o^n_{\widetilde{f}} \in H^n_{ce}(\widetilde{M}; \pi_{n-1}(E\pi^{(n-1)})).$$

■

Замечание 3.4.2. *Естественно назвать многообразия, удовлетворяющие свойству* 2 *теоремы 3.4.1, макроскопически несущественными.*

Утверждение 3.4.3. *Для многообразия M с фиксированной структурой CW - комплекса, классифицирующим отображением $f : M \to B\pi$ и макроскопически несущественным универсальным накрытием $\widetilde{M}$, поднятие $\widetilde{f} : \widetilde{M} \to E\pi$ отображения f допускает ограниченную деформацию к собственному отображению $f : \widetilde{M} \to E\pi^{(n-1)}$ с $f(M^{(n-1)}) \subset E\pi^{(n-2)}$.*

Доказательство. Схема доказательства полностью та же, что и в лемме 3.3.15, с заменой эквивариантной категории на грубо эквивариантную категорию с привлечением грубо эквивариантных когомологий и грубо эквивариантной теории препятствий (см. раздел 2.6). ∎

Напомним некоторые определения:

- Группа π типа FP называется *группа с двойственностью* если найдется π-модуль D такой, что

$$H^i(\pi, M) \cong H_{m-i}(\pi, M \otimes D)$$

  для произвольного π-модуля M и произвольного i, где $m = \mathrm{cd}(\pi)$ обозначает когомологическую размерность π.

- Группа π имеет тип FL (FP), если $B\pi$ является (доминируется) конечным комплексом, где доминирование означает существование ретракции (в гомотопической категории) $r : K \to B\pi$, где K – конечный комплекс. Группа, допускающая конечное $B\pi$ называется также *геометрически конечной.* До сих пор неясно верно ли, что $FP = FL$ (см. [39]).

- Группа π является *виртуально FL-группой с двойственностью* если она содержит подгруппу конечного индекса π', являющуюся FL-группой с двойственностью.

- *Виртуальная когомологическая размерность* $vcd(\pi)$ дискретной группы π это когомологическая размерность подгруппы без кручения конечного индекса. Размерность $vcd(\pi)$ корректно определена и не зависит от выбора подгруппы конечного индекса.

Теорема 3.4.4. *Предположим, что* $\pi = \pi_1(M)$ *содержит подгруппу конечного индекса типа* FL *с двойственностью и* $i \neq vcd(\pi)$, *тогда* $H_i^{lf}(E\pi;\mathbb{Z}) = 0$.

Доказательство. Из [39, Теорема 10.1] следует, что $H^i(\pi;\mathbb{Z}\pi) = 0$ для $i \neq m = \mathrm{cd}(\pi)$ и группа $H^m(\pi;\mathbb{Z}\pi)$ является свободной абелевой. Для геометрически конечных групп имеет место равенство $H^i(\pi,\mathbb{Z}\pi) = H_c^i(E\pi;\mathbb{Z}) \cong \widetilde{H}^i(\alpha(E\pi);\mathbb{Z})$. А для приведенных гомологий Стинрода одноточечной компактификации $\widetilde{H}_i^s(\alpha(E\pi);\mathbb{Z})$ мы имеем:

$$0 \to Ext(\widetilde{H}^{i+1}(\alpha(E\pi);\mathbb{Z}) \to \widetilde{H}_i^s(\alpha(E\pi);\mathbb{Z}) \to Hom(\widetilde{H}^i(\alpha(E\pi);\mathbb{Z}) \to 0.$$

Отсюда $\widetilde{H}_i^s(\alpha(E\pi);\mathbb{Z}) = 0$ для $i < m$. Равенство $H_i^{lf}(E\pi;\mathbb{Z}) \cong \widetilde{H}_i^s(\alpha(E\pi);\mathbb{Z})$ завершает доказательство. ∎

Макроскопическая размерность и QI-вложения

Напомним, что $f : X \to Y$ есть квази-изометрическое вложение (QI-вложение), если существуют константы $\lambda, c > 0$ такие, что имеет место последовательность неравенств:

$$\frac{1}{\lambda} d_X(x_1,x_2) - c \leq d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq \lambda d_X(x_1,x_2) + c.$$

для всех $x_1, x_2 \in X$. Отображение $f : X \to Y$ является квази-изометрией, если существует $D > 0$ такое, что f есть QI-вложение с D-плотным образом.

Утверждение 3.4.5. *Пусть* B *есть счетный CW-комплекс (а значит комплекс, реализуемый в гильбертовом пространстве) с конечным* $B^{(2)}$, *наделенный (слабой) метрикой, наследуемой из гильбертова пространства. Предположим, что* $\pi_i(B) = 0$ *for* $2 \leq i \leq k$. *Тогда для любого конечного подкомплекса* $Y \subset B$, *с* $B^{(2)} \subset Y$ *для любого* $i \leq k$ *и любого* $R > 0$ *существует* *конечный подкомплекс Z, $Y \subset Z \subset B$, с* $\dim(Z \setminus Y) = i+1$ *и* $S \geq R$, *что гомоморфизмы* $\pi_i(B_R(y) \cap \widetilde{Y}) \to \pi_i(B_S(y) \cap \widetilde{Z})$, *индуцированные вложением, тривиальны для всех* $y \in \widetilde{Y}$, *где метрика на универсальном накрытии* $\widetilde{Z}$ *поднята из* Z.

Доказательство. Пусть $p : \widetilde{Y} \to Y$ универсальное накрытие. Пропустим случай $i < 2$ как очевидный. Фиксируем $y \in \widetilde{Y}$. Для данного R, пусть $C \subset \widetilde{Y}$ конечный подкомплекс, содержащий $B_{R+diam\,Y}(y) \cap \widetilde{Y}$. Тогда существует конечный подкомплекс $D \subset \widetilde{Y}$ такой, что $C \subset D$ с односвязным D. По теореме Серра все гомотопические группы $\pi_i(D)$ конечно порождены. Поэтому существует конечный подкомплекс $E \subset \widetilde{B}$ такой, что гомоморфизм включения $\pi_i(D) \to \pi_i(E)$ является тривиальным. По теореме о клеточной аппроксимации, мы можем допустить, что $\dim E \setminus D = i+1$. Определим $Z = p(E)$ и $S = diam\, E$, где $p : \widetilde{B} \to B$ универсальное накрытие B. Из построения видно, что число S универсально для всех $B_R(y')$. ∎

Утверждение 3.4.6. *Предположим, что на* $E\pi$ *задана метрика* d, *поднятая с* $B\pi$, *где* $\pi = \pi_1(X)$. *Тогда* $\dim_{mc} \widetilde{X} \leq n$ *тогда и только тогда, когда существует непрерывное QI-вложение* $g : \widetilde{X} \to E\pi^{(n)}$.

Доказательство. Пусть $f : \widetilde{X} \to K$ собственное коограниченное отображение на n-мерный симплициальный комплекс K. Без ограничения общности мы можем предположить, что $K^{(0)} \subset f(\widetilde{X})$. Существует такое b, что $\mathrm{Diam} f^{-1}(\Delta) \leq b$ для всех симплексов $\Delta \in K$. Действительно, мы можем предполагать K симплициальным комплексом. Поэтому, если условие $\mathrm{Diam} f^{-1}(\Delta) \leq b$ не выполнено, то методом барицентрического подразделения, учитывая, что $f : \widetilde{X} \to K$ собственное коограниченное отображение, мы либо добьемся требуемого, либо найдем сходящуюся к точке $x \in K$ последовательность вложенных симплексов

$$\{x \subset \cdots \subset \Delta_2 \subset \Delta_1\} \subset K : f^{-1}(\Delta_i) \subset f^{-1}(\Delta_1) \text{ и } \mathrm{Diam} f^{-1}(\Delta_i) \geq c$$

для наперед заданного c. Так как последовательности точек $\{x_i\} \in f^{-1}(\Delta_i)$ и $\{y_i\} \in f^{-1}(\Delta_i)$, на которых достигается диаметр, $f^{-1}(\Delta_i)$ сходятся в компакте $f^{-1}(\Delta_1)$, то $\mathrm{Diam}(f^{-1}(x)) \geq c$, что противоречит коограниченности f.

Так как $K^{(0)} \subset f(\widetilde{X})$, мы можем определить отображение $\xi_0 : K^{(0)} \to E\pi$ так, что $\xi_0(v) = \widetilde{u}(z)$ для некоторого $z \in f^{-1}(v)$, где $\widetilde{u}$ – поднятие классифицирующего отображения $u : X \to B\pi$. Мы можем считать, что $u(X) \subset B\pi^{(m)}$ с $m = \dim X$. Заметим, что $m \geq n$.

Для начала мы допустим, что $B\pi^{(m)}$ конечен. Тогда, используя равномерную $(n-1)$-связность $E\pi^{(m)} = \widetilde{B\pi^{(m)}}$ с поднятой метрикой, индукцией по i мы построим отображения $\xi_i : K^{(i)} \to E\pi^{(n)}$ продолжающие ξ_{i-1} с равномерно ограниченным $\mathrm{Diam}\, \xi_i(\Delta) < D_i$ для всех симплексов Δ в $K^{(i)}$. Пусть $\xi = \xi_n$. Тогда, $\mathrm{Diam}\, \xi(\Delta) < D = D_n$ для всех симплексов Δ в K.

Мы утверждаем, что композиция $g = \xi \circ f : \widetilde{X} \to E\pi^{(n)}$ является QI-вложением. Действительно, для $x_1, x_2 \in \widetilde{X}$ возьмем вершины $v_1 \in \Delta_1$ и $v_2 \in \Delta_2$ симплексов Δ_1, Δ_2 содержащих $f(x_1)$ и $f(x_2)$ соответственно. Тогда неравенство треугольника и факт, что $\widetilde{u}$ является QI-вложением с константами λ и c влечет, что

$$d(g(x_1), g(x_2)) \leq d(\xi(v_1), \xi(v_2)) + 2D = d(\widetilde{u}(z_1), \widetilde{u}(z_2)) + 2D \leq$$

$$\lambda d_{\widetilde{X}}(z_1, z_2) + c + 2D \leq \lambda d_{\widetilde{X}}(x_1, x_2) + 2\lambda b + c + 2D$$

где $f(z_i) = v_i$ и, поэтому, $z_i, x_i \in f^{-1}(\Delta_i)$, $i = 1, 2$. Аналогично,

$$d(g(x_1), g(x_2)) \geq d(\xi(v_1), \xi(v_2)) - 2D = d(\widetilde{u}(z_1), \widetilde{u}(z_2)) - 2D \geq$$

$$\frac{1}{\lambda} d_{\widetilde{X}}(z_1, z_2) - c - 2D \geq \frac{1}{\lambda} d_{\widetilde{X}}(x_1, x_2) - 2\frac{1}{\lambda} b - c - 2D.$$

Если $B\pi^{(m)}$ не является конечным, то мы используем утверждение 3.4.5, чтобы построить по индукции последовательность ξ_i как выше вместе с последовательностью конечных комплексов $Y_0 \subset Y_1 \subset \cdots Y_n \subset B\pi$ таких, что $u(X) \subset Y_0$ и $p\xi_i(K^{(i)}) \subset Y_i$, где $p : E\pi \to B\pi$ – универсальное накрытие. Остальные аргументы остаются такими же, как и в конечном случае.

Теперь обратно, пусть $g : \widetilde{X} \to E\pi^{(n)}$ является QI-вложением с константами λ и c. Заметим, что для каждого замкнутого r-шара $B_r(y)$ в $E\pi$ и любых $x_1, x_2 \in g^{-1}(B_r(y))$ мы имеем

$$\frac{1}{\lambda} d_{\widetilde{X}}(x_1, x_2) - c \leq d(g(x_1), g(x_2)) \leq 2r.$$

Таким образом, $\mathrm{Diam}(g^{-1}(B_r(y))$ равномерно ограничен. Поэтому g собственно и равномерно коограничено. ∎

Гипотеза Громова

Напомним, что группа $\Omega_n(X, Y)$ относительных ориентированных бордизмов пары (X, Y) состоит из классов эквивалентности пар (M, f), где M ориентируемое n-многообразие с границей и $f : (M, \partial M) \to (X, Y)$ непрерывное отображение. Две пары (M, f) и (N, g) эквивалентны, если существует пара (W, F), $F : W \to X$, которая называется *бордизмом*, где W ориентируемое $(n+1)$-многообразие с границей такое, что $\partial W = M \cup W' \cup N$, $W' \cap M = \partial M$, $W' \cap N = \partial N$, $F|_M = f$, $F|_N = g$, и $F(W') \subset Y$.

Утверждение 3.4.7. *Для любого CW комплекса K существует изоморфизм*

$$\Omega_n(K, K^{(n-2)}) \cong H_n(K, K^{(n-2)}).$$

Доказательство. Так как $\Omega_1(*) = 0$ (заметим, что и $\Omega_2(*) = 0$) и $K/K^{(n-2)}$ является $(n-2)$-связным, мы получаем, что в спектральной последовательности Атьи-Хирцебруха на диагонали $p + q = n$ находится единственный элемент, который “выживает” на ∞:

$$E^2_{n,0} \cong E^\infty_{n,0} \cong H_n(K, K^{(n-2)}; \Omega_0(*)) \cong H_n(K, K^{(n-2)}) :$$

$$\begin{array}{c|cccccc}
 & 0 & \dots & 0 & * & * \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & * & * \\
\hline
 & & & & \text{n-1} & \text{n}
\end{array}$$

Поэтому,

$$\Omega_n(K, K^{(n-2)}) \cong H_n(K, K^{(n-2)}).$$

■

Определение 3.4.8. $(n+1)$*-мерная* k*-ручка или ручка индекса* k *это пространство* H *гомеоморфное произведению* $H \cong D^k \times D^{n+1-k}$. *Подмножество* $D^k \times \{0\} \subset H$ *и* $\partial D^k \times D^{n+1-k}$ *называются ядром и основанием* k*-ручки соответственно.*

k*-ручка* H *приклеена к* $(n+1)$*-многообразию* W *с границей* ∂W, *если она пересекает границу по основанию*

$$H \cap \partial W = \partial D^k \times D^{n+1-k}$$

и $H \cap Int(W) = \varnothing$.

Напомним, что каждому бордизму W между n-многообразиями M и N стационарному на границе соответствует разбиение на ручки

$$W = M \times [0,1] \cup \bigcup H_i \cup N \times [0,1]$$

где $H_i \cong D^k \times D^{n+1-k}$. Более того, существует фильтрация

$$M \times [0,1] = W_0 \subset W_1 \subset \cdots \subset W_n = W \setminus (N \times (0,1]) \subset W,$$

где каждое W_i получено из W_{i-1} приклеиванием i-ручки. Такая фильтрация определяет двойственную фильтрацию

$$W \supset W \setminus (M \times [0,1)) = W_n^* \supset \cdots \supset W_1^* \supset W_0^* = N \times [0,1]$$

с тем же множеством ручек, где каждая i-ручка H пространства W_i является $(n-i+1)$-ручкой пространства W_{n-i+1}^*.

Эта ситуация естественно возникает в триангулированных многообразиях. Мы будем рассматривать бордизмы открытых многообразий, представленные бесконечным семейством бордизмов компактных многообразий с границей. А именно, пусть M открытое n-многообразий, обладающее семейством дизъюнктных n-мерных подмногообразий с границей $\{V_\gamma\}$. Пусть U_γ стационарное на границе семейство бордизмов между V_γ и N_γ. Тогда многообразие $W = A \cup B$ с $A = (M \setminus \cup_i Int V_\gamma) \times [0,1]$ и $B = \coprod_\gamma U_\gamma$ с $A \cap B = \coprod_\gamma \partial V_\gamma \times [0,1]$ является *бордизмом, определенным семейством* $\{U_\gamma\}$. Таким образом, W получено из $M \times [0,1]$ заменой цилиндров $V_\gamma \times [0,1]$ бордизмами U_γ. Назовем W бордизмом между многообразиями $M = M \times \{0\}$ и N, где $\partial W = M \coprod N$. Фильтрация на i-ручки U_γ определяет фильтрацию W:

$$M \times [0,1] = W_0 \subset W_1 \subset \cdots \subset W_n = W \setminus (N \times (0,1]) \subset W$$

и ее дуальную.

Рассмотрим метрику произведения на $M \times [0,1]$. Для каждого U_γ можно определить метрику, которая продолжает метрику на $\partial V_\gamma \times [0,1]$. Это приводит к метрике на W такой, что вложение $M \subset W$ является изометрическим. Назовем бордизм W *ограниченным* если для этой метрики существует равномерная верхняя граница диаметров U_γ. Заметим, что для ограниченного бордизма W вложения $W_i \subset W$ и $W_i^* \subset W$ являются D-плотными для некоторого D и для всех l i.

Если $F : W \to X$ является QI-вложением ограниченного бордизма W в метрическое пространство X, тогда пара (W, F) называется *ограниченным бордизмом* в X.

Утверждение 3.4.9. *Пусть W ограниченный бордизм между открытыми n-многообразиями M и N который определяется семейством бордизмов $\{U_\gamma\}$ между V_γ и N_γ. Предположим, что W не имеет ручек размерности $\leq k$. Допустим, что N допускает непрерывное QI-вложение $f : N \to K$ в равномерно $(n-k-1)$-связный l-мерный комплекс K. Тогда* $\dim_{mc} M \leq l$.

Доказательство. Рассмотрим двойственную фильтрацию на W:

$$W \supset W \setminus (M \times [0, \epsilon)) = W_n^* = \cdots = W_{n-k}^* \supset \cdots \supset W_1^* \supset W_0^* = N \times [0, \epsilon].$$

Так как бордизм W ограничен, существует $D > 0$ такое, что каждое W_i^* получено из W_{i-1}^* добавлением i-ручки H с Diam $H < D$.

Мы можем считать, что f определено на $N \times [0, \epsilon]$. Так как K является равномерно $(n-k-1)$-связным, а семейство $f(N_\gamma \times [0, \epsilon])$ равномерно ограничено, отображение f может быть продолжено до $g_1 : W_1^* \to K$ с равномерной верхней границей R_1 на диаметр образов $g_1(H)$ ручек в W_1^*. Это условие вместе с допущением, что вложение $W_0^* \subset W_1^*$ является квази-изометрией влечет, что g_1 является QI-вложением. Тогда g_1 может быть продолжено до квази-изометрического вложения $g_2 : W_2^* \to K$ и так далее. Равномерная $(n-k-1)$-связность позволяет прийти таким образом к QI-вложению $g_{n-k}^* : W_{n-k}^* = W_n^* \to K$. Проекция $M \times [0, \epsilon] \to M$ определяет ретракцию

$r : W \to W_n^*$. Так как это квази-изометрия, то композиция $g = g_{n-k}^* \circ r$ является QI-вложением. Так как непрерывное QI-вложение является собственным равномерно коограниченным отображением (см. теорему 3.4.6), то мы получаем $\dim_{mc} W \le l$ и, поэтому, $\dim_{mc} M \le l$. ∎

Доказательство следующей теоремы можно найти в [107].

Теорема 3.4.10. *Пусть W – бордизм между двумя компактными многообразиями M и N, который стационарен на границе $\partial M = \partial N$. Предположим, что вложение $M \to W$ является k-эквивалентностью. Тогда W допускает разложение на ручки, которое не содержит ручек индекса $\le k + 1$.*

Пусть $\nu_X : X \to BSO$ определяет классифицирующее отображение для стабильного нормального расслоения многообразия X. Докажем следующую теорему.

Теорема 3.4.11. *Пусть M является вполне неспиновым замкнутым ориентируемым n-многообразием, $n \ge 5$, с $\pi_1(M) = \Gamma$, чье универсальное накрытие $\widetilde{M}$ является макроскопически несущественным. Тогда* $\dim_{mc} \widetilde{M} \le n - 2$.

Доказательство. Допущение, что $\widetilde{M}$ является вполне неспиновым, влечет, что гомоморфизм

$$(\nu_{\widetilde{M}})_* : \pi_2(\widetilde{M}) \to \pi_2(BSO) = \mathbb{Z}_2$$

является сюрьективным. Пусть Σ' есть 2-сфера в $\widetilde{M}$ с $(\nu_{\widetilde{M}})_*([\Sigma']) \ne 0$, где $[\Sigma']$ определяет соответствующий элемент $\pi_2(\widetilde{M})$. Так как накрытие $\widetilde{M} \to M$ индуцирует изоморфизм 2-мерных гомотопических групп и $dim\, M \ge 5$, мы можем считать, что Σ' является поднятием вложенной сферы $\Sigma \subset M$. Пусть V – регулярная окрестность Σ, которая поднимается до регулярной окрестности V' сферы Σ'. Пусть $V_\gamma = \gamma(V')$ определяет γ-перенос V'. Из существования единственного поднятия V для заданного поднятия точки, семейство $\{V_\gamma\}$ является дизъюнктным.

Мы предположим, что CW-структура на M имеет единственную n-мерную клетку e^n. По утверждению 3.4.3 существует ограниченная деформация $\widetilde{u}$ до отображения $f:\widetilde{M}\to E\Gamma^{(n-1)}$ с $f(\widetilde{M}\smallsetminus\coprod_{\gamma\in\Gamma}D_\gamma)\subset E\Gamma^{(n-2)}$, где $\{D_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ – поднятия фиксированного замкнутого n-мерного шара $D\subset e^n$. Ясно, что f является QI-вложением. Мы можем считать, что $D\subset V$ и $D_\gamma\subset V_\gamma$.

Заметим, что ограничение отображения f на $(D_\gamma,\partial D_\gamma)$ определяет нулевой элемент в $H_n(E\Gamma,E\Gamma^{(n-2)})$. Более того, существует $r>0$ такое, что $f(D_\gamma)\subset B_r(f(c_\gamma))$, где $c_\gamma\in D_\gamma$ и $f|_{D_\gamma}$ определяет нулевой элемент в

$$H_n(B_r(f(c_\gamma)),B_r(f(c_\gamma))\cap E\Gamma^{(n-2)}).$$

По утверждению 3.4.7 существует относительный бордизм (W_γ,q_γ), соединяющий $(D_\gamma,\partial D_\gamma)$ с (N_γ,S'_γ), причем $q_\gamma(\partial W_\gamma\smallsetminus D_\gamma)\subset E\Gamma^{(n-2)}$. Мы можем считать, что бордизм $W'\subset\partial W_\gamma$ границ $\partial D_\gamma\cong S^{n-1}$ и S'_γ стационарен, $W'\cong\partial D_\gamma\times[0,1]$ и $q(x,t)=q(x)$ для всех $x\in\partial D$ и всех $t\in[0,1]$. Применяя 1-мерную хирургию на W_γ, мы можем считать, что W_γ является односвязным.

Для каждого $\gamma\in\Gamma$ мы можем продолжить бордизм W_γ тривиальным бордизмомом $(V_\gamma\smallsetminus Int(D_\gamma))\times[0,1]$ до бордизма $\bar{W}_\gamma$ многообразий с границами между V_γ и N'_γ. Отображение q_γ продолжается до отображения $\bar{q}_\gamma:\bar{W}_\gamma\to E\Gamma$ с $\bar{q}_\gamma(V_\gamma\smallsetminus Int(D_\gamma))\times[0,1])\subset E\Gamma^{(n-2)}$ посредством f. Таким образом $(\bar{W}_\gamma,\bar{q}_\gamma)$ является стационарным на границе бордизмом между V_γ и N'_γ с $\bar{q}_\gamma(N'_\gamma)\subset E\Gamma^{(n-2)}$.

Заметим, что каждая 2-сфера S, представляющая элемент ядра

$$(\nu_{\bar{W}_\gamma})_*:\pi_2(\bar{W}_\gamma)\to\pi_2(BSO),$$

имеет тривиальное нормальное расслоение. Заметим, что ядро конечно порождено, поэтому мы можем сделать хирургию в размерности 2 на $\bar{W}_\gamma$, чтобы получить многообразие $\hat{W}_\gamma$ и отображение $\nu_{\hat{W}_\gamma} : \hat{W}_\gamma \to BSO$, которое индуцирует мономорфизм:

$$(\nu_{\hat{W}_\gamma})_* : \pi_2(\hat{W}_\gamma) \to \pi_2(BSO) = \mathbb{Z}_2.$$

Отображения $\bar{q}_\gamma$ могут быть преобразованы до отображений $\hat{q}_\gamma : \hat{W}_\gamma \to E\Gamma$ с $\hat{q}_\gamma = \bar{q}_\gamma$ на $\partial\hat{W}_\gamma = \partial\bar{W}_\gamma$ с равномерной оценкой на расстояние между образами $im(\hat{q}_\gamma)$ и $im(\bar{q}_\gamma)$. Пусть $i^\gamma : V_\gamma \to \hat{W}_\gamma$ определяет вложение. Так как $(\nu_{V_\gamma})_*$ сюрьективно, $(\nu_{\hat{W}_\gamma})_* \circ i^\gamma_* = (\nu_{V_\gamma})_*$ и $(\nu_{\hat{W}_\gamma})_*$ иньективно, мы получаем, что $i^\gamma_* : \pi_2(V_\gamma) \to \pi_2(\hat{W}_\gamma)$ сюрьективно. Так как V_γ и $\hat{W}_\gamma$ односвязны, по теореме 3.4.10 мы можем считать, что $\hat{W}_\gamma$ не имеет ручек в размерности ≤ 2.

Пусть $\hat{W}$ бордизм между $\widetilde{M}$ и N, определенный семейством относительных бордизмов $\coprod_{\gamma\in\Gamma} \hat{W}_\gamma$ с $\partial W = \widetilde{M} \coprod N$. Пусть $i : \widetilde{M} \to \hat{W}$ определяет вложение. Мы можем выбрать метрику на $\hat{W}$ так, что $\hat{W}$ ограниченно и i является изометрическим вложением. Семейство отображений $\hat{q}_\gamma$ естественно продолжается до QI-вложения $\hat{q} : \hat{W} \to E\Gamma$.

Заметим, что бордизм $(\hat{W}, \hat{q})$ с непрерывным QI-вложением $\hat{q} : \hat{W} \to E\Gamma$ между $(\widetilde{M}, f)$ и (N, g) является ограниченным бордизмом, который не имеет ручек в размерности ≤ 2 и определяет QI-вложение $g : N \to E\Gamma^{(n-2)}$. В случае, когда $B\Gamma^{(n-1)}$ является конечным, $E\Gamma^{(n-2)}$ является равномерно $(n-3)$-связным. Тогда утверждение 3.4.9 влечет, что $\dim_{mc} \widetilde{M} \leq n-2$. В общем случае для завершения доказательства мы используем индукцию и утверждение 3.4.5 для построения подкомплексов $Y_1 \subset \cdots \subset Y_{n-2} \subset B\pi$ и QI-вложений $g_i : W_i^* \to \widetilde{Y}_i^{(n-2)}$. ∎

Деформация в $B\pi^{(n-2)}$

Утверждение 3.4.12 и теорема 3.4.13 ниже соответствуют утверждению 3.4.9 и теореме 3.4.11 соответственно.

Утверждение 3.4.12. *Предположим, что замкнутое n-многообразие N получено из многообразия M цепочкой k-хирургий с $2 \leq k$ таких, что соответствующий бордизм W допускает отображение $q : W \to B\pi$, индуцирующее изоморфизм фундаментальных групп. Допустим, что $q(N) \subset B\pi^{(n-2)}$. Тогда классифицирующее отображение $u^M : M \to B\pi$ допускает деформацию в $(n-2)$-остов $B\pi^{(n-2)}$.*

Доказательство. Условие на бордизм W влечет, что вложение $M \to W$ индуцирует изоморфизм фундаментальных групп и W допускает следующее разложение

$$W \supset W \setminus (M \times [0,1)) = W^*_{n-2} \supset \cdots \supset W^*_2 \supset W^*_1 \supset W^*_0 = N \times [0,1],$$

где W^*_1 получено из W^*_0 приклеиванием 1-клетки и утолщения, W^*_2 получено из W^*_1 приклеиванием 2-клетки и утолщения, и т.д. вплоть до приклеивания $(n-2)$-клетки с утолщением. Таким образом по теореме о клеточной аппроксимации отображение q, ограниченное на W^*_1 гомотопно отображению q_1 с $q_1(W^*_1) \subset B\pi^{(1)}$, имея ввиду гомотопию, удерживающую W^*_0 в $B\pi^{(n-2)}$. По теореме о продолжении гомотопии продолжим гомотопию до гомотопии между q и $\bar{q}_1; W \to B\pi$. Подобным образом мы можем деформировать $\bar{q}_1$ на $\bar{q}_2 : W \to B\pi$ с $\bar{q}_2(W^*_2) \subset B\pi^{(2)}$, удерживая W^*_0 в $B\pi^{(n-2)}$ и.т.д.

Поэтому, отображение $q|_N : N \to B\pi^{(n-2)}$ гомотопно отображению $g' : N \to B\pi^{(n-2)}$, которое может быть продолжено до отображения $g : W \to B\pi^{(n-2)}$. Так как вложение $M \to W$ является 1-эквивалентностью, ограничение $g|_M$ индуцирует изоморфизм фундаментальных групп, и поэтому является классифицирующим для $\widetilde{M}$. ∎

Напомним, что для конечно представимой группы π, условие FP_m означает, что $B\pi$ может быть взято с конечным m-остовом [39].

Теорема 3.4.13. *Пусть M вполне неспиновое замкнутое ориентируемое несущественное n-многообразие, $n \geq 5$, чья фундаментальная группа π имеет тип FP_3. Тогда классифицирующее отображение $u^M : M \to B\pi$ может быть продеформировано в $B\pi^{(n-2)}$, в частности,* $\dim_{mc}\widetilde{M} \leq n-2$.

Доказательство.

Допустим, что CW-структура на M имеет единственную n-мерную клетку. По лемме 3.3.15 существует классифицирующее отображение $f : M \to B\pi$ со свойством: $f(M \setminus D) \subset B\pi^{(n-2)}$, где D есть n-мерный шар. Заметим, что ограничение отображения f на $(D, \partial D)$ определяет нулевой элемент в $H_n(B\pi, B\pi^{(n-2)})$. Поэтому, по утверждению 3.4.7 существует относительный бордизм (W, q) of $(D, \partial D)$ в (N', S) с $q(\partial W \setminus D) \subset B\pi^{(n-2)}$. Мы можем считать, что бордизм $W' \subset \partial W$ границ $\partial D \cong S^{n-1}$ и S является стационарным: $W' \cong \partial D \times [0,1]$ и $q(x,t) = q(x)$ для всех $x \in \partial D$ и всех $t \in [0,1]$. Пусть $\bar{W}$ является продолжением W на все M с помощью стационарного бордизма. Пусть $\bar{q} : \bar{W} \to B\pi$ определяет продолжение q посредством $f|_{M\setminus D}$. Таким образом $\bar{W}$ является бордизмом между M и N.

Применяя 1-хирургию на $\operatorname{int}\bar{W}$, которое убивает ядро

$$\bar{q}_* : \pi_1(W) \to \pi_1(B\pi) = \pi,$$

мы можем считать, что $\bar{q}$ индуцирует изоморфизм фундаментальных групп. При этом вложение $i : M \to \bar{W}$ также индуцирует изоморфизм фундаментальных групп.

Заметим, что каждая 2-сфера S, представляющая элемент ядра

$$(\nu_{\bar{W}})_* : \pi_2(\bar{W}) \to \pi_2(BSO)$$

имеет тривиальное нормальное расслоение. Так как фундаментальная группа является FP_3-группой, можно показать, что $\pi_2(\bar{W})$ является конечно порожденным π-модулем. Поэтому мы можем применить хирургию в размерности 2 на $\mathrm{int}\bar{W}$ и получить новый бордизм $\hat{W}$ и отображение $\nu_{\hat{W}} : \hat{W} \to BSO$, индуцирующее изоморфизм $(\nu_{\hat{W}})_* : \pi_2(\hat{W}) \to \pi_2(BSO)$. Так как $B\pi$ асферично, отображение $\bar{q}$ может быть продолжено до отображения $\hat{q} : \hat{W} \to B\pi$, которое также индуцирует изоморфизм фундаментальных групп.

