Національна академія наук України
Фізико-технічний інститут низьких температур ім. Б.І.Вєркіна

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

Рибалко Володимир Олександрович

УДК 517.9

ДИСЕРТАЦІЯ

ІСНУВАННЯ І АСИМПТОТИЧНА ПОВЕДІНКА РОЗВ'ЯЗКІВ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

Спеціальність 01.01.03 – "Математична фізика"
(Фізико-математичні науки)

Подається на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук
Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

_____________ В.О. Рибалко

Харків – 2019

АНОТАЦІЯ

Рибалко В.О. Існування і асимптотична поведінка розв'язків задач математичної фізики. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.03 – математична фізика (Фізико-математичні науки).– Фізико-технічний інститут низьких температур ім. Б.І.Вєркіна Національної академії наук України, Харків, 2019.

У дисиртаційній роботі розглянуто некомпактні варіаційні задачі для функціонала Гінзбурга-Ландау з заданими степенями відображення на межі області і побудовано нову теорію таких задач; розвинено методи дослідження спектральних задач для сингулярно збурених несиметричних еліптичних операторів; також досліджено деякі задачі усереднення і вивчено біфуркацію розв'язків типу біжних хвиль для задачі з вільною межею, що моделює рух живих клітин на субстраті.

У першому розділі вивчаються варіаційні задачі для функціонала Гінзбурга-Ландау у класі комплекснозначних функцій з одиничними абсолютними значеннями на межі і заданими степенями відображення на її зв'язних компонентах. Відомо, що такі задачі є некомпактними. Зокрема, у випадку однозв'язної області і заданого ненульового степеня відображення інфімум спрощеного функціонала Гінзбурга-Ландау ніколи не досягається для ненульових значень параметра Гінзбурга-Ландау κ, відповідні мінімізуючи послідовності будуються за допомогою конформних відображень Мебіуса або скінченних добутків Бляшке з нулями, що збігаються до межі. Проте для всіх двозв'язних областей і малих κ або всіх κ і областей чия ємність є не меншою π, в роботі Л. Берлянда і П. Міронеску (2006) було доведено існування мінімізантів з заданими одиничними степенями на обох компонентах межі. В дисертаційній роботі розглянуто випадок областей з ємністю меншою π і доведено існування скінченного порогового значення параметра Гінзбурга-Ландау, такого що інфімум функціонала завжди досягається якщо κ є меншим

порогового значення і ніколи не досягається якщо κ є більшим цього значення. Як і в випадку однозв'язної області неіснування мінімізантів пов'язано з мінімізуючими послідовностями з нулями, що збігаються до межі області. На основі цих результатів можна висунути гіпотезу (яку втім не доведено), що глобальних мінімізантів або не існує або вони не мають нулів (вихорів). На відміну від глобальних мінімізантів, показано, що існують інші критичні точки функціонала, які мають вихорі. Зокрема в роботі розвинено варіаційні методи доведення існування локальних мінімізантів з вихорами для достаньо великих κ і вивчено асимтотичну поведінку цих мінімізантів у границі Лондонів $\kappa \to \infty$. Доведено, що вихори знаходяться біля межі і в їх околах акумулюються скінченні квантовані єнергії, на відміну від внутрішніх вихорів, які виникають в задачі Діріхле. Ці результати розповсюджено і на випадок повного функціонала Гінзбурга-Ландау, що враховує магнітні ефекти. Крім того для повного функціонала Гінзбурга-Ландау в однозв'язних областях доведно теорему, що повністю описує існування/неіснування глобальних мінімізантів з заданим степенем на межі. Показано, що, на відміну від спрощеного функціонала, мінімізанти існують для $0 < \kappa \leq 1/\sqrt{2}$ і не існують для $\kappa > 1/\sqrt{2}$. Порогове значення $\kappa = 1/\sqrt{2}$ відоме в фізичній літературі як межа розділу між надпровідниками I-го і II-го роду. У четвертому підрозділі розглянуто задачу мінімізації повного функціонала Гінзбурга-Ландау в двозв'язній області з заданими одиничним і нульовим степенями на компонентах межі. Доведено, що як і в однозв'язній області мінімізанти існують для $0 < \kappa < 1/\sqrt{2}$, але для $\kappa = 1/\sqrt{2}$ (і більших) інфімум не досягається. Це призводить до сингулярної асимптотичної поведінки мінімізантів при $\kappa \to 1/\sqrt{2} - 0$, що проявляється в δ-подібному струмі на межі. У роботі розвинено варіаційну техніку дослідження поведінки мінімізантів при $\kappa \to 1/\sqrt{2} - 0$, яка, зокрема, дозволяє встановити граничні положення вихорів. Насамкінець, в останньому підрозділі вивчено структуру послідовностей Пале-Смейла (майже критичних точок), описано механізм втрати компактності цих послідовностей і квантування відповідних енергій. За допомогою цих результатів встановлено існування критичних точок немінімізаційного характеру (типу перевала).

У другому розділі досліджено спектральні задачі для сингулярно збурених несиметричних еліптичних операторів (з малим параметром збурення $\varepsilon > 0$) в обмежених областях з умовами Діріхле, Неймана і Фур'є на межі. Здебільшого, вивчено асимтотичну поведінку першого власного значення і першої власної функції. Згідно з Теоремою Крейна-Рутмана перше власне значення λ_ε є дійсним і простим, а відповідну власну функцію u_ε можна представити у вигляді $u_\varepsilon = e^{-W_\varepsilon(x)/\varepsilon}$ (це є, так званий, ВКБ анзац). Тоді диференціальне рівняння для u_ε переписується як сингулярно збурене рівняння Гамільтона-Якобі для функції W_ε і власного значення λ_ε. В роботі вивчено асимптотичну поведінку пари λ_ε і W_ε за допомогою техніки в'язкісних розв'язків. Так у випадку задачі Діріхле з осцилюючими локально періодичними коефіцієнтами виведено ефективне рівняння Гамільтона-Якобі для границь λ_ε і функцій W_ε при $\varepsilon \to 0$, і доведено, що крайова умова $W_\varepsilon(x) = +\infty$ на межі у границі релаксується до крайової умови у вигляді фазового обмеження (state constraint boundary condition). Знайдена гранична (ефективна) задача є адитивною задачею на власні значення для рівняння Гамільтона-Якобі. Вона має рівно одне власне значення, що описує головний член асимптотики λ_ε, проте власних функцій може бути багато. Це мотивує два пов'язаних між собою питання про уточнення асимптотик власних значень і критерій селекції власної функції ефективної задачі, яка відповідає границі функцій W_ε. Для їх розв'язання, в припущенні про малість молодшого члена в рівнянні і про структуру так званої множини Обрі пов'язаної з ефективною задачею, розвинено техніку асимтотичного аналізу, що складається з таких елементів як локалізація і усереднення на проміжному масштабі. У випадку, коли множина Обрі містить граничні цикли динамічної системи породженої ефективним знесенням застосовано усереднення у рухомих координатах, що призводить до параболічних задач на власні значення. Досліджено також сингулярно збурену задачу з умовою Неймана на межі, у припущенні, що коефіцієнти рівняння не залежать від ε, а малий множник ε присутній тільки в старшому члені рівняння. В цій задачі важливу роль відіграє межа області. Зокрема, у типовому випадку множина Обрі граничної задачі містить розташовані на межі нерухомі точки і граничні цикли задачі Скорохода породженої конвективним членом. Для дослідження локалізації власних функцій на таких об'єктах розвинуто метод, що базуються на побудові спеціальних суб- і суперрозв'язків, який втім працює і для нерухомих точок та граничних циклів всередині області (у випадку плавно змінних коефіцієнтів). В останньому підрозділі вивчено спектр сингулярно збуреної задачі з осцилюючими коефіцієнтами у тонкому циліндрі з умовою Неймана на бічній поверхні і Фур'є на основах. Описано асимтотичну поведінку першого власного значення і власної функції, для границі власних значень і функцій W_ε $(= -\varepsilon \log u_\varepsilon)$ виведено одновимірну адитивну задачу на власні значення з ефективними граничним умовами. Ці граничні умови отримано в результаті дослідження примежових шарів біля основ. Для побудови останніх вивчено спектральні задачі в напівобмеженому циліндрі з умовою Стеклова на основі, ці результати мають незалежний інтерес. Крім того, у структурному припущенні щодо ефективної задачі (яке веде до локалізації, в певному сенсі, власних функцій всередині циліндру) знайдено двочленні асимтотичні формули для першого і наступних власних значень.

У третьому розділі вивчено дві задачі усереднення з нетривіальними колективними ефектами спричиненими неоднорідностями. Описано вихорові структури в надпровідниках з періодично розташованими отворами, що моделюють чужорідні домішки. Знайдено масштабні співвідношеня між просторовим періодом, розміром отворів і величиною зовнішнього магнитного поля для яких виникають структури у вигляді вкладених областей з кратними вихорями. Для дослідження цієї моделі застосовано техніку Г-збіжності, конструкції подібні мірам Янга і елементи методів опуклого аналізу. Також вивчено стаціонарні еліптичні крайові задачі (і їх параболічні аналоги) для монотонних операторів в перфорованих областях з умовою Фур'є на межі дірок і Неймана на зовнішній межі. У припущенні про нульові середні коефіцієнтів в крайовій умові на межі дірок, для дослідження асимптотичної поведінки розв'язків застосовано техніку двохмасштабної збіжності і виведено ефективну (усереднену) задачу. Винайдено нетривіальний колективний ефект спричинений крайовими умовами на межі дірок, який полягає у виникненні нового члену в ефективній крайовій умові на зовнішній межі.

У четвертому розділі розглянуто задачу з вільною межею, що моделює рух живих клітин на субстраті. Досліджено сім'ю радіально симетричних стаціонарних розв'язків задачі і зроблено її біфуркаційний аналіз, що дозволило довести існування розв'язків типу біжних хвиль і стаціонарних розв'язків без радіальної симетрії. Для доведення існування розв'язків типу біжних хвиль використано топологічні міркування з застосуванням поняття степеня Лере-Шаудера.

Усі основні результати дисертації наведено з повними доведеннями. Дисертаційна робота має теоретичний характер. Результати і методи дисертаційної роботи можуть бути використані для дослідження інших задач математичної фізики.

Ключові слова: варіаційні задачі, функціонал Гінзбурга-Ландау, теорія усереднення, сингулярні збурення, задачі з вільною межею.

ABSTRACT

Rybalko V.O. Existence and asymptotic behavior of solutions to problems of mathematical physics. – Qualifcation scientific paper, manuscript.

Thesis for a Doctoral Degree in Physics and Mathematics: Speciality 01.01.03 – Mathematical Physics (Physics and Mathematics). – B.I.Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering, National Academy of Sciences of Ukraine, Kharkiv, 2019.

In this thesis we consider noncompact variational problems for the Ginzburg-Landau functional and establish a new theory of such the problems; we develop

techniques to study spectral problems for singularly perturbed non symmetric elliptic operators; we also study several homogenization problems and a free boundary problem modeling motility of living cells on a substratum.

The first section is devoted to the study of the variational problem for the Ginzburg-Landau functional on a class of complex valued functions with unit absolute value on the boundary and given degrees on its connected components. It is known that this problem is not compact. In particular, for any simply connected domain and an arbitrary prescribed nonzero degree the infimum of the simplified Ginzburg-Landau functional is never attained unless the Ginzburg-Landau parameter κ equals zero, the corresponding minimizing sequences are constructed using Möbius conformal maps or Blaschke products with zeros approaching the boundary. However, it was shown by L. Berlyand and P. Mironescu (2006) that for small κ and arbitrary doubly connected domain or all κ but domains whose capacity is not less than π there exist minimizers with prescribed degree one on the both connected components of the boundary. The case of domains whose capacity is less than π is considered in the thesis and it is shown that there is a threshold value of the Ginzburg-Landau parameter such that the infimum of the functional is always attained if κ is less than the threshold value and never attained if κ is more than the threshold value. Similarly to simply connected domains nonexistence is related to minimizing sequences with zeros approaching the boundary. Based upon these results one can draw a hypothesis (not yet proved) that either global minimizers does not exist or they do not have zeros (vortices). On the contrast, we show that there are other critical points that does have vortices. In particular, variational methods for establishing local minimizers with vortices for sufficiently large κ are developed in the thesis, their asymptotic behavior in the London limit $\kappa \to \infty$ is studied. It is shown that vortices are situated near the boundary and a small neighborhood of each one contains a finite quantized energy, this stands in contrast to inner vortices appearing in the Dirichlet problem. These results are also extended for the full Ginzburg-Landau functional which takes into account magnetic fields. Also, a theorem describing existence/nonexistence of global minimizers with prescribed degrees is established for the full Ginzburg-Landau functional in simply connected domains. It is shown that minimizers always exist for $0 < \kappa \leq 1/\sqrt{2}$ and never exist if $\kappa > 1/\sqrt{2}$, unlike in the case of the simplified functional. The value $\kappa = 1/\sqrt{2}$ is known in the physical literature as separating type I and II superconductors. In the fourth subsection we consider a minimization problem for the full Ginzburg-Landau functional in a doubly connected domain with prescribed one and zero degrees on the components of the boundary. We show that similarly to simply connected domains the infimum is always attained for $0 < \kappa < 1/\sqrt{2}$, but for $\kappa = 1/\sqrt{2}$ (and bigger) the infimum is never attained. This results in a singular behavior of mimnimizers as $\kappa \to 1/\sqrt{2} - 0$ exhibiting δ-like currents on the boundary. We develop variational techniques to study asymptotic behavior of minimizers as $\kappa \to 1/\sqrt{2} - 0$, that allows us, in particular, to establish limiting positions of vortices. Finally, in the last subsection we study the structure of Plais-Smaile sequences (sequences of almost critical points), we describe the mechanism behind noncompactness and show quantization of corresponding energies. These results are used to establish critical pints which are not minimizing (but rather of a mountain pass type).

In the second section we study spectral problems for singularly perturbed non symmetric elliptic operators (with a small perturbation parameter $\varepsilon > 0$) in bounded domains with the Dirichlet, Neumann and Fourier conditions on the boundary. Our main results mostly concern the asymptotic behavior of the first eigenvalue and the first eigenfunction. According to the Krein-Routman theorem the first eigenvalue λ_ε is real and simple, and the corresponding eigenfunction u_ε can be represented in the form $u_\varepsilon = e^{-W_\varepsilon(x)/\varepsilon}$ (this is, so called, WKB ansatz). Then the differential equation for u_ε rewrites as a singularly perturbed Hamilton-Jacobi equation for the function W_ε and the first eigenvalue λ_ε. The asymptotic behavior of the pair λ_ε and W_ε is studied using the viscosity solutions techniques. In the case of the Dirichlet problem with oscillating locally periodic coefficients we derive the effective Hamilton-Jacobi equation describing limits of λ_ε and functions W_ε as $\varepsilon \to 0$, and show that the boundary condition $W_\varepsilon(x) = +\infty$ on the boundary relaxes to the state constraint boundary condition. The resulting limiting (effective) problem is an additive eigenvalue problem for the Hamilton-Jacobi equation. It has a unique eigenvalue which describes the main term of the asymptotic expansion of λ_ε, but the corresponding eigenfunction is not in general unique. This gives rise to two related questions, to establish the second term in the expansion of the eigenvalues and select the eigenfunction corresponding to the limit of functions W_ε. To this end, under a smallness assumption on the lower order term and an assumption on the structure of so called Aubry set of the effective problem, we develop techniques of asymptotic analysis which include localization and homogenization on an intermediate scale. In the case when the Aubry set contains limit cycles of the dynamical system related to the effective drift, we use homogenization in moving coordinates that leads to parabolic eigenvalue problems. We also study the Neumann problem, assuming that the coefficients does not depend on the parameter ε and the small parameter ε appears only in front of the higher order term. The boundary of the domain plays an important role in this problem. In particular, the Aubry set of the limit problem typically contains fixed points and limit cycles of the Skorohod problem originated from the drift term. To study localization of eigenfunctions on such objects we develop a method based on the construction of special sub- and supersolutions, this method still works in the case of inner fixed point and limit cycles (in the case of slowly oscillating coefficients). In the last subsection we study the spectrum of a singularly perturbed problem in a thin cylinder with the Neumann boundary condition on the lateral surface and the Fourier one on its bases. We describe the asymptotic behavior of the first eigenvalue and the corresponding eigenfunction, we show that the limits of eigenvalues and functions W_ε $(= -\varepsilon \log u_\varepsilon)$ solve an one dimensional additive eigenvalue problem with effective boundary conditions. These conditions are derived via the analysis of boundary layers near the bases, the construction of boundary layers is based on the analysis of Steklov eigenvalue problems in the semi-infinite cylinder, these results are of an independent interest. Besides, under a structure assumption on the effective problem (leading to localization, in certain sense, of eigenfunctions inside the cylinder) we find two term asymptotic formulas for the first and other eigenvalues.

In the third section we study two homogenization problems leading to nontrivial collective effects caused by inhomogeneities. First we describe vorticity structures in superconductors with periodically distributed holes, that model impurities. We find scaling relations between the spatial period, the size of the holes and the magnitude of the external magnetic field which lead to structures of nested domains with multiple vortices. To study this model we use the Γ-convergence technique, constructions in the spirit of Young measures and elements of convex analysis. We also study stationary elliptic boundary value problems (and their parabolic counterparts) for monotone operators in perforated domains with the Fourier condition on holes and the Neumann one on the outer boundary. We assume that coefficients in boundary conditions have zero mean over the boundaries of holes, then to study asymptotic behavior of solution we use techniques of two-scale convergence and derive an effective (homogenized) problem. This study reveals a nontrivial collective effect caused by boundary conditions on the boundaries of holes, which is an appearance of a new term in the effective boundary condition on the outer boundary.

In the fourth section we study a problem with free boundary modeling motility of living cells on a substratum. We study a family of radially symmetric solutions and perform a bifurcation analysis, thus establishing solutions of traveling wave type as well as stationary solutions without radial symmetry. In order to prove existence of traveling wave type solutions we employ topological argument based on the notion of Leray-Schauder degree.

All the main results in the thesis are presented with complete proofs. The thesis is a theoretical work. Results and methods of the thesis can be used in the study of other problems of mathematical physics.

Key words: variational problems, Ginzburg-Landau functional, homogenization theory, singular perturbations, problems with free boundary.

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Наукові праці, в яких опубліковані основні наукові результати дисертації

Публікації у фахових виданнях України:

1. Rybalko, V.: Local minimizers of the magnetic Ginzburg-Landau functional with S^1-valued order parameter on the boundary. J. Math. Phys., Anal., Geom. **10**(1), 134–151 (2014)

2. Piatnitski, A., Rybalko, V.: Singularly perturbed spectral problems in a thin cylinder with Fourier conditions on its bases. J. Math. Phys., Anal., Geom. **15**(2), 256–277 (2019)

Публікації у виданнях, які входять до міжнародних наукометричних баз:

3. Berlyand, L., Golovaty, D., Rybalko, V.: Nonexistence of Ginzburg-Landau minimizers with prescribed degree on a boundary of a doubly connected domain. C.R. Math. **343**(1), 63–68 (2006)

4. Amaziane, B., Pankratov, L., Rybalko, V.: On the homogenization of some double porosity models with periodic thin structures. Applicable Analysis **88**(10-11), 1469–1492 (2009)

5. Berlyand, L., Misiats, O., Rybalko, V.: Near boundary vortices in a magnetic Ginzburg-Landau model: Their locations via tight energy bounds. J. Funct. Anal. **258**(5), 1728–1762 (2010)

6. Berlyand, L., Rybalko, V.: Solutions with vortices of a semi-stiff boundary value problem for the Ginzburg-Landau equation. J. Eur. Math. Soc. **12**(6), 1497–1531 (2010)

7. Berlyand, L., Misiats, O., Rybalko, V.: Minimizers of the magnetic Ginzburg-Landau functional in simply connected domain with prescribed degree on the boundary. Commun. Contemp. Math. **13**(1), 53–66 (2011)

8. Piatnitski, A., Rybalko, V.: Homogenization of boundary value problems for monotone operators in perforated domains with rapidly oscillating boundary conditions of Fourier type. J. Math. Sci. **177**(1), 109–140 (2011)

9. Berlyand, L., Yip, N.K., Rybalko, V.: Renormalized Ginzburg-Landau energy and location of near boundary vortices. Netw. Heterog. Media **7**(1), 179–196 (2012)

10. Berlyand, L., Rybalko, V.: Homogenized description of multiple Ginzburg-Landau vortices pinned by small holes. Netw. Heterog. Media **8**(1), 115–130 (2013)

11. Iaroshenko, O., Rybalko, V., Vinokur, V.M., Berlyand, L.: Vortex phase separation in mesoscopic superconductors. Scientific Reports: Nature Publishing Group **3**, 1758 (2013)

12. Berlyand L., Mironescu P., Rybalko V., Sandier E.: Minimax critical points in Ginzburg-Landau problems with semi-stiff boundary conditions: existence and bubbling. Commun. Part. Diff. Eq. **39**(5), 946–1005 (2014)

13. Piatnitski, A., Rybalko, A., Rybalko, V.: Ground states of singularly perturbed convection-diffusion equation with oscillating coefficients. ESAIM Contr. Op. Ca. Va. **20**(4), 1059–1077 (2014)

14. Piatnitski, A., Rybalko, V.: On the first eigenpair of singularly perturbed operators with oscillating coefficients. Commun. Part. Diff. Eq. **41**(1), 1–31 (2016)

15. Piatnitski, A., Rybalko, A., Rybalko, V.: Singularly perturbed spectral problems with Neumann boundary conditions. Complex Var. Elliptic Equ. **61**(2), 252–274 (2015)

16. Berlyand, L., Potomkin, M., Rybalko, V.: Phase-field model of cell motility: Traveling waves and sharp interface. C.R. Math. **354**(10), 986–992 (2016)

17. Berlyand L., Mizuhara M., Rybalko V., Zhang L.: On an evolution equation in a cell motility model. Physica D: Nonlinear Phenomena **318**, 12–25 (2016)

18. Berlyand L., Potomkin, M., Rybalko, V.: Sharp interface limit in a phase field model of cell motility. Netw. Heterog. Media **12**(4), 551–590 (2017)

19. Berlyand, L., Golovaty, D., Iaroshenko, O., Rybalko, V.: On approximation of Ginzburg–Landau minimizers by S^1-valued maps in domains with vanishingly small holes. J. Differ. Equations **264**(2), 1317–1347 (2018)

20. Berlyand L., Fuhrmann J., Rybalko V.: Bifurcation of traveling waves in a Keller-Segel type free boundary model of cell motility. Commun. Math. Sci. **16**(3), 735–762 (2018)

Публікації у матеріалах міжнародних наукових конференцій:

21. Berlyand L.V., Rybalko V.O., Misiats O.O. Minimizers of Ginzburg-Landau functional with “semi-stiff” boundary conditions: existence and vorticity, International Conference dedicated to the 110-th Anniversary of I. G. Petrovskii (XXIII joint session of Moscow Mathematical Society and I. G. Petrovskii Seminar), May 30-June 4, 2011, Moscow, Russia: Book of Abstracts, Moscow, 2011, p. 16.

22. Rybalko V. Spectral problems for singularly perturbed operators with oscillating coefficients, International Conference in Honor of Vladimir A. Marchenko’s 90th birthday "Spectral Theory and Differential Equations" (STDE-2012), 20 - 24 August, 2012, Kharkiv, Ukraine: Book of Abstracts, Kharkiv, 2012, p. 92.

23. Rybalko V. Critical points of the Ginzburg–Landau functional with semi-stiff boundary conditions, II International Conference “Analysis and Mathematical Physics”, June 16-20, 2014, Kharkiv, Ukraine: Book of Abstracts, Kharkiv, 2014, p. 23.

24. Rybalko V. On the first eigenpair of singularly perturbed operators with Neumann boundary condition, III International Conference "Analysis and Mathematical Physics", June 15-19, 2015, Kharkiv, Ukraine: Book of Abstracts, Kharkiv, 2015, p. 13-14.

ЗМІСТ

ВСТУП

Обґрунтування вибору теми дослідження. Питання існування і асимптотичної поведінки розв'язків диференціальних рівнянь з частинними похідними посідають чинне місце у сучасній математичній фізиці. Втім, не зважаючи на розвинений стан теорії крайових задач для рівнянь математичної фізики є труднощі, наприклад, відсутність або втрата компактності у певних границях, для подолання яких не існує загальних рецептів і конткретні задачі потребують розбудови своїх специфічних методів.

Значну частину дисертаційної роботи присвячено дослідженню некомпактних варіаційних задач пов'язаних з теорією фазових переходів у надпровідниках. Такі (некомпактні) варіаційні задачі є предметом активних досліджень починаючи з другої половини 20-го сторіччя. Інтерес до них був стимульований, перш за все, проблемами з диференціальної геометрії. Одним з найвідоміших прикладів є задача Ямабе. У 1960 р. Х. Ямабе [204] поставив і розв'язав задачу про існування конформної ріманової метрики з постійною скалярною кривизною на компактному многовиді вимірності ≥ 3. Проте розв'язання Х. Ямабе мало суттєву помилку, яку у 1967 р. помітив Н. Трудінгер. А саме, варіаційна задача, що було виведено Х. Ямабе є некомпактною і повне доведення її розв'язності, зусиллями, перш за все, Н. Трудінгера [197], Т. Обена [20] і Р. Шона [187], зайняло майже 20 років. Некомпактні варіаційні задачі виникають також в дослідженнях Дж. Сакса і К. Уленбек [179] мінімальних 2-сфер, Х. Брезіса і Ж.-М. Корона [52] існування поверхонь з постійною скалярною кривизною натягнутих на заданий контур, роботах К. Таубеса про рівняння Янга-Міллса [196], М.Струве [192] про напівлінійні рівняння з критичними показниками, і багатьох інших роботах. Характерною рисою перелічених задач є існування локалізованих розв'язків, які концентруються (в певному сенсі) в околі точки (точок), і цю поведінку, принаймні в геометричних задачах, можна візуалізувати у вигляді надутих бульбашок. Відсіля і пішов неформальний термін *bubbling*, що часто використовується в подібних задачах. Існують абстрактні підходи до таких задач, як то розвинено в роботі П.-Л. Ліонса [131] про концентрацію-компактність, в роботах П. Жерара [96], С. Джафара [107] про характерізацію втрати компактності у критичних випадках вложень. Важливі результати про неіснування розв'язків напівлінійних рівнянь з критичними показниками було одержано С.І. Похожаєвим [168].

Ефект концетрації енергії розв'язків в околі дискретного набору точок є також характерним для моделей фазових переходів в надпровідниках. Піонерські математичні результаті для відповідних варіаційних задач було одержано Ф. Бетюелем, Х. Брезісом і Ф. Хелейном в роботі [47] присвяченій дослідженню асимптотичної поведінки мінімізантів спрощеного функціонала Гінзбурга-Ландау у границі Лондонів, коли параметр Гінзбурга-Ландау прямує до нескінченності. Ними було доведено збіжність мінімізантів до гамонічних відображень з декількома сингулярними точками, для описання останніх виведено функціонал ренормалізованої енергії. Результати і методи роботи [47] стимулювали численні дослідження варіаційних задач пов'язаних як зі спрощеним функціоналом Гінзбурга-Ландау так і повним, що враховує ефекти магнітного поля. Суттєве розвинення техніки [47] було зроблено в роботі Е. Сандієра і С. Серфаті [182] присвяченій дослідженню вихорів спричинених зовнішнім магнітним полем. Зазначимо, що в [47] вивчено задачу Діріхле з краєвими даними які задаються гладкою $\mathbb{S}^1$-значною функцією g на межі, і степінь відображення $\deg g$ функції g є визначальним для якісної картини асимптотичної поведінки мінімізантів: наприклад, якщо $\deg g = 0$, то в границі Лондонів мінімізанти збігаються до несингулярного гармонічного відображення, якщо $\deg g = 1$, то граничне відображення має одну сингулярну точку, і т.д. Цей факт мотивує послаблення крайових умов до заданого степеня крайових даних на межі, проте в результаті варіційна задача стає некомпактною і, на відміну від задачі Діріхле, питання існування розв'язків стає нетрівіальним для скінченних значень параметра Гінзбурга-Ландау. Такі задачі вивчено у дисертаційній роботі, в них спостерігається нестандартний механізм втрати компактності – через концентрацію енергії в околі точок, що наближаються до межі. Це дослідження є новим, йому передували дві окремі роботи Л. Берлянда і Д.Головатого [98] та Л. Берлянда і П. Міронеску [35], де вперше було встановлено існування розв'язків з заданими ненульовими степенями. В дисертаційній роботі доведено гіпотезу висунуту Л. Берляндом і П. Міронеску та розглянуто багато інших питань, зокрема, існування розв'язків з нулями (вихорами) і дослідження сингулярних границь розв'язків.