Так как M является вполне неспиновым

$$(\nu_M)_* : \pi_2(M) \to \pi_2(BSO) = \mathbb{Z}_2$$

сюрьективно. Так как $\nu_M = \nu_{\hat{W}} \circ i_M$ является эпиморфизмом и $(\nu_{\hat{W}})_*$ есть изоморфизм, то $i_{M*} : \pi_2(M) \to \pi_2(\hat{W})$ – эпиморфизм. Отсюда по теореме 3.4.10 $\hat{W}$ является бордизмом между M и N, который получен из M последовательностью k-хирургий с $2 \le k$. Утверждение 3.4.12 завершает доказательство. ■

3.5. Макроскопическая размерность неспиновых PSC - многообразий с виртуально абелевой фундаментальной группой

Имеет место следующая теорема.

Теорема 3.5.1. *Гипотеза Громова 1.3.21 выполняется для многообразия M, если фундаментальная группа $\pi = \pi_1(M)$ является виртуально FL-*

группой с двойственностью, если имеет место один из следующих пунктов

(1) M является почти спиновым и π удовлетворяет грубой гипотезе Баума-Конна;

(2) M является вполне неспиновым и $\dim M \neq vcd\pi$.

Доказательство. (1) Это в точности [94, Теорема 5.6].

(2) Мы можем считать, что M ориентируемо. В противном случае рассмотрим ориентирующее двулистное накрытие $M' \to M$ и заметим, что многообразия M и M' одно и то же универсальное накрытие $\widetilde{M'} = \widetilde{M}$. Пусть π' является подгруппой конечного индекса в π и имеет тип FL-группы с двойственностью, а $M' \to M$ – соответствующее накрытие. Тогда существует конечный CW-комплекс $B\pi'$. В этом случае, согласно утверждению 3.4.4, $H_n^{lf}(E\pi';\mathbb{Z}) = 0$ для $n \neq cd(\pi') = vcd(\pi)$. Теорема 3.4.1 влечет, что универсальное накрытие $\widetilde{M'} = \widetilde{M}$ является макроскопически несущественным при условии $\dim M \neq vcd(\pi)$. Тогда по теореме 3.4.11 $\dim_{mc}\widetilde{M} \leq n-2$. ∎

Из теоремы 3.5.1 следует теорема:

Теорема 3.5.2. *Предположим, что замкнутое неспиновое ориентируемое n-мерное PSC-многообразие M, имеет виртуально абелеву фундаментальную группу $\pi_1(M)$ ранга $r \neq n$. Тогда $\dim_{mc}\widetilde{M} \leq n-2$. В частности, гипотеза Громова 1.3.21 справедлива, если $r \neq n$.*

Случай $r = n$ оказался более сложным (сравни с гипотезой Громова - Лоусена!). В случае, если многообразие почти спиновое, тогда $\dim_{mc}\widetilde{M} < n$, так как виртуально абелевы группы удовлетворяют гипотезе Баума-Конна и применима теорема 3.5.1. Во вполне неспиновом случае мы имеем редукцию гипотезы к вопросу 1.2.15 о существовании метрики положительной скалярной кривизны на $M = T^{2n}\#\mathbb{C}P^n$ и гипотезе об S^1-стабильности.

Напомним, что $H_m(X)^+$ подмножество целочисленных гомологических классов, которые могут быть реализованы PSC-многообразиями. Известно, что

$$H_m(X)^+ \subset H_m(X)$$

есть подгруппа [60].

Утверждение 3.5.3. *Гипотеза об S^1-стабильности 1.2.18 для многообразий со свободной абелевой фундаментальной группой влечет $H_*(T^n)^+ = 0,\ n \geq 5$.*

Доказательство. Пусть $p : \#_r T^k \to T^k$ отображение степени r. Определим через rT_s^k k-многообразие, полученное 1-хирургией из связной суммы $\#_r T^k$ r копий T^k убиванием ядра гомоморфизма

$$p_* : \pi_1(\#_r T^k) \to \pi_1(T^k).$$

Хирургия превращает отображение p в классифицирующее отображение

$$u : rT_s^k \to T^k,\ deg(u) = r.$$

Предположим, что $r[T^n] \in H_*(T^n)^+$, $n \geq 5$. По теореме Янга-Штольца 1.2.12

$$(rT_s^4 \# \mathbb{C}P^2) \times T^{n-4}$$

является PSC-многообразием. Из гипотезы об S^1-стабильности,

$$M = rT_s^4 \# \mathbb{C}P^2$$

так же является PSC-многообразием. Применим теорему 1.2.17 последовательно два раза к 1-мерным когомологическим классам $\bar{\alpha}_1$ и $\bar{\alpha}_2$ соответствующим гомотопическим классам композиций отображения $u : M \to T^4$, сжимающего M на T^4 и последующей проекцией на первый и второй S^1

- фактор соответственно. Мы получим ориентируемую поверхность S положительной скалярной кривизны, реализующую 2-гомологический класс $[M] \cap (\bar{\alpha}_1 \cup \bar{\alpha}_2)$. Таким образом, S – 2-сфера. С другой стороны,

$$u_*([M] \cap (\bar{\alpha}_1 \cup \bar{\alpha}_2)) = [T^4] \cap (\alpha_1 \cup \alpha_2) \neq 0,$$

где α_1 и α_2 образующие $H^1(T^4)$ образованные проекциями на первый и второй факторами. Это приводит к противоречию, так как всякое отображение сферы в тор гомотопно нулю. ∎

Вопрос 3.5.4. *Верно ли, что* $H_n(T^n)^+ \neq 0 \;\Leftrightarrow\; H_n(T^n)^+ = H_n(T^n)$ *?*

Утверждение 3.5.5. *Для любого n следующие условия эквивалентны*

(1) $H_{4n}(T^{4n})^+ = H_{4n}(T^{4n})$*;*

(2) $T^{4n}\#\mathbb{C}P^{2n}$ *является PSC-многообразием.*

(1) $\Rightarrow$ (2)следует из теоремы Янга-Штольца 1.2.12, так как $T^{4n}\#\mathbb{C}P^{2n}$ является вполне неспиновым.

(1) $\Leftarrow$ (2) следует из того, что $H_*(X)^+$ является группой.

Связь с несущественностью

Так как n-мерные гомологии m-мерного тора образованы n-мерными подторами, получаем следующее:

Утверждение 3.5.6. *Предположим, отображение $f : M \to T^m$ замкнутого ориентируемого n-многообразия отображает фундаментальный класс не в ноль в $H_n(T^m)$. Тогда существует проекция $q : T^m \to T^n$ такая, что*

$$deg(q \circ f) \neq 0.$$

Доказательство. Существует целочисленный n-мерный когомологический класс β с ненулевым значением $\langle f_*([M],\beta\rangle$. Напомним, что кольцо когомологий тора $T^m = S^1 \times \cdots \times S^1$ является внешней алгеброй $H^*(T^m) = \Lambda[\bar{\alpha}_1,\ldots,\bar{\alpha}_m]$ с 1-мерных образующими, являющимися образами соответствующих образующих α_i факторов. Таким образом,

$$\beta = \sum_{I=(i_1,\ldots,i_n)} c_I \bar{\alpha}_{i_1} \wedge \cdots \wedge \bar{\alpha}_n.$$

Отсюда $a = \langle f_*([M]), \bar{\alpha}_{j_1} \wedge \cdots \wedge \bar{\alpha}_{j_n}\rangle \neq 0$ для некоторого $j_1,\ldots,j_n$. Определим $q : T^m \to T^n$ как проекцию на $S^1_{j_1} \times \cdots \times S^1_{j_n}$.Тогда

$$a = \langle f_*([M]), q^*(\alpha_{j_1} \wedge \cdots \wedge \alpha_{j_n})\rangle = \langle q_* f_*([M]), \alpha_{j_1} \wedge \cdots \wedge \alpha_{j_n}\rangle \neq 0.$$

Отсюда $q_* f_*([M]) \neq 0$. ∎

Теорема 3.5.7. *Пусть M замкнутое ориентируемое k-мерное PSC-многообразие с $\pi_1(M) = \mathbb{Z}^m$. Предположим, что $H^k(T^k)^+ = 0$. Тогда M несущественно.*

Доказательство. Пусть $u^M : M \to T^m$ классифицирующее отображение. Допустим, что

$$u^M_*([M]) \neq 0.$$

По утверждению 3.5.6 существует $q : T^m \to T^k$ такое, что

$$(q \circ u^M)_*([M]) \neq 0.$$

Тогда $H_k(T^k)^+ \neq 0$. Получаем противоречие. ∎

Теорема 3.5.8. *Гипотеза Громова 1.3.22 справедлива для ориентируемых n-многообразий M, $n \geq 5$, со свободной абелевой фундаментальной группой тогда и только тогда, когда $H_n(T^n)^+ = 0$.*

Доказательство. Предположим, что $H_*(T^n)^+ = 0$. Тогда по теореме 3.5.7 M несущественно. Теорема 3.4.13 влечет, что M может быть деформировано в $(n-2)$-остов.

Предположим, $f : M \to T^n$ есть отображение PSC-многообразия с

$$f_*([M]) \neq 0.$$

Применим 0 и 1 хирургии на M, чтобы получить многообразие N с классифицирующим отображением $u : N \to T^n$, таким, что $u_*([N]) = f_*([M])$. По теореме о хирургии 1.2.13 N есть PSC-многообразие. По гипотезе Громова 1.3.22 u можно продеформировать в $(n-2)$-мерный остов. В частности, N несущественно. Это противоречит теореме 3.3.13. ∎

Переходя к конечнолистному накрытию, мы получаем:

Следствие 3.5.9. *Предположим, что $H_n(T^n)^+ = 0$. Тогда гипотеза Громова 1.3.21 имеет место для n-многообразий M, $n \geq 5$ с виртуально абелевой фундаментальной группой.*

Следствие 3.5.10. *Гипотеза об S^1-стабильности влечет гипотезу Громова 1.3.21 для n-мерных многообразий, $n \geq 5$, с виртуально абелевой фундаментальной группой.*

3.6. Выводы к третьей главе

В третьей главе сделано следующее:

- доказано, что макроскопическая размерность универсального накрытия трехмерного замкнутого многообразия не может быть равной 2, что дает положительное решение гипотезы Громова 1.3.14 о падении макроскопической размерности в трехмерном случае;

- дано положительное решение гипотезы Громова 1.3.16 для замкнутых ориентируемых трехмерных многообразий с фундаментальной группой без кручения;

- в размерности $n \geq 4$ построено несущественное гладкое спиновое замкнутое многообразие, макроскопическая размерность универсального накрытия которого равна $n-1$, что не подтверждает гипотезы Громова 1.3.14 и 1.3.16 в размерности большей трех. Показано, что построенные контрпримеры не допускают метрики положительной скалярной кривизны;

- показано, что, в отличие от спинового случая, в случае, когда несущественное n-многообразие $(n \geq 5)$ является вполне неспиновым, классифицирующее отображение $f : M^n \to B\pi$ в случае $\pi \in FP_3$ можно продеформировать на $B\pi^{(n-2)}$, что дает решение гипотезы Громова 1.3.16 в случае вполне неспиновых многообразий;

- доказана гипотеза Громова 1.3.14 о падении макроскопической размерности для вполне неспиновых замкнутых многообразий размерности $n \geq 5$. Разобраны специальные случаи фундаментальных групп, а именно FL-групп с двойственностью, в частности, виртуально абелевых групп;

- показано, что если фундаментальная группа замкнутого спинового PSC-многообразия удовлетворяет сильной гипотезе Новикова и условию Розенберга - Штольца, то макроскопическая размерность его универсального накрытия не превосходит $n-2$. В частности, это подтверждает гипотезу 1.3.22 в спиновом случае, когда фундаментальная группа многообразия является свободной абелевой группой, произведением свободных групп или имеет тип FL и асимптотическую размерность $\leq n+4$.

Глава 4

Топология и геометрия слоений

В этой главе мы приведем результаты, которые описывают топологию римановых многообразий, наделенных структурой слоения коразмерности один с заданными ограничениями на внутреннюю или внешнюю геометрию слоев, рассматриваемых как римановы подмногообразия. В частности, описывается топология замкнутых многообразий, допускающих слоение коразмерности один неотрицательной кривизны. Результаты этой главы приведены в следующих работах автора: [10, 18, 19, 20, 16, 17, 14, 11, 12, 21, 7, 4, 1].

4.1. Универсально равномерно стягиваемые слоения

Цель данного раздела – доказать теорему, которая, в некоторой степени, является метрическим обобщением теоремы 1.4.22.

Теорема 4.1.1. *Пусть* $(M, \mathcal{F})$ *-* C^2 *- универсально равномерно стягиваемое слоение коразмерности* 1 *на полном римановом* n *- мерном многообразии* M*. Тогда универсальное накрытие многообразия* M *является стягиваемым.*

Поскольку речь в теореме идет об универсальном накрытии, мы можем сразу предполагать, что наше многообразие ориентируемо, а слоение является трансверсально ориентируемым. Этого всегда можно добиться, переходя к ориентирующему конечнолистному накрытию.

Лемма 4.1.2. *Пусть* $(M, \mathcal{F})$ *-* C^2 *- универсально равномерно односвязное слоение коразмерности один, то для любого слоя* $L \in \mathcal{F}$ *вложение* $j : L \to M$ *индуцирует мономорфизм* $j_* : \pi_1(L) \hookrightarrow \pi_1(M)$.

Доказательство. Предположим, что это не так. Тогда из работы [75] следует, что мы найдем исчезающий цикл, то есть C^2 - гладкое вложение $i : S^1 \times I \to M$ такое, что для каждого $t \in I$ окружность $S^1_t = i(S^1 \times t)$ принадлежит соответствующему слою L_t, причем S^1_t стягивается в слое L_t при $t \in (0,1]$ и представляет нетривиальный элемент фундаментальной группы слоя L_0 при $t = 0$. Заметим, что для разных t слой L_t, вообще говоря, может быть тот же самый. Вложение i можно определить с помощью экспоненциального отображения $exp^{\perp} : T_{\mathcal{F}^{\perp}}M \to M$, ограниченного на S^1_0. Напомним, что $exp^{\perp}$ каждому ортогональному к $\mathcal{F}$ вектору p с началом в некоторой точке x ставит в соответствие конец отрезка ортогональной к слоению траектории длины $|p|$ с начальными данными (x,p). Если $|p|$ достаточно мал, то $exp^{\perp}$ определено корректно.

Так как индуцированная риманова метрика g_t слоя L_t гладко зависит от t, длины окружностей S^1_t равномерно ограничены, то есть каждая из окружностей S^1_t лежит внутри шара $B_t(r) \subset L_t$ радиуса r для всех $t \in I$. Из равномерной односвязности универсальных накрытий слоев следует, что каждая окружность $S^1_t, 0 < t \leq 1$, будучи стягиваемой в слое L_t, стягивается внутри шара $B_t(R(r)) \subset L_t$.

Аналогично тому как это было сделано для нормального расслоения, можно определить экспоненциальное отображение вдоль слоения, которое каждому касательному к слоению вектору a ставит в соответствие конец геодезической длины $|a|$ в соответствующем слое, выпущенной из данной точки касательно данному вектору. Так как слоение предполагается C^2 - гладким, экспоненциальное отображение $exp_{\mathcal{F}} : T_{\mathcal{F}}M \to M$ также будет гладким.

По индуцированной римановой метрике $g_{\mathcal{F}} : T_{\mathcal{F}}M \otimes T_{\mathcal{F}}M \to \mathbb{R}$ можно определить метрическую связность

$$\nabla_\zeta^{\mathcal{F}} : T_{\mathcal{F}}M \to T_{\mathcal{F}}M,\ \zeta \in TM.$$

Аналогично метрике Сасаки в TM, можно определить метрику в расслоении $T_{\mathcal{F}}M$, в которой проекция $T_{\mathcal{F}}M \to M$ будет римановой субмерсией (см. [108]).

Рассмотрим непрерывное отображение $F : D^{n-1}(R) \times I \to M$, где $D^{n-1}(R)$ - евклидов шар радиуса R, которое определяется ограничением экспоненциального отображения $exp_{\mathcal{F}}M$ на $T_{\mathcal{F}}^R I_0$ для некоторой точки $s_0 \in S^1$, где $T_{\mathcal{F}}^R A$ обозначает множество касательных к слоению $\mathcal{F}$ векторов длины не более R, ограниченное на подмножество $A \subset M$, а $I_0 = i(s_0 \times I)$, где i - отображение, определенное выше. Отметим, что F является равномерно непрерывным отображением, так как определено на компакте $D^{n-1}(R) \times I$. Так как, по построению метрики g, касательные плоскости - эквидистантны и F - равномерно непрерывна, то для всех достаточно малых $t \in I$ шары $B_t(R) = exp_{\mathcal{F}}(D^{n-1}(R))$ лежат внутри некоторого наперед заданного δ - забора шара $B_0(R+\varepsilon) \supset B_0(R)$. Под δ - забором понимается множество $\Delta = exp^{\perp}(a)$, $|a| < \delta$ с областью определения в точках шара $B_0(R+\varepsilon)$ и с однозначно определенной проекцией $pr : \Delta \to B_0(R+\varepsilon)$, которая ставит в соответствие точке $r \in \Delta$ начало проходящей через нее ортогональной траектории. Этого всегда можно добиться, так как шар $B_0(R+\varepsilon)$ компактен. Обратим внимание, что для тех S_t^1, которые лежат в δ - заборе, образ $pr(S_t^1) = S_0^1$. Но это означает, что окружность S_0^1 заклеивается диском $pr \circ g_t : D^2 \to B_0(R+\varepsilon) \subset L_0$, где $g_t : D^2 \to B_t(R)$ - диск, заклеивающий S_t^1. А это противоречит нестягиваемости S_0^1 в слое L_0, и тем самым доказывает мономорфность j_*. ∎

Доказательство теоремы 4.1.1

Как следствие леммы 4.1.2, в условиях теоремы 4.1.1, мы немедленно получаем, что если $p : \widetilde{M} \to M$- универсальное накрытие, то поднятое слоеное многообразие $(\widetilde{M}, \widetilde{\mathcal{F}})$ является слоением с равномерно стягиваемыми слоями. Действительно, в противном случае, мы нашли бы петлю α в некотором слое $\widetilde{L} \in \widetilde{F}$, представляющую нетривиальный элемент в $\pi_1(\widetilde{L})$ и тривиальный элемент в $\pi_1(\widetilde{M})$, так как фундаментальная группа универсального накрытия тривиальна. А так как отображение накрытия индуцирует мономорфизм фундаментальных групп, и ограничение $p|_{\widetilde{F}}$ так же является накрытием (отметим, что топология на слое определяется индуцированной римановой метрикой), то класс $p_*(\alpha)$ должен представлять нетривиальный элемент в $\pi_1(L)$, но тривиальный в $\pi_1(M)$. Но это противоречит доказанному.

Теперь применим теорему Ламуро 1.4.23 к слоению $(\widetilde{M}, \widetilde{\mathcal{F}})$. Из предположения, что $\widetilde{M}$ нестягиваемо и, учитывая односвязность $\widetilde{M}$, мы найдем нетривиальный класс $\pi_k(\widetilde{M})$ для некоторого $k \geq 2$. Из теоремы 1.4.23 следует, что найдется нестягиваемый слой. Это противоречит доказанному и завершает доказательство теоремы 4.1.1.

Замечание 4.1.3. *Если M предположить компактным, то $\widetilde{M}$ будет не только стягиваемым, но и равномерно стягиваемым.*

4.2. Слоения неотрицательной кривизны на трехмерных многообразиях

В данном разделе речь пойдет о C^2-слоениях коразмерности 1 на замкнутых трехмерных многообразиях. Цель данного раздела доказать следующую классификационную теорему.

Теорема 4.2.1. *Пусть M^3 - гладкое замкнутое ориентируемое риманово многообразие размерности 3, а $\mathcal{F}$ - C^∞ - трансверсально ориентируемое слоение неотрицательной кривизны коразмерности 1 на этом многообразии. Тогда M^3 гомеоморфно многообразию одного из следующих типов:*

1) *Торическое расслоение над окружностью;*

2) *Торическое полурасслоение;*

3) $S^2 \times S^1$;

4) $\mathbb{R}P^3 \# \mathbb{R}P^3$;

5) *Линзовое пространство $L_{p/q}$;*

6) *Призматическое пространство.*

Каждое из перечисленных многообразий для некоторой метрики допускает слоение неотрицательной кривизны.

Следствие 4.2.2. *Из теоремы 4.2.1 следует, что не все трехмерные сферические формы допускают слоение неотрицательной кривизны. Например, такое слоения невозможно на гомологической сфере Пуанкаре с фундаментальной группой I, изоморфной A_5, и являющейся группой симметрий икосаэдра.*

Поведение слоения вблизи компактного слоя

Из классификации поверхностей неотрицательной кривизны (см. раздел 1.1) следует, что компактным слоем может быть только сфера или тор. Если слоение содержит компактный слой, гомеоморфный S^2, то по теореме стабильности Риба слоение является расслоением со слоем S^2, а M^3 гомеоморфно $S^2 \times S^1$.

Пусть компактный слой является тором. Теорема Нисимори 1.4.5 приобретает следующий вид:

Теорема 4.2.3.

1) *Для произвольной окрестности V слоя F ограничение слоения $\mathcal{F}_{U_+ \cap V}$ содержит компактный слой, отличный от F;*

2) *Группа голономии тора содержит $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ и существует окрестность V слоя F, что всякий слой ограниченного слоения $\mathcal{F}_{U_+ \cap V}$ всюду плотен;*

3) *Группа голономии тора равнв $\mathbb{Z}$ и ее образующая представляется сжимающим отображением (неподвижным в нуле) полуинтервала $f : [0, \varepsilon) \to [0, \varepsilon)$. В этом случае слоение в некоторой окрестности $U_+ \cap V$ слоя F с точностью до диффеоморфизма можно описать следующим образом. Для этого рассмотрим слоение $S^1 \times I \times [0, \varepsilon)$ цилиндрами $S^1 \times I \times *$, где $I = [0, 1]$. После этого отождествим точки с координатами $(s, 0, t)$ и $(s, 1, f(t))$. Нетрудно видеть, что некомпактные слои полученного слоения, гомеоморфные полу-цилиндрам $S^1 \times \mathbb{R}_{\geq 0}$, являются собственными и содержат в своем замыкании компактный слой F. Другими словами в достаточно малой односторонней окрестности слоя F слоение выглядит так же, как в окрестности компактного слоя рибовской компоненты.*

Прежде, чем приступить к доказательству основного утверждения, нам необходимо доказать ряд вспомогательных утверждений.

Лемма 4.2.4. *Пусть M^3 - компактное трехмерное многообразие со слоением $\mathcal{F}$ неотрицательной кривизны. Тогда:*

- *Если некомпактный слой L содержит в своем замыкании компактный слой T, то слоение в односторонней окрестности слоя T, содержащей слой L не может описываться пунктом 1) теоремы 4.2.3.*

- *Если несобственный слой L имеет в своем замыкании компактный слой T, то слоение в некоторой односторонней окрестности слоя T, содержащей слой L, описывается пунктом 2) теоремы 4.2.3.*

Доказательство. Предположим, что слоение в односторонней трубчатой окрестности U_+ слоя T, гомеоморфной $T \times [0, \varepsilon)$, соответствует пункту 1) теоремы 4.2.3. Тогда можно предъявить достаточно близкий компактный слой T', разделяющий U_+ на две связные компоненты, каждая из которых должна содержать слой L. А это невозможно, так как слой L связен.

Теперь предположим, что L - несобственный слой и односторонняя трубчатая окрестность U_+ слоя T, гомеоморфная $T \times [0, \varepsilon)$, соответствует пункту 3 теоремы 4.2.3. Тогда некоторая окрестность слоя T содержит бесконечное множество копий $C_i,\ i = 1, \dots, \infty$, гомеоморфных $S^1 \times \mathbb{R}_{\geq 0}$, каждая из которых является замкнутым подмножеством одного слоя L, так как очевидно, что $C_i = \overline{C}_i \cap L$, где $\overline{C}_i$ - замыкание C_i в M^3. Напомним, что топология на слое L задается пересечениями $Q \cap U$, где Q - связная компонента $L \cap U$, а U открыто в M^3. Всякая окружность ∂C_i разбивает L на две связные компоненты, одна из которых A_i содержит C_i. Нетрудно видеть, что C_i является открытым и замкнутым подмножеством A_i и, поэтому, $A_i = C_i$, так как A_i – связно. Осталось заметить, что любой шар достаточно большого радиуса R с центром в произвольной фиксированной точке $x_0 \in L$ содержит $\bigcup_{i=1}^{3} \partial C_i$ и не содержит целиком никакого $A_i,\ i = 1, 2, 3$, так как A_i являются замкнутыми подмножествами слоя L и некомпактны. Поэтому для каждого шара B_{x_0} с центром в x_0 радиуса большего R мы найдем точки $x_i \in A_i,\ i = 1, 2, 3$, не принадлижащие B_{x_0}, и лежащие в разных компонентах связности множества $L \setminus B_{x_0}$. Отсюда мы заключаем, что L имеет более двух концов, что противоречит теореме 1.1.5, согласно которой многообразие неотрицательной секционной кривизны имеет не более двух концов. ∎

Утверждение 4.2.5. *Пусть $\mathcal{F}$ - трансверсально ориентируемое слоение неотрицательной кривизны на ориентируемом компактном 3- многообразии M^3. Тогда $\mathcal{F}$ - слоение почти без голономии. Это означает, что только компактные слои могут иметь нетривиальную голономию.*

Доказательство. Достаточно показать, что любой слой L, изометричный $S^1 \times \mathbb{R}$, не имеет голономии. Возможны два случая.

Случай 1. Пусть слой L является собственным (т.е вложенным подмногообразием), а значит по теореме Планта 1.4.13 содержит в замыкании компактный слой T, гомеоморфный тору. Ясно, что группа изометрий слоя L содержит ко-компактную подгруппу $\mathcal{T} \subset Isom(S^1 \times \mathbb{R})$ параллельных переносов вдоль $\mathbb{R}$. Более того, для всякой точки (s,t) на слое L существует точка $(s,0)$ геодезической $S^1_0 := S^1 \times 0 \subset S^1 \times \mathbb{R}$ и такая изометрия $\phi \in \mathcal{T}$, что $\phi(s,0) = (s,t)$. Рассмотрим последовательность точек $\{(s_i,t_i),\ i = 1,\dots,\infty\}$ на слое L, сходящихся к точке t_0 на компактном слое T. Тогда, существует последовательность изометрий ϕ_i таких, что $\phi_i(s_i,0) = (s_i,t_i)$. Последовательность $\{s_i \times 0\}$ имеет сходящуюся подпоследовательность $\{s_{i_k} \times 0\}$ к точке $(s_0,0)$. Ясно, что $\varphi_{i_k}(s_0,0)$ сходится к t_0. Согласно теореме 1.4.24, имеем подпоследовательность ϕ_r последовательности изометрий φ_{i_k}, которая сходится к изометрическому накрытию $\phi : L \to T$. Последовательность окружностей $S^1_r = \phi_r(S^1 \times 0) = S^1 \times t_r$ $(\phi_r \subset \mathcal{T})$ равномерно сходится к окружности S^1_T на слое T. Ясно, что $\phi(S^1_0) = S^1_T$ не гомотопна нулю на слое T, так как ϕ это накрытие. В частности, отсюда следует, что компактный слой является тором. Пусть $\{U_0,\dots,U_{n-1},U_n = U_0\}$ - цепь отмеченных окрестностей, покрывающая окружность S^1_T. Пусть $l : I \to S^1_T$ - параметризация окружности, а

$0 = c_0 < c_1 < \dots < c_n = 1$ такое разбиение отрезка I, что $l([c_p, c_{p+1}]) \subset U_p$, $p = 0, \dots, n-1$. Обозначим через $\{s_p^k,\ k = 0, \dots, m-1\}$ прообраз $\phi^{-1} l(c_p)$, $p = 0, \dots, n-1$ (Заметим, что $l(c_0) = l(c_n)$).

Для достаточно больших r окружности S_r^1 попадут в $\bigcup_{p=0}^{n-1} U_p$, причем

$$\phi_r([s_p^k, s_{p+1}^k]) \subset U_p \quad \text{и} \quad \phi_r([s_{n-1}^k, s_0^{k+1}]) \subset U_{n-1}.$$

Поэтому, если элемент группы голономии $\Psi^+([S_T^1])$ нетривиален, то он представляется диффеоморфизмом, имеющим сходящуюся к нулю последовательность периодических точек (на самом деле неподвижных точек , так как диффеоморфизм должен сохранять ориентацию). Так как слой L предполагался собственным, из леммы 4.2.4 имеем $\Psi^+([S_T^1]) = 1$. А значит, очевидно, и $\Psi^+([S_r^1]) = 1$, где r достаточно велико. Поэтому слой L имеет тривиальную голономию.

Случай 2. Предположим, что слой L – несобственный слой. Если замыкание слоя не содержит компактный слой, то по теореме Планта, этот слой является всюду плотным в многообразии M^3. Если же слой содержит в своем замыкании компактный слой T, то из леммы 4.2.4 и теоремы 4.2.3 следует, что он является всюду плотным в некоторой односторонней окрестности компактного слоя.

Пусть $\{U_0, \dots, U_{n-1}, U_n = U_0\}$ - цепь отмеченных расслоенных окрестностей, покрывающая окружность $l(I) = S_0^1 := S^1 \times 0 \subset L$. Пусть $0 = c_0 < c_1 < \dots < c_n = 1$ такое разбиение отрезка I, что $l([c_p, c_{p+1}]) \subset U_p$ $(p = 0, \dots, n-1)$. Согласно отмеченному выше, замыкание L имеет ненулевую меру, и содержит некоторую открытую окрестность слоя L. Поэтому, если голономия слоя L нетривиальна, то существует последовательность точек $\{(s_i, t_i),$ $i = 1, \dots\infty\}$ на L, лежащих в отмеченной окрестности U_0, сходящаяся к точке $(s_0, 0) \in U_0 \cap S_0^1$ и обладающая следующим свойством:

$$\Gamma(\pi \circ \varphi_0(s_i, t_i)) \neq \pi \circ \varphi_0(s_i, t_i).$$

Тогда, по теореме 1.4.24, как и ранее, существует подпоследовательность ϕ_r последовательности изометрий $\{\phi_i : \phi_i(s, 0) = (s, t_i)\}$, которая сходится к изометрическому накрытию $\phi : L \to L$. Так как группа изометрий слоя $L = S^1 \times \mathbb{R}$ есть прямое произведение $Iso(S^1) \times Iso(\mathbb{R})$ (см. [43]), то слоение окружностями $\{S^1 \times t\}$ сохраняется при изометриях. Отсюда мы заключаем, что последовательность окружностей $S^1_r := \phi_r(S^1 \times 0) = S^1 \times t_r$, лежащих на L, равномерно сходится к окружности S^1_0.

Аналогично случаю 1, обозначим через $\{s^k_p,\ k = 0, \ldots, m-1\}$ прообраз $\phi^{-1}l(c_p)$. Для достаточно больших r окружности S^1_r попадут в $\bigcup_{p=0}^{n-1} U_p$ и при этом $\phi_r([s^k_p, s^k_{p+1}]) \subset U_p$ и $\phi_r([s^k_{n-1}, s^{k+1}_0]) \subset U_{n-1}$. Но тогда $\Gamma^m(\pi \circ \varphi_0(s_r, t_r)) = \pi \circ \varphi_0(s_r, t_r)$ для достаточно больших r. Так как слоение предполагалось трансверсально ориентируемым, то Γ – сохраняющий ориентацию локальный диффеоморфизм. Поэтому $m = 1$, и мы получаем противоречие. ■

Утверждение 4.2.6. *Всякий слой, гомеоморфный цилиндру $S^1 \times \mathbb{R}$, либо всюду плотен в M^3, либо является собственным слоем.*

Доказательство. Так как доказательство этого утверждения аналогично доказательству предыдущего утверждения, мы ограничимся лишь наброском.

Предположим, что замыкание слоя L содержит компактный слой T. Из леммы 4.2.4 следует, что существует односторонняя окрестность T (со стороны L), не содержащая компактных слоев, отличных от T. Аналогично доказательству предыдущего утверждения строится последовательность окружностей, сходящихся к окружности γ на компактном слое, представляющей ненулевой элемент фундаментальной группы. Так как голономия некомпактных слоев тривиальна, то голономия вдоль пути γ представляется локальным диффеоморфизмом полуинтервала $[0, \delta)$, имеющим множество неподвижных точек, которое является одновременно открытым и замкнутым, поэтому, из соображений связности, совпадает со всем полуинтервалом. Следовательно γ представляет тривиальную голономию. Таким образом показывается, что группа голономии слоя T в этом случае равна $\mathbb{Z}$. Из леммы 4.2.4 следует, что слой L обязан быть собственным.

Если же замыкание L не содержит компактного слоя, то по теореме Планта 1.4.13 слой L должен быть всюду плотным. Это завершает доказательство. ∎

Замечание 4.2.7. *Из леммы 4.2.4, утверждения 4.2.5 и теоремы Иманиши 1.4.10 на самом деле следует, что если некомпактный слой имеет в своем замыкании компактный слой, то он принадлежит либо плотному блоку (см. определение 1.4.9), внутренность которого состоит из диффеоморфных плотных (в блоке) слоев, либо собственному блоку, внутренние слои которого являются слоями расслоения внутренности блока над окружностью.*

Теорема 4.2.8. *Предположим, что $B \subset M^3$ - блок, в котором внутри нет компактных слоев. Тогда B гомеоморфен одному из следующих многообразий:*

1. $D^2 \times S^1$;
2. $\mathcal{K}$;
3. $T^2 \times I$.

Доказательство.

Прежде всего отметим, что из теоремы Планта 1.4.13, ее следствия

1.4.15 и условия теоремы следует, что всякий слой внутри B имеет в своем замыкании компактный слой. Рассмотрим два случая.

Случай 1. Предположим, что B содержит слой, гомеоморфный $S^1 \times \mathbb{R}$.

В этом случае из утверждений 4.2.5 и 4.2.6 следует, что этот слой является собственным и не имеет голономии. Более того, из леммы 4.2.4 следует, что голономия каждого предельного компактного слоя равна $\mathbb{Z}$. Из теоремы 1.4.2 следует, что множество таких слоев открыто в B. Тогда все слои внутри B гомеоморфны $S^1 \times \mathbb{R}$. Действительно, если внутри B все слои собственные и имеется слой, гомеоморфный $\mathbb{R}^2$, то внутренность B, которую мы обозначим через $\mathring{B}$, есть объединение двух открытых множеств, одно из которых состоит из слоев, гомеоморфных $S^1 \times \mathbb{R}$, а второе - из слоев, гомеоморфных $\mathbb{R}^2$. Из связности $\mathring{B}$ следует, что одно из этих множеств должно быть пустым.

Пусть B содержит несобственный слой. Из леммы 4.2.4 следует, что замыкание множества несобственных слоев не может содержать компактных слоев с голономией $\mathbb{Z}$, поэтому замыкания множеств собственных и несобственных слоев не пересекаются. А это противоречит связности B.

Таким образом мы доказали, что если B содержит слой, гомеоморфный $S^1 \times \mathbb{R}$, то внутри B все слои гомеоморфны $S^1 \times \mathbb{R}$ и являются собственными.

Из пункта 3 теоремы 4.2.3 следует, что односторонняя голономия любого компактного слоя представляется сжимающим отображением. Отсюда следует, что множество некомпактных слоев, содержащих в своем замыкании один и тот же компактный слой K является открытым и связным множеством $A \subset B$. Предположим, что существует некомпактный слой L', принадлежащий $\overline{A} \setminus A$. Пусть $K_i,\ i = 1 \dots k$ - множество компактных слоев ∂B, отличных от K. Обозначим через $W_i \cong U_+ \cap V$ соответствущую окрестность компактного слоя K_i, описанную в пункте 3 теоремы 4.2.3. $L' \cap W = C_1' \sqcup C_2'$, где $W = \bigcup_{i=1}^{k} W_i$, C_i', $i = 1, 2$ - слои слоения $\mathcal{F}_W$, гомеоморфные $S^1 \times \mathbb{R}_{\geq 0}$. Действительно, слой L' гомеоморфен цилиндру $S^1 \times \mathbb{R}$, замыкание каждой компоненты $S^1 \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ и $S^1 \times \mathbb{R}_{\leq 0}$ которого состоит из слоев слоения $\mathcal{F}$ и обязана содержать компактный слой по теореме Планта 1.4.13. Поэтому $L' \cap W$ имеет как минимум две связные компоненты, но и не более двух, так как слой L' имеет два конца.

Из теоремы 4.2.3 следует, что найдется достаточно узкая насыщенная трубчатая окрестность U слоя L', гомеоморфная $L' \times \mathbb{R}$, что $L \cap W = C_1 \bigsqcup C_2$ для любого слоя $L \subset U$, где C_i, $i = 1, 2$ - слои слоения $\mathcal{F}_W$ достаточно близкие к C_i', $i = 1, 2$. Поясним это более подробно. Нетривиальным является случай, когда C_1' и C_2' принадлежат одному W_i. Рассмотрим трансверсальный интервал $[0, \delta) \subset [0, \varepsilon)$ (см. пункт 3 теоремы 4.2.3). Пусть $c_i' \in [0, \delta) \cap C_i'$ – точки на C_i', имеющие максимальное значение в интервале $[0, \delta)$. (Заметим, что $[\alpha, \delta] \cap C_i'$ состоит из конечного числа точек для любого α из интервала $(0, \delta)$). Без ограничения общности считаем, что $c_1' > c_2'$. Тогда $f(c_1') < c_2'$, где f - сжимающее отображение, представляющее отображение голономии (см. пункт 3 теоремы 4.2.3). Это следует из того факта, что интервал $(c_1', f(c_1'))$ обязан содержать точки слоя C_2', так как понятно, что $(f^{k-1}(c_1'), f^k(c_1')) \cap C_2' \neq \varnothing$ для некоторого k. Тогда $c_1 > c_2$ и $f(c_1) < c_2$, где $c_i \in [0, \delta) \cap C_i$ достаточно близки к c_i', $i = 1, 2$. Откуда следует, что $c_2 \neq f^k(c_1)$ ни для какого $k \in \mathbb{Z}$ и $C_1 \cap C_2 = \varnothing$. Поэтому найдется слой из A, имеющий как минимум 3 конца, что невозможно для многообразия неотрицательной кривизны. Следовательно, A замкнуто в $\mathring{B}$ и, поэтому, совпадает с $\mathring{B}$, так как A связно. Теперь, используя пункт 3 теоремы 4.2.3, а именно явный вид слоения в односторонней окрестности компактного слоя K, нетрудно построить замкнутую трансверсаль, пересекающую все слои принадлежащие внутренности B. Для этого достаточно "сдвинуть"замкнутую кривую на K, представляющую нетривиальную голономию, внутрь B трансверсально слоению.

Следовательно, слоение внутри B является расслоением над S^1 со слоем гомеоморфным $S^1 \times \mathbb{R}$. Нетрудно убедиться, что B в этом случае гомотопически эквивалентно либо тору, либо бутылке Клейна и, поэтому, фундаментальная группа B является, очевидно, разрешимой, а B - неприводимо. Кроме того, вложение границы индуцирует мономорфизм фундаментальных групп (граничный тор несжимаем). Действительно, в противном случае слоение содержало бы рибовскую компоненту по теореме 1.4.32, что невозможно по предположению.

Теперь из теоремы 2.9.3 следует, что если B содержит слой, гомеоморфный $S^1 \times \mathbb{R}$, то B гомеоморфно либо $T^2 \times I$, либо $\mathcal{K}$.

Случай 2. Предположим, что все слои внутри B гомеоморфны $\mathbb{R}^2$.

В этом случае B гомеоморфно либо полноторию $D^2 \times S^1$, либо $T^2 \times I$. Это, в точности, утверждение основного результата работы [109]. ∎

Доказательство теоремы 4.2.1

Предположим сначала, что слоение $\mathcal{F}$ не содержит компактных слоев. Тогда по утверждению 4.2.5, $\mathcal{F}$ - слоение без голономии. В этом случае Новиков доказал [75], что все слои гомеоморфны типичному слою F, универсальное накрытие M^3 стягиваемо (значит M^3 неприводимо) и фактор-группа $\pi_1(M^3)/\pi_1(F)$ является свободной абелевой. В этом случае, очевидно, имеется эпиморфизм $\pi_1(M^3) \to \mathbb{Z}$ с конечно порожденным ядром не изоморфным $\mathbb{Z}_2$.

Из теоремы 2.9.4 следует, что M^3 является расслоением над S^1. Так как фундаментальная группа $\pi_1(M^3)$ является $\pi_1(F)$ - расширением свободной абелевой группы , то M^3 - торическое расслоение, т.к $\pi_1(F)$ в нашем случае либо тривиальна, либо изоморфна $\mathbb{Z}$.

Предположим, что слоение $\mathcal{F}$ содержит конечное число компактных слоев. Согласно теореме 4.2.8, каждая компонента, ограниченная компактными слоями гомеоморфна либо $D^2 \times S^1$, либо $\mathcal{K}$, либо $T^2 \times I$. Каждые две соседние компоненты, гомеоморфные $T^2 \times I$, имеющие общий единственный компактный слой, можно объединить в одну, также гомеоморфную $T^2 \times I$.

Нетрудно видеть, что M^3 гомеоморфно или торическому расслоению над S^1 или многообразию, склеенному из двух кусков, каждый из которых это либо $\mathcal{K}$ либо $D^2 \times S^1$.

Если это два склеенных полнотория $D^2 \times S^1$, то многообразие либо является линзовым пространством, либо это $S^2 \times S^1$.

Если оба куска гомеоморфны $\mathcal{K}$, то M^3 это торическое полурасслоение.

Если же один из кусков гомеоморфен $\mathcal{K}$, а второй - $D^2 \times S^1$, то, используя теорему Зейферта-ван Кампена, получим следующее представление фундаментальной группы M^3. Это группа с двумя образующими a, b и соотношениями:

$$aba^{-1}b = 1, a^{2n} = b^m$$

Нетрудно видеть, что полученное многообразие двулистно накрывается либо $S^2 \times S^1$, либо линзовым пространством. Тогда, в зависимости от фундаментальной группы, многообразие либо гомеоморфно $\mathbb{R}P^3 \# \mathbb{R}P^3$, если $n = 1, m = 0$, либо гомеоморфно $S^2 \times S^1$, если $n = 0, m = 1$, либо является призматическим пространством.

Отметим, что при $n = 1, m \neq 0$ фундаментальная группа многообразия M^3 является бинарной группой диэдра D^*. В частности, при $n = 1, m = 2$, фундаментальная группа M^3 изоморфна кватернионной группе $Q8$.

Теперь предположим, что компактных слоев бесконечное множество. Если слоение содержит слой, гомеоморфный S^2, то, по теореме стабильности

Риба, слоение является расслоением со слоем S^2, а M^3 гомеоморфно $S^2 \times S^1$.

Вспомним, что множество компактных слоев замкнуто в M^3, и поэтому компактно (см.[69]). Пусть T - компактный слой. Рассмотрим маленькую нормальную окрестность $U_N T$, гомеоморфную нормальному расслоению NT посредством експоненциального отображения $exp : NT \to U_N T$, определенному в достаточно малой окрестности нулевого сечения. Потребуем, чтобы $U_N T$ была настолько малой, чтобы нормальные геодезические пересекали слоение трансверсально. Так как слоение является трансверсально ориентируемым, $U_N T \simeq T \times \mathbb{R}$. Пусть $U_N^+ T$ и $U_N^- T$ обозначают соответствующие односторонние окрестности слоя T. Очевидно, что если существует компактный слой T' внутри $U_N^+ T$ или $U_N^- T$, то, ввиду трансверсальности, естественная проекция $p : U_N T \to T$ ограниченная на T' является накрытием, и значит, является гомеоморфизмом, так как расслоение $p : U_N T \to T$ - тривиально. Действительно, T' можно отождествить с единичным сечением расслоения $p : U_N T \to T$ для удачно выбранной метрики в $U_N T$. Это означает, что для любого T', лежащего внутри $U_N T$, $T' \cup T$ ограничивают в M^3 компактное многообразие A_T, гомеоморфное $T \times I$. Если в каждой из полуокрестностей $U_N^+ T$ и $U_N^- T$ есть компактный слой T' и T'' соответственно, то очевидно, что $T' \cup T''$ так же ограничивают в M^3 компактное многообразие B_T, гомеоморфное $T \times I$. Предположим, что слой T является предельным во множестве компактных слоев. Если в каждой из полуокрестностей $U_N^+ T$ и $U_N^- T$ есть компактный слой T' и T'' соответственно, то покроем слой T множеством $U_T = B_T \setminus T' \cup T''$. Если же только в одной из полуокрестностей, скажем $U_N^+ T$, есть компактный слой T', то покроем слой T множеством $U_T = A_T \setminus T'$. Так как множество предельных слоев является замкнутым подмножеством компактного множества, то оно является компактным. Поэтому из покрытия $\{U_T, T-$предельный компактный слой$\}$ можно выделить конечное подпокрытие. Теперь осталось заметить, что если $U_T \cap U_{\widetilde{T}} \neq \varnothing$, то замыкание $\overline{U_T \cup U_{\widetilde{T}}}$ гомеоморфно объединению нескольких копий $T \times I$, склеенных по общему компактному слою. Это следует из того, что любой компактный слой T', лежащий внутри $\overline{U_T}$, разбивает $\overline{U_T}$ на две копии $T \times I$.

Таким образом и в этом случае мы можем разбить многообразие M^3 на куски, гомеоморфные либо $D^2 \times S^1$, либо $\mathcal{K}$, либо $T^2 \times I$ и повторить доказательство.

Осталось показать, что каждое из полученных многообразий допускает слоение неотрицательной кривизны.

В случае, когда многообразие M^3 является торическим расслоением, оно допускает геометрическую структуру по образцу E^3, Nil или Sol (см. [102]), причем каждый из слоев является плоским в индуцированной метрике. Универсальное накрытие в этом случае гомеоморфно $\mathbb{R}^3$. Если (x, y, z) - стандартные координаты на $\mathbb{R}^3$, а плоскости $z = const$ - это слои поднятого расслоения, то метрика имеет один из следующих видов:

1. $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ – (Евклидова геометрия)

2.$ds^2 = dz^2 + dy^2 + (dx - zdy)^2$ – (Nil -геометрия)

3.$ds^2 = e^{2z}dx^2 + e^{-2z}dy^2 + dz^2$ – (Sol -геометрия)

Если M^3 не является торическим расслоением, то оно разрезается тором T на два куска, каждый из которых гомеоморфен либо $\mathcal{K}$, либо полноторию $D^2 \times S^1$.

Пусть (r, z) - декартовы координаты на $\mathbb{R}^2$. Рассмотрим 1-форму

$$h(r)dr + (1 - |h(r)|)dz, \tag{4.2.1}$$

где $h(r)$ - гладкая монотонная неубывающая нечетная функция такая, что:

$$h(r) = h^{(k)}(r) = 0 \text{ при } r = 0,\ k = 1, \dots, \infty,$$

$$h(r) = 1 \text{ при } \frac{1}{3} \le r \le q.$$

В цилиндрических координатах (r, ϕ, z) $(0 \le r \le q)$ на $\mathbb{R}^3$ эта форма задает слоение на $D_q^2 \times \mathbb{R}$, где D_q^2 - диск радиуса q. Нетрудно видеть, что это слоение опускается на полноторий $D_q^2 \times S^1$ после факторизации по действию группы $\mathbb{Z}$ параллельными переносами вдоль оси Oz. Отметим, что граничный слой имеет слоеный воротник $A \simeq T \times J_1$, состоящий из компактных слоев $\{T \times *\}$, где J_1 - открытый полуинтервал. Легко проверить, что в стандартной евклидовой метрике все слои имеют неотрицательную кривизну, а компактные слои являются плоскими.

Если же мы добавим к (r, z) декартову координату x, то в координатах (r, x, z) форма (4.2.1) задает слоение на $I \times \mathbb{R}^2$, где I - отрезок $[-q, q]$ (см. рис. 4.1).

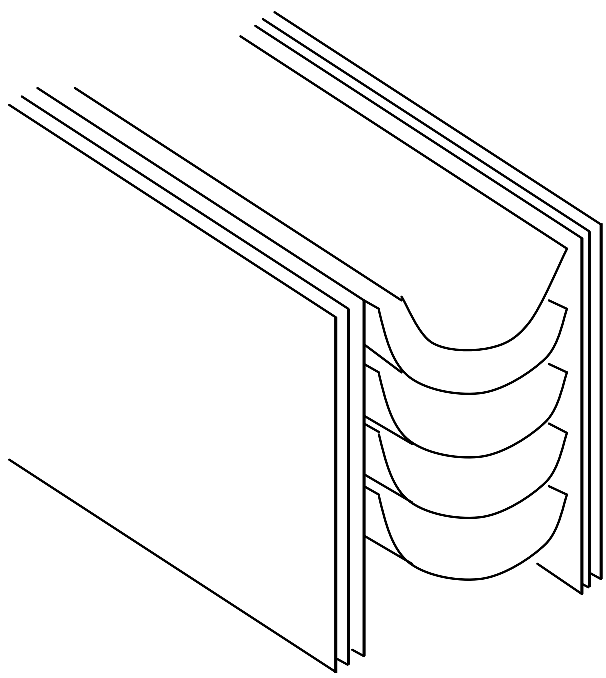

Рис. 4.1. Цилиндрическая компонента.

Нетрудно видеть, что слоение опускается на пространство $\mathcal{K}_q$, гомеоморфное $\mathcal{K}$, после факторизации по следующему изометрическому действию группы $\pi_1(\mathcal{K})$ на $I \times \mathbb{R}^2$:

$$a : (r, x, z) \to (r, x + 1, z)$$

$$b : (r, x, z) \to (-r, -x, z + 1),$$

где a, b - образующие $\pi_1(\mathcal{K})$.

Так как слои являются цилиндрами, то они плоские в индуцируемой метрике. Граничный слой имеет слоеный воротник $B \simeq T \times J_2$, состоящий из компактных слоев $\{T \times *\}$, где J_2 - открытый полуинтервал.

Так как образующая b меняет знак r - координаты, можно параметризовать $\mathcal{K}_q$ таким образом, чтобы каждая точка имела неотрицательную r - координату. Бутылка Клейна ($r = 0$) при этом будет соответствовать множеству особенностей параметризации.

Предположим $M^3 = D^2_{\frac{1}{2}} \times S^1 \cup \mathcal{K}_{\frac{1}{2}}$. Склеивая два построенных слоения по общему слою T посредством некоторого линейного преобразования тора, мы получим слоение на M^3. Рассмотрим покрытие $U = \{U_1, U_2\}$ многообразия M^3, где $U_1 = D^2_{\frac{1}{2}} \times S^1 \cup B$, $U_2 = \mathcal{K}_{\frac{1}{2}} \cup A$. Ясно, что $U_1 \simeq D^2_q \times S^1 \setminus T$, а $U_2 \simeq \mathcal{K}_q \setminus T$ для некоторого $q > \frac{1}{2}$. Поэтому на каждом $U_i, i = 1, 2$, можно задать евклидовы координаты и евклидову метрику аналогично тому, как это было сделано выше. Все слои в этой метрике будут иметь неотрицательную кривизну.

При переходе из одной системы координат в другую, координаты (r, ϕ, z) перейдут в координаты $(1 - r, v(x, z), w(x, z))$, где v, w - линейные функции от переменных (x, z). Рассмотрим отображение $p : M^3 \to I$, которое сопоставляет каждой точке $D^2_q \times S^1$ (с координатами (r, ϕ, z)) ее r - координату, а каждой точке $\mathcal{K}_q$ (с координатами (r, x, z)) разность $1 - r$. Нетрудно видеть,что это отображение корректно определено и непрерывно. Отметим, что $p^{-1}(0)$ является окружностью, а $p^{-1}(1)$ это бутылка Клейна. Рассмотрим разбиение единицы $\{\rho, 1-\rho\}$, подчиненное покрытию $V = \{V_i,\ i = 1,2\}$ отрезка I, которое обладает следующим свойством: $p^{-1}(V_i) = U_i,\ i = 1,2$. Так как p - собственное отображение, $\{\rho\circ p, 1-\rho\circ p\}$ является разбиением единицы, подчиненное покрытию U. Пусть $ds_1^2 = dr^2 + r^2 d\phi^2 + dz^2$ и $ds_2^2 = dr^2 + dx^2 + dz^2$ – евклидовы метрики на U_1 и U_2 соответственно, тогда

$$ds^2 = (\rho\circ p)ds_1^2 + (1-\rho\circ p)ds_2^2$$

- глобальная метрика на M^3. Заметим, что на пересечении $U_1\cap U_2$ имеем $0 < r < 1$, где все точки имеют регулярную параметризацию. Функция $\rho\circ p$ зависит только от r - координаты. Поэтому на торах $r = const$ индуцируется плоская метрика, и данное слоение в построенной метрике имеет неотрицательную кривизну.

Аналогичным образом строится метрика неотрицательной кривизны на описанных слоениях и в оставшихся случаях. Тем самым теорема 4.2.1 доказана полностью.

Теорема 4.2.9. *Трансверсально ориентируемое слоение $\mathcal{F}$ коразмерности один неотрицательной кривизны на замкнутом ориентируемом трехмерном многообразии M плоское, тогда и только тогда, когда M есть торическое расслоение или полурасслоение.*

Доказательство. Если $\mathcal{F}$ – плоское слоение на M, тогда M асферично, как следует из теоремы 4.1.1. В теореме 4.2.1 асферическим многообразиям отвечают только случаи 1 и 2, поэтому M есть торическое расслоение или полурасслоение.

Теперь предположим, что слоение неотрицательной кривизны обладает слоем L, который не является плоским. Слоение $\mathcal{F}$ ориентируемо, так как оно трансверсально ориентируемо и M ориентируемо. Поэтому, если L - компактен, то из ориентируемости слоения следует, что $L \simeq S^2$. Тогда, по теореме стабильности Риба, M есть S^2 - расслоение над S^1, следовательно M не асферично. Если L - некомпактен, то он гомеоморфен $\mathbb{R}^2$ и $\int_{\mathbb{R}^2} K ds < \infty$ (см. [110]). Это означает, что на бесконечности кривизна K стремится к нулю, так как K является ограничением непрерывной функции, заданной на компактном многообразии, и, поэтому, является равномерно непрерывной на L. Покажем, что L не может принадлежать плотному блоку. В этом случае к любой точке $x \in L$ сходится последовательность точек $x_k \in L$ (в M), принадлежащая некоторому трансверсальному отрезку, проходящему через x. Поэтому последовательность $\{x_k\}$ является замкнутым изолированным подмножеством в L, так как все точки принадлежат разным локальным слоям расслоенной координатной окрестности U_x. Отсюда следует, что $x_k \to \infty$, а $K(x_k) \to 0$. По непрерывности получаем, что $K(x) = 0$. А так как точка x взята произвольно, $K \equiv 0$. Следовательно L - собственный слой, принадлежащий собственному блоку B. В этом случае, по теореме 4.3.3, B является расслоением над S^1 со слоем L. Так как L гомеоморфен $\mathbb{R}^2$, блок B гомотопически эквивалентен окружности. Из теоремы 1.4.32 следует, что B есть рибовская компонента. Из доказательства теоремы 4.2.1 следует, что если $\mathcal{F}$ имеет рибовскую компоненту, то M получено склейкой либо двух полноториев, либо полнотория и скрученного I - расслоения над бутылкой Клейна. В любом случае мы получим одно из многообразий 3 - 6 из теоремы 4.2.1, не являющееся асферическим. Осталось заметить, что торические расслоения и полурасслоения допускают плоские слоения, как это было показано в теореме 4.2.1. ∎

4.3. Структура слоений неотрицательной кривизны

В этом разделе мы обобщим на произвольную размерность результаты, полученные в трехмерном случае. В частности, мы покажем, что слоение коразмерности один неотрицательной кривизны является слоением почти без голономии.

Одним из основополагающих наших наблюдений является следующий результат.

Утверждение 4.3.1. *Пусть $\mathcal{F}$ - C^2 – трансверсально ориентируемое слоение неотрицательной кривизны Риччи на M, где M - ориентируемое замкнутое многообразие. Тогда $\mathcal{F}$ - слоение почти без голономии.*

Доказательство. Из теоремы 1.1.8 следует, что фундаментальная группа замкнутого многообразия неотрицательной кривизны Риччи имеет полиномиальный рост. Поэтому, по теореме 1.4.4, каждый компактный слой имеет абелеву голономию, и применима теорема Нисимори 1.4.5. Предположим, что существует некомпактный слой L с нетривиальной голономией. Из ориентируемости слоения следует, что голономия должна быть бесконечной. Пусть γ - замкнутый путь в L, представляющий элемент фундаментальной группы $\pi_1(L)$ на котором голономия нетривиальна.

Случай 1. Элемент $\Psi^+([\gamma])$ односторонней голономии нетривиален, и в полуинтервале $[0,\varepsilon)$ нет неподвижных точек отображения голономии $\Gamma : [0,\varepsilon) \to [0,\varepsilon')$ для некоторого ε.

В этом случае один из элементов $\Psi^+(\pm[\gamma])$ представляется сжимающим отображением. Если L является локально плотным, то, очевидно, он является пружинным, что противоречит следствию 1.4.19. В противном случае на L наматывается другой некомпактный слой P и, согласно следствию 1.4.15, существует компактный слой $K \subset \bar{L} \bigcap \bar{P}$, удовлетворяющий пункту 3 теоремы 1.4.5, из которого следует, что слой P должен иметь бесконечное число концов, чего не может быть согласно теореме 1.1.5.

Случай 2. Предположим, что в полуинтервале $[0, \varepsilon)$ имеется сходящаяся к нулю последовательность неподвижных точек $\{F_i\}$ отображения Г.

Тогда, учитывая, что $\{F_i\} \bigcap [0, F_k]$ - замкнуто в $[0, \varepsilon)$, где $F_k \in \{F_i\} \bigcap [0, \varepsilon)$, либо голонимия L должна быть тривиальна, либо мы найдем полуинтервал $[a, \delta) \subset [0, \varepsilon)$ на котором Г действует сжимающим отображением. Поэтому слой L' соответствующий точке $a \in [0, \varepsilon)$ имеет сжимающее отображение голономии на $\gamma' \subset L'$, где γ' - замкнутый путь, соответствующий неподвижной точке a отображения голономии Г. Так как множество компактных слоев является компактным (см. комментарии в [69]), а значит замкнутым подмножеством в M и M - нормальное топологическое пространство, то ε мы можем выбрать сколь угодно малым, чтобы утверждать, что слой L' - некомпактен. Таким образом, мы приходим к уже рассмотренному случаю 1, что приводит к доказательству теоремы. ∎

Замечание 4.3.2. *Очевидно, что слоение неотрицательной кривизны Риччи в теореме можно ослабить и потребовать, чтобы слои имели полиномиальный рост и конечное число концов.*

Утверждение 4.3.1 делает возможным применение теоремы Иманиши 1.4.10 к слоениям коразмерности один неотрицательной кривизны Риччи на замкнутом многообразии, что дает нам следующую структурную теорему.

Теорема 4.3.3. *Пусть $\mathcal{F}$ трансверсально ориентируемое слоение коразмерности один неотрицательной кривизны Риччи на замкнутом ориентируемом римановом многообразии M. Тогда выполнена одна из следующих возможностей:*

1) *Все слои диффеоморфны типичному слою L и всюду плотны в M, а M является расслоением над S^1. При этом фундаментальная группа M описывается групповым расширением:*

$$1 \to \pi_1(L) \to \pi_1(M) \to \mathbb{Z}^k \to 0 \ (k \geq 1) \tag{4.3.1}$$

2) *F содержит компактный слой и M можно разбить конечным числом компактных слоев на блоки одного из следующих типов:*

   A) *Исключительный блок: B гомеоморфен $L \times I$, где L является компактным слоем слоения и слой $L \times 0$ является предельным для множества компактных слоев;*

   B) *Плотный блок: все внутренние слои диффеоморфны типичному слою L и всюду плотны в B;*

   C) *Собственный блок: все внутренние слои диффеоморфны типичному слою L и являются собственными (вложенными подмногообразиями) в B.*

Фундаментальная группа блоков в случаях описывается групповым расширением:

$$1 \to \pi_1(L) \to \pi_1(B) \xrightarrow{\phi} \mathbb{Z}^k \to 0 \tag{4.3.2}$$

При этом если $k = 1$, то $int\ B$ является расслоением над окружностью со слоем L, и в этом случае блок будет собственным. Если же $k \geq 2$, то B будет плотным блоком. Для любого k имеет место гомеоморфизм

$$\widetilde{int\ B} \simeq \widetilde{L} \times \mathbb{R} \tag{4.3.3}$$

Доказательство. Пункт 1 следует из утверждения 4.3.1 и теоремы 1.4.7. Пункт 2 теоремы является непосредственным следствием утверждения 4.3.1, теоремы 1.4.10 и того факта, что множество компактных слоев $\mathcal{K}$, как отмечалось ранее, является компактным в M. Разберем это более подробно. Отождествим достаточно малую трубчатую окрестность компактного слоя K с подмножеством $D^\varepsilon K = \{(x,v) : x \in K, v \in N_x K, |v| < \varepsilon\}$ нормального расслоения νK посредством нормального экспоненциального отображения $exp^\perp : \nu K \to M$, ставящее в соответствие нормальному вектору v в точке $x \in K$ конец ортогональной к $\mathcal{F}$ траектории длины $|v|$ с началом в x. Так как слоение трансверсально ориентируемо, νK тривиально, и всякий компактный слой $K' \subset D^\varepsilon K$ будет сечением νK. Поэтому компактные слои K и K' ограничивают подмножество в M, гомеоморфное $K \times I$, а всякий компактный слой внутри $K \times I$ разбивает $K \times I$ на две части, так же гомеоморфные $K \times I$. Поэтому каждый предельный компактный слой имеет достаточно малую одностороннюю насыщенную окрестность, гомеоморфную $K \times I$, которая является, по определению, исключительным блоком.

Таким образом, если мы имеем всего конечное число компактных слоев, то они и дают искомое разбиение M на блоки одного из перечисленных в теореме типов. В этом случае блоки будут либо плотные, либо собственные. Если же компактных слоев бесконечное множество, то для каждого компактного слоя K найдутся блоки B_K^+ и B_K^- одного из перечисленных в теореме типов такие, что $K \in \partial B_K^+ \cap \partial B_K^-$ и $K \subset U_K = \mathrm{int}(\ B_K^+ \cup B_K^-)$. Из покрытия $\{U_K\}$ множества $\mathcal{K}$ выделим конечное подпокрытие $\{U_{K_i}\}$, $i = 1 \dots n$. Граничные компактные слои блоков $B_{K_i}^+$ и $B_{K_i}^-$ разбивают M на блоки. Если блок не типичный, т.е. не принадлежит одному из типов, перечисленных в теореме, то возможна одна из следующих ситуаций:

1. Внутри блока только конечное число компактных слоев. Тогда доба-

вим их в разбиение.

2. Внутри блока бесконечное число компактных слоев, а граничные слои не являются предельными в $\mathcal{K}$. Так как этот блок может быть подмножеством только исключительного блока, он гомеоморфен $K \times I$, как отмечалось выше. Трансверсальный отрезок $I = x \times I$ пересекает каждый компактный слой в единственной точке, так как каждый компактный слой внутри исключительного блока можно понимать как сечение нормального расслоения. Упорядочим компактные слои на I слева направо. Так как $\mathcal{K}$ компактно в M, то $\mathcal{K} \cap I$ компактно в I. Пусть $x_0 \in I$ соответствует самому правому компактному слою, предельному слева, а $x_1 \in [x_0, 1]$ соответствует самому левому в $[x_0, 1]$ компактному слою, предельному справа. Может оказаться, что в $[x_0, 1]$ нет предельных справа точек $\mathcal{K} \cap I$, тогда в $[x_0, 1]$ может быть только конечное число точек $\mathcal{K} \cap I$ и мы добавим соответствующие слои в разбиение. Если же $[x_0, 1]$ содержит предельные справа точки $\mathcal{K} \cap I$, то $[0, x_0]$ и $[x_1, 1]$ соответствуют исключительным блокам. Если $x_0 \neq x_1$, то по построению внутри (x_0, x_1) может быть лишь конечное число точек множества, $\mathcal{K} \cap I$, и соответствующие компактные слои мы добавим в разбиение. Проделаем аналогичное подразбиение во всех нетипичных блоках и получим требуемое конечное разбиение.

Остальные утверждения теоремы следуют из теоремы Иманиши 1.4.10.

■

Структурная теорема позволяет нам более детально описать топологическую структуру блоков, оснащенных слоениями неотрицательной секционной кривизны.