Також в дисертаційній роботі вивчаються сингулярно збурені лінійні еліптичні рівняння другого порядку. В них втрата компактності виникає через малий параметр перед членами зі сташими похідними. Одним з первих досліджень таких задач є робота М.Й. Вішика і Л.А. Люстерника [199], де було розвинуто теорію побудови межових шарів у випадку коли гранична задача є в певному сенсі добре поставленою. Ймовірнісний підхід до сингулярно збурених рівнянь було використано О.Д. Вентцелем і М.Й. Фрейдліним [88] і розвинуто техніку великих відхилень для відповідних стохастичних диференціальних рівнянь. За допомогою ймовірнісної інтерпретації розв'язків і згаданої техніки великих відхилень Ю.І. Кіфером [118], [119] було вивчено асимтотичну поведінку першого власного значення задачі Діріхле для сингулярно збуреного еліптичного оператора. Існує також альтернативний підхід до вивчення сингулярно збурених рівнянь другого порядку, що базується на понятті *в'язкісних розв'язків* введеному П.-Л. Ліонсом і М. Крендаллом [74] на початку 1980-х років. Цей підхід є, в певному сенсі, більш прямим (він оперує напряму з рівняннями), спирається на міркування типу принципу максимуму а не ймовірнісну техніку, і, досить часто, дозволяє отримати більше інформації про розв'язки. Вперше техніку в'язкісних розв'язків було застосовано до дослідження сингулярно збурених рівнянь Л.-К. Евансом і Х. Іші [84]. У дисертаційній роботі розвинуто методи, що поєднують техніку в'язкісних розв'язків і техніки локалізованого аналізу, для дослідження асимптотичної поведінки спектральних задач для сингулярно збурених операторів біля межі спектру. Зокрема, детально вивчено асимптотики першого власного значення і відповідної власної функції. Зазначимо, що аналіз проведено для загальних несамоспряжених операторів, які, з одного боку, мають аналітичні складнощі через відсутність варіаційного принципу, з іншого боку, призводять до нових ефектів (наприклад, локалізація власних функцій на граничних циклах породжених конвективними членами).

У сингулярно збурених задачах, вивчених в дисертаційній роботі, зазвичай присутні два типа збурення: наявність малого параметру в членах з похідними і швидких осциляцій в коефіцієнтах рівнянь. Зазначимо, що рівняння з швидко осцилюючими коефіцієнтами є класичним прикладом з круга питань, що розглядаються в рамках теорії усереднення. Перші задачі теорії усереднення було поставлено і досліджено в 1964 році В.О. Марченком і Є.Я. Хрусловим [137], М.Й. Фрейдліним [87], і Дж.Б. Келлером [113]. Вагомий внесок в розвититок теорії зроблено як українськими, так і зарубіжними математиками: Є.Я. Хрусловим, І.В. Скрипником, Т.А. Мельником, О.А. Олійник, Г.П. Панасенком, Н.С. Бахваловим, В.В. Жиковим, Е. Санчез-Пеленсією, Е. Де Джорджі, Л. Тартаром та іншими. В дисертаційній роботі вивчено дві задачі усереднення в яких винайдено нові ефекти спричиненені колективним внеском неоднорідностей. Це задача про асимтотичне описання вихоревих структур в надпровідниках з великим числом отворів і дослідження монотонних операторів в перфорованих областях з умовою Фур'є на включеннях. В першій зі згаданих задач винайдено масштабні співвідношеняя, що ведуть до вихорових структур з кратними вихорями у вкладених підобластях. Зазвичай в моделях надпровідників (у тому числі з домішками) спостерігаються структури з простих вихорів, що описано, наприклад, в роботі А. Афталіон, С. Серфаті і Е. Санд'єра [3]. В другій задачі знайдено, що колективний вклад дірок, на межі яких ставиться умова Фур'є, може вести до появи нового члена в ефективній крайовій умові на зовнішній межі. Зазначимо, що формально цю задачу можна розглядати як сингулярно збурену межею (її міра необмежено зростає), проте розглядається припущення про нульові середні коефіцієнтів в умовах Фур'є на межі включень і це припущення дає можливість адаптувати класичну техніку (а саме метод двохмасштабної збіжності) для вивчення асимптотичної поведінки розв'язків.

В дисертаційній роботі вивчено також задачу з вільною межею, що моделює рух живих клітин на субстраті. Останнім часом спостерігається сплеск уваги до математичних моделей біологічних процесів. При цьому спроби описання біологічних явищ досить часто призводять до постановок задач які становлять певний математичний виклик. Зокрема, задачі з вільною межею є більш складними для дослідження ніж стандартні крайові задачі з фіксованою межею. Важливий крок в дослідженні задач з вільною межею в біологічних моделях було зроблено А. Фрідманом і його співавторами [91], [92], які дослідили біфуркації нерадіальних розв'язків в моделі роста пухлин. Загальну ідею роботи [91], що полягає в пошуці нетривіальних розв'язків шляхом біфуркаційного аналізу сім'ї радіальних стаціонарних розв'язків, використано і у дисертаційній роботі при дослідженні моделі руху клітин, проте технічна реалізація є зовсім іншою.

В загалом в роботі досліджено декілька актуальних задач математичної фізики, при цьому основні труднощі в аналізі пов'язані з відсутністю (або асимптотичною втратою) компактності задач.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконана у Фізико-технічному інституті низьких температур ім. Б.І.Вєркіна Національна академії наук України. Результати дисертації є складовою частиною держбюджетних науково-дослідних робіт "Прямі та обернені задачі розповсюдження хвиль у мікронеоднорідному середовищі" (номер державної реєстрації 0103U00314), "Побудова усереднених моделей фізичних процесів у мікронеоднорідних середовищах" (номер державної реєстрації 0106U002559), “Дослідження багатофазних течій сумішей рідин і газів у пористих середовищах та вихорових структур у надплинних рідинах” (номер державної реєстрації 0110U007897), “Геометричні та асимптотичні методи в теорії крайових задач математичної фізики” (номер державної реєстрації 0116U005036).

Мета і завдання дослідження. *Метою* роботи є розвинення методів дослідження існування і асимптотичної поведінки задач математичної фізики.

Об'єктом дослідження є варіаційні задачі для функціонала Гінзбурга-Ландау, спектральні задачі для сингулярно збурених операторів, задачі усереднення, та задача з вільною межею, що моделює рух живих клітин на субстраті.

Предметом дослідження є існування/неіснування розв'язків варіаційних задач, асимптотична поведінка розв'язків рівнянь з частинними похідними, існування спеціальних розв'язків задачі з вільною межею.

Завдання дослідження:

- Побудувати теорію варіаційних задач для функціонала Гінзбурга-Ландау (як спрощеного так і повного, що враховує магнітні ефекти) з заданим степенями відображення на межі.
- Розвинути методи дослідження спектральних задач для сингулярно збурених несиметричних еліптичних операторів.
- Дослідити задачу усереднення для моделі надпровідників з домішками і нелінійну задачу в перфорованих областях з умовою Фур'є на межі дірок.
- Провести біфуркаційний аналіз для задачі з вільною межею, що моделює рух живих клітин на субстраті.

Методи дослідження: варіаційні методи; методи в'язкісних розв'язків; методи факторизації для диференціальних рівнянь з частинними похідними; методи теорії усереднення, такі як, Г-збіжність і двохмасштабна збіжність; методи біфуркаційного аналізу.

Наукова новизна отриманих результатів. В дисертаційній роботі отримано такі нові наукові результати, які виносяться на захист:

- Доведено існування скінченного порогового значення параметра Гінзбурга-Ландау κ, більше якого не існує глобальних мінімізантів спрощеного функціонала Гінзбурга-Ландау з заданими одиничними степенями відображення на компонентах межі двозв'язних областей з ємністю меншою π.

- Доведено існування локальних мінімізантів з нулями (вихорами) функціонала Гінзбурга-Ландау (як спрощеного так і повного, що враховує магнітні ефекти) в двозв'язних областях з заданими степенями відображення на межі. Вивчено асимптотичну поведінку цих локальних мінімізантів у границі Лондонів, показано, що вихорі наближаються до межі і в їх околах концентруються скінченні квантовані енергії.

- Розв'язано питання існування/неіснування (глобальних) мінімізантів повного функціонала Гінзбурга-Ландау з заданими степенями на межі. Встановлено і вивчено сингулярну поведінку мінімізантів в двозв'язних областях при $\kappa \to 1/\sqrt{2} - 0$, доведено існування вихорів коло межі і описано їх граничні положення на межі.

- Досліджено структуру послідовностей Пале-Смейла пов'язаних з варіаційної задачею для спрощеного функціонала Гінзбурга-Ландау з заданими степенями на межі.

- Знайдено усереднену задачу, що описує асимптотичну поведінку першого власного значення і власної функції сингулярно збурених несиметричних еліптичних операторів з осцилюючими локально періодичними коефіцієнтами і умовою Діріхле на межі, доведено теорему про збіжність. Встановлено уточнені асимптотики у випадку, коли молодші члени мають однаковий порядок.

- Встановлено границю першого власного значення задачі Неймана для несиметричних еліптичних операторів з плавно змінними коефіцієнтами і малим множником перед дифузійним членом. Описано асимптотичну поведінку першої власної функції.

- Знайдено одновимірну ефективну задачу, що описує асимптотики основних станів сингулярно збурених несиметричних еліптичних операторів з осцилюючими локально періодичними коефіцієнтами в тонкому циліндрі з умовою Неймана на бічній поверхні і Фур'є на основах. За структурної умови щодо ефективної задачі знайдено двочленні асимптотичні формули для першого і наступних власних значень.

- Описано поведінку вихоревих структур спричинених зовнішнім магнітним полем в моделі надпровідника з великим числом малих отворів.

- Знайдено новий колективний ефект від неоднорідностей (дірок) в задачі усереднення монотонних операторів у перфорованих областях з умовою Фур'є на межі дірок.

- Доведено існування розв'язків типу біжних хвиль в задачі з вільною межею, що моделює рух живих клітин на субстраті.

Особистий внесок здобувача. Усі основні результати дисертації одержано автором особисто. Зі спільних праць до дисертації включено лише ті результати, які належать автору.

В роботах [33], [32], [103], [40] співавторам належать постановка задачі і обговорення результатів, всі основні результати належать автору. В роботах [31], [37], [39], [43], [44], [45] співавторам належить участь в постановці задачі і обговорення результатів, всі результати належать автору. В роботі [14] співавторам належать постановка задач і виведення граничної задачі; дисертанту належать глави 4 і 5. У роботах [41], [42] співавторам належать постановка задач, обговорення результатів, доведення технічних результатів і чисельні симуляції; дисертанту належать доведення основних результатів. В роботі [36] співавторам належить ідея застосування квантованості послідовностей Пале-Смейла для доведення існування критичних точок, глави 2, 3, 4 і 9; результати глав 5, 6, 8 було отримано в сумісних дискусіях; глава 7 належить дисертанту. В роботах [163], [164] дисертанту належать схема і основна ідея доведення головних результатів; технічна реалізація доведень була зроблена сумісними зусиллями всіх співавторів. В роботі [162] постановка задачі і формальне виведення усередненої задачі належить співавтору; доведення основних результатів належать дисертанту. В роботах [165], [166] постановка задачі належить співавтору, також йому належить ідея застосування методів в'язкісних розв'язків до сингулярно збурених спектральних задач і доведення деяких технічних результатів; основні результати отримані автором дисертації.

Апробація матеріалів дисертації. Матеріали дисертації доповідалися на семінарі Відділу математичного моделювання фізичних процесів Фізико-технічний інститут низьких температур ім. Б.І.Вєркіна Національної академії наук України (багаторазово, починаючи з 2006 року), на математичному семінарі університету штату Пенсильванія, США (багаторазово, починаючи з 2006 року), на семінарі UiT - Арктичного університету Норвегії, рінше – університетський коледж Нарвік (багаторазово, починаючи з 2007 року), на семінарі університету Тромсе, Норвегія (2008 рік), семінарі університету Євле, Швеція (2018 рік), семінарі кафедри прикладної математики в Харківському національному університеті ім. В. Н. Каразіна (2019 рік), семінарі кафедри математичної фізики у Київському національному університеті ім. Т. Г. Шевченка (2019 рік). По матеріалах дисертаційної роботи були зроблені доповіді на Українському математичному конгресі (Київ, 2009 рік), міні-конференції "Pseudogroups and differential equations"(Тромсе, Норвегія, 2013 рік), міжнародних конференціях: "Differential equations and related topics"dedicated to outstanding mathematician I. G. Petrovskii (23-d meeting)(Москва, Росія, 2011 рік), "Spectral Theory and Differential Equations"(STDE-2012, Харків, 2012 рік), SIAM conference on mathematical aspects of matherial sciences (Філаделфія, США, 2013 рік), II International Conference “Analysis and Mathematical Physics” (Харків, 2014 рік), III International Conference “Analysis and Mathematical Physics”, (Харків, 2015 рік).

Публікації. Включені до дисертації результати автора опубліковані у 20 наукових статтях, з них 18 статей в міжнародних журналах, які мають імпакт-фактор і входять до міжнародних наукових баз (Scopus і Web of Science): [31]–[33], [36], [37], [39]–[45], [14], [162]–[165], [103]. Ще дві статті, [175], [166], опубліковані у вітчизняному журналі "Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry", який також має імпакт-фактор і входить до міжнародних наукових баз Scopus і Web of Science. Результати дисертації також викладені в 4 тезах доповідей на міжнародних конференціях: [38], [176], [177], [178].

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків, списку використаних джерел, який містить 206 найменувань, та супроводжується анотаціями, списком публікацій здобувача за темою дисертації і Додатками A–N. Повний обсяг дисертаційної роботи – 452 сторінки. Обсяг основної частини дисертації – 329 сторінок.

Розділ 1

ВАРІАЦІЙНІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ФУНКЦІОНАЛА ГІНЗБУРГА-ЛАНДАУ З ЗАДАНИМИ СТЕПЕНЯМИ ВІДОБРАЖЕННЯ НА МЕЖІ

У цьому розділі вивчаються варіаційні задачі для функціонала Гінзбурга-Ландау

$$E_\kappa(u) = \frac{1}{2}\int_G |\nabla u|^2 \mathrm{d}x + \frac{\kappa^2}{4}\int_G (|u|^2-1)^2 \mathrm{d}x, \tag{1.0.1}$$

де $\kappa \geq 0$ – параметр Гінзбурга-Ландау, u – комплекснозначна функція (параметр порядку), і G - гладка, обмежена область в $\mathbb{R}^2$. Функціонал (1.0.1) є спрощенням фунціонала енергії, що було введено В.Л. Гінзбургом і Л.Д. Ландау у 1950х роках для описання фазових переходів в надпровідниках. Буде також розглянуто повний функціонал енергії (див. (1.4.1)), що враховує магнітні ефекти. Функціонали вигляду подібного (1.0.1) виникають і в моделях надплинних рідин. Крім того, (1.0.1) можна розглядати як комплексну версію функціонала Аллена-Кана (див. [184]).

Асимптотичну поведінку мінімізантів (1.0.1) у границі Лондонів $\kappa \to \infty$ було описано Ф. Бетюелем, Х. Брезісом і Ф. Хелейном в піонерській роботі [47]. Ними було доведено збіжність мінімізантів до гамонічних відображень з декількома сингулярними точками – границями нулів (вихорів), для описання останніх виведено функціонал ренормалізованої енергії. Зазначимо, що в [47] вивчено задачу Діріхле з краєвими даними які задаються гладкою $\mathbb{S}^1$-значною функцією g на межі, і степінь відображення $\deg g$ функції g є визначальним для якісної картини асимптотичної поведінки мінімізантів: наприклад, якщо $\deg g = 0$, то в границі Лондонів мінімізанти збігаються до несингулярного гармонічного відображення, якщо $\deg g = 1$, то граничне відображення має одну сингулярну точку, і т.д. Методи [47] було використано і розвинено у численних дослідженнях як задачі Діріхле, наприклад, [193], [127], [128], [153], [77], [12], [54], так і Неймана [109], [110], [111], [11], [183].

З огляду на визначальну роль степеня відображення $\deg g$ крайових даних у формуванні вихорів, природним є питання: чи можна можна послабити умову Діріхле до задання степенів відображення параметра порядку на межі (звязних компонентах межі)? Конкретніше, розглядаються критичні точки функціонала (1.0.1) з одиничним модулем параметру порядку на межі

$$|u| = 1 \quad \text{на } \partial G, . \tag{1.0.2}$$

За цієї умові функціонал (1.0.1) має нульову варіцію тоді і тільки тоді коли u задоволняє рівняння

$$-\Delta u + \kappa^2 u(|u|^2 - 1) = 0 \quad \text{в} \quad G, \tag{1.0.3}$$

і крайові умови

$$|u| = 1 \text{ і } u \times \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{на } \partial G, \tag{1.0.4}$$

де $u \times \frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{i}{2}\left(u\frac{\partial \overline{u}}{\partial \nu} - \overline{u}\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)$. Ці умови є проміжними між умовами Дирихле і Неймана в наступному сенсі: будь-яке рішення $u \in H^1(G;\mathbb{C})$ задачі (1.0.3)–(1.0.4) є достатньо регулярним [34], так що його можна записати як $u = |u|e^{i\psi}$ біля межі, тоді (1.2.2) складається з умови Діріхле для модуля, $|u| = 1$ на ∂G, та однорідної умови Неймана для фази, $\frac{\partial \psi}{\partial \nu} = 0$ на ∂G. Зрозуміло, що мінімізація функціонала (1.0.1) (в природному енергетичному просторі $H^1(G;\mathbb{C})$) з умовою (1.0.2) призводить до сталих розв'язків (з одиничним модулем). Проте для слідів функцій з $H^1(G;\mathbb{C})$ на межі, що задовольняють умову (1.0.2), є коректно визначеним степінь відображення, що, (дуже) грубо кажучі, рахує число нулів (вихорів). Нагадаємо, що для гладкої функції $u(x) = e^{i\psi(x)}$, $\psi(x) \in \mathbb{R}$, заданої на гладкій простій замкненій орієнтованій кривій γ степінь відображення є числом обертів точки $u(x)$ на одиничному колі коли x пробігає γ. Відомо (див., наприклад, [49]), що степінь відображення можна також коректно задати для функцій з $H^{1/2}(\gamma;\mathbb{S}^1)$ за допомогою формули

$$\deg(u,\gamma)=\frac{1}{2\pi}\int_\gamma u\times\frac{\partial u}{\partial\tau}\mathrm{d}s, \tag{1.0.5}$$

де інтеграл розуміється через дуальність між $H^{1/2}$ і $H^{-1/2}$, $\frac{\partial}{\partial\tau}$ є тангенціальною похідною відносно орієнтації γ проти годинникової стрілки. Нехай γ – зв'язна компонента межі ∂G, тоді $\deg(u,\gamma)$ є цілочисельнозначним функціоналом на множині функцій з $H^1(G;\mathbb{C})$, що задоволняють (1.0.2), неперервним відносно сильної збіжності в $H^1(G;\mathbb{C})$. Тому для знаходження локальних мінімізантів функціоналу (1.0.1) з умовою (1.0.2) на межі можна задавати степені відображення на зв'язних компонентах ∂G. Але задача існування мінімізантів з заданими степенями є нетривіальною, як показує наступний приклад. Нехай G – одиничний диск. Розглянемо задачу мінімізації функціоналу $E_\kappa(u)$ в класі функцій $u\in H^1(G;\mathbb{C})$, що задоволняють (1.0.2) і мають одиничний степінь на межі. Ця задача не має розв'язків для $\kappa>0$. Дійсно, з одного боку

$$\frac{1}{2}\int_G|\nabla u|^2\mathrm{d}x\geq\left|\int_G\partial_{x_1}u\times\partial_{x_2}u\mathrm{d}x\right|=\pi|\deg(u,\partial G)|=\pi.$$

З іншого боку, на послідовності конформних автоморфізмів

$$u_n(x)=\frac{z-(n-1)/n}{z(n-1)/n-1},\ z=x_1+ix_2,\ n=1,2,\dots$$

одиничного диску знаходимо нижню границю енергій:

$$\lim_{n\to\infty}E_\kappa(u_n)=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\int_G|\nabla u_n|^2\mathrm{d}x=\pi.$$

Таким чином, у разі існування мінімізанта u маємо $|u|=1$ всюди в G, звідки $\deg(u,\partial G)=0$.

Наведений вище приклад нескладно також розповсюдити на багатозв'язні області, і в [46] було помічено, що навіть у випадку узгождених степеней на компонентах межі мінімізантів може не існувати. Проте в роботах [98] і [35] було доведено, що для двозв'язних областей з заданими одиничними степенями інфімум $E_\kappa(u)$ завжди досягається для малих $\kappa \geq 0$, і всіх $\kappa \geq 0$ якщо $\mathrm{cap}(G) \geq \pi$. Випадок областей з $\mathrm{cap}(G) < \pi$, для яких питання про існування мінімізантів (для великих κ) залишалося відкритим, розглянуто в Підрозділі 1.1, де вперше доведено недосяжність інфімуму у випадку узгоджених степенів.

Зазначимо, що у всіх відомих випадках існування глобальних мінімізантів з заданими степенями, розв'язки не мають нулів. Проте у Підрозділі 1.2 доведено загальний результат про існування нових локальних мінімізантів з заданими степенями. Ці мінімізанти мають нулі (вихори), які наближаються до межі у границі Лондонів $\kappa \to \infty$ і, таким чином, значно відрізняються від тих, що спостерігаються у випадку умов Діріхле і Неймана. Зазначимо, що результати Підрозділу 1.2 було узагальнено в роботі [78] на випадок багатозв'язних областей, також в роботі [173] було запропоновано інше доведення Теореми 1.2.3 (яка є основним результатом Підрозділу 1.2). В роботі [147] досліджено необхідність умов Теореми 1.2.3.

В останньому підрозділі доведено існування критичних точок типу перевалу. Для цього вивчено структуру послідовностей Пале-Смейла (майже мінімізантів), і детально описано механізм втрати компактності таких послідовностей.

Що стосується повного функціонала Гінзбурга-Ландау, що враховує магнітні ефекти, раніше критичні точки з заданими степенями на межі було знайдено тільки у інтегровному випадку $\kappa = 1/\sqrt{2}$ в роботі [50]. Повне дослідження задачі мінімізації в однозв'язній області з заданим степенем на межі проведено в Підрозділі 1.3. У Підрозділі 1.4 розглянуто модельну задачу у двозв'язній області з заданими одиничним і нульовим степенями на компонентах межі, для якої вивчено в деталях сингулярну поведінку мінімізантів з вихорем коло межі, зокрема встановлено граничні положення вихорів. Підрозділ 1.5 присвячено поширенню результатів Підрозділу 1.2 на випадок повного функціонала Гінзбурга-Ландау.

У цьому розділі використовуються наступні позначення і домовленості:

- Вектори $a = (a_1, a_2)$ (точки на площині $\mathbb{R}^2$) ототожнюються з комплексними числами $a = a_1 + ia_2 \in \mathbb{C}$.
- $a \cdot b$ позначає скалярний добуток $a \cdot b = a_1b_1 + a_2b_2 = \frac{1}{2}(a\bar{b} + \bar{a}b)$;
- $a \times b$ позначає векторний добуток $a \times b = a_1b_2 - a_2b_1 = \frac{i}{2}(a\bar{b} - \bar{a}b)$.
- Замкнені криві є орієнтованими проти годинникової стрілки, τ і ν позначають одиничні тангенціальний і нормальний вектори до кривих, що узгоджуються з орієнтацією (ν – вектор зонішньої нормалі).
- Для скалярної функції h, $\nabla^\perp h = (-\partial_{x_2}h, \partial_{x_1}h)$.
- Для векторного поля A, $\mathrm{curl} A = \partial A_2/\partial x_1 - \partial A_1/\partial x_2$.
- $\dfrac{\partial}{\partial z} = \dfrac{1}{2}(\dfrac{\partial}{\partial x_1} - i\dfrac{\partial}{\partial x_2})$ і $\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}} = \dfrac{1}{2}(\dfrac{\partial}{\partial x_1} + i\dfrac{\partial}{\partial x_2})$ позначають класичні оператори Коші.
- $\mathrm{Jac}\, u$ позначає Якобіан u, $\mathrm{Jac}\, u = \partial_{x_1}u \times \partial_{x_2}u$; також будемо користуватись позначенням $\mathrm{Jac}\,(f, g) = \partial_{x_1}f\partial_{x_2}g - \partial_{x_1}g\partial_{x_2}f$ для скалярних функцій f і g.
- $\mathbb{D}_r(y)$ позначає відкритий диск з радіусом r і центром в y, причому у випадку коли $y = 0$ будемо спрощувати позначення до $\mathbb{D}_r$ і $\mathbb{D}$ якщо $r = 1$.
- Замість параметра Гінзбурга-Ландау κ будемо використовувати також $\varepsilon = 1/\sqrt{\kappa}$ (тобто $\kappa = 1/\varepsilon^2$) у Підрозділах 1.2 і 1.6, а також $\lambda = 2\kappa^2$ у Підрозділах 1.3, 1.4 і 1.5.

Через обмеження на обсяг дисертації доведення основного результату Підрозділу 1.2 – Теореми 1.2.3 у загальному випадку наведено в Додатку A. Також, Додаток B містить дослідження асимптотичної поведінки мінімізантів повного функціонала Гінзбурга-Ландау коли $\kappa \to 1/\sqrt{2} - 0$; доведення одного з ключових технічних результатів Підрозділу 1.4 – Леми 1.4.6 наведено в Додатку C; доведення технічних результатів Підрозділу 1.6.2 наведено в Додатку N.

1.1 Неіснування глобальних мінімізантів спрощеного функціонала Гінзбурга-Ландау в двозв'язних областях

У цьому підрозділі наведено доведення неіснування мінімізантів функціонала Гінзбурга-Ландау в класі функцій з заданими одиничними степеням відображення на межі двозв'язної області у випадку, коли H^1-ємність області є меншою π.

Розглянемо задачу мінімізації спрощеного функціонала Гінзбурга-Ландау

$$E_\kappa[u] = \frac{1}{2}\int_G |\nabla u|^2 dx + \frac{\kappa^2}{4}\int_G (|u|^2-1)^2 dx \to \inf, \quad u \in \mathcal{J}_{11}, \tag{1.1.1}$$

де $G = \Omega \setminus \overline{\omega}$, $\overline{\omega} \subset \Omega$, і ω, Ω – обмежені одозв'язні області в $\mathbb{R}^2$ з гладкою межею. Клас $\mathcal{J}_{11}$ визначається наступним чином

$$\mathcal{J}_{11} = \{u \in H^1(G) : |u| = 1 \text{ на } \partial\Omega,\ \partial\omega;\ \deg(u, \partial\Omega) = \deg(u, \partial\omega) = 1\}. \tag{1.1.2}$$

Як зазначено вище, кожний мінімізант (1.1.1) задоволняє рівняння Гінзбурга-Ландау

$$-\Delta u + \kappa^2(|u|^2 - 1)u = 0 \tag{1.1.3}$$

в G і крайову умову

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} \times u = 0 \quad \text{на } \partial G. \tag{1.1.4}$$

Основним результатом цього підрозділу є наступна теорема.

Теорема 1.1.1. *Нехай $m_\kappa = \inf\{E_\kappa[u], u \in \mathcal{J}_{11}\}$. Припустимо, що $\operatorname{cap}(G) < \pi$, тоді існує $0 < \kappa_1 < \infty$ таке що m_κ завжди досягається для $\kappa < \kappa_1$ і ніколи не досягається для $\kappa > \kappa_1$.*

Зауваження 1.1.2. Нагадаємо, що H^1-ємність $\operatorname{cap}(G)$ області G визначається наступним чином

$$\operatorname{cap}(G) = \inf\left\{\int_G |\nabla V|^2 dx;\ V \in H^1(G),\ V = 0 \text{ на } \partial\omega,\ V = 1 \text{ на } \partial\Omega\right\}.$$

Доведення Теореми 1.1.1. З огляду на [35, Теорема 3] треба показати неіснування мінімізантів для достатньо великих $\kappa > 0$. Міркуємо від супротивного. Припустимо, що для всіх $\kappa > 0$ інфімум m_κ досягається на певному відображенні $u_\kappa \in \mathcal{J}_{11}$. Тоді $E_\kappa\left[u_\kappa\right] \leq 2\pi$, оскільки $m_\kappa \leq 2\pi$ для всіх $\kappa > 0$ [46]. Покажемо, що без обмеження загальності можна вважати, що G – кільце $G = \{x \in \mathbb{R}^2 : R > |x| > \frac{1}{R}\}$.

Крок I (конформна еквівалентність кільцю). Наступний результат дозволяє звести доведення до випадку коли область G є кільцем.

Твердження 1.1.3. *Припустимо, що область G є такою, що m_κ досягається для всіх $\kappa > 0$, тоді теж саме має місце для кільця $\mathcal{G} := \left\{x : \exp\left(-\frac{\pi}{\mathrm{cap}(G)}\right) < |x| < \exp\left(\frac{\pi}{\mathrm{cap}(G)}\right)\right\}$, де кільце $\mathcal{G}$ є конформно еквівалентним G.*

Доведення. Добре відомо (див., наприклад, [4]), що G конформно єківівалентна кільцю $\mathcal{G}$; більш того, відповедне конформне відображення $\mathcal{F}$ продовжується до C^1-дифеоморфізму $\overline{G}$ на $\overline{\mathcal{G}}$, що зберігає орієнтацію.