Утверждение 4.3.4. *Пусть B - блок без внутренних компактных слоев, оснащенный слоением неотрицательной секционной кривизны. Тогда граница ∂B имеет не более двух компонент связности.*

Доказательство. Заметим, что мы находимся в условиях теоремы 1.4.10. Рассмотрим спектральную последовательность регулярного $\mathbb{Z}^k$ - накрытия $p : \bar{B} \to B$ с коэффициентами в $\mathbb{Z}$, соответствующую точной последовательности (1.4.3). Так как $\operatorname{int} \widetilde{B} \simeq \widetilde{L} \times \mathbb{R}$, то $\pi_i(B) \cong \pi_i(\bar{B}) \cong \pi_i(\widetilde{B}) \cong \pi_i(L)$, если $i \geq 2$. Но $\pi_1(\bar{B}) \cong \pi_1(L)$. Поэтому $\bar{B}$ гомотопически эквивалентно типичному слою L, который, в свою очередь, гомотопически эквивалентен своей душе S. Предположим, что $\dim S = l$. Член E_2 спектральной последовательности имеет вид:

$$E_2^{pq} = H^p(\mathbb{Z}^k; \{H^q(S, \mathbb{Z})\}) \tag{4.3.4}$$

$$\begin{array}{c|ccccc}
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
l & * & \dots & E_2^{kl} & 0 & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
1 & * & \dots & * & 0 & 0 \\
0 & \mathbb{Z} & \dots & \mathbb{Z} & 0 & 0 \\
\hline
 & & & \mathrm{k} & \mathrm{k+1} & \dots
\end{array}$$

Отметим, что коэффициенты предполагаются локальными, то есть учитывается действие $\mathbb{Z}^k$ на $H^q(S, \mathbb{Z})$. Заметим, что $E_2^{pq} = 0$, если $p + q > k + l$, и $H^{k+l}(B) \cong E_\infty^{kl} \cong E_2^{kl} = H^k(\mathbb{Z}^k; \{H^l(S, \mathbb{Z})\})$. Это означает, что $H^r(B) = 0$, если $r > k + l$ и $H^{k+l}(B)$ равно либо $\mathbb{Z}$, либо $\mathbb{Z}_2$. Заметим, что если многообразие предполагается n - мерным, то $k + l \leq n - 1$. Это следует из того, что B является n - мерным многообразием с краем и, поэтому, стягивается по себе на $n - 1$ - мерный остов. Из двойственности Пуанкаре следует, что

$H^{n-1}(B) \cong H_1(B, \partial B)$. Рассмотрим фрагмент точной последовательности пары:

$$H_1(B, \partial B) \to H_0(\partial B) \to H_0(B) \to 0. \tag{4.3.5}$$

Из сказанного выше следует, что $H_1(B, \partial B)$ – это одна из групп $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_2$ или 0. А так как B - связно, то $H_0(B) = \mathbb{Z}$. Поэтому группа $H_0(\partial B)$, будучи ненулевой свободной абелевой группой, равна $\mathbb{Z}$ или $\mathbb{Z}^2$. Осталось вспомнить, что число связных компонент клеточного пространства X совпадает с $\dim H_0(X)$. Это завершает доказательство утверждения. ■

Следствие 4.3.5. *Пусть B - блок без внутренних компактных слоев, оснащенный слоением неотрицательной секционной кривизны, и число связных компонент ∂B равно двум. Если $i_* : \pi_1(K) \to \pi_1(B)$ – гомоморфизм, индуцированный включением любой из связных компонент границы, тогда композиция $\phi \circ i_*$ - эпиморфизм, где ϕ - гомоморфизм из* (4.3.2).

Доказательство. Допустим, утверждение неверно. Тогда в $\mathbb{Z}^k$ существует подгруппа $\mathcal{A}$ конечного индекса, содержащая образ $\phi \circ i_* \pi_1(K)$. Рассмотрим конечнолистное накрытие $\hat{B}$, соответствующее подгруппе $\phi^{-1}(\mathcal{A})$. Тогда число связных компонент $\hat{B}$ должно превышать 2, что противоречит утверждению 4.3.4, примененной к поднятому слоению неотрицательной секционной кривизны $(\hat{B}, \hat{\mathcal{F}}, \hat{g})$. ■

Теперь возникает задача обобщить утверждение 4.3.4 на случай неотрицательной кривизны Риччи. Оказывается это можно сделать и доказать даже более сильный результат.

Утверждение 4.3.6. *Пусть B - блок без внутренних компактных слоев, оснащенный слоением неотрицательной кривизны Риччи и граница ∂B имеет более одной компоненты связности. Тогда:*

1. *Каждый внутренний слой является регулярным изометрическим накрытием любого граничного слоя $K \in \partial B$.*

2. *$\#(\pi_0(\partial B)) = 2$, а B является h-кобордизмом.*

Доказательство.

Шаг 1. Покажем, что любой типичный слой содержит в своем замыкании все граничные слои.

Чтобы это увидеть, достаточно показать, что это верно для собственного блока. Предположим теперь, что B - собственный блок. Если предположить, что найдется слой с одним концом, то таковыми являются все типичные слои внутри B, так как по теореме 1.4.10 они диффеоморфны. Так как блок собственный, то мы находимся в условиях пункта 3 теоремы 1.4.5, из которого следует, что замыкание каждого слоя содержит лишь один компактный слой границы блока (в противном случае, мы бы нашли еще один конец). Так как односторонняя голономия компактного слоя образуется сжимающим отображением, то множество типичных слоев, имеющих в своем замыкании данный компактный слой является открытым в $\operatorname{int} B$. Так как число компонент связности границы ∂B предполагается ≥ 2, то $\operatorname{int} B$ может быть представлено в виде дизъюнктного объединения открытых множеств, что противоречит связности $\operatorname{int} B$. Значит по теореме 1.1.5 все слои имеют два конца и $L \overset{iso}{\simeq} S \times E$.

Пусть P - множество некомпактных слоев, имеющих в своем замыкании компактный слой K. Так как голономия K представлятся сжимающим отображением, P открыто в $\operatorname{int} B$. Пусть Q - множество некомпактных слоев, имеющих в своем замыкании любой другой компактный слой $N \subset \partial B$.

По тем же соображениям Q открыто в int B, как объединение открытых множеств. Предположим, что $L \in \bar{P} \cap Q$. Можно показать, аналогично тому, как это было сделано в теореме 4.2.8, что если $L \notin P$, то близкие к L слои должны иметь минимум 3 конца, что противоречит теореме 1.1.5. Следовательно $P = \text{int } B$. Отсюда $P = Q$, и для всякого типичного слоя L имеем $\partial B \subset \bar{L}$. А так как число связных компонент ∂B предполагается ≥ 2, а число концов L, как мы показали ранее, равно 2, то мы заключаем, что в рассматриваемом случае число связных компонент ∂B равно 2. Заметим, что по теореме 1.1.5 каждый типичный слой расщепляется в произведение $S \times E$, в частности содержит прямую.

Шаг 2. Покажем, что внутри B всегда найдется слой L', содержащий прямую.

Рассмотрим произвольный типичный слой L внутри B и последовательности изолированных точек $\{x_i\}$ и $\{y_i\}$ на L, сходящихся к $x \in K_1$ и $y \in K_2$, где K_1 и K_2 – компактные слои, принадлежащие границе блока B. Мы можем считать, что $\{x_i\}$ и $\{y_i\}$ принадлежат непересекающимся открытым воротникам U_1 и U_2 слоев K_1 и K_2 соответственно. Пусть l_i кратчайшая в L, соединяющая $\{x_i\}$ и $\{y_i\}$.

Лемма 4.3.7. $|l_i| \to \infty$.

Доказательство. Действительно, каждую из последовательностей точек $\{x_i\}$ и $\{y_i\}$ можно взять в одной слоеной карте U_x и U_y соответственно, причем так, чтобы каждая точка принадлежала своему локальному слою. Рассмотрим последовательность $\{x_i\}$. Можно также потребовать, чтобы точки последовательностей лежали на замкнутых трансверсальных отрезках. Пусть последовательность $\{x_i\}$ лежит на трансверсальном отрезке $I \subset U_x$, проходящей через точку x. Рассмотрим экспоненциальное отображение вдоль слоения $exp_{\mathcal{F}} : T_{\mathcal{F}}M \to M$.

Рассмотрим риманову метрику $g^{\mathcal{F}} : T_{\mathcal{F}}M \otimes T_{\mathcal{F}}M \to \mathbb{R}$, в которой проекция $T_{\mathcal{F}}M \to M$ является римановой субмерсией (см. лемму 4.1.2).

Рассмотрим непрерывное отображение

$$F : D^{n-1}(R) \times I \to M,$$

где $D^{n-1}(R)$ - евклидов шар радиуса R, которое определяется ограничением экспоненциального отображения $exp_{\mathcal{F}}M$ на $T^{\le R}_{\mathcal{F}}I$, где $T^{\le R}_{\mathcal{F}}I$ обозначает множество касательных к слоению $\mathcal{F}$ векторов длины не более R, ограниченное на I. Отметим, что F является равномерно непрерывным отображением, так как определено на компакте $D^{n-1}(R) \times I$. Так как, по построению метрики $g^{\mathcal{F}}$, касательные плоскости - эквидистантны и F - равномерно непрерывна, то для всех $x_i \in I$ достаточно близких к $x \in I$, шары $B_t(R) = exp_{\mathcal{F}}(D^{n-1}(R))$ лежат внутри $U_\varepsilon \subset U_1$, где U_ε обозначает ε - окрестность слоя K_1. Здесь используется компактность слоя K_1. Так как R взято произвольно, лемма доказана.

Обозначим через $z \in L' \subset B \setminus (U_1 \cup U_2)$ предельную точку для l_i, которая является предельной для множества точек $z_i \in l_i$. Пусть $l_j(r) \subset l_j$ $(j > i_r)$ подпоследовательность кратчайших длины r, проходящих через z_j и сходящаяся к кривой $l(r)$ на слое L'. Это следует из теоремы Асколи и [81, Лемма 2.4]. По построению $z \in l(r)$. Предположим, что $l(r)$ не кратчайшая на L'. Тогда соединим концы $l(r)$ кратчайшей l' в L'. Замкнутая кривая $\gamma := l' \circ l^{-1}(r)$ должна представлять нетривиальную голономию слоя L', так как иначе для достаточно большого номера j мы легко найдем кривую l'_j, соединяющую концы кривой $l_j(r)$ и имеющую меньшую длину, чем $l_j(r)$. Это легко следует из предположения C^2 - гладкости слоения $\mathcal{F}$ и формулы длины кривой в слое: $|l| = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{g^{\mathcal{F}}_{ij} \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_j}{dt}} dt$. В этом случае коэффициенты метрического тензора $g^{\mathcal{F}}_{ij}$ гладко зависят от $x \in M$, и если мы рассмотрим трансверсальное гладкое вложение $I \times I \to M$ полосы, то на образе высекается одномерное слоение, а именно, гладкое семейство γ_s кривых, длины которых непрерывно зависят от s. Таким образом, мы приходим к противоречию с тем, что $l_j(r)$ – кратчайшая. Однако $\mathcal{F}$ является слоением почти без голономии и слой L' должен иметь тривиальную голономию. Это противоречие доказывает, что $l(r)$ – кратчайшая длины r. Устремляя r к бесконечности получим последовательность кратчайших в L', проходящих через точку z, которая, очевидно, содержит подпоследовательность, сходящуюся к прямой l в L'.

Шаг 3. Докажем, что каждый внутренний слой является изометрическим накрытием любого граничного слоя $K \in \partial B$.

По теореме Чигера - Громолла о расщеплении 1.1.5 следует, что L' изометрично прямому произведению $P \times E^1$. Из построения также видно, что замыкание $\bar{l}$ содержит точки как K_1, так и K_2. Значит существует последовательность точек $p_i \in l$, сходящихся к $p \in K_1$, и последовательность точек $q_i \in l$, сходящихся к $q \in K_2$, а вместе с ними и последовательности параллельных переносов $f_i : L' \to L'$ и $g_i : L' \to L'$, $i = 1, \dots, \infty$, таких, что $f_i(p_1) = p_{i+1}$; $g_i(q_1) = q_{i+1}$, и сходящихся к изометрическим накрытиям $f : L' \to K_1$ и $g : L' \to K_2$,соответственно. Доказательство этого факта ничем не отличается от доказательства теоремы 1.4.24. В частности, отсюда следует, что слой L' имеет кокомпактную группу изометрий. В случае, когда блок B плотен, то любые два типичных слоя изометричны, и любой типичный слой является изометрическим накрытием любого граничного компактного слоя по теореме 1.4.24. А если блок B собственный, то всякий типичный слой имеет два конца и расщепляется в прямое произведение $S \times \mathbb{R}$ по теореме 1.1.5, а значит, также изометрически накрывает любой граничный компактный слой. В частности, отсюда следует, что все типичные слои локально изометричны K_1 и имеют универсальное накрытие изометричное $\widetilde{K}_1$ с поднятой метрикой. Аналогично доказывается, что все типичные слои имеют с любым граничным компактным слоем изометричные универсальные накрытия.

Шаг 4. Докажем, что изометрическое накрытие, описанное в Шаге 2 является регулярным, а B является h-кобордизмом.

Всякий сфероид $\phi : S^l \to L'$ свободно гомотопен сфероидам $f_k \circ \phi$, сходящимся к сфероиду $f \circ \phi$, свободно гомотопному $f_k \circ \phi$ в B для больших k, так как для больших k отображение f_k близко к f. Обозначим через F_t гомотопию, соединяющую сфероиды ϕ и $f \circ \phi$. Вспомним, что любое накрытие, в частности, f индуцирует изоморфизм старших гомотопических групп и мономорфизм фундаментальных групп. Из сказанного следует, что мы имеем следующую коммутативную диаграмму, индуцируемую включениями $i^{L'} : L' \to B$, $i^{K_1} : K_1 \to B$ и накрытием $f : L' \to K_1$:

$$\begin{tikzcd}
\pi_l(B, f(y_0)) & \pi_l(K_1, f(y_0)) \arrow[l, "i_*^{K_1}"'] \\
\pi_l(L', y_0) \arrow[u, "\psi_\alpha i_*^{L'}"] \arrow[ur, "f_*"] &
\end{tikzcd}$$

где $\alpha : I \to B$ обозначает путь $F_t(y_0)$, а $\psi_\alpha : \pi_l(B, y_0) \to \pi_l(B, f(y_0))$ - соответствующий изоморфизм гомотопических групп. Так как $\widetilde{\mathrm{int}\ B} \simeq \widetilde{L}' \times \mathbb{R}$, то $i_*^{L'}$ – изоморфизм для $l \geq 2$. А так как любое накрытие индуцирует изоморфизм старших гомотопических групп и мономорфизм фундаментальных групп, то для $l \geq 2$ гомоморфизм $i_*^{K_1}$ является изоморфизмом. Рассмотрим случай $l = 1$. Из (4.3.2) следует, что $i_*^{L'}$ – мономорфизм. По лемме 4.1.2 гомоморфизм $i_*^{K_1}$ также является мономорфизмом, так как все слои в блоке B имеют кокомпактную группу изометрий, а значит являются равномерно односвязными. Из мономорфности гомоморфизмов f_* и $i_*^{K_1}$, и так как группа

$\psi_\alpha^{-1} i_*^{K_1} f_* \pi_1(L') = i_*^{L'}(\pi_1(L'))$ нормальна в $\pi_1(B)$ (см. (4.3.2)), легко следует, что группа $f_*\pi_1(L')$ нормальна в $\pi_1(K_1)$. Действительно, для любых $\alpha \in f_*\pi_1(L')$ и $\beta \in \pi_1(K_1)$ найдется $\gamma \in f_*\pi_1(L')$ такой, что

$$\psi_\alpha^{-1} i_*^{K_1}(\gamma) = \psi_\alpha^{-1} i_*^{K_1}(\beta\alpha\beta^{-1}) = \psi_\alpha^{-1} i_*^{K_1}(\beta)\psi_\alpha^{-1} i_*^{K_1}(\alpha)(\psi_\alpha^{-1} i_*^{K_1}(\beta))^{-1} =$$

$$\psi_\alpha^{-1} i_*^{K_1}(\beta) i_*^{L'}(\alpha')(\psi_\alpha^{-1} i_*^{K_1}(\beta))^{-1} \in i_*^{L'}(\pi_1(L')),$$

где $\alpha = f_*\alpha'$. Из мономорфности $\psi_\alpha^{-1} i_*^{K_1}$ следует, что $\beta\alpha\beta^{-1} = \gamma$.

Из [81, Утверждение 1.2] следует, что слой L', будучи регулярным накрытием замкнутого многообразия неотрицательной кривизны Риччи, изометричен риманову произведению $S \times E^k$, где S – компактное многообразие неотрицательной кривизны Риччи.

Теперь, дословно повторяя рассуждения в утверждении 4.3.4, доказывается, что число связных компонент ∂B не превосходит двух. Аналогично тому, как это было сделано в следствии 4.3.5 доказывается, что если $i_* : \pi_1(K_i) \to \pi_1(B)$ – гомоморфизм, индуцированный включением любой из связных компонент границы, тогда композиция $\phi \circ i_*$ - эпиморфизм, где ϕ - гомоморфизм из (4.3.2). А так как $\psi_\alpha i_*^{L'}(\pi_1(L', y_0) \subset i_*^{K_1}\pi_1(K_1, f(y_0))$, то гомоморфизм $i_*^{K_1} : \pi_1(K_1) \to \pi_1(B)$ является эпиморфизмом. Мономорфность $i_*^{K_1}$ отмечалась выше. Значит вложение $i^{K_1} : K_1 \to B$ является гомотопической эквивалентностью. По этим же соображениям $i^{K_2} : K_2 \to B$ является гомотопической эквивалентностью, а значит B является h-кобордизмом, что доказывает утверждение. ∎

Следствием утверждения 4.3.6 является следующее важное утверждение.

Утверждение 4.3.8. *Пусть B - блок без внутренних компактных слоев, оснащенный слоением неотрицательной кривизны Риччи. Если фундаментальная группа типичного слоя L конечно порождена, тогда:*

1. *Фундаментальная группа $\pi_1(B)$ является почти полициклической.*

2. *Образ гомоморфизма $i_* : \pi_1(K) \to \pi_1(B)$, индуцированного включенем граничного слоя $i : K \to B$, имеет индекс в $\pi_1(B)$ не превосходящий 2.*

Доказательство. Так как $\pi_1(L)$ конечно порождена, то она содержит нормальную нильпотентную конечно порожденную подгруппу конечного индекса (следствие 1.1.11). Из последовательности (4.3.2) следует, что $\pi_1(B)$ является почти полициклической группой. Мальцев доказал (см. [44]), что любая подгруппа почти полициклической группы, в частности $i_*\pi_1(K) \subset \pi_1(B)$, является пересечением подгрупп конечного индекса. Поэтому если индекс $i_*\pi_1(K)$ в $\pi_1(B)$ больше 1, то существует конечнолистное накрытие блока B, имеющее более одной компоненты связности границы. Тогда из утверждения 4.3.6 немедленно следует, что индекс $i_*\pi_1(K)$ в $\pi_1(B)$ равен 2. Утверждение доказано. ∎

4.4. Характеризация плоских слоений

В этом разделе мы опишем фундаментальную группу замкнутых многообразий, допускающих слоения неотрицательной кривизны Риччи и докажем аналог следствия 1.1.6 теоремы Чигера - Громолла 1.1.5, а именно, мы докажем следующую теорему.

Теорема 4.4.1. *Пусть M - замкнутое риманово n-мерное многообразие с заданным C^2 – слоением $\mathcal{F}$ коразмерности один неотрицательной кривизны Риччи. Предположим, что все слои имеют конечно порожденную фундаментальную группу (например $\mathcal{F}$ – слоение неотрицательной секционной кривизны). Тогда*

1. *$\pi_1(M)$ – почти полициклическая группа.*

2. *$\mathcal{F}$ плоское, тогда и только тогда, когда M является $K(\pi,1)$ – многообразием. В этом случае выполнена одна из следующих возможностей:*

   1) *$\mathcal{F}$ не содержит компактные слои. Тогда $\mathcal{F}$ является слоением без голономии со всюду плотными слоями, изометричными риманову произведению $S \times E^k$, а само многообразие гомеоморфно расслоению над S^1.*

   2) *$\mathcal{F}$ содержит компактные слои. Если $\dim M \geq 5$, тогда все компактные слои гомеоморфны между собой, а само многообразие или его двулистное накрытие гомеоморфно расслоению над окружностью со слоем, гомеоморфным компактному слою слоения.*

3. *asdim $\pi_1(M) \leq n$, причем asdim $\pi_1(M) = n$ тогда и только тогда, когда M является $K(\pi,1)$ – многообразием. Если asdim $\pi_1(M) < n$, то asdim $\pi_1(M) < n-1$.*

Следствие 4.4.2. *Пусть M удовлетворяет условию теоремы 4.4.1. Тогда для M имеет место гипотеза Громова 1.3.14.*

Доказательство. Это немедленно следует из неравенства $\dim_{mc} \widetilde{M} \leq \operatorname{asdim} \widetilde{M}$.

■

Доказательство теоремы 4.4.1

Из теоремы 4.1.1 следует, что плоское слоение может быть только на $K(\pi,1)$ – многообразии.

Докажем теорему в другую сторону. Будем предполагать многообразие и слоение ориентируемым, перейдя в случае необходимости к конечнолистному накрытию.

Случай 1. $\mathcal{F}$ не содержит компактных слоев. Тогда $\mathcal{F}$ слоение без голономии, и по теореме Новикова 1.4.5 M расслаивается над S^1, $\widetilde{M} \cong \widetilde{L} \times \mathbb{R}$ и имеет место групповое расширение (4.3.1). Из следствия 1.4.26 следует, что в минимальном множестве слоения неотрицательной кривизны Риччи, коим в нашем случае является все многообразие M, всегда найдется слой, изометричный риманову произведению $N \times E^p$, где N – компактно. Теперь из теоремы Чигера - Громолла о расщеплении 1.1.5 и теоремы 1.4.24 следует, что $\mathcal{F}$ – плоское, тогда и только тогда, когда M асферично.

Докажем утверждение пункта 3 теоремы в исследуемом случае. Из расширения (4.3.1) и свойства асимптотической размерности следует, что

$$\text{asdim } \pi_1(M) = \text{asdim } \pi_1(N) + k,$$

где k взято из (4.3.1). Напомним, что для евклидова пространства E^k имеем asdim E^k = dim E^k. Из свойств асимптотической размерности и теоремы 1.1.5 следует, что

$$\text{asdim } \pi_1(N) = \text{asdim } \widetilde{N} = \dim N - \dim S,$$

где S – душа $\widetilde{N}$. Из вида члена E_2 спектральной последовательности регулярного накрытия (с коэффициентами в $\mathbb{Z}_2$), соответствующей расширению (4.3.1):

$$\begin{array}{c|cccccc}
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
\dim\ N & * & \dots & \mathbb{Z}_2 & 0 & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
1 & * & \dots & * & 0 & 0 \\
0 & \mathbb{Z}_2 & \dots & \mathbb{Z}_2 & 0 & 0 \\
\hline
 & & & \text{k} & \text{k+1} & \dots
\end{array}$$

немедленно следует, что

$$\dim\ N + k = \dim\ M.$$

Отсюда

$$\operatorname{asdim}\ \pi_1(M) = \dim M - \dim\ S.$$

Осталось заметить, что случай $\dim\ S = 0$ эквивалентен асферичности M. В этом случае

$$\operatorname{asdim}\ \pi_1(M) = \dim M.$$

Случай 2. Предположим, $\mathcal{F}$ содержит компактные слои. Тогда замыкание каждого слоя содержит компактный слой (см. следствие 1.4.15), и конечным числом компактных слоев мы можем разбить многообразие M на блоки, каждый из которых либо гомеоморфен прямому произведению $K \times I$, где K – компактный слой, либо является блоком без внутренних компактных слоев (см. теорему 4.3.3). В дальнейшем под блоком мы будем понимать лишь те блоки, которые входят в данное разбиение. Разобьем рассматриваемый случай на два.

a) Границы всех блоков имеют две компоненты связности.

В этом случае из утверждения 4.3.6 следует, что все слои имеют изометричные универсальные накрытия. Более того, блоки являются h-кобордизмами, и M можно представить как фактор многообразия $\bar{M}$ по свободному и дискретному действию группы $\mathbb{Z}$, где $\bar{M}$ является объединением бесконечного числа копий многообразия с краем, полученного в результате разрезания M некоторым компактным слоем K. Понятно, что $\pi_1(\bar{M}) = \pi_1(K)$ и имеет место расширение

$$1 \to \pi_1(K) \to \pi_1(M) \to \mathbb{Z} \to 0.$$

Напомним, что $\pi_1(K)$ содержит свободную абелеву подгруппу $\mathbb{Z}^k$ конечного индекса (см. замечание 1.1.14) и $\operatorname{asdim}\ \pi_1(K) = k$. Если $k < \dim\ K$, что эквивалентно тому, что K не плоское, то $k < \dim\ K - 1$. В этом случае $\operatorname{asdim} \pi_1(M) \leq \dim\ M - 2$. Заметим, что K – плоское тогда и только тогда, когда M является $K(\pi, 1)$-многообразием. Так как asdim π не меньше размерности $K(\pi, 1)$-многообразия, то в случае если M асферично, компактные слои, а значит, по утвержению 4.3.6 все слои, принадлежащие блокам без внутренних компактных слоев являются плоскими. Из теоремы Нисимори 1.4.5, которая описывает поведение слоения в окрестности компактного слоя с абелевой голономией, а так же замкнутости множества компактных слоев, следует , что всякий некомпактный слой исключительного блока $K \times I$ принадлежит блоку $B' \subset K \times I$ без внутренних компактных слоев. По построению, существует трансверсаль, пересекающая все слои блока $K \times I$. Значит блок B' должен иметь два граничных слоя и обязан быть плоским согласно вышедоказанному. Заметим, что в случае $n \geq 5$ по теореме об s-кобордизме и теореме 2.8.7, все блоки гомеоморфны $K \times I$ и $\bar{M}$ является расслоением над S^1.

b) Существует блок с одной компонентой связности границы.

В этом случае M можно представить в виде объединения $M = A \cup B$, где $A \cap B$- объединение блоков, имеющих две компоненты связности границы, если такие блоки существуют, и $A \cap B$ - единственный компактный слой в противном случае. Тогда $C = M \setminus \operatorname{int}\ B$ и $D = M \setminus \operatorname{int}\ A$ - блоки с одной компонентой связности границы. Из утверждения 4.3.6 следует, что если B является объединением конечного числа блоков, граница которых имеет две связные компоненты, то вложение $i : K \to B$ граничного слоя является гомотопической эквивалентностью, следовательно вложения $\partial C \to A \cap B$ и $\partial D \to A \cap B$ являются гомотопическими эквивалентностями.

Напомним следующую теорему.

Теорема 4.4.3 ([111]) *Если для некоторой группы G следующая диаграм-*

ма коммутативна,

$$
\begin{tikzcd}
& \pi_1(A) \arrow[dr, "\rho_1"] & \\
\pi_1(A\cap B) \arrow[ur, "\phi_1"] \arrow[rr, "\rho_3"] \arrow[dr, "\phi_2"'] & & G \\
& \pi_1(B) \arrow[ur, "\rho_2"'] &
\end{tikzcd}
$$

то однозначно определен гомоморфизм $\sigma : \pi_1(M) \to G$ *такой, что* $\rho_i = \sigma \circ \psi_i$, $i = 1, 2, 3$, *где* ϕ_1, ϕ_2, *а также* $\psi_1 : \pi_1(A) \to \pi_1(M), \psi_2 : \pi_1(B) \to \pi_1(M), \psi_3 : \pi_1(A \cap B) \to \pi_1(M)$ - *гомоморфизмы, индуцированные включениями.*

Отметим, что линейно связные подмножества A, B и $A \cap B$ в цитируемой теореме должны быть открытыми и линейно связными. Но это требование можно ослабить, потребовав, чтобы существовали открытые подмножества U_A, U_B и $U_{A\cap B}$, содержащие A, B и $A \cap B$ соответственно, для которых множества A, B и $A \cap B$ являются сильными деформационными ретрактами. В нашем случае блоки A, B и $A \cap B$ удовлетворяют этому требованию. Достаточно к границам блоков A, B и $A \cap B$ добавить маленькие открытые воротники.

Предположим, гомоморфизмы ϕ_i сюрьективны. Пусть N - группа, порожденная $Ker\ \phi_1 \cup Ker\ \phi_2$. Положим $G = \pi_1(A \cap B)/N$, а ρ_i - отображения факторизации. Тогда имеем

$$\pi_1(A) \cong \pi_1(A \cap B)/Ker\phi_1,\ \pi_1(B) \cong \pi_1(A \cap B)/Ker\phi_2,$$

$$G \cong \pi_1(A)/(N/Ker\ \phi_1) \cong \pi_1(B)/(N/Ker\ \phi_2) \cong \pi_1(M). \qquad (4.4.1)$$

Так как подгруппа и образ почти полициклической группы является почти полициклической группой, то $\pi_1(A)$ и $\pi_1(M)$ – почти полициклические группы, так как таковой является $\pi_1(K) = \pi_1(A \cap B)$. Вспомним, что для почти полициклической группы G и гомоморфизма $f : G' \to G$ имеем

$$\text{asdim } G' = \text{asdim } Kerf + \text{asdim } Imf. \tag{4.4.2}$$

Напомним , что для любого компактного слоя K имеем asdim $\pi_1(K) \le n-1$. Следовательно, в рассматриваемом случае asdim $\pi_1(M) \le n-1$ и M не может быть $K(\pi, 1)$-многообразием, так как в этом случае из свойств асимптотической размерности (см. раздел 1.3) следует, что asdim $\pi_1(M) \ge n$. А значит по теореме 4.1.1 слоение не может быть плоским. Покажем, что на самом деле в этом случае asdim $\pi_1(M) \le n - 2$.

Предположим, что asdim $\pi_1(M) = n - 1$, тогда все компактные слои должны быть плоскими, а значит $K(\pi, 1)$ – многообразиями. А так как фундаментальная группа плоского многообразия не содержит кручения, то, учитывая (4.4.2) и (4.4.1), гомоморфизмы ϕ_i должны быть мономорфизмами, а значит изоморфизмами. В частности, $\phi_1 : \pi_1(A \cap B) \to \pi_1(A)$ изоморфизм. Тогда существует отображение

$$h : C \to \partial C \sim A \cap B \sim B\pi_1(A),$$

классифицирующее универсальное накрытие $\widetilde{C} \to C$. Тогда композиция $h \circ i$ является гомотопической эквивалентностью, где $i : \partial C \to C$ – вложение граничного слоя. Это означает, что индуцированный гомоморфизм

$$i_* : H_{n-1}(\partial C) \to H_{n-1}(C)$$

есть мономорфизм, что невозможно. Значит имеет место неравенство

$$\text{asdim } \pi_1(M) \le n - 2.$$

Предположим, что хотя бы один из гомоморфизмов ϕ_i не сюрьективен. Согласно утверждению 4.3.6, его образ является подгруппой индекса 2. Напомним, что всякая подгруппа индекса 2 нормальна. Предположим, что ϕ_1

- не сюрьективен. Тогда положим $G = \mathbb{Z}_2$, а ρ_1 определим как гомоморфизм факторизации

$$\rho_1 : \pi_1(A) \to \pi_1(A)/Im\ \phi_1 = \mathbb{Z}_2.$$

Если ϕ_2 – сюрьективен, положим $\rho_2 = \rho_3 = 0$. Так как $\rho_1 = \sigma \circ \psi_1$, то $\sigma : \pi_1(M) \to \mathbb{Z}_2$ нетривиален. Перейдем к двулистному накрытию $\bar{M}$, соответствующему ядру σ. Для простоты, пусть A, B и $A \cap B$ обозначают разбиение $\bar{M}$ аналогичное разбиению M. Нетрудно видеть, что ϕ_1 и ϕ_2 уже сюрьективны и мы приходим к разобранному выше случаю. Но так как $\pi_1(M)$ содержит подгруппу индекса 2, изоморфную $\pi_1(\bar{M})$, то из свойств асимптотической размерности имеем: asdim $\pi_1(\bar{M}) =$ asdim $\pi_1(M) \leq n - 2$. Заметим также, что для поднятой метрики на $\bar{M}$ поднятое слоение является плоским тогда и только тогда, когда оно плоское в M.