Для заданого $\kappa > 0$, нехай u_κ мінімізує $E_\kappa[u]$ в $\mathcal{J}_{11}$, тоді $E_\kappa\left[u_\kappa\right] < 2\pi$. Дійсно, для всіх $\kappa' > \kappa$ існує мінімізант $u_{\kappa'}$ функціоналу $E_{\kappa'}[u]$ в $\mathcal{J}_{11}$ і $E_{\kappa'}\left[u_{\kappa'}\right] \leq 2\pi$, оскільки $m_\kappa \leq 2\pi$ для всіх $\kappa > 0$ [46]. Тоді

$$E_{\kappa'}\left[u_{\kappa'}\right] - E_\kappa\left[u_\kappa\right] \geq E_{\kappa'}\left[u_{\kappa'}\right] - E_\kappa\left[u_{\kappa'}\right] = \frac{(\kappa')^2 - \kappa^2}{4}\int_A (|u_{\kappa'}|^2 - 1)^2 dx,$$

таким чином $m_\kappa \leq 2\pi$ і $m_\kappa = 2\pi$ тоді й лише тоді, коли $|u_{\kappa'}| = 1$ майже всюди в G. Так як $u_{\kappa'}$ є розв'язком рівняння Гінзбурга-Ландау (1.1.3), поточкова рівність $|u_{\kappa'}| = 1$ в G означає, що $u_{\kappa'} \equiv \mathrm{const}$ тобто $u_{\kappa'} \notin \mathcal{J}_{11}$.

За допомогою конфомної заміни змінних $x \to \mathcal{F}(x)$ в нерівності $E_\kappa\left[u_\kappa\right] < 2\pi$ отримуємо

$$\frac{1}{2}\int_{\mathcal{G}} |\nabla\tilde{u}|^2 dx + \frac{\kappa^2}{4}\int_{\mathcal{G}} (|\tilde{u}|^2 - 1)^2 \mathrm{Jac}(\mathcal{F}^{-1}) dx < 2\pi,$$

де $\tilde{u}(x) = u_\kappa(\mathcal{F}^{-1}(x))$. Оскільки κ є довільним і m_κ досягається коли $m_\kappa < 2\pi$ [35], то (1.1.1) досягається для всіх $\kappa > 0$.

Зауважимо, що за означенням H^1-ємності і внаслідок конформної інваріантності інтеграла Діріхлє $\mathrm{cap}\,(\mathcal{G}) = \mathrm{cap}\,(G)$.

Крок II (зведення до лінійної задачі). Скористаємось наступною теоремою [34]:

Теорема 1.1.4. *Нехай* $\mathrm{cap}(G) < \pi$. *Припустимо, що* $u_\kappa \in \mathcal{J}_{11}$ *є розвязком рівняння Гінзбурга-Ландау* (1.1.3), *таким що* $E_\kappa(u_\kappa) < 2\pi + \mathrm{e}^{-\kappa}$. *Тоді*

$$\int_G (|u_\kappa|^2 - 1)^2 dx = o(\kappa^{-m}) \text{ коли } \kappa \to \infty, \ \forall m > 0, \ l \in \mathbb{N}, \tag{1.1.5}$$

і існує $\gamma_\kappa = \mathrm{const} \in \mathbb{S}^1$ *таке що для будь-якої компактної множини* $K \subset G$

$$\|u_\kappa - \gamma_\kappa\|_{C^l(K)} = o(\kappa^{-m}) \text{ коли } \kappa \to \infty, \ \forall m > 0, \ l \in \mathbb{N}. \tag{1.1.6}$$

Помножимо рівняння (1.1.3) на $\log \frac{|x|}{R}$ і проінтегруємо по $D = \{x : 1 < |x| < R\}$. Маємо:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_D \Delta u_\kappa \log \frac{|x|}{R}\, dx + \kappa^2 \int_D u_\kappa (1 - |u_\kappa|^2) \log \frac{|x|}{R} dx \\ &= \int_{\partial D} \frac{\partial u_\kappa}{\partial \nu} \log \frac{|x|}{R} d\sigma - \int_{\partial D} u_\kappa \frac{\partial \log |x|}{\partial \nu} d\sigma + \kappa^2 \int_D u_\kappa (1 - |u_\kappa|^2) \log \frac{|x|}{R} dx \\ &= -\frac{1}{R} \int_{|x|=R} u_\kappa d\sigma + \int_{|x|=1} u_\kappa d\sigma \\ &+ \int_{|x|=1} \frac{\partial u_\kappa}{\partial \nu} \log \frac{1}{R} d\sigma + \kappa^2 \int_D u_\kappa (1 - |u_\kappa|^2) \log \frac{|x|}{R} dx. \end{aligned}$$

Користуючись тепер (1.1.6) і (1.1.5) знаходимо, що для достатньо великих κ

$$\frac{1}{R} \int_{|x|=R} u_\kappa d\sigma = 2\pi\gamma_\kappa + o(\kappa^{-m}) \text{ and } R \int_{|x|=1/R} u_\kappa d\sigma = 2\pi\gamma_\kappa + o(\kappa^{-m}). \tag{1.1.7}$$

За допомогою конформної заміни змінних $x \to (r, \varphi) : \ x = e^{r + i\varphi}$, $E_\kappa\,[u_\kappa]$ переписується у вигляді

$$E_\kappa\,[u_\kappa] = \frac{1}{2} \int_{-L}^{L} dr \int_0^{2\pi} d\varphi |\nabla u_\kappa|^2 + \frac{\kappa^2}{4} \int_{-L}^{L} e^{2r} dr \int_0^{2\pi} d\varphi (|u_\kappa|^2 - 1)^2,$$

де $L = \log R$. Симетризуємо u_κ,

$$u_\kappa(r, \varphi)(\text{або } u_\kappa(-r, \varphi)) := \bar{\gamma}_\kappa \begin{cases} u_\kappa(r, \varphi), & 0 \le r < L \\ u_\kappa(-r, \varphi), & -L < r < 0, \end{cases}$$

так щоб модифіковане $u_\kappa(r,\varphi)(=u_\kappa(-r,\varphi))$ задовольняло

$$\frac{1}{2}\int_{-L}^{L}dr\int_0^{2\pi}d\varphi|\nabla u_\kappa|^2+\frac{\kappa^2}{4R^2}\int_{-L}^{L}dr\int_0^{2\pi}d\varphi(|u_\kappa|^2-1)^2\le 2\pi. \tag{1.1.8}$$

Внаслідок (1.1.6) маємо

$$\max_{-\rho<r<\rho}|u_\kappa-1|=o(\kappa^{-m}) \text{ коли } \kappa\to\infty, \tag{1.1.9}$$

для всіх $0<\rho<L$ і $m\in\mathbb{N}$. Можемо також припускати, що

$$\mathrm{Im}\int_{-L}^{L}u_\kappa(L,\varphi)d\varphi=\mathrm{Im}\int_{-L}^{L}u_\kappa(-L,\varphi)d\varphi=0. \tag{1.1.10}$$

Дійсно, внаслідок (1.1.7) знайдеться комплексна константа, з абсолютною величиною 1 і така що після помноження на неї u_κ задовольняє (1.1.10) (разом з (1.1.8) та (1.1.9)). Помітимо, що

$$(|u_\kappa|^2-1)^2\ge(\mathrm{Re}(u_\kappa)-1)^2(\mathrm{Re}(u_\kappa)+1)^2-4(1-\mathrm{Re}(u_\kappa))(\mathrm{Im}(u_\kappa))^2,$$

тоді, користуючись (1.1.8) та (1.1.9), маємо: для достатньо великих $\kappa>0$ існує $\kappa'\ge\kappa$ таке що $\tilde v_\kappa=u_{\kappa'}$ задовольняє

$$\begin{aligned}\tilde E_\kappa\left[\tilde v_\kappa\right]=\frac{1}{2}\int_{-L}^{L}dr\int_0^{2\pi}d\varphi|\nabla\tilde v_\kappa|^2\\ +\int_{-\rho}^{\rho}dr\int_0^{2\pi}d\varphi\left(\frac{\kappa^2}{2}(\mathrm{Re}(\tilde v_\kappa)-1)^2-\frac{\kappa^{-2}}{2}(\mathrm{Im}(\tilde v_\kappa))^2\right)\le 2\pi.\end{aligned}$$

Більш того $|\tilde v_\kappa|=1$ коли $r=\pm L$, і функція $\tilde v_\kappa$ є 2π-періодичною за змінною φ. Розкладемо $\tilde v_\kappa$ в ряд Фур'є

$$\tilde v_\kappa=a_0^\kappa+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^\kappa\cos n\varphi+b_n^\kappa\sin n\varphi),\ \text{при } r=\pm L.$$

Внаслідок (1.1.10) маємо $\mathrm{Im}(a_0^\kappa)=0$. Крім того, користуючись відомою формулою для степіня відображення (див. [34]), маємо також рівність

$$1=\frac{1}{2i}\sum_{n=1}^{\infty}n(b_n^\kappa\bar a_n^\kappa-a_n^\kappa\bar b_n^\kappa)=\sum_{n=1}^{\infty}n(\mathrm{Re}(a_n^\kappa)\mathrm{Im}(b_n^\kappa)-\mathrm{Re}(b_n^\kappa)\mathrm{Im}(a_n^\kappa)). \tag{1.1.11}$$

Для достатньо великих κ існує єдиний мінімізант $\tilde{w}_\kappa$ функціонала $\tilde{E}_\kappa[\tilde{w}_\kappa]$ в класі 2π-періодичних за змінною φ комплексних функцій що задовольняють крайові умови $\tilde{w}_\kappa = \tilde{v}_\kappa$ для $r = \pm L$. Тоді

$$\tilde{E}_\kappa[\tilde{w}_\kappa] \leq \tilde{E}_\kappa[\tilde{v}_\kappa] \leq 2\pi, \tag{1.1.12}$$

де $\tilde{w}_\kappa$ – розв'язок задачі

$$\begin{cases} -\Delta \mathrm{Re}(w) + \kappa^2 V(r)(\mathrm{Re}(w) - 1) = 0, \ -L < r < L, \\ -\Delta \mathrm{Im}(w) - \kappa^{-2} V(r)\mathrm{Im}(w) = 0, \ -L < r < L, \\ w(r,\varphi) = w(r,\varphi + 2\pi), \\ w = \tilde{v}_\kappa, \ r = \pm L. \end{cases} \tag{1.1.13}$$

Тут $V(r) = 1$ для $-\rho < r < \rho$ і $V(r) = 0$ у противному випадку.

Крок III (енергетична оцінка для лінійної задачі). Розв'язок (1.4.87) має вигляд:

$$\tilde{w}_\kappa(r,\varphi) = a_0^\kappa w_{\kappa,0}^{(1)}(r) + \sum_{n=1}^{\infty} w_{\kappa,n}^{(1)}(r)(\mathrm{Re}\,(a_n^\kappa)\cos n\varphi + \mathrm{Re}\,(b_n^\kappa)\sin n\varphi)$$
$$+ i\sum_{n=1}^{\infty} w_{\kappa,n}^{(2)}(r)(\mathrm{Im}\,(a_n^\kappa)\cos n\varphi + \mathrm{Im}\,(b_n^\kappa)\sin n\varphi)$$

з дійсною $w_{\kappa,0}^{(1)}$ (оскільки a_0^κ є дійсним). Функції $w_{\kappa,n}^{(1)}, w_{\kappa,n}^{(2)}$ знаходяться у явному вигляді

$$\tilde{E}_\kappa[\tilde{w}_\kappa] = P_0^\kappa + \pi\sum_{n=1}^{\infty} n(P_n^\kappa(|\mathrm{Re}\,(a_n^\kappa)|^2 + |\mathrm{Re}\,(b_n^\kappa)|^2) + Q_n^\kappa(|\mathrm{Im}\,(a_n^\kappa)|^2 + |\mathrm{Im}\,(b_n^\kappa)|^2)). \tag{1.1.14}$$

Тут $P_0^\kappa \geq 0$ і

$$P_n^\kappa = \frac{1 - e^{-2n(L-\rho)} + \sqrt{1+\kappa^2 n^{-2}}\tanh\sqrt{n^2+\kappa^2}\rho(1 + e^{-2n(L-\rho)})}{1 + e^{-2n(L-\rho)} + \sqrt{1+\kappa^2 n^{-2}}\tanh\sqrt{n^2+\kappa^2}\rho(1 - e^{-2n(L-\rho)})},$$

$$Q_n^\kappa = \frac{1 - e^{-2n(L-\rho)} + \sqrt{1-(\kappa n)^{-2}}\tanh\sqrt{n^2-\kappa^{-2}}\rho(1 + e^{-2n(L-\rho)})}{1 + e^{-2n(L-\rho)} + \sqrt{1-(\kappa n)^{-2}}\tanh\sqrt{n^2-\kappa^{-2}}\rho(1 - e^{-2n(L-\rho)})}.$$

Таким чином

$$\tilde{E}_\kappa\left[\tilde{w}_\kappa\right] \geq 2\pi\sum_{n=1}^{\infty} n\sqrt{P_n^\kappa Q_n^\kappa}(\left|\mathrm{Re}\left(a_n^\kappa\right)\right|\left|\mathrm{Im}\left(b_n^\kappa\right)\right| + \left|\mathrm{Re}\left(b_n^\kappa\right)\right|\left|\mathrm{Im}\left(a_n^\kappa\right)\right|). \tag{1.1.15}$$

Покажемо тепер, що існує $\kappa_0 > 0$ таке, що для всіх $\kappa \geq \kappa_0$

$$P_n^\kappa Q_n^\kappa > 1 \;\forall n \geq 1. \tag{1.1.16}$$

Дійсно, можна переписати Q_n^κ, P_n^κ наступним чином

$$P_n^\kappa = \frac{1+\beta_n^\kappa e^{-2n(L-\rho)}}{1-\beta_n^\kappa e^{-2n(L-\rho)}}, \quad Q_n^\kappa = \frac{1-\alpha_n^\kappa e^{-2n(L-\rho)}}{1+\alpha_n^\kappa e^{-2n(L-\rho)}},$$

де

$$\alpha_n^\kappa = \frac{1-\sqrt{1-(\kappa n)^{-2}}\tanh\sqrt{n^2-\kappa^{-2}}\rho}{1+\sqrt{1-(\kappa n)^{-2}}\tanh\sqrt{n^2-\kappa^{-2}}\rho},\ \beta_n^\kappa = \frac{\sqrt{1+\kappa^2 n^{-2}}\tanh\sqrt{n^2+\kappa^2}\rho - 1}{\sqrt{1+\kappa^2 n^{-2}}\tanh\sqrt{n^2+\kappa^2}\rho + 1}.$$

Зазначимо, що (1.1.16) еквівалентно нерівності $\alpha_n^\kappa < \beta_n^\kappa$. Ця остання нерівність справджується для кожного $n \geq 0$ коли κ є достатньо великим, оскільки $\alpha_n^\kappa \to e^{-2n\rho}$, $\beta_n^\kappa \to 1$, коли $\kappa \to \infty$. З іншого боку, для достатньо великих n і всіх $\kappa \geq 1$, маємо $\alpha_n^\kappa \leq e^{-n\rho} + \frac{1}{(n\kappa)^2}$, $\beta_n^\kappa \geq \frac{\gamma}{n^2}$, де $\gamma > 0$ не залежить від n та κ. Таким чином (1.1.16) виконується як тільки κ_0 вибрано достатньо великим. З (1.1.16) та (1.1.15) випливає, що

$$\tilde{E}_\kappa\left[\tilde{w}_\kappa\right] \geq 2\pi\sum_{n=1}^{\infty} n(\left|\mathrm{Re}\left(a_n^\kappa\right)\right|\left|\mathrm{Im}\left(b_n^\kappa\right)\right| + \left|\mathrm{Re}\left(b_n^\kappa\right)\right|\left|\mathrm{Im}\left(a_n^\kappa\right)\right|),$$

і ця нерівність є строгою якщо права частина не дорівнює нулю. В силу (1.1.11),

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\left|\mathrm{Re}\left(a_n^\kappa\right)\right|\left|\mathrm{Im}\left(b_n^\kappa\right)\right| + \left|\mathrm{Re}\left(b_n^\kappa\right)\right|\left|\mathrm{Im}\left(a_n^\kappa\right)\right|\right) \geq 1,$$

таким чином $\tilde{E}_\kappa\left[\tilde{w}_\kappa\right] > 2\pi$. Але це суперечить (1.1.12). □

1.2 Локальні мінімізанти з вихорами спрощеного функціонала Гінзбурга-Ландау

В цьому підрозділі вивчаються розв'язки рівняння

$$-\Delta u + \frac{1}{\varepsilon^2}u(|u|^2-1) = 0 \tag{1.2.1}$$

в дозв'язній області G, $G = \Omega \backslash \overline{\omega}$, де Ω та ω обмежені однозв'язані гладкі області і $\overline{\omega} \subset \Omega \subset \mathbb{R}^2$, що задовольняють крайові умови

$$|u| = 1 \text{ і } u \times \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{на } \partial G. \tag{1.2.2}$$

Задача (1.2.1)–(1.2.2) еквівалентна знаходженню критичних точок функціонала енергії

$$E_\varepsilon(u) = \frac{1}{2} \int_G |\nabla u|^2 \mathrm{d}x + \frac{1}{4\varepsilon^2} \int_G (|u|^2 - 1)^2 \mathrm{d}x. \tag{1.2.3}$$

в просторі

$$\mathcal{J} = \{u \in H^1(G; \mathbb{R}^2);\ |u| = 1 \text{ на } \partial G\}. \tag{1.2.4}$$

Розглядається питання існування стійких розв'язків задачі (1.2.1)–(1.2.2) з вихорами.

Мінімізація енергії (1.2.3) в $\mathcal{J}$ приводить до константних розв'язків, для того щоб отримати критичні точки з вихорами можна спробувати задати два різні степені відображення $q \neq p$ на $\partial\Omega$ і $\partial\omega$. Тобто, розглянемо мінімізацію $E_\varepsilon(u)$ на множині $\mathcal{J}_{pq} \subset \mathcal{J}$, де

$$\mathcal{J}_{pq} := \{u \in \mathcal{J};\ \deg(u, \partial\omega) = p, \deg(u, \partial\Omega) = q.\} \tag{1.2.5}$$

Зауважимо, що $\mathcal{J}_{pq}$ є зв'язаними компонентами $\mathcal{J}$ (див. [49]). Прості топологічні міркування ведуть до висновку, що критичні точки з $\mathcal{J}_{pq}$ повинні мати принаймні $|p-q|$ (з врахуванням кратності) вихорів. Підкреслимо, що існування таких критичних точок є далеко не очевидним. Наприклад (див. Підрозділ 1.2.2), не існує глобальних мінімізантів $E_\varepsilon(u)$ в $\mathcal{J}_{01}$ і слабкі границі мінімізуючих послідовностей не належать до $\mathcal{J}_{01}$. Цей простий приклад ілюструє важливу властивість множин $\mathcal{J}_{pq}$ – вони не є замкненими відносно слабкої збіжності в $H^1(G;)$, оскільки степінь на межі може змінюватись в переході до границі.

Основним результатом цього підрозділу є наступна теорема.

Теорема 1.2.1. *Для будь-якого цілого числа $M > 0$ і $\varepsilon < \varepsilon_1$ ($\varepsilon_1 = \varepsilon_1(M) > 0$) існує принаймні M стійких розв'язків задачі (1.2.1),(1.2.2) з вихорами (що* *знаходяться біля межі ∂G). Вихори цих розв'язків знаходяться на відстані $o(\varepsilon)$ від межі ∂G і мають обмежену енергією в границі $\varepsilon \to 0$. Розв'язки є стійкими в тому сенсі, що вони є локальними мінімізантами (1.2.3) в $\mathcal{J}$.*

Для побудови локальних мінімізантів задачі (1.2.3) в $\mathcal{J}$ представимо $\mathcal{J}$ як об'єднання підмножин $\mathcal{J}_{pq}^{(d)}$ (див. (1.5.2) нижче), $\mathcal{J} = \cup_{p,q,d\in\mathbb{Z}}\mathcal{J}_{pq}^{(d)}$, і розглянемо задачу мінімізації в $\mathcal{J}_{pq}^{(d)}$. Буде показано, що для достатньо малих ε кожен мінімізант має відкритий окіл, що налележить до $\mathcal{J}_{pq}^{(d)}$. Це означає, що мінімізанти в $\mathcal{J}_{pq}^{(d)}$ є локальних мінімізантами в $\mathcal{J}$.

Таким чином, побудова розв'язків задачі (1.2.1)–(1.2.2) базується на дослідженні наступної задачі мінімізації:

$$m_\varepsilon(p,q,d) := \inf\{E_\varepsilon(u);\, u \in \mathcal{J}_{pq}^{(d)}\}, \tag{1.2.6}$$

де

$$\mathcal{J}_{pq}^{(d)} = \{u \in \mathcal{J}_{pq}; \Phi(u) \in [d-1/2, d+1/2]\}, \tag{1.2.7}$$

p,q і d -задані цілі числа, а функціонал $\Phi(u)$ задається наступним чином. Розглянемо розв'язок V задачі

$$\begin{cases} \Delta V = 0 \quad \text{в } G \\ V = 1 \quad \text{на } \partial\Omega \\ V = 0 \quad \text{на } \partial\omega, \end{cases} \tag{1.2.8}$$

і визначимо $\Phi(\,\cdot\,):\ H^1(G;\mathbb{C}) \to \mathbb{R}$ формулою

$$\Phi(u) = \frac{1}{2\pi}\int_G u \times (\partial_{x_1}V\,\partial_{x_2}u - \partial_{x_2}V\,\partial_{x_1}u)\,\mathrm{d}x. \tag{1.2.9}$$

У окремому випадку коли G є кільцем, $G_{R_1R_2} = \{x; R_1 < |x| < R_2\}$, $\Phi(u)$ має вигляд

$$\Phi(u) = \frac{1}{\log(R_2/R_1)}\int_{R_1}^{R_2}\Big(\frac{1}{2\pi}\int_{|x|=\xi} u \times \frac{\partial u}{\partial \tau}\mathrm{d}s\Big)\frac{\mathrm{d}\xi}{\xi}. \tag{1.2.10}$$

Для $\mathbb{S}^1$-значних (всюди в G) функцій $\Phi(u)$ є цілим числом і представлення (1.2.10) надає інтерпретацію $\Phi(u)$ як середнього значення степеня відображення. Зауважимо, що, взагалі кажучі, $\Phi(u)$ не є цілим числом. Важливою властивістю функціоналу $\Phi(u)$ є той факт що $\Phi(u)$ є неперервним по відношенню до слабкої H^1-збіжності, на відміну від стандартного степеня відображення (1.0.5). Крім того, якщо ми розглянемо підмножину функцій $u \in \mathcal{J}$ з обмеженою енергією і виберемо ε достатньо малим, тоді обмеження $\Phi(u) \in [d-1/2, d+1/2]$ задає відносно відкриту множину, як випливає з наступного твердження.

Твердження 1.2.2. *Зафіксуємо $\Lambda > 0$. Існує $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\Lambda) > 0$ таке, що для $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, кожного цілого d і довільного $u \in H^1(G;\mathbb{C})$, що задовольняє $E_\varepsilon(u) \leq \Lambda$, $\Phi(u)$ не може бути напівцілим. Таким чином наступні умови є еквівалентними*

$$d - 1/2 \leq \Phi(u) \leq d + 1/2 \iff d - 1/2 < \Phi(u) < d + 1/2. \tag{1.2.11}$$

З огляду на Твердження 1.2.2, існування розв'язків у Теоремі 1.2.1 є наслідком наступного результату.

Теорема 1.2.3. *Для будь-яких цілих чисел p, q і $d > 0$ ($d < 0$) з $d \geq \max\{p,q\}$ ($d \leq \min\{p,q\}$) існує $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(p,q,d) > 0$ таке, що інфімум в (1.2.6) завжди досягається, для $\varepsilon < \varepsilon_1$. Більш того*

$$m_\varepsilon(p,q,d) \leq I_0(d,G) + \pi(|d-p| + |d-q|), \tag{1.2.12}$$

де

$$I_0(d,G) = \min\left\{\frac{1}{2}\int_G |\nabla u|^2 \mathrm{d}x,\ u \in H^1(G;\mathbb{S}^1) \cap \mathcal{J}_{dd}\right\}. \tag{1.2.13}$$

Число $I_0(d,G)$ визначається формулою $I_0(d,G) = 2(\pi d)^2/\mathrm{cap}(G)$ через H^1-ємність $\mathrm{cap}(G)$ області G.

Основна складність в доведенні Теореми 1.2.3 полягає у встановленні досяжності нижньої границі в (1.2.6), що є нетривіальним, оскільки степень відображення на $\partial\Omega$ і $\partial\omega$ не зберегається, взагалі кажучі, в переході до слабкої H^1-границі.Буде показано, що розв'язки (1.2.1)–(1.2.2), які є мінімізантами (1.2.6) (локальними мінімізантами (1.2.3) в $\mathcal{J}$) з $p \neq d$ і будь-яким q (або $q \neq d$ і будь-яким p) повинні мати вихори. Для кожного $\varepsilon > 0$ ці вихори розташовані на додатній відстані від ∂G проте вони наближаються до ∂G коли $\varepsilon \to 0$.

Теорема 1.2.4. *Припустимо, що цілі числа p, q і d задовольняють припущенням Теореми 1.2.3. Тоді при $\varepsilon \to 0$ мінімізанти (1.2.6) збігаються слабко в $H^1(G)$, з точністю до підпослідовності, до гармонічного відображення u, що мінімізує (1.2.13). Крім того,*

$$E_\varepsilon(u_\varepsilon) = I_0(d, G) + \pi(|d-p| + |d-q|) + o(1), \quad \text{при } \varepsilon \to 0, \text{ і} \tag{1.2.14}$$

$$E_\varepsilon(u_\varepsilon) = \frac{1}{2}\int_G |\nabla u_\varepsilon|^2 \mathrm{d}x + o(1), \quad \text{при } \varepsilon \to 0. \tag{1.2.15}$$

Зокрема з (1.2.14), (1.2.15) витікає, що сильна збіжність мінімізантів (1.2.6) в $H^1(G)$ при $\varepsilon \to 0$ має місце тільки коли $p = q = d$.

У подальшому завжди припускаємо, без втрати загальності, що $d > 0$ (в противному випадку можна змінити орієнтацію $\mathbb{R}^2$). Схема доведення Теореми 1.2.3 є наступною. На першому кроці встановлюється існування мінімізантів задачі (1.2.6) для $p = q = d$ за допомогою Леми 1.4.3 доведеної в роботі [35], оцінки знизу для енергії з Леми 1.2.15 та оцінки зверху з Леми 1.2.13. Доводиться, що ці мінімізанти (вони належать до $\mathcal{J}^{(d)}_{dd}$) не мають нулів (вихорів). Далі застосовується індукція за параметром $æ(p, q) = |d-p| + |d-q|$. Цей параметр відповідає числу вихорів. Для заданого цілого $K \geq 0$, припускається існування мінімізантів задачі (1.2.6) для p, q таких що $æ(p, q) \leq K$ і $p \leq d$, $q \leq d$ (індуктивне припущення) і доводиться існування мінімізантів для p, q таких що $æ(p, q) = K + 1$ і $p \leq d$, $q \leq d$. Індуктивний перехід від $K = 0$ до $K = 1$ описано в Підрозділі 1.2.5, де ключовим технічним кроком є конструювання тестової функції $v \in \mathcal{J}^{(d)}_{d(d-1)}$, такої що

$$E_\varepsilon(v) < E_\varepsilon(u_0) + \pi, \tag{1.2.16}$$

де u_0 – мінімізант (1.2.3) в $\mathcal{J}^{(d)}_{dd}$. Ця функція v конструюється з мінімізанта u_0 і конформного перетворення Мебіуса одиничного круга з приписаним нульом біля межі. Далі доведення проводиться наступним чином, для заданої мінімізуючої послідовності $(u^{(k)}) \subset \mathcal{J}^{(d)}_{d(d-1)}$ задачі (1.2.6) для $p = d$, $q = d-1$ маємо, з огляду на (1.2.25) і (1.2.16),

$$E_\varepsilon(u) + \pi(|d - \deg(u, \partial\omega)| + |d - 1 - \deg(u, \partial\Omega)|) \leq \lim_{k\to\infty} E_\varepsilon(u^{(k)}) < E_\varepsilon(u_0) + \pi, \tag{1.2.17}$$

де u є слабкою H^1-границею послідовності $(u^{(k)})$. Ліва частина (1.2.17) може бути оцінена за допомогою Леми 1.2.15 тоді як права частина (1.2.17) оцінюється за допомогою Леми 1.2.13, таким чином отримуємо

$$I_0(d,A)+\pi(2|d-\deg(u,\partial\omega)|+|d-1-\deg(u,\partial\Omega)|+|d-\deg(u,\partial\Omega)|) < I_0(d,A)+\frac{3}{2}\pi, \tag{1.2.18}$$

звідки маємо $\deg(u, \partial\omega) = d$, і або $\deg(u, \partial\Omega) = d - 1$ або $\deg(u, \partial\Omega) = d$. З огляду на (1.2.17), єдиним можливим випадком є $\deg(u, \partial\Omega) = d - 1$ оскільки в протиному випадку $u \in \mathcal{J}^{(d)}_{dd}$ так що $E_\varepsilon(u) \geq E_\varepsilon(u_0)$, але це протирічить (1.2.17). Таким чином $u \in \mathcal{J}^{(d)}_{d(d-1)}$ і u є мінімізантом в $\mathcal{J}^{(d)}_{d(d-1)}$. Доведення існування мінімізанта для $p = d-1$, $q = d$ – таке ж саме. Індуктивний перехід від æ$(p, q) \leq K$ до æ$(p, q) \leq K + 1$ для $K = 1, 2, \dots$ проводиться подібно випадку $K = 0$, але є технічно більш складним. Це потребує додаткового аналізу асимптотичної поведінки при $\varepsilon \to 0$ мінімізантів u_{pq} задачі (1.2.6) для æ$(p, q) = K$, що наведено в Підрозділі 1.2.6. Для завершення доведення будуються тестові функції $v \in \mathcal{J}^{(d)}_{p'q'}$ $(p' = p,\ q' = q - 1$ або $p' = p,\ q' = q - 1)$, такі що $E_\varepsilon(v) < E_\varepsilon(u_{pq}) + \pi$.