Если ϕ_2 не сюрьективен, то мы определим $\rho_2 : \pi_1(B) \to \pi_1(B)/Im\ \phi_2 = \mathbb{Z}_2$ как гомоморфизм факторизации, а $\rho_3 = 0$. Нетрудно видеть, что в этом случае двулистное накрытие, $\bar{M}$, соответствующее ядру π' гомоморфизма $\sigma : \pi_1(M) \to \mathbb{Z}_2$, удовлетворяет рассмотренному случаю $2a$). Действительно, пусть накрытия $\bar{A} \to A$ и $\bar{B} \to B$ соответствуют подгруппам индекса два, которые совпадают с образами гомоморфизмов $\phi_1 : \pi_1(A \cap B) \to \pi_1(A)$ и $\phi_2 : \pi_1(A \cap B) \to \pi_1(B)$. Из утверждения 4.3.6 следует, что блоки $\bar{A} \to A$ и $\bar{B} \to B$ являются h-кобордизмом, поэтому ϕ_1 и ϕ_2 являются мономорфизмами. Следовательно, $\pi_1(M) = \pi_1(A) *_{\pi_1(A \cap B)} \pi_1(B)$, а подгруппа $\pi' \in \pi_1(A) *_{\pi_1(A \cap B)} \pi_1(B)$ входит в следующую коммутативную диаграмму:

$$
\begin{tikzcd}
 & 1 \arrow[r] \arrow[d] & 1 \arrow[d] & & \\
1 \arrow[r] \arrow[d, equal] & \pi_1(A \cap B) \arrow[r] \arrow[d] & \pi_1(A \cap B) \arrow[r] \arrow[d] & 1 \arrow[d] & \\
1 \arrow[r] \arrow[d, equal] & \pi' \arrow[r] \arrow[d] & \pi_1(A) *_{\pi_1(A\cap B)} \pi_1(B) \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{Z}_2 \arrow[r] \arrow[d, equal] & 1 \arrow[d, equal] \\
1 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2 \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{Z}_2 \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\
 & 1 \arrow[r] & 1 \arrow[r] & 1 &
\end{tikzcd}
$$

Из диаграммы видно, что блоки A и B поднимаются в $\bar{M}$ в блоки $\bar{A}$ и $\bar{B}$, имеющие две общие компоненты связности границы, каждая из которых гомеоморфна компактному слою K, поэтому все блоки в двулистном накрытии $\bar{M}$ имеют две компоненты связности границы. А так как утверждение теоремы уже доказано для $\bar{M}$ с поднятой метрикой в случае 2a), то оно верно и для M. Теорема 4.4.1 доказана.

4.5. Решение проблемы Г. Штака

Этот подраздел мы посвятим доказательству следующей теоремы, которая полностью отвечает на вопрос 1.4.20.

Теорема 4.5.1. *3-связное многообразие M размерности $n \geq 5$, в частности, многообразие гомеоморфное S^n, не допускает C^2 - слоения коразмерности один неотрицательной кривизны.*

Замечание 4.5.2. *Заметим, что 3 – связность в пятимерном случае означает, что многообразие является гомотопической сферой (это следует из двойственности Пуанкаре и теоремы Гуревича), а значит ей гомеоморфна по известной теореме Смейла.*

Предположим, что $\mathcal{F}$ – C^2 - слоение коразмерности один неотрицательной секционной кривизны на M. Из теоремы 4.3.3 следует, что слоение $\mathcal{F}$ обладает компактным слоем. Поэтому мы можем представить M в виде $M = A \cup B$, где $A \cap B$- объединение блоков из теоремы 4.3.3, имеющих две компоненты связности границы, если такие блоки существуют, и $A \cap B$ - единственный компактный слой в противном случае. Тогда $C = M \setminus \operatorname{int} B$ и $D = M \setminus \operatorname{int} A$ - блоки с одной компонентой связности границы. Из утверждения 4.3.6 следует, что вложения $\partial C \to A \cap B$ и $\partial D \to A \cap B$ являются гомотопическими эквивалентностями.

Шаг 1. Покажем, что блоки C и D являются собственными, а $\dim\ S = n - 3$, где S - душа типичного слоя L в блоке C (D).

Из точной гомологической последовательности Майера - Вьеториса с действительными коэффициентами:

$$\dots \to H_2(M;\mathbb{R}) \to H_1(A \cap B;\mathbb{R}) \overset{(i_*^A, i_*^B)}{\to} H_1(A;\mathbb{R}) \oplus H_1(B;\mathbb{R}) \to H_1(M;\mathbb{R}) \to \dots, \tag{4.5.1}$$

учитывая, что первые и вторые гомологии M нулевые, и так как первые числа Бетти $\beta_1(A)$ и $\beta_1(B)$ нетривиальны (это следует, например, из эпиморфности ϕ в (4.3.2)), имеем (i_*^A, i_*^B) - изоморфизм. Следовательно, $Ker\ i_*^A \cong Im\ i_*^B \neq 0$ и $Ker\ i_*^B \cong Im\ i_*^A \neq 0$. Теперь рассмотрим кусок когомологической последовательности Майера - Вьеториса с коэффициентами в группе $\mathbb{Z}_2$:

$$H^{n-1}(M;\mathbb{Z}_2) \to H^{n-1}(A;\mathbb{Z}_2) \oplus H^{n-1}(B;\mathbb{Z}_2) \to H^{n-1}(A \cap B;\mathbb{Z}_2) \to H^n(M;\mathbb{Z}_2) \to 0. \tag{4.5.2}$$

Так как

$$H^{n-1}(A \cap B;\mathbb{Z}_2) \cong H^{n-1}(\partial C;\mathbb{Z}_2) \cong H^n(M;\mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2,$$

а

$$H^{n-1}(M;\mathbb{Z}_2) \cong H_1(M;\mathbb{Z}_2) = 0,$$

то

$$H^{n-1}(A;\mathbb{Z}_2) \cong H^{n-1}(C;\mathbb{Z}_2) = 0$$

и

$$H^{n-1}(B;\mathbb{Z}_2) \cong H^{n-1}(D;\mathbb{Z}_2) = 0.$$

Из вида члена E_2 спектральной последовательности регулярного $\mathbb{Z}^k$ – накрытия (4.3.2) с коэффициентами в $\mathbb{Z}_2$:

0	0	...	0	0	0
l	*	...	$\mathbb{Z}_2$	0	0
...	...	...	...	...	...
1	*	...	*	0	0
0	$\mathbb{Z}_2$	...	$\mathbb{Z}_2$	0	0
			k	k+1	...

следует, что максимальная по градуировке ненулевая группа когомологий $H^i(C;\mathbb{Z}_2)$ изоморфна группе $H^k(\mathbb{Z}^k;\{H^l(S;\mathbb{Z}_2)\}) = \mathbb{Z}_2$, где l – размерность души S типичного слоя L. Следовательно, $k+l \leq n-2$. Если предположить, что $k+l < n-2$, то тогда

$$\oplus_{s+p=n-2}E_2^{sp} = \oplus_{s+p=n-2}H^s(\mathbb{Z}^k;\{H^p(S;\mathbb{R})\}) = 0.$$

Следовательно $H^{n-2}(C;\mathbb{R}) = 0$, и по двойственности Пуанкаре имеем

$$H^{n-2}(C;\mathbb{R}) \cong H_2(C,\partial C;\mathbb{R}) = 0.$$

Но тогда, применяя точную гомологическую последовательность пары $(C,\partial C)$, получим $Ker\ i_*^A = 0$, что противоречит вышесказанному. Следовательно, $k+l = n-2$ и

$$H^k(\mathbb{Z}^k;\{H^l(S;\mathbb{R})\}) \cong H^{n-2}(C;\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}.$$

Тогда из двойственности Александера следует, что $H^{n-2}(C;\mathbb{R}) \cong H_1(D;\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$. Из аналогичных соображений имеем $H_1(C;\mathbb{R}) \cong H^{n-2}(D;\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$. Поэтому $k = 1$ в (4.3.2), и по теореме 4.3.3 блоки C и D являются собственными, а слоение внутри этих блоков является расслоением над S^1. Заметим, что так как $k = 1$, то размерность души S типичного слоя L как в C, так и в D равна $n-3$.

Шаг 2. Покажем, что на самом деле $L \simeq S \times \mathbb{R}^2$.

Без ограничения общности рассмотрим блок C. По теореме Чигера - Громолла 1.1.12 всякий типичный слой L в C диффеоморфен нормальному расслоению ν со слоем $\mathbb{R}^2$ над своей душой $S \subset L$. Заметим, что душа S, а значит и расслоение ν, должны быть ориентируемы, так как иначе из вида члена E_2 спектральной последовательности расслоения

$$\xi : L \to \mathrm{int}\ C \to S^1$$

$$\begin{array}{c|cccccc}
 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\text{n-3} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
1 & * & * & 0 & \dots & 0 \\
0 & \mathbb{R} & \mathbb{R} & 0 & \dots & 0 \\
\hline
 & 0 & 1 & & & \dots
\end{array}$$

следовало бы, что

$$H^{n-2}(C,\mathbb{R}) \cong H^1(S^1;\{H^{n-3}(S;\mathbb{R})\}) = 0,$$

что противоречит вышесказанному. Теперь покажем, что расслоение ν тривиально. Для этого достаточно установить, что класс Эйлера $e(\nu) = 0$. Рассмотрим $A \cap B$ вместе с открытыми воротниками U_1 и U_2 граничных слоев ∂C и ∂D соответственно. Обозначим это объединение через U. Так как фундаментальная группа компактного слоя содержит нормальную свободную абелеву группу $\mathbb{Z}^k$ конечного индекса, рассмотрим конечнолистное накрытие $p : \hat{U} \to U$, соответствующее подгруппе $\mathbb{Z}^k$. Так как $Wh(\mathbb{Z}^k) = 0$, то по теореме об s-кобордизме

$$p^{-1}(A \cap B) \simeq M_0 \times T^k \times I,$$

где

$$M_0 \times T^k \simeq \partial\hat{C} := p^{-1}(\partial C),$$

а M_0 – компактно и односвязно.

В односторонней окрестности $\hat{U}_1$ поднятое слоение описывается пунктом 3 теоремы Нисимори 1.4.5, из которого следует, что существует однозначно определенный гомологический класс α в группе $H_{n-2}(\partial\hat{C})$ инвариантный относительно действия конечной группы G накрытия

$$p : \partial\hat{C} \to \partial C,$$

так как действие G сохраняет слоение. Каждый гомологический класс в $H_{n-2}(\partial\hat{C})$ представляется слоем

$$\hat{N} \simeq M_0 \times T^{k-1} \subset T^k$$

тривиального расслоения:

$$\hat{\xi}_1 : \hat{N} \to \partial\hat{C} \to S^1$$

с вполне геодезическими слоями, являющимися образами соответствующих слоев относительно регулярного изометрического $\mathbb{Z}$ – накрытия:

$$\hat{N} \times E \to \partial\hat{C}.$$

Заметим, что $\hat{N} \times E$ является римановым прямым произведением и

$$Iso\ (\hat{N} \times E) \cong Iso\ (\hat{N}) \times Iso\ (E)$$

(см. [43]). Так как образ вполне геодезического подмногообразия при изометрии является вполне геодезическим подмногообразием и действие группы G сохраняет гомологический класс $[\hat{N}]$, то расслоение $\hat{\xi}_1$ инвариантно относительно действия G. Образ N слоя $\hat{N}$ в ∂C должен представлять нетривиальный элемент $[N]$ в $H_{n-2}(\partial C)$ (см. теорему 1.4.5), поэтому образ расслоения $\hat{\xi}_1$ относительно накрытия p является расслоением

$$\xi_1 : N \to \partial C \to S^1.$$

Сечение $\phi : S^1 \to \partial C$ этого расслоения представляет нетривиальную голономию, поэтому $\phi(S^1)$ легко сдвинуть во внутренность C трансверсально слоям расслоения ξ.

Теперь, учитывая структуру слоения в окрестности компактного слоя, описанную в теореме 1.4.5, легко видеть, что расслоение ξ_1 является ограничением расслоения

$$\widetilde{\xi} : N \to U_1 \to S^1 \times J$$

односторонней окрестности U_1 слоя ∂C, где J обозначает полуинтервал. Слои $\widetilde{\xi}$ принадлежат слоям слоения $\mathcal{F}$, и ограничение $\widetilde{\xi}$ на $\phi(S^1)$ представляет собой трансверсальное вложение $i^{tr} : \partial C \to C$, гомотопное вложению границы $i : \partial C \to C$, индуцирующее послойное отображение расслоений $\xi_1 \to \xi$ над одной и той же базой S^1. При этом ограничение гомотопии на N осуществляет трансверсальное вложение $N \times [0, t) \to C$ такое, что $N^r = N \times r$, где $0 < r < t$, разбивает слой L на два куска, один из которых гомеоморфен $N \times \mathbb{R}_{\geq 0}$. Пусть

$$\nu^R : S^1 \to E_R \to S$$

обозначает сферическое радиуса R расслоение, а

$$E_{\geq R} \simeq E_R \times \mathbb{R}_{\geq 0}$$

– множество векторов длины $\geq R$ в расслоении ν. Напомним, что тотальное пространство расслоения ν диффеоморфно слою L. Так как каждая из последовательностей подмногообразий $N^{t_i},\ t_i \to 0$ и $E_{t_j},\ t_j \to \infty$ задает компактное исчерпание L, то найдутся действительные числа R_1, R_2, r_1, r_2, для которых имеем вложения

$$E_{R_1} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \subset N^{r_1} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \subset E_{R_2} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \subset N^{r_2} \times \mathbb{R}_{\geq 0}.$$

Предполагается, что границы многообразий не пересекаются при вложениях. Так как сквозные вложения

$$E_{R_1} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \subset E_{R_2} \times \mathbb{R}_{\geq 0}$$

и

$$N^{r_1} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \subset N^{r_2} \times \mathbb{R}_{\geq 0}$$

являются гомотопическими эквивалентностями, то вложение

$$I : N^{r_1} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \subset E_{R_2} \times \mathbb{R}_{\geq 0}$$

индуцирует изоморфизмы групп гомологий и гомотопических групп, а значит I является гомотопической эквивалентностью. Для простоты изложения отождествим N^{r_1} с N. Вложение слоев $\eta : N \to L$ можно представить в виде композиции вложений

$$N \times 0 \xrightarrow{s} N \times \mathbb{R}_{\geq 0} \xrightarrow{I} E_{R_2} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \xrightarrow{J} L.$$

Поэтому, если $e(\nu) \in H^2(S;\mathbb{R})$ нетривиален, то класс гомологий слоя $[S^1]$ расслоения ν^R тривиален в $H_1(E_R;\mathbb{R})$ и $J : E_{R_2} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \to L$ индуцирует изоморфизм в первых гомологиях, а значит $\eta : N \to L$ и вложение $i^{tr} : \partial C \to C$

индуцируют изоморфизм в первых гомологиях. Но из гомологической последовательности Майера - Вьеториса следует, что

$$H_1(\partial C;\mathbb{R}) \cong H_1(C;\mathbb{R}) \oplus H_1(D;\mathbb{R}),$$

что вместе с ранее доказанным изоморфизмом $H_1(D;\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$ приводит к противоречию. Следовательно,

$$e(\nu) = 0,\ \ E_R \simeq S \times S^1,$$

а $L \simeq S \times \mathbb{R}^2$.

Шаг 3. Покажем, что $\pi_1(\partial C) \cong \mathbb{Z}^2$ и $\pi_1(C) \cong \pi_1(D) \cong \mathbb{Z}$.

Рассмотрим образ α класса

$$[* \times S^1 \times *] \in \pi_1(S \times S^1 \times \mathbb{R}_{\geq 0})$$

в $\pi_1(N)$ при изомоморфизме

$$(I \circ s)_*^{-1} : \pi_1(S \times S^1 \times \mathbb{R}_{\geq 0}) \to \pi_1(N).$$

Так как α является образом центрального элемента, то α принадлежит центру $\pi_1(N)$. Класс α порождает ядро эпиморфизма

$$\eta_* : \pi_1(N) \to \pi_1(L),$$

которое изоморфно группе $\mathbb{Z}$. Так как $Ker\ \eta_*$ инвариантно относительно действия фундаментальной группы базы расслоения ξ, то образ $\beta := i_*\alpha$, индуцированный вложением $i : N \to \partial C$, является образующей группы

$$Ker(i_*^{tr} : \pi_1(\partial C) \to \pi_1(C)) \cong Ker(\phi_1 : \pi_1(A \cap B) \to \pi_1(A)) \cong \mathbb{Z}$$

и $\gamma\beta\gamma^{-1} = \mp\beta$, где γ является классом сечения расслоения ξ_1. Если $\gamma\beta\gamma^{-1} = -\beta$, то β представляет нулевой элемент в $H_1(\partial C;\mathbb{R})$ и, поэтому, $i_*^{tr} : H_1(\partial C;\mathbb{R}) \to$

$H_1(C;\mathbb{R})$ – изоморфизм, что невозможно, как отмечалось выше. Отсюда следует, что $\gamma\beta\gamma^{-1} = \beta$, и β коммутирует со всеми образующими группы $\pi_1(\partial C)$, а значит β принадлежит центру группы $\pi_1(\partial C)$. Аналогично доказывается, что

$$Ker(i_*^{tr} : \pi_1(\partial D) \to \pi_1(D)) \cong Ker(\phi_2 : \pi_1(A \cap B) \to \pi_1(B)) \cong \mathbb{Z}$$

и принадлежит центру группы

$$\pi_1(\partial D) \cong \pi_1(\partial C) \cong \pi_1(A \cap B).$$

Из утверждения 4.3.8 следует, что если гомоморфизм $\phi_1 : \pi_1(A\cap B) \to \pi_1(A)$, индуцированный вложением, не является эпиморфизмом, то его образ имеет индекс 2, и мы легко найдем нетривиальный гомоморфизм $\pi_1(M) \to \mathbb{Z}_2$ и прийдем к противоречию с односвязностью M, как это уже проделывалось выше. Из аналогичных соображений гомоморфизм $\phi_2 : \pi_1(A \cap B) \to \pi_1(B)$ должен быть эпиморфизмом. Отсюда легко следует, что $\pi_1(A \cap B)$ порождается $Ker\ \phi_1 \cup Ker\ \phi_2$ (см. (4.4.1)), а значит

$$\pi_1(\partial C) \cong \pi_1(A \cap B) \cong \mathbb{Z}^2.$$

Более того

$$\pi_1(C) \cong \pi_1(D) \cong \mathbb{Z},$$

а типичный слой L как в C так и в D односвязен.

Шаг 4. Приведение к противоречию.

Напомним, что ∂C имеет конечнолистное регулярное изометрическое накрытие $p : M_0 \times T^2 \to \partial C$. Так как $\pi_1(\partial C) \cong \mathbb{Z}^2$ и образ при факторизации по действию G инвариантного тривиального расслоения $\hat{\xi}_1 : \hat{N} \to M_0 \times T^2 \to S^1$ является расслоением, то образ слоя $\hat{N} = M_0 \times S^1$ при факторизации по действию G перейдет в многообразие N, диффеоморфное расслоению над S^1 со слоем M_0. Действительно, заметим, что тривиальное слоение $M_0 \to M_0 \times T^2 \to T^2$ инвариантно при действии G, поэтому если слой $\hat{N} \simeq M_0 \times S^1$ инвариантен относительно некоторого $g \in G$, то проекция действия g на окружность не содержит неподвижных точек, иначе N будет иметь структуру слоения над орбиобразием, гомеоморфным отрезку, слои которого имеют конечную фундаментальную группу. В этом случае разрежем многообразие регулярным слоем и добавим к двум получившимся частям воротники, а затем применим последовательность Майера - Вьеториса. Так как каждый из кусков имеет гомотопический тип некоторого слоя, просто показать, что первые гомологии $H_1(N)$ должны быть конечными, что невозможно, так как из вышедоказанного следует, что $\pi_1(N)$ является бесконечной циклической группой $\mathbb{Z} \subset \pi_1(\partial C) = \mathbb{Z}^2$. Этим также доказывается, что мы имеем на ∂C структуру расслоения

$$\mu : M_0 \to \partial C \to T^2.$$

Ранее мы показали, что вложение

$$I : N^{r_1} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \subset E_{R_2} \times \mathbb{R}_{\geq 0}$$

является гомотопической эквивалентностью. Отсюда легко следует, что $N = N^{r_1}$ и E_{R_2} ограничивают в L компактное многообразие W, которое является h-кобордизмом. Верно даже большее, а именно, учитывая, что $Wh(\mathbb{Z}) = Wh(\mathbb{Z}^2) = 0$, из теоремы об s - кобордизме (для $n \geq 7$) получаем, что W диффеоморфно $S \times S^1 \times I$. Отсюда вложение $i : N \hookrightarrow W$ индуцирует диффеоморфизм $N \simeq S \times S^1$ и гомотопическую эквивалентность

$$M_0 \hookrightarrow N \hookrightarrow W \to S \times S^1 \xrightarrow{pr} S.$$

Напомним, что N является расслоением над S^1 со слоем M_0, а S – душа типичного слоя L, которая ему гомотопически эквивалентна.

Так как аналогичное справедливо и для блока D и $\pi_1(A \cap B)$ порождается $Ker\ \phi_1 \cup Ker\ \phi_2$, расслоения

$$\mu : M_0 \to \partial C \to T^2,$$

$$\xi : L \to \text{int } C \to S^1$$

и

$$\xi' : L \to \text{int } D \to S^1$$

являются гомологически простыми.

Замечание 4.5.3. *Заметим, что в пятимерном случае имеет место гомеоморфизм $\partial C \simeq S^2 \times T^2$. Это следует, например, из теоремы Хилмана [112, Cor. 6.11.1], утверждающей, что если M^4 замкнутое черырехмерное многообразие с $\chi(M^4) = 0$ и фундаментальной группой $\pi = \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}^2$ или $\mathbb{Z} \times_{-1} Z$ (фундаментальная группа бутылки Клейна), тогда M^4 определено с точностью до гомеоморфизма фундаментальной группой π и полным классом Штифеля -Уитни $w(M^4)$. Теперь заметим, что касательное расслоение $T\partial C$ есть ограничение $T\mathcal{F}$ на ∂C, поэтому так как $M \cong S^5$, то $w(T\mathcal{F}) = 0$. А равенство $\chi(K) = 0$ выполняется для любого компактного слоя трансверсально ориентируемого слоения коразмерности один замкнутого многообразия M (см. [69]). Отсюда $\partial C \cong S^2 \times T^2$.*

Из вида члена E_2 когомологической спектральной последовательности для

$$\xi : L \to C \to S^1$$

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\text{n-3} & \mathbb{R} & \mathbb{R} & 0 & \dots & 0 \\
\text{n-2} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & \mathbb{R} & \mathbb{R} & 0 & \dots & 0 \\
\hline
 & 0 & 1 & & & \dots
\end{array}
$$

и аналогичной спектральной последовательности для блока D, нетрудно видеть, что

$$H^{n-3}(D;\mathbb{R}) \simeq H^{n-3}(C;\mathbb{R}) \simeq H^{n-3}(L;\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}.$$

Двойственность Александера теперь нам дает

$$H_2(D;\mathbb{R}) \simeq H_2(C;\mathbb{R}) \simeq H_2(L;\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}.$$

Из вида члена E^2 гомологической спектральной последовательности расслоения μ:

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
\text{n-3} & \mathbb{R} & \mathbb{R}\oplus\mathbb{R} & \mathbb{R} & 0 & \dots \\
\text{n-2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
2 & \mathbb{R} & \dots & \dots & \dots & \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
0 & \mathbb{R} & \mathbb{R}\oplus\mathbb{R} & \mathbb{R} & 0 & \dots \\
\hline
 & 0 & 1 & 2 & & \dots
\end{array}
$$

учитывая, что μ гомологически просто, следует, что

$$H_2(\partial C;\mathbb{R}) \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R},$$

причем первая образующая является образом $p_* s$, а вторая образующая, взятая с кратностью $|G|$, является образом $p_*[T^2]$. Теперь рассмотрим композицию:

$$M_0 \times T^2 \xrightarrow{p} \partial C \xrightarrow{i} C.$$

Пусть $\alpha = i_* p_* s$ является образующей $H_2(C;\mathbb{R})$, где s это сферический класс, представляющий образующую $H_2(M_0;\mathbb{R})$. Предположим, что $Ker\ i_* p_*$ порождается элементом $[T^2] + ks,\ 0 \neq k \in \mathbb{R}$. Пусть l это наименьшая степень, когда $(\alpha^*)^l = 0$ для сопряженного класса α^*. Вспоминая, что $\alpha = i_* p_* s$, имеем:

$$0 = p^* i^* ((\alpha^*)^l) = (r(-k[T^2]^* + s^*))^l = -r^l lk[T^2]^* \smile (s^*)^{l-1} \neq 0,\ 0 \neq r \in \mathbb{R}.$$

Здесь мы учли, что $([T^2]^*)^2 = 0$ и четность классов $[T^2]^*$ и s^*. Заметим также, что если $(\alpha^*)^{l-1} \neq 0$, то и $(s^*)^{l-1} \neq 0$.

Аналогичные рассуждения верны и для блока D. Это противоречие показывает, что $k = 0$ и $p_*[T^2] \subset Ker(i_*^A, i_*^B)$ в последовательности Майера - Вьеториса

$$\dots \to H_3(M;\mathbb{R}) \to H_2(A \cap B;\mathbb{R}) \xrightarrow{(i_*^A, i_*^B)} H_2(A;\mathbb{R}) \oplus H_2(B;\mathbb{R}) \to H_2(M;\mathbb{R}) \to \dots$$

Таким образом $H_3(M;\mathbb{R}) \neq 0$ и мы приходим к противоречию с 3-связностью M. Теорема доказана.

4.6. Седловые слоения на трехмерных многообразиях

В этом разделе мы приведем способы построения седловых слоений на трехмерных многообразиях. В частности мы покажем, что существует риманова метрика на S^3 для которой слоение Риба является сильно седловым.

Двойственный поток.

Мы будем считать, что слоение трансверсально ориентируемо, C^2 гладко и имеет коразмерность один, а многообразие трехмерно.

Пусть L распределение касательное к $\mathcal{F}$, а $L^\perp$ – одномерное ориентируемое распределение ортогональное к $\mathcal{F}$. Определим проекции:

$$\pi^\perp : TM \to L^\perp,\ \pi : TM \to L.$$

Напомним, что вторая квадратичная форма слоения определяется следующей формулой:

$$B(X,Y) = g(\nabla_X Y, \xi), \tag{4.6.1}$$

где ξ единичное векторное поле ортогональное $\mathcal{F}$, ∇ обозначает связность Леви - Чивита на M, а $X, Y \in \Gamma L$ гладкие сечения L.

Для произвольного распределения также можно определить вторую фундаментальную $B(X,Y)$ форму, положив

$$B(X,Y) = \frac{1}{2} g(\nabla_X Y + \nabla_Y X, \xi)$$

На сечениях $X : |X| = 1$ вторая квадратичная форма, соответствующая симметричной билинейной форме B приобретает вид:

$$B(X,X) = g([X,\xi], X).$$

Вторую квадратичную форму слоения можно определить более геометрическим способом. А именно, пусть v касательный вектор к $\mathcal{F}_x$ в точке x и $\Phi = \{\Phi^t, t \in \mathbb{R}\}$ поток, индуцированный единичным векторным полем, касательным $\mathcal{F}^\perp$. Тогда

$$B(v,v) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt} g(\pi \circ d\Phi^t(v))|_{t=0}.$$

где $g(v) \coloneqq g(v,v)$.

Действительно:

$$\pi \circ [\xi, d\Phi(v)](x) = \pi \circ \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(v - d\Phi^t(\pi \circ d\Phi^{-t}(v)) =$$

$$\pi \circ \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(v - d\Phi^t(d\Phi^{-t} - \pi^\perp \circ d\Phi^{-t})(v) = \pi \circ \lim_{t\to 0} d\Phi^t(\pi^\perp \circ d\Phi^{-t}(v)) = 0.$$

Таким образом, мы имеем:

$$g([\xi, \pi \circ d\Phi(v)], \pi \circ d\Phi(v)) = 0$$

и

$$B(v) = -\frac{1}{2}\xi g(\pi \circ d\Phi(v))(x) = -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}g(d\Phi^t(v))|_{t=0}.$$

Классы слоений типа равенства можно эквивалентным образом охарактеризовать линейным потоком $\overline{d\Phi^t} := \pi \circ d\Phi^t$ следующим образом.

Слоение $\mathcal{F}$	Линейный поток $\overline{d\Phi^t}$
вполне геодезическое ($B \equiv 0$)	$\overline{d\Phi^t}$ является изометрией и $\mathcal{F}^\perp$ является римановым
гармоническое ($H \equiv 0$)	$\overline{d\Phi^t}$ сохраняет объем
вполне омбилическое ($B = \lambda G$)	$\overline{d\Phi^t}$ конформно

Заметим, что классы типа неравенства также имеют свой двойственный аналог:

Слоение $\mathcal{F}$	Линейный поток $\overline{d\Phi^t}$
сильно седловое ($K_e < 0$)	для каждого $x \in M$ и достаточно малого $t > 0$ существуют единичные векторы v, w касательные к $\mathcal{F}$ такие, что $$\lvert\overline{d\Phi^t}(v)\rvert \leq e^{-Ct}$$ и $$\lvert\overline{d\Phi^t}(w)\rvert \geq e^{Ct}$$
омбилически свободное ($B(x) \neq \lambda G(x)\ \forall x \in M$)	для каждого $x \in M$ и достаточно малого $t > 0$ существуют единичные векторы v, w, касательные к $\mathcal{F}$ такие, что $$\lvert\overline{d\Phi^t}(v)\rvert \geq e^{Ct}\lvert\overline{d\Phi^t}(w)\rvert$$

Изменение метрики

Вспомним, что распределение L и ортогональное к нему $L^\perp$ задают разложение $TM = L \oplus L^\perp$ в прямую сумму. Предположим, что существует другое распределение L' такое, что $TM = L' \oplus L^\perp$.

Тогда мы имеем изоморфизм $L \overset{\text{iso}}{=} TM/L^\perp \overset{\text{iso}}{=} L'$, который позволяет нам определить новую риманову метрику на M по следующей формуле:

$$g' := g_{L^\perp} \oplus g_{L'}. \tag{4.6.2}$$

Лемма 4.6.1. *Пусть ξ – единичное векторное поле, ортогональное $\mathcal{F}$, B' – вторая фундаментальная форма на L' в новой метрике g', определенной в (4.6.2), X – единичное векторное поле, касательное к L, и X' – проекция*

X на L' параллельно ξ. Тогда

$$B(X) = B'(X').$$

Доказательство. Напомним, что $B(X) = g([\xi, X], X)$. По определению новой метрики мы имеем $g([\xi, X], X) = g'([\xi, X]', X')$, где $(')$ определяет проекцию L' вдоль ξ. Поэтому

$$g'([\xi, X]', X') = g'([\xi, X' + f\xi]', X') = g'([\xi, X']', X') = B'(X')$$

∎

Прежде, чем сделать следствие из леммы, напомним следующие определения.

Определение 4.6.2. *Регулярный поток $\Phi = \{\Phi^t, t \in \mathbb{R}\}$ на римановом трехмерном многообразии M называется регулярным Аносовским потоком, если касательное расслоение TM имеет Φ^t-инвариантное расщепление $E^c \oplus E^s \oplus E^u$, где E^c касательно направлению потока и выполнено следующее:*

$$||d\Phi^t(v^s)|| \le e^{-\lambda t}||v^s||,$$

$$||d\Phi^{-t}(v^u)|| \le e^{-\lambda t}||v^u||$$

для всех $v^s \in E^s$, $v^u \in E^u$, где $t > 0$, $\lambda > 0$.

Определение 4.6.3. *Регулярный поток $\Phi = \{\Phi^t, t \in \mathbb{R}\}$ на римановом трехмерном многообразии называется регулярным проективным Аносовским потоком, если существует пара интегрируемых двумерных трансверсальных распределений $\{(E^u, E^s) : E^u \cap E^s = T\Phi\}$ инвариантных относительно потока Φ^t и константа $\lambda > 0$ такие, что*

$$||d\bar{\Phi}^t(v^u)||/||d\bar{\Phi}^t(v^s)|| \ge e^{\lambda t}||v^u||/||v^s||,$$

где $\bar{\Phi}^t$ поток на $TM/T\Phi$ индуцирован потоком Φ, $v^s \in E^s/T\Phi$, $v^u \in E^u/T\Phi$.