1.2.1 Властивості розв'язків задачі (1.2.1)–(1.2.2)

В [34] показано, що кожний розв'язок $u \in H^1(G; \mathbb{R}^2)$ задачі (1.2.1)–(1.2.2) є регулярним (наприклад, $u \in C^2(\overline{G})$ якщо G має C^3 межу). За допомогою принципу максимума неважко показати наступний результат.

Лема 1.2.5. *Функція $\rho(x) = |u(x)|$ задовольняє нерівність $0 \leq \rho \leq 1$ в G.*

Локально, в далечині від своїх нулів, u можна представити як $u = \rho e^{i\phi}$ з дійсною фазою ϕ. Також будемо використовувати потенціал h пов'язаний з роз'язком u задачі (1.2.1)–(1.2.2) співвідношеннями

$$\begin{cases} \nabla^{\perp} h = (u \times \partial_{x_1} u, u \times \partial_{x_2} u) \quad \text{в } G \\ h = 1 \quad \text{на } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.2.19}$$

На відміну від ϕ функція h визначена глобально в G, і

$$\nabla h = -\rho^2 \nabla^{\perp} \phi \quad \text{коли } \rho > 0. \tag{1.2.20}$$

Існування єдиного розв'язку системи (1.2.19) і його прості властивості встановлено в наступній Лемі.

Лема 1.2.6. *Існує єдиний розв'язок h системи (1.2.19) і $h = \mathrm{Const}$ на $\partial\omega$, крім того*

$$\Delta h = 2\partial_{x_1} u \times \partial_{x_2} u \quad \text{в } G, \tag{1.2.21}$$

$$\operatorname{div}(\frac{1}{\rho^2} \nabla h) = 0 \quad \text{коли } \rho > 0. \tag{1.2.22}$$

Доведення. Векторне поле $F = (u \times \partial_{x_1} u, u \times \partial_{x_2} u)$ є бездивергентним. Дійсно, оскільки u є гладким розв'язком (1.2.1), маємо $\operatorname{div} F = u \times \Delta u = 0$ в G. Звідси випливає, що для будь-якої однозв'язаної області $W \subset G$ існує (єдина, з точністю до адитивної постійної) функція ϕ яка задовольняє $\nabla^{\perp} \phi = F$ в W (Лема Пуанкаре). Цей локальний розв'язок ϕ продовжується до (можливо багатозначного) розв'язоку визначеного всюду в G. Оскільки u задовольняє (1.2.2), маємо $\frac{\partial \phi}{\partial \tau} = -F \cdot \nu = 0$ на ∂G, тобто ϕ приймає постійні значення на кожній зв'язній компоненті межі. Це означає, що ϕ є насправді однозначною функцією. Таким чином $h(x) = \phi(x) - \phi(\partial\Omega) + 1$ є єдиним розв'язком (1.2.19).

Рівняння (1.2.21) витікає безпосередньо з (1.2.19); (1.2.22) є наслідком (1.2.20). □

В подальшому використовується також наступний результат який є вірним для всіх розв'язків рівняння Гінзбурга-Ландау (1.2.1).

Лема 1.2.7 ([34]). *Нехай u – розв'язок рівняння (1.2.1) такий, що $|u| \leq 1$, $E_\varepsilon(u) \leq \Lambda$, де Λ не залежить від ε. Тоді*

$$1 - |u(x)|^2 \leq \frac{\varepsilon^2 C}{\operatorname{dist}^2(x, \partial G)} \tag{1.2.23}$$

and

$$|D^k u(x)| \leq \frac{C_k}{\operatorname{dist}^k(x, \partial G)}, \tag{1.2.24}$$

де константи C, C_k не залежать від ε.

1.2.2 Мінімізація в класі функцій з $\mathcal{J}$ з заданими степенями відображення

В [35] було отримано наступний результат, що є важливим інструментом для доведення існування (або неіснування) розв'язків вваріаційних задач в класі $\mathcal{J}$.

Лема 1.2.8. *[35] Нехай ($u^{(k)} \in \mathcal{J}_{pq}$) – послідовність, що збігається до u слабко в $H^1(G, \mathbb{C})$. Тоді*

$$\liminf_k \frac{1}{2} \int_G |\nabla u^{(k)}|^2 dx \geq \frac{1}{2} \int_G |\nabla u|^2 dx + \pi(|p - \deg(u, \partial\omega)| + |q - \deg(u, \partial\Omega)|),$$

і

$$\liminf_k E_\varepsilon(u^{(k)}) \geq E_\varepsilon(u) + \pi(|p - \deg(u, \partial\omega)| + |q - \deg(u, \partial\Omega)|). \tag{1.2.25}$$

За допомогою Леми 1.2.8 в [35] було показано, що інфімум (1.2.3) в $\mathcal{J}_{11}$ завжди досягається, якщо $\operatorname{cap}(G) \geq \pi$. Було також висунуто гіпотезу, що для областей з $\operatorname{cap}(G) < \pi$ і достатньо малих ε слабка границя довільної мінімізуючої послідовності не належить до $\mathcal{J}_{11}$, тобто мінімізанта не існує. Цю гіпотезу було доведено в [33] (див. Підрозділ 1.1 дисертації). У нейпростішому випадку коли задані різні степені на $\partial\Omega$ і $\partial\omega$, $p = 0$, $q = 1$ ($p = 1$, $q = 0$) інфімум (1.2.3) в $\mathcal{J}_{pq}$ ніколи не досягається. Дійсно, маємо

$$\frac{1}{2} \int_G |\nabla u|^2 \mathrm{d}x \geq \left| \int_G \partial_{x_1} u \times \partial_{x_2} u \mathrm{d}x \right| = \pi |\deg(u, \partial\Omega) - \deg(u, \partial\omega)| = \pi$$

для всіх $u \in \mathcal{J}_{01}$. З іншого боку, неважко явно побудувати мінімізуючу послідовність в дусі [46] (див. також [34]) і довести, що $\inf\{E_\varepsilon(u); u \in \mathcal{J}_{01}\} = \pi$. Таким чином довільний мінімізант $u \in \mathcal{J}_{01}$ належить до $H^1(G; S^1)$, крім того u задовольняє рівняння (1.2.1). Таке є можливим тільки для сталих функцій, але вони не належать до $\mathcal{J}_{01}$.

1.2.3 Властивості функціонала $\Phi(u)$

Степінь відображення слідів функцій з $H^1(G; \mathbb{S}^1)$ на довільній простій замкненій кривій, зокрема $\partial\Omega$, зберігається в переході до слабкої H^1 границі. Це твердження витікає з результатів роботи [201], його також неважко довести безпосередньо, інтегруючі частинами як це зроблено нижче в (1.2.27) (зазначимо, що для довільної $\mathbb{S}^1$-значної функції u, $\deg(u, \partial\Omega) = \deg(u, \partial\omega) = \deg(u, \mathcal{L})$, де $\mathcal{L}$ – довільна замкнена крива в G гомотопно еквівалентна $\partial\Omega$. Таким чином має місце розкладання

$$H^1(G; \mathbb{S}^1) = \bigcup_{d \in \mathbb{Z}} \{u \in H^1(G; \mathbb{S}^1),\ \deg(u, \partial\Omega) = d\} \tag{1.2.26}$$

на множини що не перетинаються і кожна з них замкнена відносно слабкої збіжності в $H^1(G; \mathbb{S}^1)$.

Зафіксуємо довільне $\Lambda > 0$. Будемо розглядати функції $u \in H^1(G, \mathbb{C})$ з множини $E_\varepsilon^\Lambda = \{u; E_\varepsilon(u) \leq \Lambda\}$. Покажемо, що функціонал $\Phi(u)$ класифікує функції $u \in E_\varepsilon^\Lambda$ подібно класифікації (1.2.26) $\mathbb{S}^1$-значних функцій. Для цього встановимо такі властивості $\Phi(u)$:

a) $\Phi(u) = \deg(u, \partial\Omega)$ для $u \in H^1(G; \mathbb{S}^1)$,

b) $|\Phi(u) - \Phi(v)| \leq \frac{2}{\pi} \|V\|_{C^1(G)} \Lambda^{1/2} \|u - v\|_{L^2(G)}$ для $u, v \in E_\varepsilon^\Lambda$.

Перша властивість є прямим наслідком означення (1.2.9) функціоналу $\Phi(u)$. Дійсно, інтегруючи частинами в (1.2.9) знаходимо

$$\Phi(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\Omega} u \times \frac{\partial u}{\partial \tau} \mathrm{d}s - \frac{1}{\pi} \int_G \partial_{x_1} u \times \partial_{x_2} u \, V \mathrm{d}x = \deg(u, \partial\Omega), \tag{1.2.27}$$

для всіх $u \in H^1(G;\mathbb{S}^1)$ ($\partial_{x_1}u \times \partial_{x_2}u = 0$ майже всюду в G оскільки $|u| = 1$). Властивість b) доведено в наступній лемі.

Лема 1.2.9. *Для всіх $u, v \in H^1(G;\mathbb{C})$ має місце нерівність*

$$|\Phi(u) - \Phi(v)| \leq \frac{1}{\pi}\|V\|_{C^1(G)}((E_\varepsilon(u))^{1/2} + (E_\varepsilon(v))^{1/2})\|u - v\|_{L^2(G)}.$$

Доведення. Інтегруючи частинами знаходимо

$$\begin{aligned} 2\pi(\Phi(u) - \Phi(v)) &= \int_G (u - v) \times (\partial_{x_2}u\,\partial_{x_1}V - \partial_{x_1}u\,\partial_{x_2}V)\mathrm{d}x \\ &\quad + \int_G v \times (\partial_{x_2}(u - v)\,\partial_{x_1}V - \partial_{x_1}(u - v)\,\partial_{x_2}V)\mathrm{d}x \\ &= \int_G (u - v) \times (\partial_{x_2}u\,\partial_{x_1}V - \partial_{x_1}u\,\partial_{x_2}V)\mathrm{d}x \\ &\quad + \int_G (u - v) \times (\partial_{x_2}v\,\partial_{x_1}V - \partial_{x_1}v\,\partial_{x_2}V)\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

і твердження Леми випливає за допомогою нерівності Коші-Шварца. □

Головним наслідком властивостей a) і b) функціоналу $\Phi(u)$ є

Твердження 1.2.10. $\Phi(u)$ *приймає значення близькі до цілих рівномірно відносно $u \in E_\varepsilon^\Lambda$ коли ε є достатньо малим, тобто*

c) $\sup\limits_{u \in E_\varepsilon^\Lambda} \mathrm{dist}(\Phi(u), \mathbb{Z}) \to 0$ *коли $\varepsilon \to 0$.*

Перед доведенням цього факту зазначимо, що Твердження 1.2.2, неведене вище, є прямим наслідком Твердження 1.2.10.

Доведення Твердження 1.2.10. Внаслідок (1.2.27) і Леми 1.2.9 маємо

$$\sup_{u \in E_\varepsilon^\Lambda} \mathrm{dist}(\Phi(u), \mathbb{Z}) \leq \sup_{u \in E_\varepsilon^\Lambda} \inf_{v \in E_0^\Lambda} |\Phi(u)(u) - \Phi(u)(v)| \leq \frac{2}{\pi}||V||_{C^1}\Lambda^{\frac{1}{2}}\delta_\varepsilon, \tag{1.2.28}$$

де δ_ε є відстань

$$\delta_\varepsilon := \sup_{u \in E_\varepsilon^\Lambda} \mathrm{dist}_{L^2(G)}(u, E_0^\Lambda) \tag{1.2.29}$$

між E_ε^Λ і

$$E_0^\Lambda = \left\{ u \in H^1(G;\mathbb{S}^1);\ E_0(u) = \frac{1}{2}\int_G |\nabla u|^2 \mathrm{d}x \leq \Lambda \right\}.$$

Покажемо тепер, що $\delta_\varepsilon \to 0$ коли $\varepsilon \to 0$. З огляду на (1.2.28) цього достатньо для доведення шуканого результату. Припустимо, від супротивного, що $\delta_{\varepsilon_k} \geq c > 0$ для деякої послідовності $\varepsilon_k \to 0$. З теореми про вкладання Соболєвських просторів витікає, що супремум в (1.2.29) досягається в E_ε^Λ, тобто $\delta_\varepsilon = \mathrm{dist}_{L^2(G)}(u_\varepsilon, E_0^\Lambda)$, де $E_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq \Lambda$. Можна виділити підпослідовність з (u_{ε_k}), за якою збережемо позначення (u_{ε_k}), що збігається до деякого u слабко в $H^1(G;\mathbb{C})$. Тоді $u_{\varepsilon_k} \to u$ сильно в $L^2(G)$ і $u \in H^1(G;\mathbb{S}^1)$ (оскільки $\int_G (|u_\varepsilon|^2-1)^2 dx \leq 4\Lambda\varepsilon^2$). Крім того $E_0(u) \leq \Lambda$ завдяки слабкій напівперервності знизу інтеграла Діріхле. Таким чином $u \in E_0^\Lambda$ і $\delta_{\varepsilon_k} \leq \|u - u_{\varepsilon_k}\|_{L^2(G)} \to 0$. $\square$

Наступний результат показує як функціонал $\Phi(u)$ пов'язаний зі степенем відображення $u/|u|$ на кривій. Він дає простий критерій, чи то обмеження $\Phi(u) \in [d-1/2, d+1/2]$ в (1.2.6) задовольняється у випадку коли u є розв'язком рівняння (1.2.1).

Лема 1.2.11. *Нехай $\mathcal{L} = \{x \in G; V(x) = 1/2\}$, де V – розв'язок (1.2.8). ($\mathcal{L}$ є гладкою кривою, що охоплює ω.) Тоді якщо розв'язок u рівняння (1.2.1) задовольняє $|u| \leq 1$ в G і $E_\varepsilon(u) \leq \Lambda$,* (i) *$|u| \geq 1/2$ на $\mathcal{L}$ і* (ii) *маємо*

$$\Phi(u) \in [d-1/2, d+1/2] \iff \deg(\frac{u}{|u|}, \mathcal{L}) = d, \tag{1.2.30}$$

де $\varepsilon \leq \varepsilon_1$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(\Lambda) > 0$ не залежить від u.

Доведення. Розглянемо область

$$G_{\delta'} = \{x \in G;\ \delta' < V(x) < 1-\delta'\}, \tag{1.2.31}$$

де $0 < \delta' < 1/2$. З Леми 1.2.7 випливає, що

$$|u| \geq 1/2 \quad \text{on } G_{\delta'}, \tag{1.2.32}$$

для $\varepsilon < \varepsilon_1'$ ($\varepsilon_1' = \varepsilon_1'(\delta') > 0$). Це доводить (i). Тепер можна представити u як $u = \rho e^{i\psi}$ ($\rho = |u| > 1/2$) на $G_{\delta'}$. Знайдемо продовження ψ на всю область G. Для цього застосуємо конформне перетворення G.

Добре відомо (див., наприклад, [4]), що існує конфомне відображення $\mathcal{F}$ області G на кільце A із зовнішнім радіусом $R = \exp(\pi/\mathrm{cap}(G))$ і внутрішнім радіусом $1/R$. Таке відображення $\mathcal{F}$ можна надати в явному вигляді, $\mathcal{F} = \exp(\frac{2\pi}{\mathrm{cap}(G)}((V - 1/2 + i\Psi))$, де Ψ – гармонічно спряжена (багатозначна) функція до V. Відображення $\mathcal{F}$ переводить $G_{\delta'}$ в кільце $\mathcal{F}(G_{\delta'}) \subset A$ чиї зовнішнішний і внутрішний радіуси є $R' = \exp(\frac{2\pi}{\mathrm{cap}(G)}(1/2 - \delta'))$ і $1/R'$, відповідно.

Розглянемо $\hat{\psi}(x) = \psi(\mathcal{F}^{-1}(x))$ на $\mathcal{F}(G_{\delta'})$. Можна продовжити $\hat{\psi}$ на все кільце A відбиттями $\hat{\psi}(x) := \hat{\psi}(x(R')^2/|x|^2)$ для $|x| \geq R'$ і $\hat{\psi}(x) := \hat{\psi}(x/(R'|x|)^2)$ для $|x| \leq 1/R'$, так що

$$\int_A |\nabla\hat{\psi}|^2 \mathrm{d}x \leq \int_{\mathcal{F}(G_{\delta'})} |\nabla\hat{\psi}|^2 \mathrm{d}x + \int_{A\setminus\mathcal{F}(G_{\delta'})} |\nabla\hat{\psi}|^2 \mathrm{d}x \leq 2\int_{\mathcal{F}(G_{\delta'})} |\nabla\hat{\psi}|^2 \mathrm{d}x, \quad (1.2.33)$$

коли $0 < \delta' < 1/4$. Тоді з (1.2.33), конформної інваріантності інтеграла Діріхле та (1.2.32) випливає, що

$$\int_A |\nabla\hat{\psi}|^2 \mathrm{d}x \leq 2\int_{\mathcal{F}(G_{\delta'})} |\nabla\hat{\psi}|^2 \mathrm{d}x = 2\int_{G_{\delta'}} |\nabla\psi|^2 \mathrm{d}x$$
$$\leq 8\int_{G_{\delta'}} \rho^2 |\nabla\psi|^2 \mathrm{d}x \leq 16 E_\varepsilon(u) \leq 16\Lambda. \quad (1.2.34)$$

Шукане продовження ψ на G визначимо формулою $\tilde{\psi}(x) = \hat{\psi}(\mathcal{F}(x))$. Скориставшись ще раз конформною інваріантностю інтеграла Діріхле і (1.2.34) отримуємо $E_\varepsilon(\mathrm{e}^{i\tilde{\psi}}) = \frac{1}{2}\int_G |\nabla\tilde{\psi}|^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_A |\nabla\hat{\psi}|^2 \mathrm{d}x \leq 8\Lambda$. Крім того, оскільки $\tilde{\psi} = \psi$ on $G_{\delta'}$ і $\rho = |u| \leq 1$, маємо

$$\|u - \mathrm{e}^{i\tilde{\psi}}\|^2_{L^2(G)} = \int_{G\setminus G_{\delta'}} |u - \mathrm{e}^{i\tilde{\psi}}|^2 \mathrm{d}x + \int_{G_{\delta'}} (\rho - 1)^2 \mathrm{d}x$$
$$\leq 4|G \setminus G_{\delta'}| + \int_{G_{\delta'}} (\rho^2 - 1)^2 \mathrm{d}x \leq 4(|G \setminus G_{\delta'}| + \Lambda\varepsilon^2). \quad (1.2.35)$$

Тоді, вибравши дотатньо мале δ' і $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(\delta') > 0($ $\varepsilon_1(\delta') < \varepsilon_1')$, скористаємося Лемою 1.2.9, нерівностями $E_\varepsilon(\mathrm{e}^{i\tilde{\psi}}) \leq 8\Lambda$, $E_\varepsilon(u) \leq \Lambda$ і (1.2.35) для оцінки $|\Phi(u) - \Phi(\mathrm{e}^{i\tilde{\psi}})|$; в результаті отримуємо $|\Phi(u) - \Phi(\mathrm{e}^{i\tilde{\psi}})| < 1/2$ для $\varepsilon < \varepsilon_1$. Внаслідок (1.2.27), $\Phi(\mathrm{e}^{i\tilde{\psi}}) = \deg(\mathrm{e}^{i\tilde{\psi}}, \partial\Omega) = \deg(\mathrm{e}^{i\tilde{\psi}}, \mathcal{L}) = \deg(\frac{u}{|u|}, \mathcal{L})$. Таким чином $\deg(\frac{u}{|u|}, \mathcal{L}) = d$ тоді і тільки тоді коли $u \in E_\varepsilon^{\Lambda,d}$, і твердження (ii) доведене. $\square$

1.2.4 Мінімізація в класі $\mathbb{S}^1$-значних функцій і оцінки для задачі (1.2.6)

Розглянемо задачу мінімізації

$$I_0(d, G') := \inf\{E_0(u);\ u \in H^1(G'; \mathbb{S}^1),\ \deg(u, \partial\omega') = \deg(u, \partial\Omega') = d\}, \quad (1.2.36)$$

де $E_0(u) = \int_{G'} |\nabla u|^2 \mathrm{d}x$, $G' = \Omega' \setminus \overline{\omega'}$, і ω', Ω' – гладкі обмежені однозв'язні області в $\mathbb{R}^2$, такі що $\overline{\omega'} \subset \Omega'$. Ця задача є окремим випадком мінімізаціонної задачі вивченої в [47](Розділ I).

Твердження 1.2.12. *[47] Існує единий (з точністю до помноження на одиничну за абсолютною величиною сталу) розв'язок u задачі (1.2.36), і u є регулярним гармонічним відображенням в G' (i.e. $-\Delta u = u|\nabla u|^2$ в G') що задовольняє $u \times \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ на $\partial G'$.*

Якщо $G' = G$, тоді мінімізант u задачі (1.2.36) належить $\mathcal{J}_{dd}$. З (1.2.27) витікає, що $\Phi(u) = d$, таким чином отримуємо наступну (оптимальну) оцінку для задачі (1.2.6) у випадку коли $p = q = d$.

Лема 1.2.13. *Нерівність $m_\varepsilon(d, d, d) \leq I_0(d, G)$ викунується для всіх $\varepsilon > 0$.*

В [47, Розділ I] показано, що $I_0(d, G)$ можна виразити наступним чином

$$I_0(d, G) = \frac{1}{2} \int_G |\nabla h_0|^2 \mathrm{d}x, \quad (1.2.37)$$

де h_0 – єдиний розв'язок лінійної задачі

$$\begin{cases} \Delta h_0 = 0 \quad \text{в } G \\ h_0 = 1 \quad \text{на } \partial\Omega, \quad h_0 = \mathrm{Const} \quad \text{на } \partial\omega \\ \displaystyle\int_{\partial\Omega} \frac{\partial h_0}{\partial \nu} \mathrm{d}\sigma = 2\pi d. \end{cases} \quad (1.2.38)$$

Зазначимо, що h_0 і розв'язок V задачі (1.2.8) пов'язані тотожністю $h_0 = 1 + 2\pi d(V-1)/\mathrm{cap}(G)$, де $\mathrm{cap}(G)$ позначає H^1-ємність G (див., наприклад, [34]). Таким чином $I_0(d, G) = 2(\pi d)^2/\mathrm{cap}(G)$ (така ж рівність має місце для довільної області G' замість G). Звідси випливає

Лема 1.2.14. *$I_0(d,G')$ неперервно залежить від* $\operatorname{cap}(G')$.

Коритуючись цією Лемою, знаходимо наступну оцінку знизу для енергії розв'язків $u \in \mathcal{J}$ рівняння (1.2.1).

Лема 1.2.15. *Існує $\varepsilon_2 > 0$ таке, що для довільного розв'язоку $u \in \mathcal{J}_{lm}$ рівняння (1.2.1), що задовольняє $E_\varepsilon(u) \le \Lambda$, $\Phi(u) \in (d-1/2, d+1/2)$, має місце нерівність*

$$E_\varepsilon(u) \ge I_0(d,G) - \frac{\pi}{2} + \pi(|d-l| + |d-m|), \tag{1.2.39}$$

коли $\varepsilon < \varepsilon_2$, і ε_2 залежить тільки від Λ.

Доведення. За допомогою принципу максімума знаходимо поточкову оцінку $|u| \le 1$ в G. Як в Лемі 1.2.11 розглянемо область $G_{\delta'}$ визначену в (1.2.31), що залежить від параметру $0 < \delta' < 1/2$, який буде вибрано нижче. Оскільки $|u| \le 1$ в G, можемо скористатися Лемою 1.2.7, в результаті отримуємо оцінку

$$|u| \ge 1 - \varepsilon \quad \text{в } G_{\delta'}, \tag{1.2.40}$$

для $\varepsilon < \varepsilon_2'$ ($\varepsilon_2' = \varepsilon_2'(\delta', \Lambda) > 0$). Розглянемо тепер функцію

$$\tilde{u} = \frac{1}{1-\varepsilon} \begin{cases} u & \text{якщо } |u| < 1 - \varepsilon \\ (1-\varepsilon)\frac{u}{|u|} & \text{інакше.} \end{cases} \tag{1.2.41}$$

З (1.2.40) витікає, що $|\tilde{u}| = 1$ на $G_{\delta'}$ і, згідно Лемі 1.2.11, $\deg(\tilde{u}, \mathcal{L}) = d$ для $\varepsilon < \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2'\}$. Отже степінь $\tilde{u}$ на обох звязних компонентах межі $\partial G_\delta'$ дорівнює d, так що $\frac{1}{2}\int_{G_{\delta'}} |\nabla \tilde{u}|^2 \mathrm{d}x \ge I_0(d, G_{\delta'})$ (див. (1.2.36)). Тепер використаємо поточкову нерівність $|\nabla \tilde{u}|^2 \ge 2|\partial_{x_1}\tilde{u} \times \partial_{x_2} u|$ і інтегрування частинами:

$$\frac{1}{2}\int_G |\nabla \tilde{u}|^2 \mathrm{d}x \ge \frac{1}{2}\int_{G_{\delta'}} |\nabla \tilde{u}|^2 \mathrm{d}x + \sum_{k=1,2} \Big| \int_{G_{\delta'}^{(k)}} \partial_{x_1}\tilde{u} \times \partial_{x_2}\tilde{u}\, \mathrm{d}x \Big| \ge I_0(d, G_{\delta'}) + \pi(|d-l| + |d-m|), \tag{1.2.42}$$

де $G_{\delta'}^{(k)}$, $k = 1, 2$ є зовнішня і внутрішня зв'язні компоненти $G \setminus G_{\delta'}$. Далі, з (1.2.41) знаходимо $|u| \le |\tilde{u}| \le 1$. Таким чином

$$E_\varepsilon(\tilde{u}) \le \frac{1}{(1-\varepsilon)^2} E_\varepsilon(u). \tag{1.2.43}$$

Виберемо δ' таким, що $I_0(d, G_{\delta'}) \geq I_0(d, G) - \pi/4$ (див. Лема 1.2.14), тоді для достатньо малих ε з оцінок (1.2.42) і (1.2.43) випливає (1.2.39). $\square$

1.2.5 Перехід від безвихоревих мінімізантів до мінімізантів з одним вихорем

Теорема 1.2.3 доводиться індукцією за "числом вихорів" в мінімізантах. Більш докладно, для заданого цілого $d > 0$, доводиться існування мінімізантів задачі(1.2.6) коли $p = q = d$, далі переходимо до $p = d - 1$, $q = d$ і $p = d$, $q = d - 1$, і так далі. Ключовим моментом доведення є індуктивний перехід, коли степінь на $\partial\omega$ або $\partial\Omega$ змінюється на одиницю. Це призводить до появи додаткового вихора. Для довільних p і q такий перехід є технічно досить складним. Розглянемо найпростіший випадок переходу від $p = q = d$ (без вихорів) до $p = d$, $q = d - 1$ (один вихор). Зазначимо, що перехід від $p = q = d$ до $p = d - 1$ і $q = d$ є аналогічним. Поперше доведемо наступний результат.

Лема 1.2.16. *Нехай задано ціле число $d > 0$. Для достатньо малих ε, $\varepsilon \leq \varepsilon_3$ з $\varepsilon_3 > 0$, інфімум $m_\varepsilon(d, d, d)$ в (1.2.6) завжди досягається, і $m_\varepsilon(d, d, d) \leq I_0(d, G)$.*

Доведення. Розглянемо слабку H^1-границю u довільної мінімізуючої послідовності $(u^{(k)})$. Оскільки кожний мінімізант v задачі (1.2.13) є допустимою тестовою функцією задачі (1.2.6), мінімізуюча послідовність існує і за допомогою Леми 1.2.8 отримуємо

$$E_\varepsilon(u) + \pi(|l - d| + |m - d|) \leq \liminf_{k\to\infty} E_\varepsilon(u^{(k)}) \leq \frac{1}{2}\int_G |\nabla v|^2 dx = I_0(d, G), \quad (1.2.44)$$

де $l = \deg(u, \partial\omega))$, $m = \deg(u, \partial\Omega)$. З огляду на Твердження 1.2.2 маємо $\Phi(u) \in (d - 1/2, d + 1/2)$ для $\varepsilon < \varepsilon_0$. Покажемо, що перша варіація (1.2.3) в u дорівнює нулю, тобто u – розв'язок рівняння (1.2.1). Дійсно, завдяки Лемі 1.2.9, для кожного $w \in H_0^1(G; \mathbb{R}^2)$ з достатньо малою нормою в $H_0^1(G; \mathbb{R}^2)$ функція $u^{(k)} + w$ є допустимою тестовою функцією для достатньо великих k, отже

$E_\varepsilon(u+w)-E_\varepsilon(u)=\lim_{k\to\infty}(E_\varepsilon(u^{(k)}+w)-E_\varepsilon(u^{(k)})\geq 0$ (де $\lim_{k\to\infty}$ позначає довільну часткову границю), тобто перша варіція дійсно є нульовою. Тепер можна використати Лему 1.2.15. Підставимо (1.2.39) в (1.2.44), це веде до нерівності

$$|d-l|+|d-m|\leq\frac{1}{4}, \tag{1.2.45}$$

для $\varepsilon<\min\{\varepsilon_0,\varepsilon_2\}$, таким чином $l=m=d$ (l, m і d – цілі числа). Отже інфімум в (1.2.6) з $p=q=d$ завжди досягається для достатньо малих ε. Лему доведено. □

Наступним кроком перейдемо в мінімізаційній задачі (1.2.6) від $p=q=d$ до $p=d$, $q=d-1$ і доведемо, що $m_\varepsilon(d,d-1,d)$ завжди досягається для достатньо малих ε. Цей перехід базується на порівнянні $m_\varepsilon(d,d-1,d)$ і енергії $E_\varepsilon(u)$ мінімізанта u задачі (1.2.6) для $p=q=d$, що потребує вивчення властивостей функції u.

В Підрозділі 1.2.6 буде доведено, що для достатньо малих ε довільний мінімізант u задачі (1.2.6) для $p=q=d$ не має вихорів (див. Зауваження 1.2.21), тобто $u=\rho\mathrm{e}^{i\psi}$ для деякої гладкої функції $\rho>0$ і багатозначної $\psi:G\to\mathbb{R}\setminus 2\pi d\mathbb{Z}$. Таким чином u представляється як $u=\rho\mathrm{e}^{id\theta}$, де $\mathrm{e}^{i\theta}$ і $\nabla\theta$ – гладкі (однозначні) функції в G. Тоді задачу (1.2.1)-(1.2.2) можна переписати в термінах ρ і θ наступним чином

$$\begin{cases}\operatorname{div}(\rho^2\nabla\theta)=0 & \text{в } G\\ \dfrac{\partial\theta}{\partial\nu}=0 & \text{на } \partial G,\end{cases} \tag{1.2.46}$$

$$\begin{cases}-\Delta\rho+d^2|\nabla\theta|^2\rho+\dfrac{1}{\varepsilon^2}\rho(\rho^2-1)=0 & \text{в } G\\ \rho=1 & \text{на } \partial G.\end{cases} \tag{1.2.47}$$

З огляду на (1.2.20) маємо також

$$\nabla h=-d\rho^2\nabla^\perp\theta \quad \text{в } G, \tag{1.2.48}$$

де h – розвязок задачі (1.2.19). Помітимо, що пара (h,θ) задає локальні ортогональні координати в околі $\partial\Omega$, що випрямляють межу. Дійсно, безпосередньо перевіряється, що

$$1 - h(\partial\omega) = \frac{1}{\mathrm{cap}(G)} \int_G \nabla h \cdot \nabla V \,\mathrm{d}x = 2\pi\Phi(u)/\mathrm{cap}(G),$$

водночас $\Phi(u) \geq (d - 1/2) > 0$. Використаємо тепер принцип максимуму в (1.2.22), отримуємо $1 > h(x) > h(\partial\omega)$ в G. В свою чергу це дає, за допомогою леми Хопфа, $\frac{\partial h}{\partial \nu} > 0$ на $\partial\Omega$; таким чином відображення $(h, \theta) : G \to \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ задає C^1-діффеоморфизм однобічного околу $\partial\Omega$ на його образ. Іншими словами, існує $\delta > 0$ і область $G_\delta \subset G$, така що

$$x \in G_\delta \to (h, \theta) \in \Pi_\delta = (1 - \delta, 1) \times \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$$

– діффеоморфне відображення, яке продовжується до C^1-діффеоморфизму $\overline{G}_\delta$ на $[1 - \delta, 1] \times \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$.

Наступний результат є ключовим для доведення існування мінімізантів (1.2.6) для $p = d$, $q = d - 1$.

Твердження 1.2.17. *Нехай $u = \rho \mathrm{e}^{id\theta}$, $\rho > 0$, – мінімізант задачі (1.2.6) для $p = q = d$. Припустимо, що ε є таким малим, що Твердження 1.2.2 є справедливим з $\Lambda = I_0(d, G)$. Тоді існує тестова функція $v \in \mathcal{J}_{d(d-1)}$, така що $\Phi(u) \in (d - 1/2, d + 1/2)$ і*

$$E_\varepsilon(v) - E_\varepsilon(u) < \pi. \tag{1.2.49}$$

Зазначимо, що комбінуючи Твердження 1.2.17 із Лемою 1.2.13 отримуємо незалежну від ε оцінку для $m_\varepsilon(d, d-1, d)$. У Додатку **??**, буде встановлено також узагальнення Твердження 1.2.17 яке застосовується для доведенння існування мінімізантів з кількома вихорями.

Доведення Твердження 1.2.17. Шукаємо тестову функцію v в вигляді

$$v = \rho w_t, \tag{1.2.50}$$

з невідомим поки що w_t. Наступна Лема дозволяє порвівняти енргію $E_\varepsilon(u)$ з енергією v.

Лема 1.2.18. *Якщо* $w \in H^1(G', \mathbb{R}^2)$, $G' \subset G$, *є таким, що* $|w| = 1$ *на* G', *тоді*

$$\int_{G'} (|\nabla(\rho w)|^2 + \frac{1}{2\varepsilon^2}(|\rho w|^2 - 1)^2)dx = \int_{G'} (|\nabla u|^2 + \frac{1}{2\varepsilon^2}(|u|^2 - 1)^2)dx + 2L_\varepsilon^{(d)}(w, G'),$$

де

$$L_\varepsilon^{(d)}(w, G') = \frac{1}{2}\int_{G'} \rho^2|\nabla w|^2 dx - \frac{d^2}{2}\int_{G'} |\nabla\theta|^2\rho^2|w|^2 dx + \frac{1}{4\varepsilon^2}\int_{G'} \rho^4(|w|^2 - 1)^2 dx \tag{1.2.51}$$

Цей результат отримано за допомогою модіфікації техніки факторізації запропонованої в [72], його доведення надано в кінці підрозділу.

Зазначимо, що для $G' = G_\delta$ функціонал (1.2.51) в локальних координатах (h, θ) записується наступним чином (див. (1.2.48))

$$L_\varepsilon^{(d)}(w, G_\delta) = \frac{d}{2}\int_{\Pi_\delta} |\partial_h w|^2 \rho^2 \mathrm{d}h\mathrm{d}\theta + \frac{1}{2d}\int_{\Pi_\delta} (|\partial_\theta w|^2 - d^2|w|^2)\mathrm{d}h\mathrm{d}\theta + \frac{1}{4\varepsilon^2}\int_{\Pi_\delta} \rho^2(|w|^2 - 1)^2 \frac{\mathrm{d}h\mathrm{d}\theta}{d|\nabla\theta|^2}. \tag{1.2.52}$$

Замість $L_\varepsilon^{(d)}(w, G_\delta)$ будемо використовувати спрощений квадратичний функціонал,

$$M_\lambda(w) = \frac{1}{2d}\int_{\Pi_\delta} (d^2|\partial_h w|^2 + |\partial_\theta w|^2)\mathrm{d}h\mathrm{d}\theta + \frac{1}{2d}\int_{\Pi_\delta} (\lambda|w - \mathrm{e}^{i\theta}|^2 - d^2|w|^2)\mathrm{d}h\mathrm{d}\theta. \tag{1.2.53}$$

Для останнього функціоналу можна застосувати розділення змінних.

Задамо w_t рівністю $w_t = \mathrm{e}^{id\theta}$ в $G \setminus G_\delta$, і продовжимо його в G_δ як мінімізант функціоналу $M_\lambda(w)$, де $\lambda \geq 2d^2$, з наступними крайовими даними:

$$w_t = \mathrm{e}^{id\theta}\mathcal{F}_t(\mathrm{e}^{i\theta}) \quad \text{на } \partial\Omega, \tag{1.2.54}$$

$$w_t = \mathrm{e}^{id\theta} \quad \text{на } \partial G_\delta \setminus \partial\Omega, \tag{1.2.55}$$

де $\mathcal{F}_t(z) := \mathcal{C}_t(\bar{z})$ (рисочка позначає комплексне спряження), $\mathcal{C}_t(z) = \frac{z-(1-t)}{z(1-t)-1}$ – класичне конформне відображення Мебіуса одиничного диска в себе, $t < 1$ –

додатний параметр. Обидва параметри λ і t будуть визначені нижче. Оскільки $\deg(\mathcal{F}_t, S^1) = -1$ і $\deg(e^{i\theta}, \partial\Omega) = 1$, з властивостей степені відображення витікає, що функція v визначена в (1.2.50) має наступні степені відображення,

$$\deg(v, \partial\Omega) = d - 1,\ \deg(v, \partial\omega) = d. \tag{1.2.56}$$

Функція w_t є тепер коректно визначеною для $\lambda \geq 2d^2$, оскільки для таких λ функціонал $M_\lambda(w)$ з умовою Діріхле на межі має єдиний мінімізант. Більш того $|w_t| \leq 2$, оскільки в противному випадку можна взяти $\tilde{w}_t = \frac{w_t}{|w_t|}\min\{|w_t|, 2\}$ замість w_t і тоді і пеший і другий член в (1.2.53) зменшаться, тобто $M_\lambda(\tilde{w}_t) < M_\lambda(w_t)$ – протиріччя.

Виберемо λ наступним чином

$$\lambda := \max\left\{\frac{9}{2\varepsilon^2 \inf_{G_\delta} |\nabla\theta|^2},\ 2d^2\right\}$$

($|\nabla\theta| > 0$ на замиканні G_δ), тоді завдяки поточковим оцінкам $|w_t| \leq 2$ і $\rho \leq 1$ маємо

$$\begin{aligned}\rho^2(|w_t|^2-1)^2 \leq (|w_t|-1)^2(|w_t|+1)^2 \leq |w_t - e^{id\theta}|^2(|w_t|+1)^2 \\ \leq 9|w_t - e^{id\theta}|^2 \leq 2\varepsilon^2\lambda|\nabla\theta|^2|w_t - e^{id\theta}|^2 \quad \text{in } G_\delta.\end{aligned}$$

Звідки знаходимо $L_\varepsilon^{(d)}(w_t, G_\delta) \leq M_\lambda(w_t)$. Таким чином, з огляду на Лему 1.2.18, отримуємо, що функція $v = \rho w_t$ задовольняє

$$E_\varepsilon(v) \leq E_\varepsilon(u) + M_\lambda(w_t). \tag{1.2.57}$$

Можна знайти представлення для $M_\lambda(w_t)$ в розділених змінних, а саме, розкладемо $z^d\mathcal{F}_t(z)$ на S^1 в ряд

$$z^d\mathcal{F}_t(z) = (1-t)z^d + t(t-2)\sum_{k=0}^{\infty}(1-t)^k z^{d-k-1},$$

тоді

$$w_t = (1 - tf_{-1}(h))e^{id\theta} + t(t-2)\sum_{k=0}^{\infty}(1-t)^k f_k(h)e^{-i(k-d+1)\theta}, \tag{1.2.58}$$

де $f_k(h)$ задоволняють, згідно до (1.2.54)– (1.2.55), крайові умови

$$f_k(1-\delta)=0, \quad f_k(1)=1. \tag{1.2.59}$$

Подставимо (1.2.58) в (1.2.53), в результаті знаходимо

$$M_\lambda(w_t)=\frac{t^2\pi}{d}F_{-1}(f_{-1})+\frac{t^2\pi}{d}\sum_{k=0}^{\infty}(t-2)^2(1-t)^{2k}F_k(f_k), \tag{1.2.60}$$

де

$$F_k(f_k)=\int_{1-\delta}^{1}\big(d^2|f_k'(h)|^2+((k-d+1)^2+\lambda-d^2)|f_k(h)|^2\big)\mathrm{d}h. \tag{1.2.61}$$

Задачі мінімізації (1.2.61) з крайовими умовами (1.2.59) розв'язуються в явному вигляді:

$$f_k(h)=\frac{\mathrm{e}^{(h-1)k_+(k)}}{1-\mathrm{e}^{(k_-(k)-k_+(k))\delta}}+\frac{\mathrm{e}^{(h-1)k_-(k)}}{1-\mathrm{e}^{(k_+(k)-k_-(k))\delta}}, \tag{1.2.62}$$

де $k_\pm(k)=\pm\dfrac{1}{d}\sqrt{(k-d+1)^2+\lambda-d^2}$. Таким чином маємо

$$F_k(f_k)=d(k-d+1)(1+\frac{\lambda-d^2}{2k^2}+O(1/k^3)),\ \text{коли}\ k\to\infty. \tag{1.2.63}$$

Користуючись (1.2.63) в (1.2.60) зрештою знаходимо

$$\begin{aligned}M_\lambda(w_t)&\le\pi((1-t)^2-1)^2\sum_{k=0}^{\infty}k(1-t)^{2k}+2\pi t^2(\lambda-d^2)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(1-t)^{2k}}{k}+Ct^2\\&=\pi(1-2t-2t^2(\lambda-d^2)\log(1-(1-t)^2))+(C+\pi)t^2.\end{aligned} \tag{1.2.64}$$

Помітимо, що права частина (1.2.64) є строго меншою π коли $t>0$ є достатньо малим. З (1.2.57) випливає, що для таких t відображення $v=\rho w_t$ задовольняє (1.2.49).

Залишається тільки показати, що $\Phi(v)\in(d-1/2,d+1/2)$. Це випливає з наступних міркувань. Внаслідок (1.2.58) і (1.2.62) $w_t\to\mathrm{e}^{id\theta}$ поточково в G_δ коли $t\to0$. Таким чином $\rho w_t\to\rho\mathrm{e}^{id\theta}(=u)$ слабко в $H^1(A)$, так що $\Phi(\rho w_t)\to\Phi(u)$. З іншого боку, Твердження 1.2.2 гарантує, що $d-1/2<\Phi(u)<d+1/2$ (для

достатньо малих ε), так що умова $\Phi(v) \in (d-1/2, d+1/2)$ задовольняється для достатньо малих t. □

Розглянемо тепер довільну мінімізуючу послідовність $(u^{(k)})$ задачі (1.2.6) для $p = d$, $q = d-1$, що слабко H^1-збігається до деякрої функції $u \in \mathcal{J}$. За умов Пропозиції 1.2.17 має місце нерівність $\lim_{k\to\infty} E_\varepsilon(u^{(k)}) < m_\varepsilon(d,d,d) + \pi$. Доведемо, що $u \in \mathcal{J}_{pq}$. Нехай $l = \deg(u, \partial\omega)$, $m = \deg(u, \partial\Omega)$. Внаслідок Леми 1.2.15 (той факт, що u задовольняє (1.2.1) доводиться так само як в Лемі 1.2.16) і Леми 1.2.8 маємо

$$I_0(d,A) - \frac{\pi}{2} + \pi(2|d-l| + |d-1-m| + |d-m|) \\ \leq E_\varepsilon(u) + \pi(|d-l| + |d-1-m|) < m_\varepsilon(d,d,d) + \pi, \quad (1.2.65)$$

($\Phi(u) = \lim_{k\to\infty}\Phi(u^{(k)}) \in [d-1/2, d+1/2]$). З Леми 1.2.16 відомо, що $m_\varepsilon(d,d,d) \leq I_0(d,A)$, тоді з (1.2.65) знаходимо, що $l = d$ і або $m = d-1$ або $m = d$. В останньому випадку u є допустимою тестовою функцією в задачі (1.2.6) для $p = q = d$, отже $E_\varepsilon(u) \geq m_\varepsilon(d,d,d)$, що протирічить останній нерівності в (1.2.65). Таким чином $u \in \mathcal{J}_{d(d-1)}$, $\Phi(u) \in [d-1/2, d+1/2]$, тобто u належить до класу допустимих функцій задачі (1.2.6) для $p = d$, $q = d-1$.

Доведення Леми 1.2.18. Користуючись (1.2.47) виводимо

$$\int_{G_\delta} |\nabla(\rho w)|^2 \mathrm{d}x = \int_{G_\delta} (\rho^2|\nabla w|^2 + \nabla\rho\cdot\nabla(\rho(|w|^2-1)) + |\nabla\rho|^2)\mathrm{d}x \\ = \int_{G_\delta} (\rho^2|\nabla w|^2 + d^2\rho^2|\nabla\theta|^2 + \frac{1}{\varepsilon^2}\rho^2(\rho^2-1))\mathrm{d}x \\ - \int_{G_\delta} (d^2\rho^2|\nabla\theta|^2|w|^2 + \frac{1}{\varepsilon^2}\rho^2(\rho^2-1)|w|^2 - |\nabla\rho|^2)\mathrm{d}x,$$

відкіля, за допомогою нескладних алгебраїчних маніпуляцій отримуємо шуканий результат . □

1.2.6 Асимптотична поведінка мінімізантів

У Підрозділі 1.2.5 було встановлено існування мінімізантів задачі (1.2.3) в $\mathcal{J}_{dd}^{(d)}$ і викладено перший індуктивний крок деведення Теореми 1.2.3, що полягає в переході від $p = q = d$ до $p = d$, $q = d - 1$ в (1.2.6). (Фактично було доведено існування мінімізантів в $\mathcal{J}^{(d)}_{d(d-1)}$ в припущенні, що мінімізанти в $\mathcal{J}^{(d)}_{dd}$ не мають нулів.) Індуктивний перехід для довільних цілих $p \leq d$ і $q \leq d$ потребує вивчення асимтотичних властивостей мінімізантів (1.2.6), зокрема, найбільш важливою є їх поведінка біля межі. Розглянемо сім'ю мінімізантів $\{u_\varepsilon\}$ задачі (1.2.6), що задовольняють

$$E_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq \Lambda := I_0(d, A) + \pi(|d - p| + |d - q|). \tag{1.2.66}$$

Будемо припускати, що $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, де $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\Lambda) > 0$ – константа з Твердження 1.2.2. Оскільки u_ε є локальними мінімізантами $E_\varepsilon(u)$ в $\mathcal{J}$, то вони задовольняють (1.2.1)–(1.2.2).

Будемо користуватись такими позначеннями: $\rho_\varepsilon(x) = |u_\varepsilon(x)|$, $h_\varepsilon(x)$ – єдиний розвязок (1.2.19), і $\mathcal{L}$ – контур з Леми 1.2.11. Контур $\mathcal{L}$ розбиває G на дві підобласті $Q^\pm$, де Q^+ – область обмежена $\partial\Omega$ та $\mathcal{L}$, і $Q^- = A \setminus (Q^+ \cup \mathcal{L})$. Також покладаємо $Q^\pm_\varepsilon = \{x \in Q^\pm;\ \rho^2_\varepsilon(x) \leq 1 - \varepsilon^{1/2}\}$.

Доведення Теореми 1.2.4. Оскільки $|\nabla h_\varepsilon| \leq |\nabla u_\varepsilon|$ (див. Лему 1.2.5), сім'я $\{h_\varepsilon\}$ є обмеженою в $H^1(A)$, отже існує послідовність $\varepsilon_k \to 0$ така що

$$h_{\varepsilon_k} \to h \quad \text{слабко в } H^1(G), \text{ коли } k \to \infty. \tag{1.2.67}$$

Для ідентіфікації h використаємо Лему 1.2.7. З неї випливає, що , з точністю до підпослідовності, функції u_{ε_k} збігаються до $\mathbb{S}^1$-значної функції u в $C^1_{\mathrm{loc}}(G)$. Оскільки $\partial_{x_1} u \times \partial_{x_2} u = 0$ майже всюду в G, маємо $\Delta h_{\varepsilon_k} = 2\partial_{x_1} u_{\varepsilon_k} \times \partial_{x_2} u_{\varepsilon_k} \to 0$ в $C^0_{\mathrm{loc}}(G)$, таким чином h – гармонічна функція. Крім того $h = 1$ на $\partial\Omega$ і $h = \mathrm{Const}$ на $\partial\omega$. З іншого боку

$$\Phi(u_{\varepsilon_k}) = \frac{1}{2\pi}\int_G \nabla h_{\varepsilon_k} \cdot \nabla V \mathrm{d}x \to \frac{1}{2\pi}\int_G \nabla h \cdot \nabla V \mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_{\partial\Omega} \frac{\partial h}{\partial \nu}\mathrm{d}s.$$

Згідно властивості c) функціоналу $\Phi(\,\cdot\,)$ (див. Пропозицію 1.2.10 в підрозділі 1.2.3), $\Phi(u_\varepsilon) \to d$ коли $\varepsilon \to 0$, отже $h = h_0$ (де h_0 – єдиний розв'язок (1.2.38)) і збіжність (1.2.67) справедлива для всієї сім'ї $\{h_\varepsilon\}$. Таким чином, користуючись Лемою 1.2.7 ще раз, знаходимо

$$h_\varepsilon \to h_0 \quad \text{в } C^1_{\text{loc}}(\mathrm{G}) \text{ і слабко в } H^1(G), \text{ коли } \varepsilon \to 0. \tag{1.2.68}$$

З (1.2.66) і Леми 1.2.7 витікає, що функції u_ε збігаються, з точністю до підпослідовності, до $u \in H^1(G; S^1)$ в $C^1_{\text{loc}}(G)$ і слабко в $H^1(G)$. Крім того $\Phi(u) = d$ і з огляду на (1.2.68) $|\nabla u| = |\nabla h_0|$ майжу всюди в G. Звідси витікає, що u – розв'язок задачі мінімізації (1.2.13).

Для доведення збіжності енергій скористаємось двома тотожностями $|\nabla u_\varepsilon|^2 = 2\partial_{x_1} u_\varepsilon \times \partial_{x_2} u_\varepsilon + 4|\partial_{\bar z} u_\varepsilon|^2$ і $|\nabla u_\varepsilon|^2 = -2\partial_{x_1} u_\varepsilon \times \partial_{x_2} u_\varepsilon + 4|\partial_z u_\varepsilon|^2$, а також нерівністю $|\nabla u_\varepsilon| \geq |\nabla h_\varepsilon|$, в результаті отримуємо

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\int_G |\nabla u_\varepsilon|^2 \mathrm{d}x \geq &- \int_{Q_\varepsilon^+} \partial_{x_1} u_\varepsilon \times \partial_{x_2} u_\varepsilon \mathrm{d}x + 2\int_{Q_\varepsilon^+} |\partial_z u_\varepsilon|^2 \mathrm{d}x \\ &+ \int_{Q_\varepsilon^-} \partial_{x_1} u_\varepsilon \times \partial_{x_2} u_\varepsilon \mathrm{d}x + 2\int_{Q_\varepsilon^-} |\partial_{\bar z} u_\varepsilon|^2 \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{G\setminus(Q_\varepsilon^+ \cup Q_\varepsilon^-)} |\nabla h_\varepsilon|^2 \mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{1.2.69}$$

Оціниму знизу праву частину (1.2.69). Введемо до розгляду функцію $\sigma_\varepsilon(x) = \max\{\rho_\varepsilon^2(x), 1 - \varepsilon^{1/2}\}$. За допомогою (1.2.21) і (1.2.22) знаходимо

$$\operatorname{div}\Big(\frac{1}{\sigma_\varepsilon(x)} \nabla h_\varepsilon\Big) = \frac{2}{1 - \varepsilon^{1/2}} \begin{cases} 0 \quad \text{in} \quad G \setminus (Q_\varepsilon^+ \cup Q_\varepsilon^-); \\ \partial_{x_1} u_\varepsilon \times \partial_{x_2} u_\varepsilon \text{ otherwise.} \end{cases} \tag{1.2.70}$$

Проінтегруємо (1.2.70) по Q^+, в результаті отримуємо, для достатньо малих ε,

$$\begin{aligned} \frac{2}{1 - \varepsilon^{1/2}} \int_{Q_\varepsilon^+} \partial_{x_1} u_\varepsilon \times \partial_{x_2} u_\varepsilon \mathrm{d}x &= \int_{\partial\Omega} \frac{\partial h_\varepsilon}{\partial \nu} \mathrm{d}s - \int_{\mathcal{L}} \frac{\partial h_\varepsilon}{\partial \nu} \frac{\mathrm{d}s}{\rho_\varepsilon^2(x)} \\ &= \int_{\partial\Omega} u_\varepsilon \times \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \tau} \mathrm{d}s - \int_{\mathcal{L}} \frac{u_\varepsilon}{|u_\varepsilon|} \times \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{u_\varepsilon}{|u_\varepsilon|} \mathrm{d}s = 2\pi(q - d), \end{aligned}$$

де було використано Лему 1.2.7 і Лему 1.2.11. Таким чином маємо

$$\int_{Q_\varepsilon^+} \partial_{x_1} u_\varepsilon \times \partial_{x_2} u_\varepsilon \mathrm{d}x = (1 - \varepsilon^{1/2})\pi(q - d). \tag{1.2.71}$$

Також само, інтегруючи (1.2.70) по Q^- знаходимо

$$\int_{Q_\varepsilon^-} \partial_{x_1} u_\varepsilon \times \partial_{x_2} u_\varepsilon \mathrm{d}x = (1 - \varepsilon^{1/2})\pi(d - p). \tag{1.2.72}$$

Для оцінки останнього доданка в правій частині (1.2.69) перепишемо його наступним чином

$$\int_{G\setminus(Q_\varepsilon^+\cup Q_\varepsilon^-)}|\nabla h_\varepsilon|^2\mathrm{d}x=\int_{G\setminus(Q_\varepsilon^+\cup Q_\varepsilon^-)}|\nabla h_\varepsilon-\nabla h_0|^2\mathrm{d}x$$
$$+\int_G(2\nabla h_\varepsilon-\nabla h_0)\cdot\nabla h_0\mathrm{d}x-\int_{Q_\varepsilon^+\cup Q_\varepsilon^-}(2\nabla h_\varepsilon-\nabla h_0)\cdot\nabla h_0\mathrm{d}x,$$

і помітимо, що внаслідок (1.2.66) міра множини $Q_\varepsilon^+\cup Q_\varepsilon^-$ прямує до нуля коли $\varepsilon\to 0$, так що

$$\int_{G\setminus(Q_\varepsilon^+\cup Q_\varepsilon^-)}|\nabla h_\varepsilon|^2\mathrm{d}x=\int_{G\setminus(Q_\varepsilon^+\cup Q_\varepsilon^-)}|\nabla h_\varepsilon-\nabla h_0|^2\mathrm{d}x+\int_G|\nabla h_0|^2\mathrm{d}x+o(1). \quad (1.2.73)$$

З (1.2.71)–(1.2.73), (1.2.69) і, (1.2.66) випливає, що $E_\varepsilon(u_\varepsilon)\to E_0(u)+\pi(|d-p|+|d-q|)$. □

Як побічний продукт доведення Теореми 1.2.4 маємо наступні оцінки, які є наслідком (1.2.71)–(1.2.73), (1.2.69) і (1.2.66):

$$\int_G(|u_\varepsilon|^2-1)^2\mathrm{d}x=o(\varepsilon^2), \quad (1.2.74)$$

$$\int_{G\setminus(Q_\varepsilon^+\cup Q_\varepsilon^-)}|\nabla h_\varepsilon-\nabla h_0|^2\mathrm{d}x=o(1), \quad (1.2.75)$$

$$\int_{Q_\varepsilon^+}|\partial_z u_\varepsilon|^2\mathrm{d}x=o(1)\quad\int_{Q_\varepsilon^-}|\partial_{\bar z} u_\varepsilon|^2\mathrm{d}x=o(1). \quad (1.2.76)$$

Вивчимо тепер більш детально властивості мінімізантів (1.2.6) для малих ε. Перш за все, користуючись (1.2.74), за допомого техніки з [47] можна показати, що ρ_ε збігається до 1 рівномірно на компактах в G. Більш того має місце наступний результат.

Лема 1.2.19. *Для довільного $\mu>0$ є справедливою наступна оцінка*

$$\sup\{\mathrm{dist}(y,\partial G);\, y\in G, \rho_\varepsilon^2(y)<1-\mu\}=o(\varepsilon). \quad (1.2.77)$$

Доведення (від супротивного). Припустимо, що для деякої послідовності $\varepsilon_k \to 0$ і $\gamma > 0$ мають місце нерівності $\rho^2_{\varepsilon_k}(y_k) < 1 - \mu$ і $\operatorname{dist}(y_k, \partial G) \geq \gamma\varepsilon_k$. Внаслідок (1.2.24), $|\nabla|u_{\varepsilon_k}|^2| \leq \alpha/\varepsilon_k$ в $\mathbb{D}_{\lambda\varepsilon_k}(y_k)$, де $0 < \lambda < \gamma$ і $\alpha(= \alpha(\lambda))$ не залежить від ε_k. Тоді $|u_{\varepsilon_k}(x)|^2 < 1 - \mu + \delta\alpha$ для $x \in \mathbb{D}_{\delta\varepsilon_k}(y_k)$ і $\delta < \lambda$. Для $0 < \delta < \min\{\lambda, \mu/(2\alpha)\}$ диск $\mathbb{D}_{\delta\varepsilon_k}(y_k)$ лежить в G і

$$\frac{1}{\varepsilon_k^2}\int_{B_{\delta\varepsilon_k}(y_k)} (|u_{\varepsilon_k}|^2 - 1)^2 \mathrm{d}x \geq \pi(\mu - \delta\alpha)^2\delta^2 > 0,$$

але це протирічить (1.2.74). $\square$

Важливі для подальшого властивості u_ε і h_ε у околі межі ∂G встановлюються в наступній Лемі.