Замечание 4.6.4.

1. *Фундаментальная группа замкнутого 3-многообразия, допускающего Аносовский поток имеет экспоненциальный рост [113];*

2. *Не существует регулярного проективного Аносовского потока на S^3 [114].*

Теперь сформулируем следствие из леммы 4.6.1.

Следствие 4.6.5. *Пусть ξ единичное векторное поле, трансверсальное $\mathcal{F}$.*

1. *Если ξ порождает регулярный поток Аносова, тогда существует метрика на M, для которой $\mathcal{F}$ является сильно седловым.*

2. *Если ξ порождает регулярный проективный поток Аносова, тогда существует метрика на M в которой $\mathcal{F}$ является омбилически свободным.*

Примеры сильно седловых слоений

Первые хорошо известные примеры гармонического и сильно седлового слоения – это орисферические слоения на $PSL(2,\mathbb{R})$, построенные Аносовым как стабильное и нестабильное слоения, соответствующие геодезическому потоку на плоскости Лобачевского. Нетрудно показать, что в Терстоновской метрике стабильное и нестабильное слоения пересекаются по асимптотическим линиям. В соответствующем базисе, где одно из направлений является асимптотическим, мы получаем:

$$\overline{\mathbf{d\Phi^t}} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

После факторизации по кокомпактной группе изометрий, мы получим слоение на пространстве единичных касательных векторов к замкнутому многообразию постоянной отрицательной кривизны. Этот пример тщательно разобран в нашей кандидатской диссертации, поэтому, подробности мы оставляем.

Рассмотрим следующие расщепляющиеся групповые расширения:

$$0 \to \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \to 0$$

с действием $\mathbb{R}$ на $\mathbb{R}^2$ посредством матрицы $\mathbf{A}$:

1.
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$$

3.
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} cos(t) & -ksin(t) \\ \frac{1}{k}sin(t) & cos(t) \end{pmatrix} (k > 1)$$

Соответствующие левоинвариантные метрики, заданные в единице группы единичной матрицей, имеют матричный вид $G = (\bar{\mathbf{A}}^{-1})^* \bar{\mathbf{A}}^{-1}$, где

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

или:

1. $ds^2 = dz^2 + dy^2 + (dx - zdy)^2$ – (Nil -geometry)

2. $ds^2 = e^{-2z}dx^2 + e^{2z}dy^2 + dz^2$ – (Sol -geometry)

3. $ds^2 = (cos^2(z) + \frac{1}{k^2}sin^2(z))dx^2 + 2(k - \frac{1}{k})cos(z)sin(z)dxdy$

$+(cos^2(z) + k^2 sin^2(z))dy^2 + dz^2, \ (k > 1)$

Напомним формулу Кошуля для метрики Леви-Чевита g (см., например, [115]):

$$2g(\nabla_X Y) = Xg(Y,Z) + Yg(X,Z) - Zg(X,Y) \tag{4.6.3}$$

$$+g([X,Y],Z) + g([Z,X],Y) + g(X,[Z,Y])$$

Касательный репер $\{e_1, e_2\}$ к слоению $\mathcal{F}$, ортогональному векторному полю $\frac{\partial}{\partial z}$, получается применением матрицы $\bar{\mathbf{A}}$ к векторам $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, которые образуют касательный базис в единице соответствующей группы Ли, где метрика по определению имеет вид $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$. Прямыми вычислениями, применяя формулы (4.6.1) и (4.6.3) доказывается, что слоение $\mathcal{F}$ является сильно седловым на $\mathbb{R}^3$ с постоянной внешней кривизной, которая в первом случае равна $K_e = -\frac{1}{4}$, во втором $K_e = -1$ и в третьем случае $K_e = -\frac{(k^2-1)^2}{4k^2}$. В качестве компактных факторов мы получим все торические расслоения над S^1 с соответствующей матрицей склейки $\mathbf{A}$. В частности, как это не удивительно, в последнем случае мы получим тор T^3.

Все приведенные примеры построены на однородных $K(\pi,1)$ - многообразиях.

Сильно седловые слоения на S^3

Отождествим S^3 с группой Ли $SU(2)$. Определим структурные константы на алгебре Ли $su(2)$ выбирая следующий базис:

$$e_i = c_i[e_{i+1}, e_{i+2}]$$

$(i \bmod 3,\ 0 < c_1 < c_2 < c_3)$

Определим этот базис ортонормированным и разнесем его левыми сдвигами на всю группу $SU(2)$. Тогда распределение, задаваемое формой e_1^* будет иметь следующую вторую фундаментальную форму:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{c_3 - c_2}{2} \\ \frac{c_3 - c_2}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Построенное слоение является сильно седловым, а векторное поле e_1 – касательно слоям расслоения Хопфа. Ниже мы рассмотрим возмущение поля e_1 так, чтобы оно стало трансверсальным слоению Риба.

Рассмотрим параметризацию сферы S^3:

$$\begin{cases} x = cos(t)sin(\phi) \\ y = cos(t)cos(\phi) \\ z = sin(t)cos(\psi) \\ w = sin(t)sin(\psi) \end{cases}$$

$$0 \le t \le \frac{\pi}{2}$$

Предположим, что орбиты Φ^t задаются векторным полем

$$\frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{\partial}{\partial \psi}.$$

Нетрудно видеть, что орбиты Φ^t лежат на торах $t = const$.

Тор Клиффорда $t = \frac{\pi}{4}$ разбивает сферу S^3 на два полнотория, в каждом из которых зададим слоение, а именно, определим рибовскую компоненту (см. рис. 1.4) следующим образом. Слоение в первой рибовской компоненте определяется формой

$$\omega = f(t)dr + (1 - f(t))d\phi,$$

где $f(t)$ возрастает и $f(0) = 0; f(\frac{\pi}{4}) = 1$.

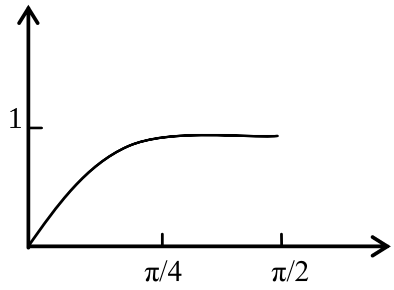

Рис. 4.2. График функции $f(t)$.

Во второй рибовской компоненте слоение определяется формой

$$\omega = g(t)dr + (1 - g(t))d\psi,$$

где $g(t) \coloneqq f(\pi/2 - t)$.

Теперь рассмотрим следующее возмущение векторного поля:

$$F(v) = \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{\partial}{\partial \psi} + \alpha(t, v)\frac{\partial}{\partial t}$$

где $\alpha(t, v)$ гладкая неотрицательная функция, положительная в окрестности $t = \frac{\pi}{4}$ при $v > 0$ и равная тождественно нулю при $v = 0$ (см. рис. 4.3).

Ясно, что $\omega(F(v)) > 0$ для каждого $v > 0$. Это означает, что при положительных v векторное поле $F(v)$ трансверсально слоению Риба. Так как $F(v)$ взято гладким, то для достаточно малых v распределение, ортогональное $F(v)$ остается седловым.

Используя лемму 4.6.1 получаем следующую теорему.

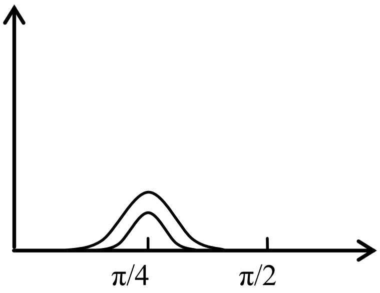

Рис. 4.3. Возмущение векторного поля.

Теорема 4.6.6. *На S^3 существует риманова метрика, такая, что слоение Риба является сильно седловым.*

Замечание 4.6.7. *Недавно в своей кандидатской работе аспирант А. Борисенко В. Круглов доказал существование седловых слоений на всех ориентируемых трехмерных многообразиях.*

В завершении главы сформулируем следующий интересный, до сих пор открытый вопрос, поставленный П. Вальчаком.

Вопрос (P. Walczak) *Допускает ли круглая сфера вполне омбилическое слоение*?

4.7. Слоения на T^2

В этом разделе мы найдем связь между гомотопическим типом распределения на римановом торе T^2, которое определяет некоторое C^2-слоение, с абсолютной кривизной этого слоения.

Гомотопические классы распределений на двумерном торе

Рассмотрим двумерный тор T^2, полученный факторизацией $\mathbb{R}^2$ по целочисленной решетке $\mathbb{Z}^2$, с заданным на нем одномерным слоением $\mathcal{F}$ класса

C^2. Заметим, что $\mathcal{F}$ не обязано быть ориентируемым, т.е. не всегда существует глобальное невырожденное векторное поле, касательное слоению. Однако всегда есть одномерное распределение, касательное слоению, которое задает сечение проективизации касательного расслоения PTT^2. Два распределения гомотопны, если они гомотопны в пространстве сечений PTT^2. Так как $PTT^2 \cong T^2 \times S^1$ (тривиализация предполагается канонически индуцированной из тривиализации $(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y})$ касательного расслоения $T\mathbb{R}^2$), то любое сечение $s : T^2 \to PTT^2$ можно представить следующим образом $s : T^2 \overset{id \times f}{\to} T^2 \times S^1$. Поэтому два сечения $s_1 : T^2 \overset{id \times f_1}{\to} T^2 \times S^1$ и $s_2 : T^2 \overset{id \times f_2}{\to} T^2 \times S^1$ гомотопны тогда и только тогда, когда гомотопны f_1 и f_2. Вспомним, что множество гомотопических классов отображений тора в окружность изоморфно группе

$$Hom(\pi_1(T^2), \mathbb{Z}) = H^1(T^2; \mathbb{Z}) = Z \oplus Z.$$

Поэтому каждое распределение с точностью до гомотопии определяется парой целых чисел (m, n). Естественно интерпретировать эти числа как вращение распределения вдоль образующих фундаментальной группы тора. Назовем эту пару чисел гомотопическим типом распределения. Заметим, что другой выбор образующих даст нам, вообще говоря, другую пару (m, n). Если зафиксировать гомотопический класс распределения, то ему соответствует гомоморфизм $\phi : \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, ядро которого нетривиально и представляется вложенной замкнутой кривой b. Можно взять замкнутую кривую a, гомологически двойственную b и выбрать образующие окружности (a, b) тора таким образом, чтобы вращение вдоль b было равно нулю. Иными словами, паре образующих (a, b) соответствует пара целых чисел $(\mu, 0)$. Так как $\phi(\pm[a] + k[b]) = \phi(\pm[a]) + k\phi([b]) = \phi(\pm[a]) = \pm\phi([a])$, то, с точностью до знака, μ не зависит от выбора a. Назовем $|\mu|$ *абсолютным числом вращения* данного распределения.

C^2 -слоения на торе

Рассмотрим полосу $\Sigma = [-1,1] \times \mathbb{R}$. Для $y \in \mathbb{R}$, пусть $f_y : (-1,1) \to \mathbb{R}$ определяется следующим образом:

$$x \to \frac{x^2}{1-x^2} + y.$$

Тогда существует C^∞ - слоение на Σ с двумя граничными слоями $x = -1$, $x = 1$ и графиками $f_y, y \in \mathbb{R}$, асимптотически стремящимися к граничным слоям. Так как построенное слоение инвариантно относительно параллельных переносов вдоль $\mathbb{R}$, то профакторизовав Σ по целочисленным сдвигам, получим слоение в кольце $\Sigma/\mathbb{Z} = [-1,1] \times S^1$, которое называется двумерной *рибовской компонентой* (см. рис. 4.4).

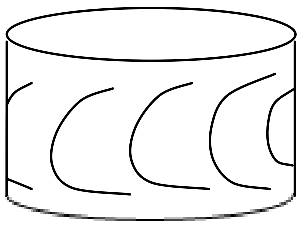

Рис. 4.4. Двумерная рибовская компонента.

Обратим внимание, что внутри кольца все слои гомеоморфны $\mathbb{R}$ и наматываются на граничные слои, являющиеся окружностями. Если мы заменим функцию $f_y : x \to \frac{x^2}{1-x^2} + y$ на $g_y : x \to -\frac{x^2}{1-x^2} + y$, то в итоге мы получим рибовскую компоненту, отличающуюся направлением намотки. Заметим, что поворот касательного распределения вдоль вертикального отрезка $[-1,1]$ в первом случае будет на $-\pi$, а во втором случае на π. В связи с этим нам удобно одной из рибовских компонент приписать знак +, а второй знак −. Заметим, что существует неориентируемое слоение на торе, имеющее лишь один компактный слой, разрезание по которому нам даст рибовскую компоненту. В этом случае мы скажем, что слоение имеет одну рибовскую компоненту.

Опишем еще один класс слоений на ориентируемых двумерных многообразиях, называемых *надстройкой*. Рассмотрим гладкое, сохраняющее ориентацию, действие группы $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$ на одномерном многообразии N, возможно с границей, оставляющее неподвижными граничные точки. Обозначим через $\Psi : \mathbb{Z} \to Diff_+(N)$ гомоморфизм, определяющий данное действие. Теперь рассмотрим диагональное свободное действие $\mathbb{Z}$ на $N \times \mathbb{R}$:

$$\Xi(z)(t, y) = (\Psi(z)(t), y + z).$$

Нетрудно видеть, что данное действие сохраняет слоение $N \times \mathbb{R}$ прямыми $t = const$. Поэтому, профакторизовав $N \times \mathbb{R}$ по действию Ξ, получим слоение на $(N \times \mathbb{R})/\Xi$, которое называется надстройкой (см. рис. 4.5).

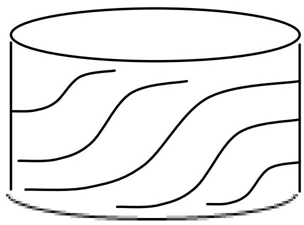

Рис. 4.5. Надстройка.

Так как действие Ψ сохраняет ориентацию, нетрудно убедиться, что $(N \times \mathbb{R})/\Xi \cong N \times S^1$. В частности, когда $N = S^1$, мы получим слоение на торе.

Слоения двумерных компактных многообразий хорошо изучены. Сформулируем две важные теоремы (см. [78]).

Теорема 4.7.1. *Пусть $(M^2, \mathcal{F})$ - компактная слоеная поверхность. Тогда имеет место только одна из следующих возможностей:*

- *Если $\mathcal{F}$ имеет компактный слой, то все слои являются собственными (т.е. являются вложенными подмногообразиями). При этом, множество компактных слоев компактно в M^2.*

- *$M^2 = T^2$ и $\mathcal{F}$ гомеоморфно надстройке.*

Замечание 4.7.2. *Если в теореме предполагать слоение C^2 - гладким, то во втором случае все слои будут всюду плотными в T^2. Это следует из известной теоремы Данжуа - Зигеля (см. [69]).*

Теорема 4.7.3. *Пусть $(S^1 \times I, \mathcal{F})$ - кольцо со слоением $\mathcal{F}$ касательным краю. Причем внутренность $S^1 \times I$ не содержит компактных слоев. Тогда $\mathcal{F}$ либо рибовская компонента, либо $\mathcal{F}$ гомеоморфно надстройке.*

Следствием этих двух теорем является следующая теорема.

Теорема 4.7.4. *Минимальное возможное число рибовских компонент слоения тора с касательным распределением заданного гомотопического типа (m, n) равно абсолютному числу вращения $|\mu|$ распределения. Причем если $m \neq 0$ и $n \neq 0$, то $|\mu| = HOD(m, n)$.*

Доказательство. Если слоение является надстройкой, то вращение распределения вдоль $N = S^1$ равно нулю, так как слоение везде трансверсально N. Чтобы понять почему вращение равно нулю вдоль другой образующей, достаточно задать метрику и вложение $i : S^1 \to N \times S^1$, относительно которой угол между вложенной кривой и слоением не будет превышать $\pi/2$.

Рассмотрим случай, когда слоение имеет компактный слой. Тор можно представить как цилиндр $I \times S^1$ с отождествленными краями, представляющими компактные слои слоения. Согласно пункту 1 теоремы 4.7.1 и теореме

4.7.3, цилиндр $I \times S^1$ гомеоморфен объединению конечного числа меньших цилиндров $I_i \times S^1$(блоков) пересекающихся по общему компактному слою, каждый из которых это либо рибовская компонента, либо надстройка, либо этот блок содержит бесконечное множество компактных слоев. Причем последний тип блока (особый блок) представляется цилиндрами, имеющими в основании предельный компактный слой, и может быть выбран сколь угодно малой высоты. Разбиение $I \times S^1 = \bigcup_i I_i \times S^1$ индуцирует разбиение $I = \bigcup_i I_i$. Вращение вдоль компактного слоя, являющегося образующей цилиндра b очевидно равно нулю. Чтобы оценить абсолютное число вращения распределения, достаточно найти вращение вдоль вертикальной образующей $a = I$. Нетрудно видеть, что вращение распределения вдоль I_i равно нулю, если i соответствует особому блоку, так как высоту блока можно сделать настолько малой, чтобы угол между распределением и a внутри блока не превосходила произвольно выбранного ε. Согласно сказанному выше, вращение вдоль I_i так же равно нулю, если i соответствует надстройке. Вращение же вдоль I_i - ых, соответствующих рибовским компонентам равно или 1 или -1, в зависимости от знака рибовской компоненты. Мы заключаем, что вращение вдоль a равно алгебраической сумме рибовских компонент. Теперь предъявим в каждом гомотопическом классе (m, n) касательное к слоению распределение, состоящее из рибовских компонент одного знака. Для этого достаточно взять слоение $\mathbb{R}^2$ интегральными траекториями векторного поля $(cos\ \pi(mx + ny), sin\ \pi(mx + ny))$ и профакторизовать по $\mathbb{Z}^2$.

Пусть $([a'], [b'])$ - представляют другую систему образующих фундаментальной группы. Тогда имеем:

$$[a] = A[a'] + C[b']$$

$$[b] = B[a'] + D[b'],$$

где

$$AD - BC = \pm 1. \tag{4.7.1}$$

Отсюда имеем

$$A\phi([a']) + C\phi([b']) = \mu$$

$$B\phi([a']) + D\phi([b']) = 0$$

Находим

$$\phi([a']) = \pm\mu D$$

$$\phi([b']) = \mp\mu B$$

Из условия (4.7.1) следует, что B и D - взаимно просты, поэтому

$$|\mu| = \text{НОД}(\phi([a']), \phi([b'])).$$

Теорема доказана. ■

Абсолютная кривизна слоения

Предположим, что на торе задана риманова метрика g. Вспомним, что локально можно определить кривизну (со знаком) слоения следующим образом: $k =< \nabla_{e_1} e_1, e_2 >$, где e_1 - единичное векторное поле касательное слоению, а e_2 - единичное нормальное векторное поле. К сожалению, мы не можем определить векторные поля глобально, так как в общем случае слоение неориентируемо. Однако, корректно определена на всем торе функция $|k|$. Заметим, что ограниченная на слой функция $|k|$ это в точности кривизна слоя. Наша задача по гомотопическому классу (m, n) касательного распределения оценить снизу абсолютную кривизну слоения, т.е. интеграл $\int_{T^2} |k| d\sigma$, где через $d\sigma$ обозначена форма объема метрики g. Докажем следующую теорему.

Теорема 4.7.5. *Пусть* $(T^2, \mathcal{F})$ *- двумерный тор с заданными слоением класса* C^2. *Предположим, что гомотопический тип касательного распределения есть* (m, n). *Тогда*

$$\int\limits_{T^2} |k| d\sigma \geq 2|\mu| l_{geod},$$

где $|\mu|$ *- абсолютное число вращения касательного распределения, а* l_{geod} *- длина глобально минимальной геодезической, представляющей класс замкнутой кривой на торе, в который переходит прямая* $mx + ny = 0$ *при факторизации* $\mathbb{R}^2$ *по* $\mathbb{Z}^2$.

Замечание 4.7.6. *Отметим, что все неравенства переходят в равенства для слоения, заданного распределением* $(cos\ \pi(mx + ny), sin\ \pi(mx + ny))$, *если метрика на торе является евклидовой, индуцированной из* $\mathbb{R}^2$.

Доказательство. Вспомним структурные уравнения Картана :

$$d\Theta_j = \sum_{i=1}^{2} \Theta_i \wedge \omega_j^i,$$

где (Θ_1, Θ_2) - двойственный базис 1- форм для (e_1, e_2), а

$$\omega_j^i(*) = < \nabla_* e_i, e_j >, \ i, j = 1, 2.$$

Из свойств связности Леви-Чевита ∇ следует, что $\omega_j^i = -\omega_i^j$. Отсюда легко следует, что

$$d\Theta_1 = < \nabla_{e_1} e_1, e_2 > \Theta_1 \wedge \Theta_2 = k d\sigma. \tag{4.7.2}$$

Оценим теперь интеграл $\int_{T^2} |k| d\sigma$. Из теоремы 4.7.4 следует, что если абсолютное число вращения распределения не равно нулю, то оно совпадает с минимально возможным числом рибовских компонент слоения. Поэтому, нам достаточно оценить интеграл по рибовским компонентам. Отметим, что рибовская компонента это ориентируемое слоение. Если задать глобальное поле реперов (e_1, e_2), где e_1 касательно, а e_2 ортогонально слоению, то граничные слои обязаны быть противоположно ориентированы. В случае одной рибовской компоненты, разрежем тор по компактному слою, и перейдем к интегрированию по цилиндру. Обозначим через R_i i - ю рибовскую компоненту, а через l_{1i} и l_{2i} длины соответствующих граничных слоев. Очевидно, что все компактные слои представляют один и тот же гомологический класс, иначе они бы пересекались. Пусть l_{geod} обозначает наименьшую замкнутую геодезическую в данном гомологическом классе. Применяя формулу Стокса, учитывая противоположную ориентацию граничных слоев, а так же (4.7.2), мы имеем:

$$\int_{T^2} |k| d\sigma \geq \sum_i \int_{R_i} |k| d\sigma \geq \sum_i |\int_{R_i} k d\sigma| \geq \sum_i |\int_{R_i} d\Theta_1|$$
$$= \sum_i (l_{1i} + l_{2i}) \geq 2\mu l_{geod}$$

Тот факт, что слоение, заданное интегральными траекториями векторного поля $(cos\ \pi(mx+ny), sin\ \pi(mx+ny))$ в $\mathbb{R}^2$, после факторизации по целочисленной решетке дает точное равенство в случае, когда тор наделен евклидовой метрикой следует из того, что все блоки это, в точности, рибовские компоненты одного знака с граничными геодезическими, соответствующие направлению $mx + ny = 0$. ∎

Следствие 4.7.7. *Пусть (T^2, g) - тор с некоторой римановой метрикой g на нем. Тогда для заданной константы C существует не более конечного числа гомотопических классов одномерных C^2 - распределений на T^2 таких, что касательное к распределению слоение $\mathcal{F}$ имеет слои, чья кривизна ограничена сверху неравенством $|k| < C$.*

Доказательство. Для двух разных метрик g и g' на T^2 изометрические универсальные накрытия $(\mathbb{R}^2, \widetilde{g})$ и $(\mathbb{R}^2, \widetilde{g}')$ обладают следующим свойством:

$$c\ \rho'(x,y) \geq \rho(x,y) \geq c'\ \rho'(x,y)$$

для любых $x, y \in \mathbb{R}^2$ и некоторых констант c, c'. Нетрудно видеть, что в евклидовой метрике длина замкнутой геодезической (l_{geod}), соответствующей направлению $mx + ny = 0$ равна $\frac{\sqrt{m^2+n^2}}{|\mu|}$. Поэтому из теоремы 4.7.5 имеем:

$$C\ Vol(T^2) \geq \int\limits_{T^2} |k| d\sigma \geq 2c'\sqrt{m^2+n^2}$$

Если на $\mathbb{Z}^2$ индуцировать стандартную евклидову метрику, то число гомотопических классов, удовлетворяющих вышеприведенному неравенству равно множеству целочисленных пар (a, b), находящихся в шаре радиуса $\frac{C\ Vol(T^2)}{2c'}$. ∎

4.8. Выводы к четвертой главе

В четвертой главе приводятся следующие результаты:

- показано, что универсальное накрытие полного риманова многообразия M с универсально равномерно стягиваемым слоением коразмерности 1 является стягиваемым;
- дана классификация ориентируемых замкнутых трехмерных многообразий, допускающих слоение коразмерности один неотрицательной кривизны, из которой, в частности, следует, что не все трехмерные сферические формы допускают слоение неотрицательной кривизны;
- доказано, что слоение коразмерности один неотрицательной кривизны Риччи на замкнутом многообразии является слоением почти без голономии;

- доказано, что $\pi_1(M^n)$ является почти полициклической, если слоение $\mathcal{F}$ коразмерности один неотрицательной кривизны Риччи на замкнутом многообразии M^n имеет слои с конечно порожденной группой или $\mathcal{F}$ является слоением неотрицательной секционной кривизны;

- дана топологическая характеризация плоских слоений;

- доказана обобщенная проблема Г. Штака, а именно показано, что 3-связное замкнутое многообразие не допускает слоения коразмерности один неотрицательной секционной кривизны;

- доказано, что трехмерная сфера допускает седловое слоение коразмерности один; построены примеры сильно седловых слоений на однородных 3-многообразиях;

- предъявлен метод построения седловых и омбилически свободных слоений, в частности, показано, что достаточным условием существования таких слоений в некоторой метрике является наличие трансверсального регулярного Аносовского и, соответственно, регулярного проективно Аносовского потоков;

- дана оценка снизу числа рибовских компонент по гомотопическому типу слоения на торе T^2;

- доказана конечность числа гомотопических типов слоений на T^2, имеющих кривизну слоев, ограниченную сверху фиксированной константой.

Глава 5

Геометрия отображений в E^n

В данной главе мы приведем некоторые результаты, связанные с топологическими препятствиями к существованию некоторых классов отображений в евклидово пространство. Результаты этой главы отражены в следующих работах автора: [15, 6, 2].

5.1. Отображения $\mathbb{Z}^p$ – пространств в E^n и гипотеза Коэна - Ласка

Рассмотрим стандартную сферу $S^n \subset E^{n+1}$, которая задается уравнением:

$$\sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1.$$

Известная теорема Улама-Борсука утверждает, что если рассмотреть произвольное непрерывное отображение $f : S^n \to \mathbb{R}^n$, то всегда найдется пара диаметрально противоположных точек $\{x, -x\} \in S^n$, таких что $f(x) = f(-x)$. Этот результат можно переформулировать следующим образом. Рассмотрим сферу, как $\mathbb{Z}_2$-пространство, т.е. пространство, на котором свободно действует группа $\mathbb{Z}_2$ следующим образом: образующая группы переводит точку в антиподальную. Тогда теорема Улама-Борсука утверждает, что любое непрерывное отображение переводит хотя бы одну орбиту действия группы в точку.

Естественно попытаться обобщить теорему Улама-Борсука на случай произвольного компактного G-пространства X для некоторой конечной группы G, скажем циклической группы $\mathbb{Z}_p$, свободно действующей на X. При этом спрашивается:

можно ли гарантировать, что для произвольного непрерывного отображения $f : X \to \mathbb{R}^n$ какая-то орбита или ее подмножество фиксированной мощности отобразится в одну точку?

Коэн и Ласк в [116] доказали следующую теорему.

Теорема 5.1.1. *Пусть X – паракомпактное хаусдорфово пространство, на котором действует группа $\mathbb{Z}_p$, где p - простое число. Пусть $f : X \to \mathbb{R}^n$ произвольное непрерывное отображение в n-мерное векторное пространство. Определим множество $A(f, q) = \{x \in X|$ существуют такие*

$$i_1, i_2 \dots i_q (0 \le i_1 < i_2 < \dots < i_q < p),$$

что $f(\sigma^{i_1} x) = f(\sigma^{i_2} x) = \dots = f(\sigma^{i_n} x)\}$, где σ обозначает образующую $\mathbb{Z}_p$. Тогда если $H^i(X) = 0$ для $0 < i < (n-1)(p-1) + q - 1$ и $q \ge (p+1)/2$ или $q = 2$, то $A(f, q) \ne \varnothing$.

Авторами приведенной теоремы высказывается следующая гипотеза:

Гипотеза 5.1.2. *Теорема верна без ограничения на q.*

Именно этот случай является первым, когда рассуждения, приведенные в [116] неприменимы. Докажем следующую теорему.

Теорема 5.1.3. *Гипотеза 5.1.2 имеет место в случае $q = (p-1)/2 = [p/2]$, $p \ge 11$.*

Доказательство. Приведем сначала доказательство в случае

$$n = 1, \; q = (p-1)/2.$$

Рассмотрим эквивариантное отображение $\psi : X \to \mathbb{R}^n$, равное

$$\psi(x) = (f(x), f(\sigma x), \dots = f(\sigma^{p-1} x)),$$

где $\mathbb{Z}_p$ действует на $\mathbb{R}^p$ циклической перестановкой координат. Обозначим через $G(\mathbb{R},p,q)$ следующее подмножество $\mathbb{R}^p$:

$$G(\mathbb{R},p,q) = \{(x_1,\dots,x_p)\forall\{x_{i_1},\dots,x_{i_q}\}, 0 < i_1 < \dots < i_q \le p,$$

минимум 2 точки различны$\}$.

Ясно, что если гипотеза не верна, то существует такое f, что

$$\psi(X) \subset G(\mathbb{R},p,q).$$

Напомним следующее определение:

Определение 5.1.4. *Индексом $N(Y)$ пространства Y со свободным действием группы $\mathbb{Z}_p$ на нем называется число*

$$\max_n\{\Psi^*(H^n(B\mathbb{Z}_p)) \ne 0 \text{ в } H^n(Y)\}$$

при эквивариантном отображении $\Psi : Y \to B\mathbb{Z}_p$ в классифицирующее пространство $B\mathbb{Z}_p$ группы $\mathbb{Z}_p$.

Напомним, что когомологические классы, являющиеся образами $H^*(B\mathbb{Z}_p)$ при индуцированном гомоморфизме $\Psi^* : H^*(B\mathbb{Z}_p) \to H^*(Y)$ называются характеристическими классами. Из свойств характеристических классов следует, что если $g : X \to Y$ эквивариантное отображение, то $N(X) \le N(Y)$. Таким образом наша задача доказать, что

$$N(G(\mathbb{R},p,[p/2])) = [p/2] - 2.$$

Прежде всего заметим, что существует естественное эквивариантное вложение

$$G(\mathbb{R},p,q) \hookrightarrow G(\mathbb{R},p,q+1),$$

поэтому по теореме 5.1.1 имеем

$$N(G(\mathbb{R},p,q)) \le N(G(\mathbb{R},p,q+1)) = q - 1.$$

Теперь наша задача сводится к тому, чтобы показать, что $N(G(\mathbb{R},p,q)) \neq q-1$.

Напомним рассуждения, приведенные в [116]. Пусть

$$r : \mathbb{R}^p \smallsetminus \{o\} \to S^{p-1}$$

стандартная радиальная деформационная ретракция $r \to r/\|r\|$. Обозначим образ ограничения r на $\mathbb{R}^p \smallsetminus G(\mathbb{R},p,q)$ через $K(p,q)$. Нетрудно видеть, что пространства $\mathbb{R}^p \smallsetminus G(\mathbb{R},p,q)$ и $K(p,q)$ гомотопически эквивалентны. Вычислим гомологии пространства $K(p,q)$ и воспользуемся двойственностью Александера. Для этого опишем пространство $K(p,q)$ через пространства $W(I,k,m)$, которые определяются следующим образом. Пусть

$$I = (i_1,\ldots,i_p), j \le k, 0 < i_1 < i_2 < \cdots < i_j \le p.$$

Длину слова I, которая равна j, будем обозначать $l(I)$. Если $I = \varnothing$, то $l(I) \equiv 0$. Пусть m – положительное целое число и $m \le p-k$. Положим

$$W(I,k,m) = \{(x,x,\ldots,y_1,x,x,\ldots,y_2,x,x,\ldots,\, y_k,x,x,\ldots,x)|x \in \mathbb{R},$$

y_s стоит на i_s месте, $s = 1,\ldots,j$, и между y_j и y_{j+1} стоит ровно m штук $x\}$.