Лема 1.2.20. *Для всіх $0 < \mu < 1$ і $\kappa < 1$ існують $\hat{\varepsilon}_1(\mu), \hat{\varepsilon}_2(\mu, \kappa) > 0$ такі, що якщо $\rho^2_\varepsilon(y) \leq 1 - \mu$ тоді*

(a) *для $\varepsilon < \hat{\varepsilon}_1(\mu)$ виконуються нерівності $h_\varepsilon(y) \geq 1 + \mu/4$ якщо $\operatorname{dist}(y, \partial\Omega) < \varepsilon$ і $h_\varepsilon(y) \leq r_\varepsilon(\partial\omega) - \mu/4$ якщо $\operatorname{dist}(y, \partial\omega) < \varepsilon$;*

(b) *для $\varepsilon < \hat{\varepsilon}_2(\mu, \kappa)$ має місце оцінка*

$$\frac{1}{2}\int_{G \cap B_\varepsilon(y)} |\nabla u_\varepsilon|^2 \mathrm{d}x \geq \kappa\pi. \tag{1.2.78}$$

Доведення(від супротивного). Припустимо, що або (a) або (b) не є вірними для деяких послідовностей $\varepsilon_k \to 0$ і $y = y_k$ таких що $h_{\varepsilon_k}(y_k) \leq 1 - \mu$. Згідно Лемі 1.2.19, $y_k \to \partial G$. Для визначеності будемо рахувати, що $y_k \to \partial\Omega$, тоді (як випливає з Леми 1.2.19)

$$\operatorname{dist}(y_k, \partial\Omega) = o(\varepsilon_k). \tag{1.2.79}$$

Продовжимо u_ε в ω таким чином, що $\|u_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \leq C\|u_\varepsilon\|_{H^1(G)}$ і $|u_\varepsilon| \leq 1$ в Ω, де C – не залежить від ε. Також продовжимо h_ε константою $h_\varepsilon = h_\varepsilon(\partial\omega)$ на ω. Тепер масштабуємо u_{ε_k} і h_{ε_k} за допомогою конформного відображення що “відсуває” y_k від межі. Для цього виберемо фіксоване конформне відображення η з Ω на одиничний диск $\mathbb{D}_1(0)$. Тепер введемо конформне відображення $\zeta_k(z) = (z -$

$\eta(y_k))/(\bar{\eta}(y_k)z-1)$ з $\mathbb{D}_1(0)$ на себе і визначимо функції $U_k(z)=u_{\varepsilon_k}(\eta^{-1}(\zeta_k(z)))$, $H_k(z)=h_{\varepsilon_k}(\eta^{-1}(\zeta_k(z)))$. Легко бачити, що $\|U_k\|_{H^1(\Omega)}\leq C$ і $\|H_k\|_{H^1(\Omega)}\leq C$ з константою C, що не залежить від k. Таким чином без втрати загальності можна припускати, що U_k і H_k слабко H^1-збігаються до деяких границь U і H, відповідно, коли $k\to\infty$.

Можна показати (як в [35](Розділ 4)), що $U_k\to U$ в $C^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{D}_1(0))$ і $\Delta U=0$ в $\mathbb{D}_1(0)$. Таким чином $|U(0)|^2=\lim_{k\to\infty}|U_k(0)|^2=\lim_{k\to\infty}|u_{\varepsilon_k}(y_k)|^2\leq 1-\mu$. Крім того $|U|=1$ майже всюди на $\partial\mathbb{D}_1(0)$. Покажемо, що $\partial_z U=0$ в $\mathbb{D}_1(0)$. Дійсно, згідно з принципом максимуму $|U|<1$ в $\mathbb{D}_1(0)$, отже $\max_{\mathbb{D}_t(0)}|U_k(z)|^2<1-\varepsilon_k^{1/2}$ для кожного фіксованого $0<t<1$ і достатньо великих k. Для таких k маємо $\eta^{-1}(\zeta_k(\mathbb{D}_t(0)))\subset Q^+_\varepsilon$. З огляду на (1.2.76) отримуємо, користуючись кнформністю відображень η^{-1} і ζ_k,

$$\int_{\mathbb{D}_t(0)}|\partial_z U_k|^2dx=\int_{\eta^{-1}(\zeta_k(\mathbb{D}_t(0)))}|\partial_z u_{\varepsilon_k}|^2dx\leq\int_{G^+_\varepsilon}|\partial_z u_{\varepsilon_k}|^2dx\to 0$$

Звідси випливає, що $\partial_z U=0$ в $\mathbb{D}_1(0)$.

Для доведення пункта (b) скористаємось поточковими рівностями $\frac{1}{2}|\nabla U|^2=-\partial_{x_1}U\times\partial_{x_2}U+\frac{1}{4}|\partial_z U|^2$ і $\partial_z U=0$,

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{D}_1(0)}|\nabla U|^2\mathrm{d}x=-\int_{\mathbb{D}_1(0)}\partial_{x_1}U\times\partial_{x_2}U\mathrm{d}x=-\pi\mathrm{deg}(U,\partial\mathbb{D}_1(0)).$$

Оскільки $U\not\equiv\mathrm{Const}$, маємо $\frac{1}{2}\int_{\mathbb{D}_1(0)}|\nabla U|^2\mathrm{d}x\geq\pi$. Отже існує $0<t<1$ таке, що

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{D}_t(0)}|\nabla U|^2dx>\kappa\pi. \tag{1.2.80}$$

Образ $\zeta_k(\mathbb{D}_t(0))$ диска $\mathbb{D}_t(0)$ є диском $\mathbb{D}_{t_k}(\xi_k)$ з радіусом $t_k=\frac{t(1-|\eta(y_k)|^2)}{1-t^2|\eta(y_k)|^2}$ і центром в $\xi_k=\frac{1-t^2}{1-t^2|\eta(y_k)|^2}$. Згідно з (1.2.79) $t_k=o(\varepsilon_k)$ для $k\to\infty$, отже $\eta^{-1}(\mathbb{D}_{t_k}(\xi_k))\subset\mathbb{D}_{\varepsilon_k}(y_k)$ коли k є достатньо великим. Тоді, користуючись конформною інваріантністю і напівнеперервністю знизу інтегралу Діріхле, враховуючи також оцінку (1.2.80), отримуємо

$$\int_{\mathbb{D}_{\varepsilon_k}(y_k)}|\nabla u_{\varepsilon_k}|^2\mathrm{d}x\geq\int_{\eta^{-1}(\zeta_k(\mathbb{D}_t(0)))}|\nabla u_{\varepsilon_k}|^2\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{D}_t(0)}|\nabla U_k|^2\mathrm{d}x>2\kappa\pi$$

коли $k \to \infty$.

Доведемо, що $h_{\varepsilon_k}(y_k) = H_k(0) > 1 + \mu/4$ коли $k \to \infty$. Помітимо, що система(1.2.19) є конформно інваріантною, тобто

$$\nabla^{\perp} H_k = (U_k \times \partial_{x_1} U_k, U_k \times \partial_{x_2} U_k) \quad \text{в} \quad \zeta_k^{-1}(\eta(G)).$$

Прейдемо в останній рівності до границі $k \to \infty$: $H_k \to H$ в $C^1_{\text{loc}}(\mathbb{D}_1(0))$ і

$$\nabla^{\perp} H = (U \times \partial_{x_1} U, U \times \partial_{x_2} U) = -\frac{1}{2}\nabla^{\perp}(|U|^2) \quad \text{в} \quad \mathbb{D}_1(0),$$

де використано той факт, що $\partial_z U = 0$ в $\mathbb{D}_1(0)$. Оскільки $H = |U| = 1$ на $\partial\mathbb{D}_1(0)$ маємо $H = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}|U|^2$ в $\mathbb{D}_1(0)$, отже

$$\lim_{k\to\infty} h_{\varepsilon_k}(y_k) = \lim_{k\to\infty} H_k(0) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}|U(0)|^2 \geq 1 + \frac{\mu}{2}.$$

Лему доведено. $\square$

Зауваження 1.2.21. З Леми 1.2.20 випливає, що у випадку коли $p = q = d$ мінімізанти задачі (1.2.6) не мають нулів (вихорів) для достатньо малих ε. Дійсно, згідно з Теоремою 1.2.4 вони сильно збігаються в $H^1(G; \mathbb{S}^1)$ при $\varepsilon \to 0$, з точністю до підпослідовності, до деякого гармонічного відображення $u \in \mathcal{J}^{(d)}_{dd}$. З іншого боку (1.2.78) демонструє концентрацію енергії в околі нулів мінімізантів, що є несумісним з сильною H^1 збіжностю.

Наступний результат описує структуру функції h_ε для малих ε, він відіграє важливу роль в доведенні основного допоміжного результату (Леми А.2) в Додатку А.

Лема 1.2.22. *Для достатньо малих ε, $\varepsilon < \varepsilon_4$ (де $\varepsilon_4 > 0$),*

(i) $\rho^2_\varepsilon(x) \geq 1/2$ *коли* $h_\varepsilon(\partial\omega) - 1/8 \leq h_\varepsilon(x) \leq 9/8$ *і* $h_\varepsilon(\partial\omega) < \min_{\mathcal{L}} h_\varepsilon(x) \leq \max_{\mathcal{L}} h_\varepsilon(x) < h_\varepsilon(\partial\Omega)$*; якщо* $\rho^2_\varepsilon(x) < 1/2$ *тоді або*

$$\text{dist}(x, \partial\Omega) < \text{dist}(\mathcal{L}, \partial\Omega) \ \textit{і} \ h_\varepsilon(x) > 9/8$$

або

$$\text{dist}(x, \partial\omega) < \text{dist}(\mathcal{L}, \partial\omega) \ \textit{і} \ h_\varepsilon(x) < h_\varepsilon(\partial\omega) - 1/8;$$

(ii) існують $x_\varepsilon^* \in \partial\Omega$, $x_\varepsilon^{**} \in \partial\omega$ *такі що* $\frac{\partial h_\varepsilon}{\partial\nu}(x_\varepsilon^*) > 0$ *і* $\frac{\partial h_\varepsilon}{\partial\nu}(x_\varepsilon^{**}) > 0$.

Доведення. Пункт (i) є наслідком Леми 1.2.19, Леми 1.2.20 і збіжностними властивостями h_ε при $\varepsilon \to 0$, що встановлено в доведенні Теореми 1.2.4. Доведення (ii) проводиться наступним чином. Позначимо через $\hat{\varepsilon}_2(\mu,\kappa)$ найкращу (найбільшу) константу в Лемі 1.2.20. Тоді $\hat{\varepsilon}_2(\mu,\kappa)$ росте з μ і спадає з κ. Для $k = 1, 2, \dots$ покладемо

$$\hat{\mu}_\varepsilon = 1/k \quad \text{коли} \quad \min\{\hat{\varepsilon}_2(\tfrac{1}{k+1}, \tfrac{k}{k+1}), 1/(k+1)\} \le \varepsilon < \min\{\hat{\varepsilon}_2(\tfrac{1}{k}, \tfrac{k-1}{k}), 1/k\}.$$

Тоді $\hat{\mu}_\varepsilon \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ і (1.2.78) є вірним з $\kappa = 1 - \hat{\mu}_\varepsilon$ коли $\rho_\varepsilon^2(y) < 1 - \hat{\mu}_\varepsilon$; таке саме має місце якщо $\hat{\mu}_\varepsilon$ замінити на $\mu_\varepsilon = \max\{\hat{\mu}_\varepsilon, \varepsilon^{1/2}\}$. Виберемо точку $x_\varepsilon^{(1)}$ в G таку що $\rho_\varepsilon^2(x_\varepsilon^{(1)}) < 1 - \mu_\varepsilon$; далі виберемо $x_\varepsilon^{(2)}$ в $G \setminus \mathbb{D}_{2\varepsilon}(x_\varepsilon^{(1)})$ таке що $\rho_\varepsilon^2(x_\varepsilon^{(1)}) < \mu_\varepsilon$, і так далі, доки для деякого K_ε не буде виконуватись нерівність $\rho_\varepsilon^2(x) \ge 1 - \mu_\varepsilon$ на $G \setminus \cup_{k=1}^{K_\varepsilon} \mathbb{D}_{2\varepsilon}(x_\varepsilon^{(k)})$. Оскільки диски $\mathbb{D}_\varepsilon(x_\varepsilon^{(k)})$ не перетинаються, з означення (конструкції) μ_ε випливає

$$\frac{1}{2}\int_G |\nabla u^\varepsilon|^2 dx \ge \frac{1}{2}\sum_1^{K_\varepsilon} \int_{G\cap\mathbb{D}_\varepsilon(x_\varepsilon^{(k)})} |\nabla u^\varepsilon|^2 dx \ge K_\varepsilon(1-\mu_\varepsilon)\pi.$$

Таким чином, з огляду на (1.2.66) має місце рівномірна оцінка $K_\varepsilon \le C$. Міркуючи як в [47] (Глава IV, Теорема IV.1) можна збільшити радіуси дисків до $\varepsilon\lambda > 2\varepsilon$ (з λ незалежним від ε) і взяти підмножину I_ε з набору цілих чисел $\{1, \dots, K_\varepsilon\}$, такі що

$$\cup_{k\in I_\varepsilon}\mathbb{D}_{\varepsilon\lambda}(x_\varepsilon^k) \supset \cup_{k=1}^{K_\varepsilon}\mathbb{D}_{2\varepsilon}(x_\varepsilon^k) \quad \text{і} \quad \mathrm{dist}(x_\varepsilon^{k'}, x_\varepsilon^k) > 4\varepsilon\lambda \quad \text{для різних} \quad k, k' \in I_\varepsilon.$$

Також має місце нерівність

$$\rho_\varepsilon^2(x) \ge 1 - \mu_\varepsilon \text{ в } G \setminus \cup_{k\in I_\varepsilon}\mathbb{D}_{\varepsilon\lambda}(x_\varepsilon^k).$$

Продовжимо h_ε і h_0 на все $\mathbb{R}^2$ рівностями $h_\varepsilon = h_\varepsilon(\partial\omega)$, $h_0 = h_0(\partial\omega)$ в ω, і $h_\varepsilon = h_0 = 1$ в $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega$. Оскільки $\rho_\varepsilon^2(x) \ge 1 - \mu_\varepsilon \ge 1 - \varepsilon^{1/2}$ в $D_\varepsilon^{(k)} = \mathbb{D}_{2\lambda\varepsilon}(x_\varepsilon^{(k)}) \setminus \mathbb{D}_{\lambda\varepsilon}(x_\varepsilon^{(k)})$, з (1.2.75) витікає, що

$$\int_{D_\varepsilon^{(k)}} |\nabla h_\varepsilon|^2 \mathrm{d}x \le 2\int_{D_\varepsilon^{(k)}} (|\nabla(h_\varepsilon - h_0)|^2 + |\nabla h_0|^2)\mathrm{d}x \to 0 \text{ коли } \varepsilon \to 0.$$

Запишемо тепер інтеграл по $D_\varepsilon^{(k)}$ в полярних координатах з центром в $x_\varepsilon^{(k)}$:

$$\int_{D_\varepsilon^{(k)}} |\nabla h_\varepsilon|^2 \mathrm{d}x = \int_{\lambda\varepsilon}^{2\lambda\varepsilon} d\tilde{\lambda} \int_{|x-x_\varepsilon^{(k)}|=\tilde{\lambda}} |\nabla h_\varepsilon|^2 d\sigma \to 0.$$

Звідси випливає, що існує $\lambda_\varepsilon^{(k)}$, $\lambda\varepsilon \le \lambda_\varepsilon^{(k)} \le 2\lambda\varepsilon$, таке що

$$\int_{|x-x_\varepsilon^{(k)}|=\lambda_\varepsilon^{(k)}} |\nabla h_\varepsilon|^2 d\sigma = o(1/\varepsilon).$$

Тоді, користуючись нерівністю Коші-Шварца, отримуємо

$$\int_{|x-x_\varepsilon^{(k)}|=\lambda_\varepsilon^{(k)}} |\nabla h_\varepsilon| \mathrm{d}s \le (\pi\lambda_\varepsilon^{(k)})^{1/2} \left\{ \int_{|x-x_\varepsilon^{(k)}|=\lambda_\varepsilon^{(k)}} |\nabla h_\varepsilon|^2 \mathrm{d}s \right\}^{1/2} = o(1). \quad (1.2.81)$$

Проинтегруємо тепер (1.2.22) по $Q^+ \setminus \cup_{k\in I_\varepsilon} \mathbb{D}_{\lambda_\varepsilon^{(k)}}(x_\varepsilon^{(k)})$, в результаті, з урахуванням (1.2.81) і Леми 1.2.11, знаходимо

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial h_\varepsilon}{\partial \nu} \mathrm{d}s = 2\pi d + \sum_{k\in I_\varepsilon} \int_{|x-x_\varepsilon^{(k)}|=\lambda_\varepsilon^{(k)}} \frac{\partial h_\varepsilon}{\partial \nu} \frac{\mathrm{d}s}{\rho_\varepsilon^2} = 2\pi d - o(1) \text{ коли } \varepsilon \to 0,$$

де I'_ε позначає підмножину таких $k \in I_\varepsilon$ що $\mathbb{D}_{\lambda_\varepsilon^{(k)}}(x_\varepsilon^{(k)}) \cap Q^+ \ne \emptyset$, і $\Gamma_\varepsilon = \partial\Omega \setminus \cup_{k\in I'_\varepsilon} \mathbb{D}_{\lambda_\varepsilon^{(k)}}(x_\varepsilon^{(k)})$. Таким чином існує $x_\varepsilon^* \in \Gamma_\varepsilon$ таке, що $\frac{\partial h_\varepsilon}{\partial \nu}(x_\varepsilon^*) > 0$. Також само показується, що на $\gamma_\varepsilon = \partial\omega \setminus \cup_{k\in I_\varepsilon \setminus I'_\varepsilon} \mathbb{D}_{\lambda_\varepsilon^{(k)}}(x_\varepsilon^{(k)})$ існує точка x_ε^{**}, така що $\frac{\partial h_\varepsilon}{\partial \nu}(x_\varepsilon^{**}) > 0$. □

1.3 Мінімізанти повного функціонала Гінзбурга-Ландау в однозв'язних областях

Нехай $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ – обмежена однозв'язна область з гладкою межею. Розглянемо функціонал

$$G_\lambda[u, A] = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u - iAu|^2 \mathrm{d}x + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} |\mathrm{curl} A|^2 \mathrm{d}x + \frac{\lambda}{8} \int_\Omega (|u|^2 - 1)^2 \, \mathrm{d}x, \quad (1.3.1)$$

де $u \in H^1(\Omega; \mathbb{C})$ – параметр порядку, $A \in H^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$ – векторний потенціал магнітного поля, і $\lambda > 0$ – позитивна стала ($\sqrt{\lambda/2}$ – параметр Гінзбурга-Ландау).

Функціонал (1.3.1) є інваріантним відносно калібровочних перетворень $(u, A) \mapsto (e^{i\varphi}u, A + \nabla\varphi)$, $\varphi \in H^2(\mathbb{R}^2)$. Ця властивість дозволяє звести вивчення (1.3.1) до функціонала (див., наприклад, [182], Розділ 3)

$$F_\lambda[u, A] = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u - iAu|^2 \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_\Omega |\mathrm{curl} A|^2 \mathrm{d}x + \frac{\lambda}{8}\int_\Omega (|u|^2 - 1)^2\, \mathrm{d}x. \quad (1.3.2)$$

Користуючись інваріантністю $F_\lambda[u, A]$ відносно перетворень $(u, A) \mapsto (e^{i\varphi}u, A + \nabla\varphi)$, $\varphi \in H^2(\Omega)$, вибором φ можна звести варіаційні задачі для $F_\lambda[u, A]$ до випадку кулонівської калібровки A, тобто

$$\begin{cases} \mathrm{div} A = 0 \text{ в } \Omega \\ A \cdot \nu = 0 \text{ на } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.3.3)$$

Зазначимо, що магнітне поле $h = \mathrm{curl} A = \partial A_2/\partial x_1 - \partial A_1/\partial x_2$, вектор струму

$$j = (iu, \nabla u - iAu) \quad (1.3.4)$$

і $|u|$ є калібровочно інваріантними.

Вивчаються критичні точки $F_\lambda[u, A]$ в

$$\mathcal{J} = \{(u, A) \in H^1(\Omega; \mathbb{C}) \times H^1(\Omega; \mathbb{R}^2);\ |u| = 1 \text{ на } \partial\Omega,\ A \text{ задовольняє (1.3.3)}\}. \quad (1.3.5)$$

Вони є розв'язками системи рівнянь

$$\begin{cases} -(\nabla - iA)^2 u + \frac{\lambda}{2} u(|u|^2 - 1) = 0 \\ -\nabla^\perp h = j \end{cases} \quad \text{в } \Omega, \quad (1.3.6)$$

з крайовими умовами

$$|u| = 1,\ A \cdot \nu = 0,\ h = 0 \text{ і } j \cdot \nu = 0 \text{ на } \partial\Omega. \quad (1.3.7)$$

Як показано в [50], простір $\mathcal{J}$ не є зв'язним, його зв'язні компоненти $\mathcal{J}_d$, $d \in \mathbb{Z}$, класифікуються степенями відображення функцій u на межі $\partial\Omega$,

$$\mathcal{J} = \bigcup_{d \in \mathbb{Z}} \mathcal{J}_d,\ \mathcal{J}_d = \{(u, A) \in \mathcal{J};\ \deg(u, \partial\Omega) = d\}.$$

Розглянемо задачу мінімізації $F_\lambda[u, A]$ відрносно пар (u, A) зі звязної компоненти простору $\mathcal{J}$:

$$m_d(\lambda) := \inf\{F_\lambda[u, A]; (u, A) \in \mathcal{J}_d\}. \tag{1.3.8}$$

Теорема 1.3.1. (i) *Інфімум (1.3.8) завжди досягається для* $0 < \lambda < 1$*, тобто довільна мінімізуюча послідовність збігається (з точністю до підпослідовності) до глобального мінімізанта (1.3.8).*
(ii) *Якщо* $\lambda > 1$ *тоді інфімум* $m_d(\lambda)$ *ніколи не досягається окрім тривіального випадку* $d = 0$ *(у останнюому випадку мінімізантами є* $u \equiv \mathrm{Const} \in \mathbb{S}^1$, $A \equiv 0$*).*

Зазначимо, що для критичного значення $\lambda = 1$ мінімізанти існують і формують $2|d|$-параметричну сім'ю яку можна запараметризувати приписуючи положення вихорів в Ω ([50], див. Твердження 1.3.2 нижче).

Також вивчено асимтотичну поведінку мінімізантів коли $\lambda \to 1-0$. Зокрема показано, що з точністю до підпослідовності мінімізанти збігаються до того розв'язку (u, A) задачі (1.3.8) для $\lambda = 1$ який задовольняє $\int_\Omega |\mathrm{curl} A|^2 \,\mathrm{d}x \to \max$ (див. Теорему B.1 в Додатку B).

Регулярність розв'язків (1.3.6)–(1.3.7) вивчено в [39] за допомогою стандартної техніки.

1.3.1 Теорема про існування/неіснування мінімізантів

Є.Б. Богомольним [49] (див. також [50]), було винайдено наступні представлення для функціоналу $F_\lambda[u, A]$:

$$F_\lambda[u, A] = \pi \deg(u, \partial\Omega) + F^+[u, A] - \frac{1-\lambda}{8}\int_\Omega (|u|^2 - 1)^2 \mathrm{d}x \tag{1.3.9}$$

$$= -\pi \deg(u, \partial\Omega) + F^-[u, A] - \frac{1-\lambda}{8}\int_\Omega (|u|^2 - 1)^2 \mathrm{d}x, \tag{1.3.10}$$

де

$$F^+[u, A] = 2\int_\Omega \Big|\frac{\partial u}{\partial \bar z} + \frac{A_2 - iA_1}{2} u\Big|^2 \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_\Omega \Big|\mathrm{curl} A + \frac{|u|^2 - 1}{2}\Big|^2 \mathrm{d}x, \tag{1.3.11}$$

і

$$F^-[u,A] = 2\int_\Omega \Big|\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{A_2 + iA_1}{2}u\Big|^2 \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_\Omega \Big|\mathrm{curl}A - \frac{|u|^2-1}{2}\Big|^2 \mathrm{d}x. \qquad (1.3.12)$$

Детальне виведення (1.3.9) і (1.3.10) можна знайти в [50]. Функціонали $F_\lambda[u,A]$ і $F^\pm[u,A]$ є напівнеперервними знизу відносно слабкої збіжності в $H^1(\Omega;\mathbb{C}) \times H^1(\Omega;\mathbb{R}^2)$. З теореми про вкладення соболевських просторів випливає, що останній член в (1.3.9) і (1.3.10) є неперервним відносно слабкої-H^1 збіжності; нарешті, $\deg(u,\partial\Omega)$ є цілозначною неперервною функцією в просторі $\mathcal{J}$ наділеному сильною топологією $H^1(\Omega;\mathbb{C}) \times H^1(\Omega;\mathbb{R}^2)$, яка проте не є неперервною відносно слабкої H^1 збіжності в $\mathcal{J}$. Таким чином, питання про те чи досягається інфімум в (1.3.8) є нетривіальним.

Як зазначено вище, вичерпний опис мінімізантів $F_\lambda[u,A]$ в $\mathcal{J}_d$ в інтегрованому випадку $\lambda = 1$ було одержано в [50]. У цьому випадку мінімізанти утворюють $2|d|$-параметричну сім'ю. Це контрастує з випадком спрощеного функціоналу Гінзбурга-Ландау, для якого мінімізантів не існує для всіх $\lambda > 0$ окрім випадку $d = 0$. Для $\lambda = 1$, з (1.3.9)–(1.3.10) випливає, що $m_d(1) \geq \pi|d|$. Припустимо для визначеності, що $d > 0$, тоді рівність $m_d(1) = \pi d$ веде до системи рівнянь

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \bar z} + \frac{1}{2}(A_2 - iA_1)u = 0 \\ \mathrm{curl}A + \frac{1}{2}(|u|^2 - 1) = 0 \end{cases} \quad \text{в } \Omega, \qquad (1.3.13)$$

Факторізуючи (як в [108]) u в добуток голоморфної частини $a(z;\xi_1)\dots a(z;\xi_d)$ і множнику $e^{\varphi/2}$, (1.3.13) отримуємо одне рівняння другого порядку для φ,

$$\begin{cases} -\Delta\varphi + |a(z;\xi_1)\dots a(z;\xi_d)|^2 e^\varphi = 1 \text{ в } \Omega \\ \varphi = 0 \text{ на } \partial\Omega, \end{cases} \qquad (1.3.14)$$

де $a(z;\xi)$ – конформне відображення Ω на $B_1 = \{x \in \mathbb{C}; |x| < 1\}$, таке що $a(\xi;\xi) = 0$, тобто $a(z,\xi)$ має вигляд

$$a(z;\xi) = \frac{f(z) - f(\xi)}{1 - \overline{f(\xi)}f(z)} \qquad (1.3.15)$$

де f – фіксоване конформне відображення Ω на B_1. Зазначимо, що для $\lambda = 1$ точки $\xi_1, \dots, \xi_d$, що є вихорами мінімізантів, можна вибирати довільним чином в Ω.

Твердження 1.3.2. [50] *Припустимо, що $d > 0$, тоді $m_d(1) = \pi d$ і*

(i) *для всих $\xi_1, \dots, \xi_d \in \Omega$ $(u, A) = (a(z;\xi_1) \dots a(z;\xi_d) e^{\varphi/2}, -\frac{1}{2}\nabla^\perp\varphi)$, де φ є розв'язком (1.4.17), є мінімізантом (1.3.8) для $\lambda = 1$;*

(ii) *кожний мінімізант (1.3.8) для $\lambda = 1$ можна представити як $(u, A) = (\gamma\, a(z;\xi_1)\ \dots\ a(z;\xi_d)\, e^{\varphi/2}, -\frac{1}{2}\nabla^\perp\varphi)$ для деякого $\gamma = \mathrm{const} \in S^1$, $\xi_1, \dots, \xi_d \in \Omega$, і φ, що є розв'язком (1.4.17).*

Для доведення того факту, що інфімум в (1.3.8) досягається для $\lambda < 1$ використовується слабка напівнеперервність знизу $F_\lambda[u, A]$, $F^\pm[u, A]$ і неперервність останнього члену в (1.3.9)-(1.3.10). Базовим елементом в доведенні є порівняння енергій, яке спирається на наступну Лему.