Другими словами, координаты, которые не обязательно равны другим координатам (y_i), стоят на местах $i_1, i_2, \ldots, i_{j+m+1}$, а дальше могут стоять на произвольном из оставшихся месте. Ясно, что

$$K(p,q) = \cup_{t=0}^{q} W(\varnothing, p-q, t).$$

Вычислим гомологии $K(p,q)$, используя последовательность Майера-Вьеториса. Далее считаем $q = p-1/2$.

Лемма 5.1.5. *Для любого допустимого r имеем*

$$[\bigcup_{m=r+1}^{m_{max}} W(I,k,m)] \cap W(I,k,r) = [\bigcup_{m=r+1}^{m_{max}} W(I,k-1,m)] \cap B,$$

где $\dim B \le 2$ *и* $m_{max} = p - i_j - k + j$.

Доказательство. Заметим, что B состоит из двух слов, у которых одна координата z принимает произвольное значение, а из оставшихся $p-1$ координат $\frac{1}{2}(p-1)$ координат совпадают, принимая произвольное значение x, а остальные координаты совпадают и принимают произвольное значение y. ∎

Замечание 5.1.6. *Если $k < p-q$, то $B = \varnothing$.*

Лемма 5.1.7. *Для любого допустимого r имеем*

- $H_i(W(I,k,m)) = 0, 1 \leq i < k$, *если* $k < p-q$;
- $H_i(\bigcup_{m=r}^{m_{max}} W(I,k,m)) = 0, 1 \leq i < k$, *если* $k < p-q$.

Доказательство. Доказательство проведем индукцией по k. При $k = 0$ имеем 0-мерную сферу, для которой лемма верна. Пусть лемма верна при $k = s-1$. Докажем ее справедливость при $k = s$.

При фиксированном k доказательство проведем индукцией вниз по $l(I)$. В случае $l(I) = s$, лемма верна, так как в этом случае $W(I,s,m)$ это s-мерная сфера. Пусть лемма верна для всех J таких, что $l(J) \geq \rho$, и в нашем случае $l(I) = \rho - 1$.

Нетрудно видеть, что $W(I,k,m) = \bigcup_t (G,k,t)$, где $l(G) = l(I)+1$. По предположению индукции имеем, что $H_i(W(G,k,t))$ удовлетворяет утверждению леммы для всех допустимых t. Теперь применим индукцию вниз по r.

Ясно, что при $r = r_{max} (r_{max} = p - i_\rho - k + \rho)$ имеем

$$\bigcup_{t=r}^{r_{max}} W(G,k,t) = W(G,k,r_{max}) = S^k.$$

В этом случае лемма очевидно верна.

Допустим, что $H_i(\bigcup_{t=r+1}^{r_{max}} W(G,k,t)) = 0$ для $1 \leq i < k$. Покажем, что

$$H_i(\bigcup_{t=r}^{r_{max}} W(G,k,t)) = 0$$

для $1 \leq i < k$. Выпишем три члена a, b, c последовательности Майера-Вьеториса. Используя предыдущую лемму и замечание к ней имеем:

$$\dots \to H_i(\bigcup_{t=r+1}^{r_{max}} W(G,k,t)) \oplus H_i(W(G,k,r)) \to H_i(\bigcup_{t=r}^{r_{max}} W(G,k,t)) \to$$

$$H_i(\bigcup_{t=r+1}^{r_{max}} W(G,k-1,t)) \to \dots;$$

$a = 0$ по индукции, $c = 0$ также по индукции, если $i > 1$. А в случае $i = 1$ гомоморфизм (индуцированный вложением), отвечающий последней стрелке в последовательности является мономорфизмом. Таким образом доказан первый пункт утверждения леммы. Для доказательства второго пункта надо выписать ту же часть последовательности Майера-Вьеториса и заменить G на I. Тогда $a = 0$ по индукции и доказанному первому пункту леммы, а $c = 0$ по тем же соображениям, что и раньше. ■

Лемма 5.1.8.

- *$H_i(W(I, p-q, m)) = 0, 4 \leq i < p-q$;*
- *$H_i(\bigcup_{m=r}^{r_{max}} W(I, p-q, m)) = 0, 4 \leq i < p-q$.*

Доказательство. Доказательство проведем индукцией по $l(I)$. В случае, когда $l(I) = p-q$ лемма верна. В этом случае $W(I,s,m)$ это s-мерная сфера. Пусть лемма верна для всех J таких, что $l(J) \geq \rho$, и в нашем случае $l(I) = \rho - 1$. Нетрудно видеть, что

$$W(I, p-q, m) = \bigcup_t W(G, p-q, t),$$

где $l(G) = l(I) + 1$. По предположению индукции имеем $H_i(W(G, p-q, t))$ удовлетворяет первому пункту леммы для всех допустимых t. Теперь применим индукцию вниз по r. Ясно, что при $r = r_{max} = p - i_\rho - p - q + \rho$ имеем

$$\bigcup_{t=r}^{r_{max}} W(G, p-q, t) = W(G, p-q, r_{max}) = S^{p-q}.$$

В этом случае лемма, очевидно, верна.

Допустим, что $H_i(\bigcup_{t=r+1}^{r_{max}} W(G,p-q,t)) = 0$ для $4 \le i < p-q$. Покажем, что $H_i(\bigcup_{t=r}^{r_{max}} W(G,p-q,t)) = 0$ для $4 \le i < p-q$. Выпишем три члена a,b,c последовательности Майера-Вьеториса. Используя лемму 5.1.5 имеем

$$\cdots \to H_i(\bigcup_{t=r+1}^{r_{max}} W(G,p-q,t)) \oplus H_i(W(G,p-q,r)) \to H_i(\bigcup_{t=r}^{r_{max}} W(G,p-q,t))$$

$$H_i(\bigcup_{t=r+1}^{r_{max}} W(G,p-q-1,t) \cup B) \to \dots$$

$a = 0$ по индукции. Для элемента c снова выпишем три члена d,e,f последовательности Майера-Вьеториса:

$$\cdots \to H_{i-1}(\bigcup_{t=r+1}^{r_{max}} W(G,p-q-1,t)) \oplus H_{i-1}(B)$$

$$\to H_{i-1}(\bigcup_{t=r+1}^{r_{max}} W(G,p-q-1,t) \cup B)$$

$$\to H_{i-2}(\bigcup_{t=r+1}^{r_{max}} W(G,p-q-1,t) \cap B) \to \dots$$

Имеем $d = 0$ по лемме 5.1.7 и так как $\dim B \le 2$, а $f = 0$ так как

$$\dim[\bigcup_{t=r+1}^{r_{max}} W(G,p-q-1,t)] \cap B \le 1.$$

Отсюда $e = 0$ и, следовательно, $c = 0$, что и требовалось. Второй пункт леммы верен по тем же соображениям, что и второй пункт предыдущей леммы. ∎

Следствие 5.1.9. $H_i(K(p,q)) = 0$ *для* $4 \le i < p-q$.

Теперь воспользуемся двойственностью Александера и получим

$$H^i(G(\mathbb{R},p,q)) \cong H^i(S^{p-1} \setminus K(p,q)) \cong H_{p-i-1}(S^{p-1}, K(p,q)).$$

Из точной последовательности пары

$$\cdots \to H_{p-i-1}(S^{p-1}) \to H_{p-i-1}(S^{p-1}, K(p,q)) \to H_{p-i-1}(K(p,q)) \to \dots$$

видно, что $H^i(G(\mathbb{R},p,q)) = 0$, для $0 < i < q-2$, так как $\dim K(p,q) = p-q$. Кроме того $H^i(G(\mathbb{R},p,q)) = 0$, для $q-2 < i < p-5$ по двойственности Александера и следствию 5.1.9.

Чтобы оценить индекс, воспользуемся идеями, развитыми в [117]. Для этого рассмотрим спектральную последовательность накрытия

$$G(\mathbb{R},p,q) \to G(\mathbb{R},p,q)/\mathbb{Z}_p.$$

Член $E_2^{k,l}$, $(k,l \geq 2)$ спектральной последовательности равен

$$H^k(\mathbb{Z}_p; H^l(G(\mathbb{R},p,q))).$$

Ясно, что в нижней строке стоят когомологии $B\mathbb{Z}_p$.

Предположим, что $N(G(\mathbb{R},p,q)) = q-1$. Из сделанных выше оценок на группы когомологий пространства $G(\mathbb{R},p,q)$ и ограничений на p следует, что ниже строки, состоящей из элементов $E_2^{*,q-2}$, стоят нули. И выше минимум две строчки нулевые. Из [117] следует, что для каждого $r \geq 2$ существует элемент $u_r \in E_2^{2,0}$ такой, что чашечное умножение на u_r есть эпиморфизм групп $E_2^{k,l} \to E_2^{k+2,l}$ для $k,l \geq 0$. Нетрудно видеть, что $E_{q-1}^{q-1,0} \cong \mathbb{Z}_p$. Предположим, что для любых $t \in E_{q-1}^{0,q-2}$ имеем $d_{q-1}t = 0$, тогда

$$d_{q-1}(t \smile u_{q-1}) = d_{q-1}t \smile u_{q-1} \pm t \smile d_{q-1}u_{q-1} = 0.$$

Действительно, первое слагаемое равно нулю по предположению, а второе – u_{q-1} стоит в нижней строке и принадлежит ядру дифференциала d_{q-1}. Из эпиморфности умножения $\cup u_{q-1}$ имеем:

$$\bigcup_t t \smile u_{q-1} = E_{q-1}^{2,q-2}.$$

Поэтому если некоторый элемент $\tau \in E_{q-1}^{q-1,0}$ “не убивается”, то и элемент $\tau \smile u_{q-1} \in E_{q-1}^{q+1,0}$ “не убивается”. Все остальные дифференциалы d_r, $r > q-1$, действуют на $E_r^{q-1,0}$ и $E_r^{q+1,0}$ тривиально, поэтому если $E_\infty^{q-1,0} \neq 0$, то и

$E_\infty^{q+1,0} \neq 0$. А так как элементы $E_\infty^{k,0} \neq 0$ суть характеристические классы, то из предположения $N(G(\mathbb{R},p,q)) = n-1$ следовало бы, что $N(G(\mathbb{R},p,q)) \geq q+1$, что невозможно. Таким образом $N(G(\mathbb{R},p,[p/2])) \geq [p/2]-2$. Это завершает доказательство гипотезы Коэна - Ласка в случае $q = [p/2]$ и $n = 1$.

Для доказательства в случае произвольного n, воспользуемся следующим результатом:

Теорема 5.1.10 ([118]) *Пусть на паракомпактном пространстве X свободно действует группа $\mathbb{Z}_p$ и*

$$N(X) \geq (p-1)n.$$

Тогда для всякого непрерывного отображения $f : X \to \mathbb{R}^n$ множество точек, орбиты которых отображаются в одну точку, имеет индекс не ниже

$$N(X) - (p-1)n.$$

Завершим доказательство гипотезы для $q = [p/2]$ и произвольного n. Предположим, что $H^i(X) = 0$ для $0 < i < (n-1)(p-1)+q-1$. Рассмотрим сквозное отображение

$$h = pr \circ f : X \to \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-1},$$

где $pr : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-1}$ – стандартная проекция на первые $n-1$ координат. Из теоремы 5.1.10 немедленно следует, что множество точек, которые отображаются в одну точку относительно h имеют индекс как минимум $q-1$. Действительно, равенство нулю первых $(n-1)(p-1)+q-2$ (начиная с первой) групп гомологий означает, что

$$N(X) \geq (n-1)(p-1)+q-1.$$

Это следует напрямую из спектральной последовательности накрытия. Но тогда f отображает множество индекса $\geq q-1$ в прямую, являющуюся пробразом точки при отображении проекции pr. Таким образом задача сводится к одномерному случаю, который уже доказан. ∎

Замечание 5.1.11. *Гипотеза Коэна-Ласка не так давно была полностью положительно решена Воловиковым в [119].*

5.2. Изометрические погружения L^n в E^m.

Одним из фундаментальных вопросов геометрии в целом является вопрос о возможности изометрического погружения пространства Лобачевского L^n в евклидово пространство E^m большей размерности. Для некоторых целых чисел m и n ответ следует из классических теорем. Так например в случае $m = 3$ и $n = 2$ невозможность такого C^4-погружения гарантирует известная теорема Гильберта [120], которая распространяется C^2-погружения Милнором [121]. Если $m = 2k - 1$ и $n > k$, то невозможность погружения обеспечивает известная теорема Черна - Куйпера [122]. Если же $m = 2n - 1$, то можно показать, что нормальная связность является плоской и на L^n в каждой точке существуют ровно n главных направлений.

Ю.А. Аминов посвятил ряд работ этому интересному случаю [123], [124], [125]. Им было показано что линии кривизны можно взять в качестве координатных линий в случае когда нормальная связность является плоской.

В [123] показано, что на L^n можно ввести нормальные координаты такие, что координатные линии касаются главных направлений, а линейный элемент записывается в виде

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{n} sin^2\sigma_i du_i^2$$

При этом

$$\sum_{i=1}^{n} sin^2\sigma_i \leq 1$$

Рассмотрим на L^n метрику $d\rho^2 = ds^2 + \overline{ds}^2$, где $\overline{ds}^2$ – метрика Грассманова образа пространства L^n. В [123] показано, что $d\rho^2 = \sum_{i=1}^n du_i^2$, т.е. является евклидовой метрикой. Отсюда моментально следует, например, результат Ксавье [126] о том, что нельзя погрузить гиперболическое пространство, имеющее фундаментальную группу, содержащую $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$, с плоской нормальной связностью в евклидово пространство. Действительно, такая группа не может быть подгруппой изометрий евклидова пространства по известной теореме Бибербаха. Обратим внимание, что группа $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ большая в том смысле, что она имеет экспоненциальный рост, однако она не обязана быть большой в смысле макроскопической (даже асимптотической размерности), так как $\operatorname{asdim} \mathbb{Z} * \mathbb{Z} = 1$.

Ю. Николаевский в [127] обобщил данный результат и доказал, что нельзя погрузить в евклидово пространство гиперболическое пространство с плоской нормальной связностью, которое имеет нетривиальную фундаментальную группу. Противоречие здесь состоит в том, что в этом случае на универсальном накрывающем гиперболического пространства (т.е. на пространстве Лобачевского) найдется изометрия без неподвижных точек, являющаяся параллельным переносом в Евкидовой метрике и сдвигающая каждую точку не более чем на константу (в метрике Лобачевского). Однако известно, что такая изометрия должна быть тождественным преобразованием пространства Лобачевского.

Важным окрытым вопросом остается вопрос о возможности изометрического погружения с плоской нормальной связностью пространства Лобачевского в евклидово пространство без всяких предположений на фундаментальную группу.

Отметим также следующие результаты:

Ю.А. Аминов доказал невозможность изометрического погружения L^n

в E^m с плоской нормальной связностью когда кривые одного из семейств линий кривизны являются геодезическими. А результат Л.А. Масальцева [128] гласит, что не существует даже локально минимального изометрического погружения L^n в E^m с плоской нормальной связностью.

Теорема 5.2.1. *Не существует изометрического погружения L^n в E^m с плоской нормальной связностью и ограниченным модулем вектора средней кривизны.*

Доказательство. В [123] показано, что на L^n можно ввести нормальные координаты такие что координатные линии касаются главных направлений, а линейный элемент записывается в виде

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{n} \sin^2 \sigma_i du_i^2$$

При этом

$$\sum_{i=1}^{n} \sin^2 \sigma_i \leq 1$$

Если через L^p_{ij} обозначить коэффициенты второй фундаментальной формы, а через $\mathbf{n}_p$ – ортонормированный параллельный (в нормальной связности) базис нормалей то векторы нормальных кривизн равны

$$\mathbf{k}_i = \sum_{p=1}^{m-n} k_p \mathbf{n}_p = \sum_{p=1}^{m-n} \frac{L^p_{ii}}{g_{ii}} \mathbf{n}_p,$$

где $L^p_{ii} = \cos\sigma_i \sin\sigma_i \cos\phi_{ip}$, $g_{ii} = \sin^2\sigma_i$, а $\cos\phi_{ip}$ – направляющие косинусы относительно базиса нормалей $\mathbf{n}_p$. Тогда σ_i определяется из выражения

$$\operatorname{ctg}^2 \sigma_i = \sum_{p=1}^{m-n} \frac{(L^p_{ii})^2}{g^2_{ii}} = |\mathbf{k_i}|^2.$$

Вектор нормальной средней кривизны есть по определению сумма

$$H = \frac{\sum_{i=1}^{n} \mathbf{k_i}}{n}.$$

В [123] строится ортогональная по столбцам матрица

$$\begin{pmatrix} \sin\ \sigma_1 & \dots & \sin\ \sigma_n \\ \Phi_{11} & \dots & \Phi_{n1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \Phi_{1(m-n)} & \dots & \Phi_{n(m-n)} \end{pmatrix},$$

где $\Phi_{ip} = \cos\sigma_i \cos\ \phi_{ip}$. Отсюда следует, что

$$< k_i, k_j >= \operatorname{ctg}\sigma_i \operatorname{ctg}\sigma_j \sum_{p=1}^{p=m-n} \cos\phi_{ip}\cos\phi_{jp} = -1,$$

если $i \neq j$. В частности, мы имеем:

$$n^2 < H, H >=< \sum_{i=1}^{n} \mathbf{k}_i, \sum_{i=1}^{n} \mathbf{k}_i >= \sum_{i=1}^{n} |\mathbf{k}_i|^2 - n(n-1).$$

Если предположить ограниченность квадрата модуля вектора средней кривизны некоторым числом D, то квадраты длин векторов нормальных кривизн должны быть ограничены числом $n^2 D^2 + n(n-1)$. Это означает, что $\operatorname{ctg}^2\sigma_i = |\mathbf{k_i}|^2$, $i = 1, \dots, n$ - ограниченные сверху функции, следовательно фукции $\sin^2\sigma_i$, $i = 1, \dots, n$ отделены от нуля одной константой c^2.

Рассмотрим на L^n метрику $d\rho^2 = ds^2 + \overline{ds}^2$, где $\overline{ds}^2$ – метрика грассманова образа пространства L^n. В [123] показано что $d\rho^2 = \sum_{i=1}^{n} du_i^2$, т.е. является евклидовой метрикой, следовательно мы имеем:

$$c^2\ d\rho^2 \leq ds^2 \leq d\rho^2. \tag{5.2.1}$$

Зафиксируем две произвольные точки x, $y \in L^n$. Предположим, что γ_1 – кратчайшая от x к y в метрике ds^2, а γ_2 – кратчайшая от x к y в метрике

$d\rho^2$. Учитывая (5.2.1) имеем:

$$c\int\limits_{\gamma_2} d\rho \le c\int\limits_{\gamma_1} d\rho \le \int\limits_{\gamma_1} ds \le \int\limits_{\gamma_2} ds \le \int\limits_{\gamma_2} d\rho.$$

Это означает, что пространство Лобачевского L^n квазиизометрично евклидову пространству E^n, а это невозможно хотя бы потому, что квазиизометричные пространства должны иметь одинаковый рост объема шаров (см. [129]), но известно, что евклидово пространство имеет полиномиальный рост в отличии от экспоненциального роста пространства Лобачевского. Тем самым теорема доказана. ∎

5.3. Вложения S^2 в E^4

Этот подраздел посвящен частичному ответу на следующий вопрос, поставленный профессором Ю. Б. Зелинским (см. [130]).

Вопрос 5.3.1. *Существует ли континуум в E^4, имеющий гомотопический тип двумерной сферы и являющийся 2-выпуклым? Последнее означает, что через каждую точку вне континуума проходит двумерная плоскость, имеющая с континуумом пустое пересечение.*

Здесь мы даем частичный ответ на этот вопрос, а именно мы отвечаем на вопрос, поставленный профессором А. А. Борисенко, который переформулировал задачу для гладкого случая.

Теорема 5.3.2. *Пусть $S^2 \subset E^4$ двумерная сфера, C^2 - гладко вложенная в евклидово четырехмерное пространство E^4. Тогда найдется такая точка $x \in E^4$, что любая двумерная плоскость, проходящая через x, пересекает S^2. Иными словами, не существует 2-выпуклого вложения класса гладкости C^2 двумерной сферы S^2 в E^4.*

Доказательство. Сфера S^2 лежит в некотором шаре B^4, граница которого S^3 касается сферы S^2. Пусть $p \in S^3 \cap S^2$. Введем в E^4 евклидовы координаты $\{x^i,\ i = 1\dots4\}$ так, что точка p является началом координат, а координатный репер $\{e^i,\ i = 1\dots4\}$ обладает тем свойством, что $\{e^1, e^2\}$ определяет базис касательной плоскости сферы S^2 в точке p, а e^3 ортогонален касательной плоскости к S^3 в точке p. Тогда в некоторой окрестности U_p точки p сфера S^2 задается системой уравнений (см. [84]):

$$\begin{cases} x^3 = f(x^1, x^2) \\ x^4 = g(x_1, x_2) \end{cases}$$

где f – выпуклая функция (здесь мы воспользовались C^2-гладкостью). Это означает, что множество $\gamma_\varepsilon : f = \varepsilon$ определяет выпуклую кривую в трехмерной плоскости $\Pi : x^4 = 0$. Пусть Π_ε обозначает трехмерную плоскость $x^3 = \varepsilon$. Если ε достаточно мало, то кривая $\gamma = S^2 \cap \Pi_\varepsilon$ на сфере S^2 принадлежит U_p и однозначно проектируется в γ_ε при ортогональной проекции $E^4 \to \Pi$. Кроме того, γ лежит на цилиндре $f = \varepsilon$, который ограничивает выпуклое множество в Π_ε. Отсюда следует, что γ лежит на границе своей выпуклой оболочки $L_\gamma \subset \Pi_\varepsilon$.

Теперь будем рассуждать от противного. Предположим, что через всякую точку $x \in E^4 \setminus S^2$ проходит двумерная плоскость π_x такая, что

$$\pi_x \cap S^2 = \varnothing. \tag{5.3.1}$$

Рассмотрим два случая.

Случай 1. Предположим, что γ – плоская кривая, лежащая в некоторой двумерной плоскости $\alpha \subset \Pi_\varepsilon$. Тогда L_γ гомеоморфно двумерному диску, и для всякой точки $x \in \operatorname{int} L_\gamma$ пересечение $\pi_x \cap \Pi_\varepsilon$ есть прямая l_x, которая пересекает диск L_γ в одной точке x, где π_x удовлетворяет (5.3.1). В противном случае $\pi_x \cap \Pi_\varepsilon$ пересекает γ, что невозможно по предположению. Это означает, что γ представляет нетривиальный элемент фундаментальной группы

$\pi_1(E^4 \setminus \pi_x)$, так как косая проекция $p: E^4 \to \alpha$ параллельная π_x оставляет неподвижными точки α, и является деформационной ретракцией $E^4 \setminus \pi_x$ на $\alpha \setminus x$, а значит индуцирует изоморфизм фундаментальных групп. Однако ясно, что γ является представителем образующей группы $\pi_1(\alpha \setminus x) = \mathbb{Z}$. С другой стороны, γ стягивается по сфере $S^2 \subset \pi_1(E^4 \setminus \pi_x)$ в точку, так как сфера односвязна. Получаем противоречие.

Случай 2. Предположим, что γ – пространственная кривая, лежащая в трехмерной плоскости Π_ε. Тогда L_γ гомеоморфно трехмерному шару B, и для всякой точки $x \in \operatorname{int} L_\gamma$ пересечение $\pi_x \cap \Pi_\varepsilon$ есть прямая l_x, которая пересекает граничную сферу $S := \partial L_\gamma$ в двух точках. Заметим, что $\pi_x \cap \Pi_\varepsilon$ не может быть плоскостью, так как всякая плоскость, проходящая через x обязана пересекать γ. Кривая γ разделяет сферу S на два диска D_1, D_2. Допустим $\#(l_x \cap D_i) = 1$. Диск D_1 вместе с одним из дисков, на которые γ разбивает сферу S^2 образуют многообразие S', также гомеоморфное сфере. Мы можем считать, что l_x пересекает D_1 в гладкой точке y, если надо немного пошевелив π_x. Напомним, что гладкой точкой границы выпуклого множества называется точка границы, в которой имеется единственная опорная плоскость. Заметим, что почти все точки границы выпуклого множества гладкие [131]. Заменим S' гладким многообразим S'', аппроксимируя S' вне некоторого конуса с центром в y и осью l_x. Тогда S'' пересекает π_x трансверсально в единственной точке y. Теперь рассмотрим одноточечную компактификацию E^4, гомеоморфную S^4. При этом плоскость π_x компактифицируется в сферу $S''' \subset S^4$. По построению S'' и S''' пересекаются трансверсально в единственной точке. Напомним, что класс Тома ориентируемого p – мерного векторного расслоения E над гладким многообразием R это когомологический класс $\Phi(E) \in H^p_{DR}(E)$, ограничение которого на каждый слой F есть образующая старших когомологий с компактными носителями $H^p_c(F)$ слоя F. Как известно, класс Тома $\Phi(NR) \in H^p_{DR}(M)$ нормального расслоения NR к замкнутому ориентируемому подмногообразию R коразмерности p ориентируемого многообразия M является двойственным по Пуанкаре к R. Заметим, что NR естественно отождествляется с трубчатой окрестностью R [93]. А если подмногообразия R и S пересекаются трансверсально в том смысле, что для люой точки пересечения $x \in R \cap S$ имеем $T_xR + T_xS = T_xM$, то $\Phi(N_{R\cap S}) = \Phi(N_R \oplus N_S) = \Phi(N_R) \wedge \Phi(N_S)$. В нашем случае мы имеем $0 \neq \Phi(N_{S''\cap S'''}) = \Phi(N_{S''}) \wedge \Phi(N_{S'''})$, так как двойственный по Пуанкаре класс к точке в ориентируемом многообразии не нулевой и, более того, является образующей в старших когомологиях $H^n_c(M)$ (см. [93]). Однако, классы $\Phi(N_{S''})$ и $\Phi(N_{S'''})$ нулевые, так как они принадлежат тривиальной группе $H^2_{DR}(S^4)$. Мы получаем противоречие, а, значит, предположение, что $\#(l_x \cap D_i) = 1$ неверно. Поэтому, либо $\#(l_x \cap D_i) = 0$, либо $\#(l_x \cap D_i) = 2$.

Пусть $x \in D_1$, $y \in D_2$ – гладкие точки границы S выпуклого тела L_γ, а π_x и π_y – плоскости, удовлетворяющие (5.3.1). Так как x и y принадлежат L_γ, пересечения $\Pi_\varepsilon \cap \pi_x$ и $\Pi_\varepsilon \cap \pi_y$ должны быть прямыми, которые мы обозначим l_x и l_y соответственно. Если l_x и l_y оказались лежащими в опорных плоскостях T_x и T_y для L_γ, то, сколь угодно мало пошевелив π_x и π_y, найдем плоскости π'_x и π'_y по-прежнему удовлетворяющие (5.3.1) и пересекающие Π_ε по прямым l'_x и l'_y так, что $l'_x \cap T_x = x$ и $l'_y \cap T_y = y$. Так как T_x и T_y являются касательными конусами в x и y соответственно, то l'_x и l'_y имеют непустое пересечение с $\mathrm{int}\ L_\gamma$. Пусть I – отрезок, соединяющий точки $x_1 \in l'_x \cap \mathrm{int}\ L_\gamma$ и $x_2 \in l'_y \cap \mathrm{int}\ L_\gamma$. Представим I в виде объединения $I = C_1 \cup C_2$, где C_i определяются следующим образом: $x \in C_i$, если существует плоскость π_x, удовлетворяющая (5.3.1) такая, что $l_x \cap S \subset D_i$. Так как по построению $C_i \neq \varnothing$ и, кроме того, C_i являются открытыми множествами, а отрезок I связен, то существует точка $x \in C_1 \cap C_2$. Пусть π_1, π_2 – плоскости, удовлетворяющие (5.3.1), такие, что $\pi_1 \cap \pi_2 = x$ и пересекающие Π_ε по прямым l_1,

l_2 соответственно, таким, что $l_i \cap S \subset D_i$.

Определим плоскость $\pi_\varepsilon := \Pi_\varepsilon \cap \Pi =$

$$\begin{cases} x^3 = \varepsilon \\ x^4 = 0 \end{cases}$$

Заметим, что плоскость π_{12} , натянутая на l_1, l_2 пересекает γ минимум в четырех точках. А так как кривая γ однозначно проектируется в выпуклую кривую γ_ε относительно ортогональной проекции $r : \Pi_\varepsilon \to \pi_\varepsilon$, образ $r(\pi_{12})$ не может вырождаться в прямую, так как прямая пересекает выпуклую кривую максимум в двух точках. Пусть $\bar{n}$ – нормаль к π_ε, $\bar{x}$ – радиус - вектор точки x, а $\bar{v}_1$ – направляющий вектор прямой l_1. Рассмотрим семейство плоскостей π_1^t, проходящих через некоторую точку $x_1 \in \pi_1 \setminus l_1$ с радиусом-вектором $\bar{x}_1$ параллельно векторам $\bar{x} + t\bar{n} - \bar{x}_1$ и $\bar{v}_1$. При $t = 0$ мы имеем исходную плоскость π_1, а при малых t мы добъемся того, что π_1^t и π_2 по прежнему удовлетворяют (5.3.1), находятся в общем положении, а $\pi_1^t \cap \Pi_\varepsilon$ и $\pi_2 \cap \Pi_\varepsilon$ есть непересекающиеся прямые $l_1^t \subset \Pi_\varepsilon$ и $l_2 \subset \Pi_\varepsilon$ такие, что $\#(l_1^t \cap D_1) = \#(l_2 \cap D_2) = 2$. В зависимости от знака t одна из прямых l_1 или l_2 проходит выше относительно проекции на плоскость π_ε. Предположим, при $t > 0$ реализуется случай, показанный на рис. 5.1.

Заметим, что пространство $\Pi_\varepsilon \setminus (l_1^t \cup l_2)$ гомотопически эквивалентно евклидовой плоскости без двух точек. Чтобы построить соответствующую гомотопию, мы сначала должны гомеоморфно отобразить Π_ε в себя так, чтобы прямые стали параллельны, а затем продеформировать образ $\Pi_\varepsilon \setminus (l_1^t \cup l_2)$ на ортогональную прямым плоскость с двумя выколотыми точками. Детали мы опустим. Поэтому фундаментальная группа $\Pi_\varepsilon \setminus (l_1^t \cup l_2)$ совпадает с фундаментальной группой плоскости без двух точек, и равна свободной

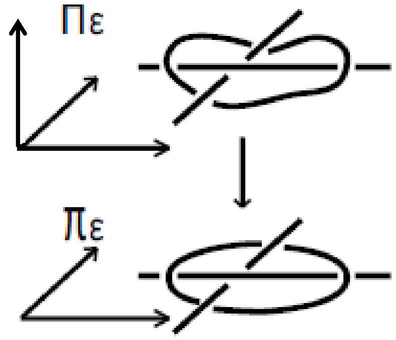

Рис. 5.1. Проекция на плоскость.

группе с двумя образующими. То есть

$$\pi_1(\Pi_\varepsilon \setminus (l_1^t \cup l_2)) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}.$$

Пусть γ_a, γ_b - замкнутые кривые, представляющие образующие a, b фундаментальной группы $\pi_1(\Pi_\varepsilon \setminus (l_1^t \cup l_2))$.

Рассмотрим случай $t > 0$. В этом случае $\gamma \simeq \gamma_a \circ \gamma_a'$, а $\gamma_a' \simeq \gamma_b \circ \gamma_a^{-1} \circ \gamma_b^{-1}$ (см. рис. 5.2). То есть γ представляет нетривиальный элемент $aba^{-1}b^{-1}$ фундаментальной группы $\pi_1(\Pi_\varepsilon \setminus (l_1^t \cup l_2))$.

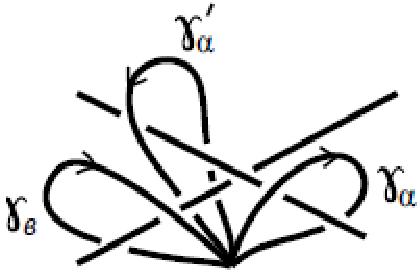

Рис. 5.2. Образующие фундаментальной группы.

Положим $E^4_+ = \{(x^1,\ldots,x^4) : x^3 \geq \varepsilon\}$ и $E^4_- = \{(x^1,\ldots,x^4) : x^3 \leq \varepsilon\}$. Заметим, что кривые $\Pi_\varepsilon \cap S^2$ связны и стягиваются к точке $\Pi_0 \cap S^2$ при $\varepsilon \to 0$. Это означает, что один из дисков, на которые кривая γ разбивает S^2 лежит в E^4_-, а другой диск лежит в E^4_+. Вспомним, что плоскости π_1^t и π_2 находятся в общем положении и имеют единственную точку пересечения, которую мы обозначим z. Пусть $z \in E^4_-$. Так как ретракция

$$r : E^4_+ \setminus (\pi_1^t \cup \pi_2) \to \Pi_\varepsilon \setminus (l_1^t \cup l_2),$$

сопоставляющая точке $e \in E^4_+$ пересечение прямой l_e, проходящей через точки e и z, с плоскостью Π_ε, является деформационной ретракцией, то γ представляет нетривиальный элемент группы

$$\pi_1(E^4_+ \setminus (\pi_1^t \cup \pi_2)).$$

Но, как отмечалось выше, один из дисков, на которые γ разбивает сферу S^2, лежит в E^4_+. А так как по построению $S^2 \cap (\pi_1^t \cup \pi_2) = \varnothing$, то $[\gamma] = 0$ в $\pi_1(E^4_+ \setminus (\pi_1^t \cup \pi_2))$. Мы пришли к противоречию. Случай, когда $z \in E^4_+$ рассматривается аналогично и также приводит к противоречию. Значит, предположение о том, что через каждую точку $x \in E^4$ вне S^2 проходит плоскость π_x такая, что $\pi_x \cap S^2 = \varnothing$, неверно, и теорема доказана. ∎

Замечание 5.3.3. *Можно показать (см. [130]), что для двумерного тора данная теорема уже не верна. Примером является стандартный тор Клиффорда*

$$T^2 \subset S^3 \subset E^4.$$

5.4. Выводы к пятой главе

В пятой главе приведены доказательства ряда утверждений, в которых найдены топологические и макроскопические препятствия к существованию специальных классов отображений в евклидово пространство. Доказано следующее:

- в специальном случае приведено доказательство гипотезы Коэна-Ласка о частичной склейке орбиты $\mathbb{Z}_p$-пространства при отображении его в евклидово пространство;
- доказано, что не существует изометрического погружения L^n в E^m с плоской нормальной связностью и ограниченным модулем вектора средней кривизны;
- частично решена проблема, поставленная профессором Ю. Б. Зелинским, а именно, показано, что не существует 2-выпуклого вложения двумерной сферы S^2 в четырехмерное евклидово пространство E^4.

Выводы

Диссертация посвящена изучению топологических, гомотопических и макроскопических инвариантов римановых многообразий и их отображений. Одним из топологических инвариантов замкнутого риманова многообразия является макроскопическая размерность его универсального накрытия, введенная Михаилом Громовым. В данной диссертационной работе полностью решена гипотеза Громова о падении макроскопической размерности универсального накрытия замкнутого многообразия, а именно, гипотеза подтверждена в 3-мерном (теорема 3.1.1) и вполне неспиновом (теорема 3.4.11) случаях, и опровергнута в многомерном спиновом случае (теорема 3.2.1); частично решена гипотеза Громова о макроскопической размерности универсального накрытия замкнутого PSC-многообразия (теорема 3.3.4), в частности, гипотеза подтверждена для спиновых многообразий с абелевой фундаментальной группой. Основным толчком в решении гипотезы Громова в спиновом случае послужила найденная автором связь между препятствием к существованию PSC-метрики, т.е. обобщенным индексом оператора Дирака, и теорией препятствий. Во вполне неспиновом случае при решении гипотезы Громова о падении макроскопической размерности была успешно применена теория перестроек.

Следующим фундаментальным вопросом, поднятым в диссертации, является описание топологии замкнутых римановых многообразий, допускающих слоение коразмерности один неотрицательной кривизны. Удалось показать, что слоения неотрицательной кривизны Риччи являются слоениями почти без голономии (утверждение 4.3.1). Это позволило разбить многообразие на блоки и, используя знание макроскопической геометрии и топологии слоев, описать топологическую структуру блоков, в частности их фундаментальную группу. В случае неотрицательной секционной кривизны оказалось, что после склейки таких блоков мы не сможем получить 3-связное многообразие (теорема 4.5.1), в частности, сферу размерности большей трех. Таким образом, дан исчерпывающий ответ на вопрос, поставленный Г. Штаком о возможности существования слоения коразмерности один неотрицательной секционной кривизны на сферах. В трехмерном случае дана классификация замкнутых ориентируемых многообразий, допускающих слоение неотрицательной кривизны (теорема 4.2.1), из которой следует, например, что не все сферические формы допускают слоение неотрицательной кривизны.

Доказано, что фундаментальная группа замкнутых римановых многообразий, допускающих слоение коразмерности один неотрицательной кривизны Риччи должна быть почти полициклической, при условии, что фундаментальная группа слоев конечно порождена. Показано, что при этом асимптотическая размерность фундаментальной группы многообразия не должна превосходить размерности многообразия и равна размерности тогда и только тогда, когда слоение является плоским. Была дана еще одна характеризация плоских слоений среди слоений неотрицательной кривизны Риччи, а именно показано, что слоение является плоским тогда и только тогда, когда многообразие асферично (теорема 4.4.1).

В диссертации рассмотрены вопросы, связанные с внешней геометрией слоений на трехмерных многообразиях. В частности, доказано, что для некоторой метрики на трехмерной сфере слоение Риба является сильно седловым. Это доказывает, что рибовская компонента не является препятствием для седловых слоений (теорема 4.6.6), как например, в случае гармонических слоений, которые являются седловыми и не могут реализоваться на сфере. Предъявлена конструкция построения таких слоений и на других, в частности, на однородных трехмерных многообразиях. В частности, показано, что достаточным условием сущесствования седловых и омбилически свободных слоений в некоторой метрике является наличие трансверсального регулярного Аносовского и, соответственно, регулярного проективно Аносовского потоков;

Исследован вопрос о связи гомотопического типа распределения, касательного слоению на торе с абсолютной кривизной этого слоения. Дана оценка снизу абсолютной кривизны. Введено понятие абсолютного числа вращения распределения. Доказано, что это число ограничивает снизу число рибовских компонент слоения. Доказана конечность гомотопических типов распределений, касательных слоению, кривизна слоев которых ограничена сверху общей константой (теорема 4.7.5 и следствие из нее).

Также в диссертации исследован вопрос топологических и макроскопических препятствий к существованию некоторых классов отображений в евклидово пространство. В специальном частном случае доказана гипотеза Коэна-Ласка о частичной склейке орбиты свободного $\mathbb{Z}_p$-пространства при отображении в евклидово пространство (теорема 5.1.3). Доказана невозможность изометрического погружения с плоской нормальной связностью пространства Лобачевского в евклидово пространство при условии ограниченности длины вектора средней кривизны (теорема 5.2.1). Дан частичный ответ на вопрос, поставленный проф. Ю. Б. Зелинским о существовании 2-выпуклого вложения континуума гомотопического типа двумерной сферы в четырехмерное евклидово пространство, а именно, доказана невозможность 2-выпуклого C^2- гладкого вложения двумерной сферы S^2 в E^4 (теорема 5.3.2).

Все основные результаты диссертации приведены с полными и строгими математическими доказательствами. Полученные результаты носят теоретический характер. Многие конструкции и методы предложенные в диссертации могут быть использованы в теории гладких многообразий, теории слоений и близких вопросах геометрической топологии.

Литература

1. Болотов Д.В. О некоторых гиперслоениях пространств положительной кривизны /Д.В. Болотов// Доповіді НАН України. – 2000. – Т. 8. – С. 7–10.
2. Болотов Д.В. Гипотеза Коена-Ласка /Д.В. Болотов// Математические заметки. – 2001. – Т. 70. – С. 22–26.
3. Bolotov D. Macroscopic dimension of 3-Manifolds /D. Bolotov// Math. Physics, Analysis and Geometry. –2003. – Vol. 6. – P. 291 –299.
4. Bolotov D. Extrinsic geometry of foliations on 3-Manifolds /D. Bolotov// Foliations - 2005. Proc. of the Int Conf., Lodz, Polland, June 13-24, 2005. – Lodz, 2006. – P. 109–120.
5. Bolotov D. Gromov's macroscopic dimension conjecture /D. Bolotov// Algebraic & Geometric Topology. –2006. – Vol. 6. – P. 1669–1676.
6. Болотов Д.В. Об изометрическом погружении с плоской нормальной связностью пространства Лобачевского L^n в Евклидово пространство E^{n+m} /Д.В. Болотов// Математические заметки. – 2007. – Т. 82. – С. 11–13.
7. Болотов Д.В. Слоения неотрицательной кривизны на замкнутых трехмерных многообразиях /Д.В. Болотов// Мат. Сб. – 2009. – Т. 200:3. – С. 3–16.
8. Bolotov D. About the macroscopic dimension of certain PSC-manifolds /D. Bolotov// Algebraic & Geometric Topology. –2009. – Vol. 9. – P. 21–27.
9. Bolotov D. On Gromov's scalar curvature conjecture / D. Bolotov, A. Dranishnikov// Proc. Amer. Math. Soc.. –2010. – Vol. 138. – P. 1517– 1524.
10. Болотов Д.В. Об универсально равномерно стягиваемых слоениях коразмерности 1 /Д.В. Болотов // Доповіді НАН України. – 2010. – Т. 9.

– С. 7–9.

11. Болотов Д.В. О структуре слоений коразмерности один неотрицательной кривизны / Д.В. Болотов // Современные проблемы математики, механики и информатики. – Х.: Апостроф, 2011. – С. 324–331.
12. Болотов Д.В. Абсолютная кривизна слоений на торе /Д.В. Болотов // Современные проблемы математики и механики. Изд-во Московского университета. – 2011. – Т. VI: 2. – С. 171–175.
13. Болотов Д.В. О макроскопической размерности неспиновых многообразий /Д.В. Болотов// Доповiдi НАН України. – 2011. – Т. 7. – С. 7–11.
14. Болотов Д.В. Топология слоений неотрицательной кривизны на пятимерных многообразиях /Д.В. Болотов// Доповiдi НАН України. – 2012. – Т. 12. – С. 7–12.
15. Болотов Д.В. О вложениях S^2 в E^4 /Д.В. Болотов // Доповiдi НАН України. – 2013. – Т. 11. – С. 19–22.
16. Болотов Д.В. Топология плоских слоений коразмерности один / Д.В. Болотов// Доповiдi НАН України. – 2013. – Т. 9. – С. 16–21.
17. Болотов Д.В. Топология слоений коразмерности 1 неотрицательной кривизны /Д.В. Болотов// Мат. сб. – 2013. – Т. 204, No 5. – С. 3–24.
18. Болотов Д.В. Топология слоений коразмерности 1 неотрицательной кривизны, II /Д.В. Болотов// Мат. сб. – 2014. – Т. 205, No 10. – С. 3–18.
19. Болотов Д.В. О слоениях сфер /Д.В. Болотов// Доповiдi НАН України. – 2014. – Т. 8. – С. 7–13.
20. Болотов Д.В. Топология слоений неотрицательной кривизны на пятимерных многообразиях II /Д.В. Болотов // Доповiдi НАН України. – 2014. – Т. 5. – С. 7–10.

21. Болотов Д.В. Характеризация плоских слоений /Д.В. Болотов// Доповіді НАН України. – 2014. – Т. 12. – С. 12–17.

22. Bolotov D. Macroscopic dimension of 3- Manifolds /D. Bolotov// Second Russian-German Geometry Meeting dedicated to 90-anniversary of A.D. Alexandrov : in Book of abstracts, June 16-23, 2002. – St-Petersburg (Russia), 2002. – P. 12.

23. Bolotov D. Four dimensional hyperfoliations of nonnegative curvature /D. Bolotov// International Conference Geometry and Foliations: in Book of abstracts, September 10-19, 2003. – Kyoto (Japan), 2003. – P. 102–108.

24. Болотов Д.В. Слоения неотрицательной кривизны/ Д.В. Болотов// 5-а Міжнародна конференція з геометрії і топології пам'яті О.В. Погорелова: тези. доп., Черкаси, 2003. – С. 16.

25. Болотов Д.В. Об изометрическом погружении пространства Лобачевского в Евклидово пространство с плоской нормальной связностью / Д.В. Болотов// 6-а Міжнародна конференція з геометрії та топології: тези доп., Черкаси, 2005. – С. 8–9.

26. Bolotov D. Saddle foliations on 3-Manifolds /D. Bolotov // International conference on Global Differential Geometry, Munster, 14-19 August. Munster, Germany, 2006. URL: `http://geo06.uni-muenster.de/download/SectionFri24.pdf`.

27. Болотов Д.В. Слоения неотрицательной кривизны на замкнутых 3-многообразиях / Д.В. Болотов// 7-а міжнародна конференція з геометрії та топології: тези доп., Черкаси, 2007. – С. 6.

28. Bolotov D. Macroscopic dimension of Manifolds /D. Bolotov// International conference «Algebraic Topology: Old and New M. M. Postnikov Memorial Conference»: in Book of abstracts, June 18-24, 2007, – Bedlewo, Polland, 2007. – P. 25.

29. Болотов Д.В. Слоения неотрицательной кривизны / Д.В. Болотов// Международная конференция "Геометрия "в целом топология и их приложения посвященная 90-летию со дня рождения А. В. Погорелова: сб. тез., Харьков, 2009. – С. 8–9.
30. Bolotov D. The Gromov's macroscopic dimension conjecture for PSC - manifolds and a fundamental group /D. Bolotov// International conference «Geometric Group theory — Davis 60». Bedlewo, Polland, 2009. URL: http://www.math.uni.wroc.pl/ggt/davis09/talks/Bolotov.txt.
31. Болотов Д.В. Абсолютная кривизна слоений на торе /Д.В. Болотов// Сборник тезисов международной конференции «Метрическая геометрия поверхностей и многогранников» посвященная 100-летию со дня рождения Н.В.Ефимова: сб. тез., 18-21 августа 2010. – Москва, 2010. – С. 13.
32. Болотов Д.В. Слоения неотрицательной кривизны /Д.В. Болотов// Международная конференция «Современные проблемы математики и ее приложения в естественных науках и информационных технологиях»: сб. тез., 17-22 апреля 2011. – Харьков, 2011. – С. 139.
33. Bolotov D. Foliations of nonnegative curvature on 3-Manifolds /D. Bolotov// International conference «Low dimensional Topology and Geometry in Toulouse on the occasion of Michel Boileau' s 60 birthday»: in Book of abstracts, June 24-28, 2013, – Toulouse, France, 2013. – P. 12.
34. Болотов Д.В. О слоениях неотрицательной кривизны /Д.В. Болотов// 8-а міжнародна конференція з геометрії, топології та викладання геометрії: тези доп., 9-15 вересня 2013 р. – Черкаси, 2013. – С. 9.
35. Bolotov D. Inessentiality of PSC-manifolds / D. Bolotov// II International Conference Analysis and Mathematical Physics: in Book of abstracts, June 16-20, 2014. – Kharkov, 2014. – P. 9.

36. Болотов Д.В. О макроскопической размерности вполне неспиновых многообразий /Д.В. Болотов , А.Н. Дранишников// Тезисы докладов международной конференции «Геометрия в Одессе-2014». Одесса, 26 мая – 31 мая 2014 г. – С. 25.

37. Bolotov D. On characterization of flat foliations /D. Bolotov// International conference «Torus Actions in Geometry, Topology, and Applications»: in Book of abstracts, February 16-21, 2015, – Skolkovo, Moscow, 2015. – P. 13.

38. Myers S. B. Riemannian manifolds with positive mean curvature /S. Myers// Duke Mathematical Journal. – 1941. – Vol. 8 , No 2. – P. 401–404.

39. Браун К. Когомологии групп./К. Браун. – Москва: Наука, 1987.–384 с.

40. Bishop R. A relation between volume, mean curvature, and diameter /R. Bishop// Amer. Math. Soc. Not. – 1963. – Vol. 10. – P. 364.

41. Топоногов В.А. Метрическое строение римановых пространств неотрицательной кривизны /В.А. Топоногов// Сиб.мат.ж. – 1964. – Т. 5:6. – С. 1358–1369.

42. Cheeger J. The splitting theorem for manifolds of nonnegative Ricci curvature /J. Cheeger, D. Gromoll// J. Diff. Geom. – 1971. – Vol. 6. – P. 119–128.

43. Cheeger J. On structure of complete manifolds of nonnegative curvature /J. Cheeger, D. Gromoll// Ann. Math. – 1972. – Vol. 96. – P. 413–443.

44. Milnor J. A Note on Curvature and Fundamental Group /J. Milnor// J. Differential Geometry. – 1968. – Vol. 2. – P. 1–7.

45. Gromov M. Groups of polynomial grows and expanding map /M. Gromov// Publ. IHES. – 1981. – Vol. 53. – P. 53–78.

46. Wilking B. On fundamental groups of manifolds of nonnegative curvature /B. Wilking// Differential Geom. Appl. – 2000. – Vol. 13, No 2.

– P. 129–165.

47. Gromov M. Positive scalar curvature and the Dirac operator on complete Riemannian manifolds /M. Gromov, H. Lowson// Publ. Math. I.H.E.S. – 1983. – Vol. 58. – P. 295–408.

48. Rosenberg J. Metric of positive scalar curvature and connection with surgery / J. Rosenberg, S. Stolz// Surveys on Surgery Theory, Princeton University Press. – 2001. – Vol. 2. – P. 353–386.

49. Lichnerowicz A. Spineurs harmoniques /A. Lichnerowicz// C. R. Acad. Sci. Paris Ser. A–B. – 1963. – Vol. 257. – P. 7–9.

50. Atiyah M.F. The index of Elliptic Operators on Compact Manifolds /M.F. Atiyah, I.M. Singer // Bull. Amer. Math. Soc. 1963. – Vol. 69 , No 3. – P. 422–433.

51. Lawson H.B. Spin Geometry. /H.B. Lawson, M.L. Michelsohn. – Princeton: Princeton University Press, 1989. – 427 p.

52. Hitchin N. Harmonic Spinors /N. Hitchin// Adv. In Math. – 1974. – Vol. 14, No 1. – P. 1–55.

53. Rosenberg J. C*-algebras, positive scalar curvature, and the Novikov conjecture /J. Rosenberg// Publ. Math. I.H.E.S. – 1983. – Vol. 58. – P. 197–212.

54. Каспаров Г.Г. Операторный K-функтор и расширения C*-алгебр /Г.Г. Каспаров// Изв. АН СССР. Сер. Матем. – 1963. – Т. 44:3. – С. 571–636.

55. Schick T. A counterexample to the (unstable) Gromov-Lawson-Rosenberg conjecture /T. Schick// Topology. – 1998. – Vol. 37, No 6. – P. 1165–1168.

56. Bartels A. Squeezing and higher algebraic K-theory /A. Bartels// K-theory. – 2003. – Vol. 28. – P. 19–37.

57. Dranishnikov A. An Etale approach to the Novikov conjecture /A. Dranishnikov, S. Ferry, S. Weinberger// Pure Appl. Math. – 2008. – Vol. 61,

No 2. – P. 139–155.

58. Yu G. The Novikov conjecture for groups with finite asymptotic dimension /G. Yu// Ann. of Math. – 1998. – Vol. 147, No 2. – P. 325–355.
59. Schoen R. On the structure of manifolds with positive scalar curvature /R. Schoen, S.T. Yau// Manuscripta Math. – 1979. – Vol. 28. – P. 159–183.
60. Rosenberg J. Manifolds of positive scalar curvature: a progress report./ J. Rosenberg. – Sur-veys in differential geometry, XI, 259294, Surv. Differ. Geom. 11, Int. Press, Somerville, MA, 2007. – P. 259–294.
61. Gromov M. Positive curvature, macroscopic dimension, spectral gaps and higher signatures, Functional analysis on the eve of the 21st century./ M. Gromov. – Vol. II. Prog. Math. 132, Birkhauser, Boston, MA, 1996. – P. 1–213.
62. Whitehead J.H.C. On C^1-Complexes /J.H.C.Whitehead// Ann. of Math. – 1940. – Vol. 41, No 4. – P. 809–824.
63. Dranishnikov A. On Macroscopic dimension of rationally essential manifolds /A. Dranishnikov// Geometry & Topology. – 2011. – Vol. 15. – P. 1107– 1124.
64. Dranishnikov A. Macroscopic dimension and essential manifolds /A. Dranishnikov/// Тр. МИАН. –2011. – Vol. 273. – P. 41– 53.
65. Gromov M. Asymptotic invariants of infinite groups, Geometric Group Theory. / M. Gromov. – Vol 2. Cambridge University Press, 1993. – 295 p.
66. Bell G. Asymptotic dimension. / G. Bell, A. Dranishnikov. – arXiv: math/0703766, 2007. – 49 p.
67. Hirsch K.A. On infinite soluble groups (I) /K.A. Hirsch// Proc. London Math. Soc. – 1938. – Vol. 44, No 2. – P. 53–60.
68. Hirsch K. A. On infinite soluble groups (II) /K.A. Hirsch// Proc. London Math. Soc. – 1938. – Vol. 44, No 2. – P. 336–414.

69. Тамура И. Топология слоений. / И. Тамура. – Москва: Мир, 1979. – 317 с.
70. Reeb G. Sur certaines proprietes toplogiques des varietes feuilletees. / G. Reeb. – Actualité Sci. Indust. 1183, – Paris: Hermann, 1952. – 157 p.
71. Cantwell J. Reeb stability for noncompact leaves in foliated 3-Manifolds /J. Cantwell, L. Conlon// Proc. Amer. Math. Soc. – 1981. – Vol. 83, No 2. – P. 408–410.
72. Thurston W. A generalization of the Reeb stability theorem /W. Thurston// Topology. – 1974. – Vol. 13. – P. 347–352.
73. Plante J. Polinomial growth in holonomy groups of foliations /J. Plante, W. Thurston// Comment. Math. Helvetici. – 1976. – Vol. 51. – P. 567–584.
74. Nishimori T. Compact leaves with abelian holonomy /T. Nishimori// Tohoku Math. Journ. – 1975. – Vol. 27. – P. 259–272.
75. Новиков С.П. Топология слоений /С.П. Новиков// Тр. Моск. мат. о-ва. – 1965. – Т. 14. – С. 249–278.
76. Imanishi H. Structure of codimension one foliations which are almost without holonomy /H. Imanishi// J. Math. Kyoto Univ. – 1976. – Vol. 313. – P. 93–99.
77. Plante J.F. On the existence of exceptional minimal sets in foliations of codimension one /J.F. Plante// J. Different. Equat. – 1974. – Vol. 15. – P. 178–194.
78. Hector G. Introduction to the geometry of foliations, / G. Hector, U. Hirsch. – Part B. Second Edition. – Braunschweig Wiesbaden: Friedr. Vieweg & Sohn, 1987. – 297 p.
79. Stuck G. Un analogoue feuillete du theoreme de Cartan-Hadamard /G. Stuck// C.R. Acad. Sci. Paris. – 1991. – Vol. 313. – P. 519–522.

80. Lamoureux C. Groupes d'homologie et d'homologie d'ordre superieur des variétés compactes ou non compactes feuiletées en codimension 1 /C. Lamoureux// C.R. Acad. Sci. Paris. – 1975. – Vol. 280, No 7. – P. 411–414.

81. Adams S. Splitting of non-negatively curved leaves in minimal sets of foliations /S. Adams, G. Stuck// Duke Math. Journal. – 1993. – Vol. 71. – P. 71–92.

82. Adams S. Nonnegative curved leaves in foliations /S. Adams, A. Freire// J. Diff.Geom. – 1991. – Vol. 34, No 3. – P. 681–700.

83. Plante J.F. Foliations with Measure Preserving Holonomy /J.F. Plante// Ann. of Math. – 1975. – Vol. 102, No 2. – P. 327– 361.

84. Борисенко А.А. Внутренняя и внешняя геометрия многомерных подмногообразий./ А.А. Борисенко. – Москва: Экзамен, 2003. – 672 с.

85. Аминов Ю.А. Геометрия векторного поля. /Ю.А. Аминов. – Москва: Наука, 1990. – 208 с.

86. Sullivan D. A homological characterization of foliations consisting of minimal surfaces /D. Sullivan// Comment. Math. Helv. – 1979. – Vol. 54, No 2. – P. 218–223.

87. Johnson D. Totally geodesic foliations /D. Johnson, L. Witt// J. Diff. Geom. – 1980. – Vol. 15. – P. 225–235.

88. Ghys E. Umbilical foliations and transversely holomorphic flows /E. Ghys, M. Brunella// J. Diff. Geom. – 1995. – Vol. 41. – P. 1–19.

89. Фоменко А.Т. Курс гомотопической топологии. / А.Т. Фоменко, Д.Б. Фукс. – Москва: Наука, 1989. – 528 с .

90. Milnor J. Lectures on the h-cobordism theorem./ J. Milnor. – Princeton Univ. Press, 1965. – 116 p.

91. Rudyak Y. On Thom spectra, orientability, and cobordism./ Y. Rudyak. –

Springer, 1998. – 590 p.

92. Eilinberg S. On the Lusternik–Schnirelmann category of abstract groups /S. Eilinberg, T. Ganea// Ann. of Math. – 1957. – Vol. 65;3. – P. 517–518.

93. Ботт Р. Дифференциальные формы в алгебраической топологии./ Р. Ботт, Л. Ту. – Москва: Наука, 1989. – 336 с.

94. Dranishnikov A. On Gromov's positive scalar curvature conjecture for virtual duality groups /A. Dranishnikov// Journal of Topology and Analysis. – 2014. – Vol. 6, No 3. – P. 397–419.

95. Roe J. Lectures on coarse geometry /J. Roe// University Lecture Series, AMS. – 2003. – Vol. 31. – P. 1–175.

96. Cohen M. A course in simple-homotopy theory. / M. Cohen. – Graduate Texts in Mathematics, – Vol. 10. – New York-Berlin: Springer-Verlag, 1973. – 114 p.

97. Freedman M. Teichner 4-manifold topology /M. Freedman, P. Teichner// Invent. Math. – 1995. – Vol. 3. – P. 509–529.

98. Farrell F. The Topological-Euclidean Space Form Problem /F. Farrell, W. Hsiang// Inventiones math. – 1978. – Vol. 45. – P. 181–192.

99. Milnor J. A unique decomposition theorem for 3-manifolds /J. Milnor// Amer. Journal of Math. – 1962. – Vol. 84. – P. 1–7.

100. Evans B. Solvable fundamental groups of compact 3-manifolds /B. Evans, L. Moser// Trans. Amer. Math. Soc. – 1972. – Vol. 168. – P. 189–210.

101. Stallings J. On fibering certain 3-manifolds. Topology of 3-manifolds and related topics /J. Stallings// Prentice Hall. – 1962. – P. 95–100.

102. Скотт П. Геометрии на трехмерных многообразиях./ П. Скотт. – Москва: Мир, 1983. – 168 с.

103. Hatcher A. Notes on Basic 3-Manifold Topology./ A. Hitcher. – Preprint,

2007. – 72 p.

104. Milnor J. Characteristic classes./ J. Milnor, J. Stasheff. – Princeton: Princeton University Press, 1974. – 331 p.
105. Hatcher A. Algebraic Topology./ A. Hitcher. – Cambridge University Press, 2001. – 556 p.
106. Dranishnikov A. Cohomological approach to asymptotic dimension /A. Dranishnikov// Geom. Dedicata. – 2009. – Vol. 141, No 1. – P. 59–86.
107. Wall C.T.C. Geometricall connectivity I /C.T.C. Wall// J. London Math. Soc. – 1971. – Vol. s2-3 (4). – P. 597– 604.
108. Бессе А. Многообразия Эйнштейна, II. / А. Бессе. – Москва: Мир, 1990. – 384 с.
109. Rosenberg H. Reeb foliations /H. Rosenberg, R. Roussarie// Trans. Ann. Math. – 1970. – Vol. 91. – P. 1–24.
110. Kon-Fossen S. Kürzeste Wege und Totalkrümmung auf Flächen /S. Kon-Fossen// Compositio Mathematics. – 1935. – Vol. 2. – P. 69–133.
111. Масси У. Алгебраическая топология. Введение./ У. Масси, Д. Столлингс. – Москва: Мир, 1977. – 340 с.
112. Hillman J. Four-manifolds, geometries and knots /J. Hillman// Geometry & Topology. – 2002. – Vol. 5.
113. Mitsumatsu Y. Foliations and contact structures on 3-Manifolds /Y. Mitsumatsu// Foliations: Geometry and Dynamics (Warsaw 2000). N.J.: Word Scientific Publishing Co. Inc., River Edge, 2002. – P. 75–125.
114. Asaoka M.A. A classification of three dimensional regular Projectively Anosov flows /M.A. Asaoka// Proc. Japan Acad., Ser A Math. Sci. – 2004. – Vol. 80, No 10. – P. 194 –197.
115. Кузаконь В. М. Гладкі многовиди. Геометричні та топологічні аспек-

ти./ В.М. Кузаконь, В.Ф. Кириченко, О.О. Пришляк. – Київ: Національна академія наук України. Інститут математики, 2013. – 500 с.

116. Cohen F. Configuration-like spaces and the Borsuk–Ulam Theorem /F. Cohen, E.L. Lusk// Proc. Amer. Math. Soc. – 1976. – Vol. 56. – P. 313–317.

117. Cohen F. Coinsidence point result for spaces with free $\mathbb{Z}^p$-action /F. Cohen, E.L. Lusk// Proc. Amer. Math. Soc. – 1975. – Vol. 49, No 1. – P. 245–252.

118. Воловиков А.Ю. Отображения свободных $\mathbb{Z}^p$ -пространств в многообразия /А.Ю. Воловиков// Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1982. – Т. 46, No 1. – С. 36–55.

119. Воловиков А.Ю. О теореме Коэна-Ласка /А.Ю. Воловиков// Фунд. и прикл. матем. – 2007. – Т. 13, No 8. – С. 61–67.

120. Hilbert D. Uber Flachen von konstanter Gausscher Krummung /D. Hilbert// Trans. Amer.Math. Soc. – 1901. – Vol. 2. – P. 87–99.

121. Milnor T.K. Efimov's theorem about complate immersed surfaces of negative curvature /T.K. Milnor// Advances in Math. – 1972. – Vol. 8. – P. 474–543.

122. Chrn S. Some theorems on isometric imbedding of compact Riemann manifold in Eucldean space /S. Chrn, S. Kuiper// Ann. Math. – 1956. – Vol. 56. – P. 422–430.

123. Аминов Ю.А. Изометрические погружения с плоской нормальной связностью областей n-мерного пространства Лобачевского в евклидово пространство. Модели теории поля /Ю.А. Аминов// Мат. сб. – 1988. – Т. 137. – С. 275–299.

124. Аминов Ю.А. Итоги науки и техники. Проблемы геометрии /Ю.А. Аминов// Мат. сб. – 1982. – Т. 13. – С. 1– 19–157.

125. Аминов Ю.А. Изометрические погружения области в 3-мерном пространстве Лобачевского L^3 в евклидово пространство E^5 и движение

твердого тела /Ю.А. Аминов// Мат. сб. – 1983. – Т. 122. – С. 12–30.

126. Xavier F. A non-immersion theorem for hyperbolic manifolds /F. Xavier// Comment. Math. Helv. – 1985. – Vol. 60. – P. 280–283.

127. Nikolajevky Y. A non-immersion theorem for a class of hyperbolic manifolds /Y. Nikolajevky// Diff. Geometry and Appl. – 1998. – Vol. 8. – P. 239–243.

128. Масальцев Л.А. О минимальных подмногообразиях постоянной кривизны в евклидовом пространстве /Л.А. Масальцев// Известия ВУЗов. – 1998. – Т. 436. – С. 64–65.

129. Бураго Д.Ю. Курс метрической геометрии./ Д. В. Бураго, Ю.Д. Бураго, С.В. Иванов. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004. – 512 с.

130. Зелинский Ю.Б. Выпуклость. Избранные главы./ Ю.Б. Зелинский. – Киев: Инст. математики НАН Украины, 2012. – 280 с.

131. Лейхтвейс К. Выпуклые множества./ К. Лейхтвейс. – Москва: Наука, 1985. – 336 с.