Лема 1.3.3. *Нехай $(u, A) \in \mathcal{J}_d$ – довільна пара, така що $|u| \le 1$ в Ω. Тоді*

(i) *існує пара $(v, B) \in \mathcal{J}_{d+1}$, така що $|v| \le 1$ в Ω, $F^+[v, B] \le F^+[u, A]$ і*

$$\int_\Omega (|v|^2 - 1)^2 \mathrm{d}x > \int_\Omega (|u|^2 - 1)^2 \mathrm{d}x; \tag{1.3.16}$$

(ii) *існує пара $(v, B) \in \mathcal{J}_{d-1}$ така що $|v| \le 1$ в Ω, $F^-[v, B] \le F^-[u, A]$ і виконується (1.3.16).*

Доведення. Нехай ξ – Лебегова точка u, така що $|u(\xi)| > 0$. Позначимо через $a(x;\xi)$ конформне відображення Ω на одиничний диск задане формулою (1.3.15) (зокрема маємо $a(\xi;\xi) = 0$). Розглянемо функцію $v = ua(x;\xi)e^{\phi/2}$ (з дійснозначною функцією $\phi \in H^2(\Omega)$) і векторне поле $B = A + \tilde{B}$ (де $\tilde{B} \in H^1(\Omega;\mathbb{R}^2)$, таке що

$$\frac{\partial v}{\partial \bar{z}} + \frac{B_2 - iB_1}{2} v = a(x;\xi)e^{\phi/2}\Big(\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} + \frac{A_2 - iA_1}{2} u\Big) \text{ в } \Omega, \tag{1.3.17}$$

$$\begin{cases} \mathrm{curl}B + \frac{1}{2}(|v|^2 - 1) = \mathrm{curl}A + \frac{1}{2}(|u|^2 - 1) \text{ в } \Omega \\ \phi = 0 \text{ на } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.3.18}$$

Ясно, що (якщо $\tilde{B}$ має кулонівську калібровку) $(v, B) \in J_{d+1}$. Зазначимо, що (1.3.17) виконується коли $\tilde{B} = -\frac{1}{2}\nabla^\perp\phi$ і з таким вибором $\tilde{B}$ маємо $\mathrm{curl}B = \mathrm{curl}A - \frac{1}{2}\Delta\phi$. Тоді (1.3.18) переписується як

$$\begin{cases} \Delta\phi = |u|^2(|a(x;\xi)|^2 e^\phi - 1) \text{ в } \Omega \\ \phi = 0 \text{ на } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.3.19}$$

Остання напівлінійна задача має єдиний розв'язок який належить до $H^2(\Omega)$, що є наслідком наступного результату.

Теорема 1.3.4. *([50], Теорема 4.3) Нехай $k \geq -1$ є цілим. Нехай також задані $\beta \in H^k(\Omega)$, $\mu \in H^{k+3/2}(\partial\Omega)$, і $\alpha \in H^k(\Omega)$, такі що $\alpha \geq 0$, $\alpha \in L^{1+\varepsilon}(\Omega)$ для деякого $\varepsilon > 0$. Тоді існує єдиний розв'язок $\phi \in H^1(\Omega)$ рівняння $-\Delta\phi + \alpha e^\phi = \beta$ в Ω що задовольняє $\phi = \mu$ на $\partial\Omega$. Більш того, маємо $\phi \in H^{k+2}(\Omega)$.*

Застосуємо принцип максимуму до (1.3.19), тоді маємо

$$0 < \phi \leq -2\log|a(x;\xi)| \text{ in } \Omega.$$

Звідси $0 \leq |v| \leq |u|$ в Ω і $0 = |v(\xi)| < |u(\xi)|$, що дає (1.3.16). Насамкінець, з (1.3.17)–(1.3.18) і поточкової нерівності $|a(x;\xi)|e^{\varphi/2} \leq 1$ неважко вивести, що $F^+[v, B] \leq F^+[u, A]$. Таким чином твердження (i) доведено. Доведення (ii) є аналогічним. А саме, покладемо $v = u\overline{a(x;\xi)}e^{\phi/2}$ (де ϕ є розв'язком (1.3.19)) і $B = A + \frac{1}{2}\nabla^\perp\phi$ і повторимо міркування викладені вище для доведення того, що $F^-[v, B] \leq F^-[u, A]$ і виконується (1.3.16). □

Наслідок 1.3.5. *Нехай $(u, A) \in \mathcal{J}_d$ і припустимо, що $0 < \lambda < 1$. Тоді*

(i) *існує пара $(v, B) \in \mathcal{J}_{d+1}$, така що $F_\lambda[v, B] < F_\lambda[u, A] + \pi$;*

(ii) *існує пара $(v, B) \in \mathcal{J}_{d-1}$, така що $F_\lambda[v, B] < F_\lambda[u, A] + \pi$.*

Зокрема, якщо $d \geq 0$ $(d \leq 0)$ *тоді* $m_{d+1}(\lambda) \leq m_d(\lambda) + \pi$ $(m_{d-1}(\lambda) \leq m_d(\lambda) + \pi)$ *і нерівність є строгою у випадку коли* $m_d(\lambda)$ *досягається.*

Доведення. (i) Без зменшення загальності можна припускати, що $|u| \leq 1$ в Ω (у зворотньому випадку можна ввести функцію $\tilde{u} = u \min\{1, 1/|u|\}$, для якої $F_\lambda[\tilde{u}, A] \leq F_\lambda[u, A]$). Тоді можна використати твердження (i) Леми 1.3.3 і сконструювати відповідну пару (v, B). Підставимо тепер (v, B) в представлення (1.3.9) для $F_\lambda[v, B]$ і використаємо (1.3.17)-(1.3.18),

$$\begin{aligned} F_\lambda[v, B] &= \pi(d+1) + F^+[v, B] - \frac{1-\lambda}{8}\int_\Omega (|v|^2-1)^2 \mathrm{d}x \\ &< \pi + \pi d + F^+[u, A] - \frac{1-\lambda}{8}\int_\Omega (|u|^2-1)^2 \mathrm{d}x = \pi + F_\lambda[u, A]. \end{aligned}$$

Доведення (ii) є аналогічним. $\square$

Доведення Тореми 1.3.1. (ii) Припустимо, від супротивного, що $(u, A) \in \mathcal{J}_d$ – мінімізант $m_d(\lambda)$ для $\lambda > 1$. Маємо

$$F_\lambda[u, A] \leq \inf_{(u,0)\in\mathcal{J}_d}\left(F_\lambda[u, 0] \equiv \frac{1}{2}\int_\Omega (|\nabla u|^2 + \frac{\lambda}{4}(|u|^2-1)^2)\,\mathrm{d}x\right) \leq \pi|d|,$$

де останню нерівність отримано за допомогою тестових функцій $u_\xi = a(z;\xi)^d$ з $\xi \to \partial\Omega$ (див. [34]). З іншого боку, внаслідок (1.3.9)–(1.3.10),

$$F_\lambda[u, A] \geq \pi|d| + \frac{\lambda-1}{8}\int_\Omega (|u|^2-1)^2 \mathrm{d}x.$$

Таким чином

$$\frac{\lambda-1}{8}\int_\Omega (|u|^2-1)^2)\mathrm{d}x = 0,$$

тобто u є $\mathbb{S}^1$-значною функцією, звідки $\deg(u, \partial\Omega) = 0$. Отже $(u, A) \in \mathcal{J}_0$, і $(u, A) \notin \mathcal{J}_d$ якщо $d \neq 0$.

Для доведення твердження (i) помітимо, що для $d = 0$ маємо $m_0(\lambda) = 0$ і довільна пара $(\gamma, 0)$ з $\gamma = \mathrm{const} \in \mathbb{S}^1$ є мінімізантом. Припустимо, що $d > 0$ (випадок $d < 0$ розглядається аналагічно). Користуючись твердженям (i)

Наслідку 1.3.5, одержуємо

$$m_d(\lambda) = m_d(\lambda) - m_0(\lambda) = \sum_{d'=0}^{d-1}(m_{d'+1}(\lambda) - m_{d'}(\lambda)) < \pi d. \tag{1.3.20}$$

Нехай $(u^{(n)}, A^{(n)}) \in \mathcal{J}_d$ – мінімізуюча послідовність для задачі (1.3.8). З (1.3.20) та (1.3.3) випливає, що $\|u^{(n)}\|_{H^1} + \|A^{(n)}\|_{H^1} \leq C$. Отже, з точністю до підпослідовності, $(u^{(n)}, A^{(n)}) \to (u, A)$ слабко в $H^1(\Omega;\mathbb{C}) \times H^1(\Omega;\mathbb{R}^2)$ коли $n \to \infty$. Таким чином $(u, A) \in \mathcal{J}_{d'}$ для деякого цілого d', і для доведення твердження (i) необхідно показати тільки, що $d' = d$.

Припустимо, що $d' > d$. З слабкої напівперервності знизу $F^-[u^{(n)}, A^{(n)}]$ і неперервності останнього доданка в (1.3.10) відносно слабкої-H^1 збіжності випливає, що

$$\begin{aligned} m_d(\lambda) &= -\pi d + \lim_{n\to\infty}\big(F^-[u^{(n)}, A^{(n)}] - \frac{1-\lambda}{8}\int_\Omega (|u^{(n)}|^2 - 1)^2 \mathrm{d}x\big) \\ &\geq -\pi d + F^-[u, A] - \frac{1-\lambda}{8}\int_\Omega (|u|^2 - 1)^2 \mathrm{d}x = \pi(d' - d) + F_\lambda[u, A]. \end{aligned}$$

З іншого боку ітеративне використання твердження (ii) Наслідку 1.3.5 веде до пари $(v, B) \in \mathcal{J}_d$, такої що $F_\lambda[v, B] < \pi(d' - d) + F_\lambda[u, A]$, отже $m_d(\lambda) < \pi(d' - d) + F_\lambda[u, A]$ – протиріччя. Аналогічно, якщо $d' < d$ тоді маємо $m_d(\lambda) = \lim_{n\to\infty} F_\lambda[u^{(n)}, A^{(n)}] \geq \pi(d - d') + F_\lambda[u, A]$ внаслідок напівперервності знизу (1.3.9), у той же час твердження (i) Наслідку 1.3.5 веде до нерівності $m_d(\lambda) < \pi(d - d') + F_\lambda[u, A]$, але це також є протиріччя. Таким чином $d' = d$, Теорему 1.3.1 доведено. $\square$

Зауваження 1.3.6. У той час як мінімізанти (1.3.8) завжди існують для $\lambda < 1$ (тобто довільна мінімізуюча послідовність збігається за підпослідоністю до мінімізанту (1.3.8)), це не є вірним коли $\lambda = 1$ і $d \neq 0$. Якщо, наприклад, $d > 0$ тоді для довільної послідовності $\xi^{(n)} \in \Omega$, що збігається до $\partial\Omega$, послідовність $(a(x;\xi^{(n)})^d, 0) \in \mathcal{J}_d$ є мінімізуючою полідовністю чиї часткові границі є тривіальними мінімізантами $(u \equiv \mathrm{Const} \in S^1, A \equiv 0) \notin \mathcal{J}_d$. З іншого боку мінімізанти існують, вони описані в Твердженні 1.3.2.

1.4 Сингулярна поведінка мінімізантів повного функціонала Гінзбурга-Ландау в двозв'язних областях: вихорі біля межі та їх граничні положення

Для заданої обмеженої двозв'язної області $G \subset \mathbb{R}^2$, $G = \Omega \setminus \overline{\omega}$, де Ω, ω – гладкі обмежені однозв'язні області і $\overline{\omega} \subset \Omega$, розглядається задача знаходження критичних точок фнкціонала Гінзбурга-Ландау

$$E_\lambda[u, A] = \frac{1}{2} \int_G \bigl(|\nabla u - iAu|^2 + \frac{\lambda}{4}(|u|^2 - 1)^2\bigr)\,\mathrm{d}x \;+ \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} |\mathrm{curl} A|^2\,\mathrm{d}x \qquad (1.4.1)$$

у просторі $(u, A) \in \mathcal{J}$,

$$\mathcal{J} = \{u \in H^1(G; \mathbb{C});\ |u| = 1 \text{ на } \partial G\} \times H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2). \qquad (1.4.2)$$

Невідомими в (1.4.1) є відображення $u : G \to \mathbb{C}$ (параметр порядку) і векторне поле $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ (потенціал магнитного поля); $\lambda > 0$ – задана стала ($\sqrt{\lambda/2}$ – параметр Гінзбурга-Ландау). Введемо підпростір $\mathcal{J}_{01} \subset \mathcal{J}$, куди віднесемо пари (u, A), такі що степінь відображення u на $\partial\omega$ і $\partial\Omega$ є, відповідно, нульовим і одиничним. Зазначимо, що для $(u, A) \in \mathcal{J}_{01} \subset \mathcal{J}$ функція u має щонайменш один (істотний) нуль в G. Вивчається варіаційна задача

$$m(\lambda) = \inf\{E_\lambda[u, A];\ (u, A) \in \mathcal{J}_{01}\}. \qquad (1.4.3)$$

Буде показано, що $m(\lambda)$ завжди досягається для $0 < \lambda < 1$ і ніколи не досягається для $\lambda \geq 1$. Той факт, що $m(1)$ не досягається контрастує з випадком однозв'язної області. Більш того, поведінка мінімізантів при $\lambda \to 1 - 0$ є сингулярною: мінімізанти мають вихорі біля межі і їх поведінка, зокрема асимптотичні положення, є главним предметом дослідження у цьому підрозділі.

Основним результатом є наступна Теорема.

Теорема 1.4.1. *Нехай $0 < \lambda < 1$ і нехай (u^λ, A^λ) – мінімізант (1.4.1) в $\mathcal{J}_{01}$. Тоді, при $\lambda \to 1 - 0$*

(i) u^λ має точно один нуль (вихор) ξ^λ;

(ii) *з точністю до виділення підпослідовності,* $\xi^\lambda \to \xi^* \in \partial\Omega$ *коли* $\lambda \to 1-0$ *і* ξ^* *максимізує* $|\partial V/\partial\nu|$ *на* $\partial\Omega$*, де* $\partial V/\partial\nu$ *– нормальна похідна* V *і* V *– розв'язок (скалярної) задачі*

$$\begin{cases} \Delta V = V \ \textit{в} \ G \\ V = 0 \ \textit{на} \ \partial\Omega, \ \textit{і} \ V = 1 \ \textit{на} \ \partial\omega; \end{cases} \tag{1.4.4}$$

(iii) *тангенціальна компонента струму* $j^\lambda = (iu^\lambda, \nabla u^\lambda - iA^\lambda u^\lambda)$ *на* $\partial\Omega$ *збігається до* $2\pi\delta_{\xi^*}$ *в* $\mathcal{D}'(\partial\Omega)$*, де* δ_{ξ^*} *– дельта-функція Дірака з центром в* ξ^**.*

Зауваження 1.4.2. В процесі доведення Теореми 1.4.1 буде показано, що (u^λ, A^λ) збігається слабко в $H^1(G;\mathbb{C})\times H^1(\tilde{G};\mathbb{R}^2)$ (для кожної обмеженої області $\tilde{G}$) до границі (u, A), що є еквівалентною (відносно калібровочних перетворень) трівіальному мінімізанту ($u = \text{const} \in \mathbb{S}^1, A = 0$). Проте струми мають сингулярну поведінку, як описано в твердженні (iii) Теореми 1.4.1.

Треба зазначити, що сингулярна поведінка мінімізантів в Теоремі 1.4.1 є досить незвичайною. Вона суттєво відрізняється від результатів [30], де близька задача вивчена в границі Лондонів $\lambda \to \infty$. Проте в [30], разом з заданим степенем відображення параметру порядку на межі задається також умова Діріхле для тангенціальної компоненти струму. Відповідна варіаційна задача є компактною, вона має розв'язки для всіх $\lambda > 0$, більш того вихорі мінімізантів збігаються до внутрішніх точок які описуються за допомогою функціоналу ренормалізованої енергії. Важливою відмінною рисою задачі (1.4.3) є той факт, що тангенціальна компонента струму має δ-подібну поведінку на ∂G при $\lambda \to 1-0$, оскільки вихорі збігаються до точок на межі (на відміну від [30]), при цьому нормальна компонента струму завжди є нульовою (це є натуральною крайовою умовою для задачі (1.4.3)).

Для дослідження вихорів біля межі розвивається техніка енергетичних оцінок для задачі (1.4.3), що дозволяє отримати граничні положення вихорів у границі $\lambda \to 1-0$. Треба зазначити, що граничні вихорі породжують сингулярні струми проте слабка границя параметра порядку не є сингулярною (на відміну від вихорів відділених від межі, що добре досліджені в літературі). Основним технічним результатом є наступна асимптотична ($\lambda \to 1-0$) оцінка знизу для енергії мінізуючої пари (u^λ, A^λ),

$$E_\lambda[u^\lambda, A^\lambda] \geq \pi + \frac{2\pi^2}{K_G}\delta^2\Big|\frac{\partial V}{\partial \nu}(\xi^*)\Big|^2(1+o(1)) - \pi(1-\lambda)\delta^2|\log\delta|(1+o(1)) \quad (1.4.5)$$

де $\xi^* = \xi^*(\lambda)$ – ортогональна проекція на $\partial\Omega$ нуля (вихоря) ξ^λ функції u^λ, K_G – додатна константа (що залежить тільки від області G), δ – відстань від ξ^λ до $\partial\Omega$ ($\delta = \delta(\lambda)$ прямує до нуля коли $\lambda \to 1-0$). Ця оцінка є точною, у тому сенсі що обернена нерівність (1.4.5) справджується на тестових функціях, де $\xi^* \in \partial\Omega$ і $\delta > 0$ – параметри (які можна розглядати як локальні координати пробного вихоря $\xi \in G$ біля $\partial\Omega$). Таким чином можна мінімізувати (1.4.5) спочатку відносно δ і знайти асимптотичне співвідношення $-\log\delta = \frac{2\pi}{(1-\lambda)K_G}\big|\frac{\partial V}{\partial\nu}(\xi^*)\big|^2(1+o(1))$, потім мінімізувати відносно ξ^* і отримати твердження (ii) Теореми 1.4.1. Це веде до наступної асимптотичної формули для єнергії $E_\lambda[u^\lambda, A^\lambda] = \pi - \exp\big(\frac{4\pi}{(1-\lambda)K_G}M_G(1+o(1))\big)$ мінімізанта, де $M_G = \min\{\big|\frac{\partial V}{\partial\nu}(\xi)\big|^2; \xi \in \partial\Omega\}$. Зазначимо, що задача визначення граничних положень вихорів є нелокальною, вона зводиться до мінімізації $|\frac{\partial V}{\partial\nu}|$ на $\partial\Omega$ і $|\frac{\partial V}{\partial\nu}(\xi)|$ залежить від геометрії всієї області G (а не тількі локальних геометричних властивостей $\partial\Omega$ в околі ξ).

1.4.1 Властивості задачі і представлення Є.Б. Богомольного

Важливою властивістю функціоналу (1.4.1) є його інваріантність відносно калібровочних перетворень $u \mapsto e^{i\phi}u$, $A \mapsto A + \nabla\phi$ (де $\phi \in H^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$). Це, зокрема, дозволяє звести вивчення (1.4.1) до функціонала

$$F_\lambda[u, A] = \frac{1}{2}\int_G \big(|\nabla u - iAu|^2 + \frac{\lambda}{4}(|u|^2-1)^2\big)\,\mathrm{d}x \; + \frac{1}{2}\int_\Omega |\mathrm{curl} A|^2\,\mathrm{d}x \qquad (1.4.6)$$

(див. наприклад, [182]). Більш того, без обмеження загальності можна припускати, що

$$\begin{cases} \mathrm{div} A = 0 \text{ в } \Omega \\ A \cdot \nu = 0 \text{ на } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.4.7}$$

Таким чином, трошки зловживаючи позначеннями, можна визначити $\mathcal{J}_{01}$ наступним чином

$$\mathcal{J}_{01} = \{u \in H^1(G;\mathbb{C});\ |u| = 1 \text{ на } \partial G,\ \deg(u, \partial\omega) = 0,\ \deg(u, \partial\Omega) = 1\} \\ \times H^1(\Omega;\mathbb{R}^2),$$

і задачу мінімізації (1.4.3) можна еквівалентно переформулювати як

$$m(\lambda) = \inf\{F_\lambda[u, A];\ (u, A) \in \mathcal{J}_{01},\ A \text{ задовольняє } (1.5.7)\}. \tag{1.4.8}$$

Критичні точки $F_\lambda[u, A]$ в $\mathcal{J}$, зокрема мінімізанти (1.4.8) задовольняють систему рівнянь Ейлера — Лагранжа

$$-(\nabla - iA)^2 u + \frac{\lambda}{2} u(|u|^2 - 1) = 0 \text{ в } G \tag{1.4.9}$$

$$-\nabla^{\perp} h = \begin{cases} j \text{ в } G \\ 0 \text{ в } \omega, \end{cases} \tag{1.4.10}$$

де $h = \mathrm{curl} A$ – магнітне поле (скалярна функція в двовимірному випадку), і

$$j = (iu, \nabla u - iAu) \text{ – вектор струму.}$$

Крім того $h \in H^1(\Omega)$ і виконуються наступні крайові умови,

$$|u| = 1, j \cdot \nu = 0 \text{ на } \partial G,\ h = 0 \text{ на } \partial\Omega, \frac{\partial h}{\partial \tau} = 0 \text{ на } \partial\omega. \tag{1.4.11}$$

Будемо вважати, що $\partial G \in C^\infty$, тоді $u \in C^\infty(\overline{G};\mathbb{C})$ і $A \in C^\infty(\overline{G};\mathbb{R}^2)$. Цей результат про регулярність розв'язків встановлюється аналогічно [39]. Також справедливою є поточкова нерівність

$$|u| \leq 1 \text{ в } G,$$

яка є наслідком принципу максимуму застосованого до рівняння

$$\Delta|u|^2 = \lambda|u|^2(|u|^2-1) + 2|\nabla u - iAu|^2 \text{ в } G. \qquad (1.4.12)$$

Наступне представлення для енергії відіграє важливу роль в подальшому аналізі задачі (1.4.8), воно є вірним для довільної пари $(u, A) \in \mathcal{J}_{01}$,

$$F_\lambda[u, A] = \pi + F^+[u, A] + \frac{1}{2}\int_\omega |\mathrm{curl} A|^2 \mathrm{d}x - \frac{1-\lambda}{8}\int_\Omega (|u|^2-1)^2 \mathrm{d}x, \qquad (1.4.13)$$

де

$$F^+[u, A] = 2\int_G \Big|\frac{\partial u}{\partial \bar z} + \frac{A_2 - iA_1}{2}u\Big|^2 \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_G \Big|\mathrm{curl} A + \frac{|u|^2-1}{2}\Big|^2 \mathrm{d}x. \qquad (1.4.14)$$

Це нетривіальне представлення було винайдено Є.Б. Богомольним [49].

1.4.2 Оцінка зверху для енергії

Дла того щоб знайти оцінку зверху для $m(\lambda)$ введемо сім'ю пробних пар $(u^{(\xi)}, A^{(\xi)}) \in \mathcal{J}_{01} \times H^1(\Omega; \mathbb{R}^2)$, що залежать від параметру $\xi \in G$ ($u^{(\xi)}(\xi) = 0$) – пробного вихоря. Шукаємо $u^{(\xi)}$ і $A^{(\xi)}$ у вигляді

$$u^{(\xi)} = \tilde u^{(\xi)}, \; A^{(\xi)} = \begin{cases} \tilde A^{(\xi)} + B^+ \text{ в } G \\ B^- \text{ в } \omega, \end{cases} \qquad (1.4.15)$$

з $(\tilde u^{(\xi)}, \tilde A^{(\xi)})$, що мінімізують $F^+[\tilde u, \tilde A]$ серед $(\tilde u, \tilde A) \in \mathcal{J}_{01} \times H^1(G; \mathbb{R}^2)$ таких, що $\tilde u(\xi) = 0$. Для спрощення позначень будемо опускати залежність $B^\pm$ від параметру ξ.

Ясно, що $F^+[\tilde u^{(\xi)}, \tilde A^{(\xi)}] \geq 0$ і рівність $F^+[\tilde u^{(\xi)}, \tilde A^{(\xi)}] = 0$ веде до системи рівнянь

$$\frac{\partial \tilde u^{(\xi)}}{\partial \bar z} + \frac{\tilde A_2^{(\xi)} - i\tilde A_1^{(\xi)}}{2}\tilde u^{(\xi)} = 0 \text{ і } \mathrm{curl}\tilde A^{(\xi)} + \frac{1}{2}(|\tilde u^{(\xi)}|^2 - 1) = 0 \text{ в } G. \qquad (1.4.16)$$

Ця система зводиться, за допомогою факторізації $\tilde u^{(\xi)}$ в добуток голоморфного множника $\gamma_\xi(z)$ і множника $e^{\varphi_\xi/2}$ (див. [195]), до наступного єдиного рівняння другого порядку для φ_ξ,

$$-\Delta\varphi_\xi + |\gamma_\xi(z)|^2 e^{\varphi_\xi} = 1 \text{ в } G. \qquad (1.4.17)$$

Рівняння (1.4.17) доповнюється крайовою умовою

$$\varphi_\xi = -2\log|\gamma_\xi(z)| \text{ на } \partial G, \tag{1.4.18}$$

що витікає з умови $|\tilde{u}^{(\xi)}| = 1$ на ∂G.

Виберемо спеціальну голоморфну функцію $\gamma_\xi \in H^1(G;\mathbb{C})$, що задовольняє

$$\frac{\partial\gamma_\xi}{\partial\bar{z}} = 0 \text{ в } G;\ \gamma_\xi(\xi) = 0;\ \begin{cases} |\gamma_\xi| = 1 \text{ на } \partial\Omega,\ \deg(\gamma_\xi, \partial\Omega) = 1 \\ |\gamma_\xi| = \text{const на } \partial\omega,\ \deg(\gamma_\xi/|\gamma_\xi|, \partial\omega) = 0. \end{cases} \tag{1.4.19}$$

Ці умови визначають єдину γ_ξ з точністю до помноження на сталу рівну за модулем одиниці. Більш того, якщо зафіксувати конформне відображення $\mathcal{F}$ області Ω на одиничний диск $B_1 = \{x \in \mathbb{C}; |x| < 1\}$, і покласти

$$a_\xi(z) = \frac{\mathcal{F}(z) - \mathcal{F}(\xi)}{1 - \overline{\mathcal{F}(\xi)}\mathcal{F}(z)}, \tag{1.4.20}$$

тоді $\sigma_\xi = \log|\gamma_\xi/a_\xi|$ є (єдиною) гармонічною в G функцією, що задовольняє крайові умови $\sigma_\xi = 0$ на $\partial\Omega$, $\sigma_\xi = \text{const} - \log|a_\xi|$ на $\partial\omega$, і

$$\int_{\partial\omega} \frac{\partial\sigma_\xi}{\partial\nu}\,\mathrm{d}s = 0. \tag{1.4.21}$$

Завдяки останній рівності існує однозначна гармонічно спряжена функція $\psi_\xi \in C^\infty(\bar{G})$ ($\frac{\partial\psi_\xi}{\partial\bar{z}} = i\frac{\partial\sigma_\xi}{\partial\bar{z}}$) так що $\gamma_\xi = a_\xi \exp(\sigma_\xi + i\psi_\xi)$ задовольняє (1.4.19). Тепер покладемо

$$\tilde{u}^{(\xi)} = \gamma_\xi e^{\varphi_\xi/2} \text{ і } \tilde{A}^{(\xi)} = -\frac{1}{2}\nabla^\perp\varphi_\xi. \tag{1.4.22}$$

В [50] (Теорема 4.3) показано, що існує єдиний розв‘язок $\varphi_\xi \in H^2(G)$ задачі (1.4.17)-(1.4.18).

У наступному кроці конструються $B^\pm$ в (1.4.15). З (1.5.14)-(1.4.16) і (1.4.22), маємо

$$\begin{aligned} F_\lambda[u^{(\xi)}, A^{(\xi)}] = \pi &+ \frac{1}{2}\int_G \big(|B^+|^2 + (\mathrm{curl}B^+)^2\big)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_\omega |\mathrm{curl}B^-|^2\,\mathrm{d}x \\ &+ \frac{1}{2}\int_G \Big((|\gamma_\xi|^2 e^{\varphi_\xi} - 1)|B^+|^2 - \frac{1-\lambda}{4}(|\gamma_\xi|^2 e^{\varphi_\xi} - 1)^2\Big)\,\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{1.4.23}$$

Розглянемо мінімізацію відносно $B^\pm$ доданку двох середніх членів правої частини (3.2.58). В результаті отримуємо рівняння Ейлера-Лагранжа

$$\nabla^\perp h^+ = B^+ \text{ в } G \quad \text{і } \nabla^\perp h^- = 0 \text{ в } \omega, \tag{1.4.24}$$

і крайову умову

$$h^+ = 0 \text{ на } \partial\Omega,$$

де $h^\pm = \mathrm{curl} B^\pm$. Оскільки $A^{(\xi)} \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^2)$ маємо також умову спряження

$$B^+ + \tilde{A}^{(\xi)} = B^- \text{ на } \partial\omega. \tag{1.4.25}$$

З другого рівняння в (1.4.24) випливає, що $h^- = \mathrm{const}$, тоді з огляду на (1.4.25) отримуємо

$$|\omega| h^- = \int_\omega h^- \mathrm{d}x = \int_{\partial\omega} B^- \cdot \tau \, \mathrm{d}s = \int_{\partial\omega} (B^+ + \tilde{A}^{(\xi)}) \cdot \tau \, \mathrm{d}s, \tag{1.4.26}$$

або

$$h^- = \frac{1}{|\omega|} \int_{\partial\omega} (B^+ + \tilde{A}^{(\xi)}) \cdot \tau \, \mathrm{d}s.$$

Для справжніх критичних точок (1.4.6) $\mathrm{curl} A$ є неперервним на $\partial\omega$, тому будемо вимагати щоб $h^+ = h^-$ на $\partial\omega$. Тоді застосуємо curl до першого рівняння в (1.4.24), в результаті приходимо до наступної крайової задачі

$$\begin{cases} \Delta h^+ = h^+ \text{ in } G \\ h^+ = 0 \text{ на } \partial\Omega \\ h^+ = \dfrac{1}{|\omega|} \displaystyle\int_{\partial\omega} (B^+ + \tilde{A}^{(\xi)}) \cdot \tau \, \mathrm{d}s \text{ на } \partial\omega. \end{cases}$$

Згідно з (1.4.24) маємо $B^+ \cdot \tau = \partial h^+ / \partial\nu$ на $\partial\omega$, звідки

$$h^+(x) = \Big(\frac{1}{K_G} \int_{\partial\omega} \tilde{A}^{(\xi)} \cdot \tau \, \mathrm{d}s \Big) V(x),$$

де

$$K_G = |\omega| + \int_G (|\nabla V|^2 + V^2) \, \mathrm{d}x,$$

і V є єдиним розв'язком задачі (1.4.4). Тепер визначимо $B^{\pm}$ через $B^{+} = \nabla^{\perp} h^{+}$ і $B^{-} = \nabla\vartheta + \nabla^{\perp}\mu$, де μ є розв'язком задачі

$$\begin{cases} \Delta\mu = h^{-} \text{ в } \omega \\ \frac{\partial\mu}{\partial\nu} = (B^{+} + \tilde{A}^{(\xi)}) \cdot \tau \text{ на } \partial\omega, \end{cases} \tag{1.4.27}$$

і $\vartheta \in H^2(\omega)$ – довільна функція яка задовольняє крайову умову $\vartheta = 0$ і $\frac{\partial\vartheta}{\partial\nu} = \frac{\partial\mu}{\partial\tau}$ на $\partial\omega$ (для визначеності можемо вимагати щоб ϑ задовольняла $\Delta^2\vartheta = 0$ в ω). Існуванння розв'язку $\mu \in H^2(\omega)$ задачі (1.4.27) витікає з (1.4.26). Таким чином маємо $B^{-} \cdot \tau = \frac{\partial\vartheta}{\partial\tau} + \frac{\partial\mu}{\partial\nu} = (B^{+} + \tilde{A}^{(\xi)}) \cdot \tau$ і $B^{-} \cdot \nu = \frac{\partial\vartheta}{\partial\nu} - \frac{\partial\mu}{\partial\tau} = 0$ на $\partial\omega$, також $(B^{+} + \tilde{A}^{(\xi)}) \cdot \nu = \frac{1}{2}\frac{\partial\varphi_\xi}{\partial\tau} - \frac{\partial h^{+}}{\partial\tau} = 0$ на $\partial\omega$ (оскільки $\varphi_\xi, h^{+} = \mathrm{const}$ на $\partial\omega$). Отже векторне поле $A^{(\xi)}$, задане в (1.4.15), належить до $H^1(\Omega; \mathbb{R}^2)$.

Таким чином побудовано пробну пару $(u^{(\xi)}, A^{(\xi)})$ яка є допустимою, з точністю до калібровочного перетворення, для задачі мінімізації (1.4.8). Пряме обчислення $F_\lambda[u^{(\xi)}, A^{(\xi)}]$ з використанням (3.2.58), дає наступну оцінку зверху,

$$\begin{aligned} m(\lambda) \le F_\lambda[u^{(\xi)}, A^{(\xi)}] &= \pi + \frac{1}{2K_G}\Big(\int_{\partial\omega} A^{(\xi)} \cdot \tau \, \mathrm{d}s\Big)^2 \\ &\quad + \frac{1}{2}\int_G \big((|\gamma_\xi|^2 e^{\varphi_\xi} - 1)|B^{+}|^2 - \frac{1-\lambda}{4}(|\gamma_\xi|^2 e^{\varphi_\xi} - 1)^2 \mathrm{d}x \\ &\le \pi + \frac{1}{8K_G}\Big(\int_{\partial\omega} \frac{\partial\varphi_\xi}{\partial\nu} \, \mathrm{d}s\Big)^2 - \frac{1-\lambda}{8}\int_G (|\gamma_\xi|^2 e^{\varphi_\xi} - 1)^2 \mathrm{d}x, \end{aligned} \tag{1.4.28}$$

де також використано поточкову нерівність $|\gamma_\xi|^2 e^{\varphi_\xi} \le 1$ в G, яка доводиться застосуванням принципу максимума до задачі (1.4.17)-(1.4.18) (див. Зауваження 1.4.14 в Підрозділі 1.4.6). Асимптотичну поведінку правої частини $I(\xi, \lambda)$ в (1.4.28) при $\xi \to \partial\Omega$ буде вивчено в Підрозділі 1.4.6. Більш докладно, буде доведено що, якшо ξ^* позначає ортогональну проекцію ξ на $\partial\Omega$ і $\delta = |\xi^* - \xi|$ є достатньо малим, тоді

$$I(\xi, \lambda) = \pi + \frac{2\pi^2}{K_G}\delta^2\Big|\frac{\partial V}{\partial\nu}(\xi^*)\Big|^2 - \pi(1-\lambda)\delta^2|\log\delta| + o(\delta^2 + \delta^2|(1-\lambda)\log\delta|). \tag{1.4.29}$$

Зокрема, при $\delta \to +0$ в (1.4.29)(тобто $\xi \to \partial\Omega$), отримуємо

$$m(\lambda) \le \pi, \text{ для всіх } \lambda > 0, \tag{1.4.30}$$

і

$$m(\lambda) < \pi, \text{ для всіх } 0 < \lambda < 1. \tag{1.4.31}$$

1.4.3 Теорема про існування/неіснування мінімізантів

Оцінки (1.4.30)-(1.4.31) дозволяють встановити для яких λ досягається інфімум $m(\lambda)$ в (1.4.8). З цією ціллю використаємо наступний результат, що є прямою адаптацією Леми 1 з [35].

Лема 1.4.3. *Нехай* $(u^{(n)}, A^{(n)}) \in \mathcal{J}_{01}$ *– така послідовність, що* $(u^{(n)}, A^{(n)}) \to (u, A)$ *слабко в* $H^1(G;\mathbb{C}) \times H^1(\Omega;\mathbb{R}^2)$*, тоді* $(u, A) \in \mathcal{J}$ *і*

$$\liminf_{n\to\infty} F_\lambda[u^{(n)}, A^{(n)}] \geq F_\lambda[u, A] + \pi(|\deg(u, \partial\Omega) - 1| + |\deg(u, \partial\omega)|).$$

Теорема 1.4.4. *(i) Інфімум* $m(\lambda)$ *завжди досягається для* $0 < \lambda < 1$*, (ii)* $m(\lambda)$ *ніколи не досягається для* $\lambda \geq 1$*.*

Доведення. Твердження (i) випливає з (1.4.31) і Леми 1.4.3. Дійсно, розглянемо мінімізуючу послідовність $(u^{(n)}, A^{(n)})$. Внаслідок (1.4.31) ця послідовність є обмеженою в $H^1(G;\mathbb{C}) \times H^1(\Omega;\mathbb{R}^2)$. Таким чином, з точністю до виділення підпослідовності, $(u^{(n)}, A^{(n)}) \to (u, A)$ слабко в $H^1(G;\mathbb{C}) \times H^1(\Omega;\mathbb{R}^2)$. Необхідно доказати, що $(u, A) \in \mathcal{J}_{01}$. Для цього, за допомогою Леми 1.4.3, отримуємо

$$m(\lambda) = \liminf_{n\to\infty} F_\lambda[u^{(n)}, A^{(n)}] \geq F_\lambda[u, A] + \pi|1 - \deg(u, \partial\Omega)| + \pi|\deg(u, \partial\omega)|.$$

Оскільки $m(\lambda) < \pi$, маємо $\deg(u, \partial\Omega) = 1$ і $\deg(u, \partial\omega) = 0$, тобто $(u, A) \in \mathcal{J}_{01}$.

Доведемо твердження (ii). Припустимо від супротивного, що (u, A) – мінімізант. Тоді з (1.5.14) і 1.4.30) отримуємо

$$m(\lambda) = \pi + F^+[u, A] + \frac{1}{2}\int_\omega (\mathrm{curl} A)^2 \,\mathrm{d}x + \frac{\lambda - 1}{8}\int_G (|u|^2 - 1)^2 \,\mathrm{d}x \leq \pi.$$

Оскільки $\lambda \geq 1$, виконуються рівності

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = \frac{iA_1 - A_2}{2} u \text{ в } G, \text{ і } \mathrm{curl A} = 0 \text{ в } \omega. \tag{1.4.32}$$

З першого рівняння в (1.4.32) витікає наступне співвідношення

$$\frac{\partial |u|^2}{\partial \nu} - 2u \times \frac{\partial u}{\partial \tau} + 2A \cdot \tau = 0 \text{ на } \partial\omega,$$

отже, внаслідок другого рівняння в (1.4.32) і того факту що $\deg(u, \partial\omega) = 0$, маємо

$$\int_{\partial\omega} \frac{\partial |u|^2}{\partial \nu} \mathrm{d}s = 4\pi \deg(u, \partial\omega) - 2\int_{\omega} \mathrm{curlA} = 0.$$

З іншого боку, згідно з (1.4.12) $(|u|^2 - 1)/2$ є розв'язком задачі

$$\begin{cases} \Delta \frac{|u|^2-1}{2} - \lambda |u|^2 \frac{|u|^2-1}{2} = |\nabla u - iAu|^2 \text{ в } G \\ \frac{|u|^2-1}{2} = 0 \text{ на } \partial G. \end{cases}$$

Внаслідок принципу максимума і Леми Хопфа маємо, або $|u| \equiv 1$ в G, або $|u| < 1$ в G і $\frac{\partial |u|^2}{\partial \nu} < 0$ на $\partial\omega$. Звідсіля випливає, що $|u| \equiv 1$ в G і тому $(u, A) \notin \mathcal{J}_{01}$. □

1.4.4 Оцінка знизу для енергії

Конструкція запропонована в Підрозділі 1.4.2 дозволяє довести існування мінімізантів (u^λ, A^λ) задачі (1.4.8) для кожного $0 < \lambda < 1$. У цьому підрозділі буде показано оптимальність цієї конструкції для $\lambda \to 1 - 0$. А саме, буде доведено такий результат.

Лема 1.4.5. *Існує точка ξ^λ така що $\xi^\lambda \to \partial\Omega$ коли $\lambda \to 1 - 0$ і*

$$m(\lambda) = F_\lambda[u^\lambda, A^\lambda] \geq \pi + \frac{1}{8K_G}\Big(\int_{\partial\omega} \frac{\partial \varphi_{\xi^\lambda}}{\partial \nu} \mathrm{d}s\Big)^2 - (1 + o(1))\frac{1-\lambda}{8}\int_G (|\gamma_{\xi^\lambda}|^2 e^{\varphi_{\xi^\lambda}} - 1)^2 \mathrm{d}x, \quad (1.4.33)$$

де γ_{ξ^λ}, φ_{ξ^λ} задаються (1.4.19) і (1.4.17)–(1.4.18) з $\xi = \xi^\lambda$.

Доведення. Для доведення (1.4.33) буде вивчено асимптотичну поведінку мінімізантів (u^λ, A^λ) коли $\lambda \to 1 - 0$. На **першому кроці** буде доведено, що

$$\exists\, \Psi^\lambda = \mathrm{const} \in \mathbb{S}^1 \text{ таке що } u^\lambda - \Psi^\lambda \to 0 \text{ слабко в } H^1(G; \mathbb{C}). \quad (1.4.34)$$

Тоді з теореми про вкладення соболевських просторів випливає

$$\int_G (|u^\lambda|^2-1)^2\,\mathrm{d}x \to 0. \tag{1.4.35}$$

Таким чином можна ввести малий параметр

$$\varepsilon(=\varepsilon(\lambda)) := \Big(\frac{1-\lambda}{8}\int_G (|u^\lambda|^2-1)^2\,\mathrm{d}x\Big)^{1/2}, \tag{1.4.36}$$

такий що

$$\varepsilon^2/(1-\lambda)\to 0,$$

і записати $F_\lambda[u^\lambda, A^\lambda]$ як (див. (1.5.14))

$$F_\lambda[u^\lambda, A^\lambda] = \pi + F^+[u^\lambda, A^\lambda] + \frac{1}{2}\int_\omega |\mathrm{curl} A^\lambda|^2\,\mathrm{d}x - \varepsilon^2. \tag{1.4.37}$$

Доведення (1.4.34). Згідно з (1.4.31) маємо $F_\lambda[u^\lambda, A^\lambda] = m(\lambda) < \pi$, звідки $\|u^\lambda\|_{H^1(G;\mathbb{C})} \le C$ і $\|A^\lambda\|_{H^1(\Omega;\mathbb{R}^2)} \le C$ з константою C, що не залежить від $0<\lambda<1$. Таким чином, з точністю до виділення підпослідовності, $(u^\lambda, A^\lambda) \to (u, A)$ слабко в $H^1(G;\mathbb{C})\times H^1(\Omega;\mathbb{R}^2)$ при $\lambda\to 1-0$, де $(u,A)\in\mathcal{J}$. Оскільки

$$F_1[u,A] \le \liminf_{\lambda\to 1-0} F_1[u^\lambda, A^\lambda] = \liminf_{\lambda\to 1-0} F_\lambda[u^\lambda, A^\lambda],$$

і, для довільної пари $(v,B)\in\mathcal{J}_{01}$

$$F_\lambda[u^\lambda, A^\lambda] = m(\lambda) \le F_\lambda[v,B] \quad \forall\, 0<\lambda<1,$$

маємо $F_1[u,A]\le F_1[v,B]$. Інфімум в (1.4.8) для $\lambda = 1$ ніколи не досягається, звідки $(u,A)\notin\mathcal{J}_{01}$. Таким чином $|1-\deg(u,\partial\Omega)| + |\deg(u,\partial\omega)| \ge 1$, і має місце

$$\pi \ge \liminf_{\lambda\to 1-0} F_\lambda[u^\lambda, A^\lambda] = \liminf_{\lambda\to 1-0} F_1[u^\lambda, A^\lambda] \ge F_1[u,A] + \pi,$$

де використано Лему 1.4.3. З рівності $F_1[u,A]=0$, випливає, що $u = \mathrm{const}\in\mathbb{S}^1$. $\square$

Крок II (Апріорні оцінки). З (1.4.31), (1.4.37) і (1.5.15) випливає, що

$$2\int_G \Big|\frac{\partial u^\lambda}{\partial \bar z} + \frac{A_2^\lambda - iA_1^\lambda}{2} u^\lambda\Big|^2\,\mathrm{d}x \le \varepsilon^2, \tag{1.4.38}$$

$$\int_G (v^\lambda)^2\,\mathrm{d}x \leq 2\varepsilon^2, \quad |h_\omega^\lambda|^2 \leq 2\varepsilon^2/|\omega|, \tag{1.4.39}$$

де

$$v^\lambda := \mathrm{curl} A^\lambda + \frac{1}{2}(|u^\lambda|^2 - 1),\ h_\omega^\lambda (= \mathrm{const}) := \text{звуження } \mathrm{curl} A^\lambda \text{ на } \omega.$$

В Підрозділі 1.4.2 було побудовано тестові пари $(u^{(\xi)}, A^{(\xi)})$ калібровані таким чином, що $\mathrm{div} A^{(\xi)} = 0$ в G і $A^{(\xi)} \cdot \nu = 0$ на ∂G. Таку ж калібровку будемо припускати для мінімізантів (u^λ, A^λ). Однак перед цим зазначимо, що у випадку кулонівської кліброваки справедлива нерівність $\|A^\lambda\|_{H^1(\Omega;\mathbb{R}^2)} \leq C\|\mathrm{curl} A^\lambda\|_{L^2(\Omega)}$ (з константою C, що не залежить від λ), тоді з (1.4.39), (1.4.35) отримуємо $\|A^\lambda\|_{H^1(\Omega;\mathbb{R}^2)} \to 0$ при $\lambda \to 1-0$. Тепер розглянемо розв'язок ψ^λ задачі

$$\begin{cases} \Delta\psi^\lambda = 0 \text{ в } G \\ \frac{\partial\psi^\lambda}{\partial\nu} = 0 \text{ на } \partial\Omega,\ \frac{\partial\psi^\lambda}{\partial\nu} = -A^\lambda\cdot\nu \text{ на } \partial\omega. \end{cases} \tag{1.4.40}$$

Продовжимо ψ^λ в ω таким чином, що $\psi^\lambda \in H^2(\Omega)$, і замінимо калібровку $u^\lambda \mapsto e^{i\psi^\lambda}u^\lambda$, $A^\lambda \mapsto A^\lambda + \nabla\psi^\lambda$. Отримане векторне поле A^λ належить до $H^1(\Omega;\mathbb{R}^2)$ і

$$\mathrm{div} A^\lambda = 0 \text{ in } G \text{ і } A^\lambda\cdot\nu = 0 \text{ on } \partial G. \tag{1.4.41}$$

Крім того, з (1.4.40) заключаємо, що

$$\|A^\lambda\|_{L^2(G;\mathbb{R}^2)} \to 0 \text{ при } \lambda \to 1-0. \tag{1.4.42}$$

Крок III (Асимптотична поведінка $v^\lambda = \mathrm{curl} A^\lambda + \frac{1}{2}(|u^\lambda|^2 - 1)$). З рівняння Ейлера-Лагранжа (1.5.9) випливає, що

$$\frac{\partial v^\lambda}{\partial\bar z} = \bar u^\lambda\Big(\frac{\partial u^\lambda}{\partial \bar z} + \frac{A_2^\lambda - iA_1^\lambda}{2}u^\lambda\Big) \text{ в } G. \tag{1.4.43}$$

Візьмемо $\frac{\partial}{\partial z}$ від (1.4.43), враховуючи (1.5.8) одержимо

$$\begin{cases} \Delta v^\lambda - |u^\lambda|^2 v^\lambda = 4\Big|\frac{\partial u^\lambda}{\partial\bar z} + \frac{A_2^\lambda - iA_1^\lambda}{2}u^\lambda\Big|^2 + \frac{1-\lambda}{2}(1-|u^\lambda|^2)|u^\lambda|^2 \text{ в } G \\ v^\lambda = 0 \text{ на } \partial\Omega \\ v^\lambda = h_\omega^\lambda \text{ на } \partial\omega. \end{cases} \tag{1.4.44}$$

Покладемо

$$\tilde{v}^\lambda := h_\omega^\lambda V \tag{1.4.45}$$

де V - розв'язок задачі (1.4.4), тоді

$$\Delta(v^\lambda - \tilde{v}^\lambda) - (v^\lambda - \tilde{v}^\lambda) = 4\Big|\frac{\partial u^\lambda}{\partial \bar{z}} + \frac{A_2^\lambda - iA_1^\lambda}{2}u^\lambda\Big|^2 + \frac{1-\lambda}{2}|u^\lambda|^2(1-|u^\lambda|^2) - (1-|u^\lambda|^2)v^\lambda \text{ в } G,$$

і $v^\lambda - \tilde{v}^\lambda = 0$ на ∂G. Скористуємось (1.6.85), першою оцінкою в (1.4.39) і поточковою нерівністю $|u^\lambda| \le 1$ in G, для того щоб оцінити L^1-норму доданків правої частини рівняння через $2\varepsilon^2$, $(2(1-\lambda)|G|)^{1/2}\varepsilon$ і $4\varepsilon^2/(1-\lambda)^{1/2}(= o(\varepsilon))$, відповідно. Тоді, з відомих результатів про еліптичні рівняння з правою частиною з L^1 (дивись, наприклад, [86]), знаходимо, при $\lambda \to 1-0$

$$\frac{1}{\varepsilon}\|v^\lambda - \tilde{v}^\lambda\|_{W^{1,p}(G)} \to 0 \text{ для всіх } 1 \le p < 2. \tag{1.4.46}$$

Крок IV (Заміна невідомих). Представимо A^λ і u^λ як

$$A^\lambda = h_\omega^\lambda \nabla^\perp V + \tilde{A}^\lambda = h_\omega^\lambda \nabla^\perp V + \nabla^\perp \tilde{\varphi}^\lambda \text{ і } u^\lambda = e^{-\tilde{\varphi}^\lambda}(\theta^\lambda + w^\lambda),$$

де h_ω^λ - звуження $\mathrm{curl} A^\lambda$ до ω; V – розв'язок задачі (1.4.4); $\tilde{\varphi}^\lambda$ – функція яка приймає сталі значенння на зв'язних компонентах ∂G і задовольняє певне диференціальне рівняння (див. задачу (1.4.51) нижче); θ^λ задовольняє $\Delta\theta^\lambda = 0$ в G; w^λ дорівнє нулю на ∂G і має H^2-норму порядку $o(\varepsilon)$. Буде отримано також оцінку знизу для $F_\lambda[u^\lambda, A^\lambda]$ через h_ω^λ, $\tilde{\varphi}^\lambda$, θ^λ і w^λ.

Зазначені трансформації почнемо покладаючи

$$\tilde{A}^\lambda := A^\lambda - \nabla^\perp \tilde{v}^\lambda = A^\lambda - h_\omega^\lambda \nabla^\perp V. \tag{1.4.47}$$

Тоді, користуючись (1.4.43) отримуємо

$$\tilde{F}_\lambda[u^\lambda, \tilde{A}^\lambda] := F_\lambda[u^\lambda, A^\lambda] = \pi + F^+[u^\lambda, \tilde{A}^\lambda] - \frac{1-\lambda}{8}\int_G (|u^\lambda|^2 - 1)^2\,\mathrm{d}x$$
$$+ 4\int_G \Big(\frac{\partial v^\lambda}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial \tilde{v}^\lambda}{\partial \bar{z}}, \frac{\partial \tilde{v}^\lambda}{\partial \bar{z}}\Big)\,\mathrm{d}x + \int_G (v^\lambda - \tilde{v}^\lambda)\tilde{v}^\lambda\,\mathrm{d}x$$
$$+ \frac{1}{2}\int_G \big(|\nabla \tilde{v}^\lambda|^2 + (\tilde{v}^\lambda)^2\big)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_\omega |h^\lambda_\omega|^2\,\mathrm{d}x$$
$$+ \frac{1}{2}\int_G |\nabla \tilde{v}^\lambda|^2(1 - |u^\lambda|^2)\,\mathrm{d}x. \quad (1.4.48)$$

Завдяки тому, що $\Delta\tilde{v}^\lambda = \tilde{v}^\lambda$ в G і $v^\lambda = \tilde{v}^\lambda$ на ∂G, представлення (1.4.48) подалі спрощується до

$$F_\lambda[u^\lambda, A^\lambda](= \tilde{F}_\lambda[u^\lambda, \tilde{A}^\lambda]) = \pi + F^+[u^\lambda, \tilde{A}^\lambda] - \frac{1-\lambda}{8}\int_G (|u^\lambda|^2 - 1)^2\,\mathrm{d}x$$
$$+ \frac{(h^\lambda_\omega)^2}{2}\Big(K_G + \int_G |\nabla V|^2(1 - |u^\lambda|^2)\,\mathrm{d}x\Big). \quad (1.4.49)$$

Зазначимо, що з огляду на (1.4.41),(1.4.45) і (1.4.47), $\mathrm{div}\tilde{A}^\lambda = 0$ в G і $\tilde{A}^\lambda\cdot\nu = 0$ на ∂G. Отже існує потенціал $\tilde{\varphi}^\lambda$ такий, що

$$\tilde{A}^\lambda = \nabla^\perp\tilde{\varphi}^\lambda, \quad (1.4.50)$$

і $\tilde{\varphi}^\lambda$ приймає константні значення на $\partial\Omega$ і $\partial\omega$. Оскільки φ^λ визначений з точністю до констати, можна рахувати що $\varphi^\lambda = 0$ на $\partial\Omega$ (φ^λ є константою на $\partial\Omega$). Тоді $\tilde{\varphi}^\lambda$ задовольняє

$$\begin{cases} \Delta\tilde{\varphi}^\lambda = \mathrm{curl}\tilde{A}^\lambda = v^\lambda - \tilde{v}^\lambda - \frac{1}{2}(|u^\lambda|^2 - 1) \text{ в } G \\ \tilde{\varphi}^\lambda = 0 \text{ на } \partial\Omega \\ \tilde{\varphi}^\lambda = \alpha^\lambda \text{ на } \partial\omega, \end{cases} \quad (1.4.51)$$

де α^λ є константою. Так як $|\nabla\tilde{\varphi}^\lambda| = |\tilde{A}^\lambda| \to 0$ сильно в $L^2(G)$ (згідно з (1.4.42), (1.4.47) і другої оцінки в (1.4.39)), то $\alpha^\lambda \to 0$ при $\lambda \to 1 - 0$. Також відомо, що для всих $q \geq 1$ L^q-норма правої частини рівняння в (1.4.51) прямує до нуля коли $\lambda \to 1-0$, це випливає з (1.4.35), (1.4.46) і поточкової нерівності $|u^\lambda| \le 1$ в G. Тоді за допомогою стандартних еліптичних оцінок отримуємо

$$\tilde{\varphi}^\lambda \to 0 \text{ в } W^{2,q}(G)\ (\forall q \ge 1) \text{ і, зокрема, в } C^1(\bar{G}). \tag{1.4.52}$$

Цей факт відіграє важливу роль в подальшому аналізі.

Введемо до розгляду

$$\tilde{\theta}^\lambda := e^{\tilde{\varphi}^\lambda} u^\lambda \tag{1.4.53}$$

Помітимо, що

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}^\lambda}{\partial \bar{z}} = \frac{\tilde{A}_2 - i\tilde{A}_1}{2}, \text{ отже } \frac{\partial u^\lambda}{\partial \bar{z}} + \frac{\tilde{A}_2 - i\tilde{A}_1}{2} u^\lambda = e^{-\tilde{\varphi}^\lambda} \frac{\partial \tilde{\theta}^\lambda}{\partial \bar{z}}.$$

Оскільки u^λ мінімізує (1.4.49) відносно заданих власних даних Діріхле на межі, $\tilde{\theta}^\lambda$ задавольняє наступне рівняння

$$4\frac{\partial}{\partial z}\big(e^{-2\tilde{\varphi}^\lambda}\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\tilde{\theta}^\lambda\big) = \big(\mathrm{curl}\tilde{A}^\lambda + \frac{\lambda}{2}(|u^\lambda|^2 - 1) - (h_\omega^\lambda)^2|\nabla V|^2\big)e^{-2\tilde{\varphi}^\lambda}\tilde{\theta}^\lambda \text{ в } G.$$

Перейдемо тепер від $\tilde{\theta}^\lambda$ до θ^λ, що задовольняє $\Delta\theta^\lambda = 0$ в G:

$$\theta^\lambda := \tilde{\theta}^\lambda - w^\lambda, \tag{1.4.54}$$

де w^λ - єдиний розв'язок рівняння

$$\Delta w^\lambda = 8\frac{\partial \tilde{\varphi}^\lambda}{\partial z}\frac{\partial \tilde{\theta}^\lambda}{\partial \bar{z}} + \big(\mathrm{curl}\tilde{A}^\lambda + \frac{\lambda}{2}(|u^\lambda|^2 - 1) - (h_\omega^\lambda)^2|\nabla V|^2\big)\tilde{\theta}^\lambda \text{ в } G, \tag{1.4.55}$$

з крайовою умовою

$$w^\lambda = 0 \text{ на } \partial G. \tag{1.4.56}$$

Із визначення θ^λ випливають наступні властивості,

$$\Delta\theta^\lambda = 0 \text{ в } G; \tag{1.4.57}$$

$$|\theta^\lambda| = 1 \text{ на } \partial\Omega \text{ і } \deg(\theta^\lambda, \partial\Omega) = 1; \tag{1.4.58}$$

$$\begin{gathered} |\theta^\lambda| = \exp(\alpha^\lambda) \text{ на } \partial\omega,\ \deg(\theta^\lambda/|\theta^\lambda|, \partial\omega) = 0 \\ \text{(зазначимо, що } \exp(\alpha^\lambda) \to 1 \text{ при } \lambda \to 1-0, \text{ згідно з (1.4.52)).} \end{gathered} \tag{1.4.59}$$

Покажемо також, що θ^λ задовольняє

$$\int_G \Big|\frac{\partial\theta^\lambda}{\partial\bar z}\Big|^2\,\mathrm{d}x \le C\varepsilon^2. \tag{1.4.60}$$

Дійсно, помітимо, що

$$\begin{aligned}\frac{\partial\theta^\lambda}{\partial\bar z}+\frac{\partial w^\lambda}{\partial\bar z} &= e^{\tilde\varphi^\lambda}\Big(\frac{\partial u^\lambda}{\partial\bar z}+\frac{\tilde A_2^\lambda - i\tilde A_1^\lambda}{2}u^\lambda\Big)\\ &= e^{\tilde\varphi^\lambda}\Big(\frac{\partial u^\lambda}{\partial\bar z}+\frac{A_2^\lambda - iA_1^\lambda}{2}u^\lambda - h_\omega^\lambda\frac{\partial V}{\partial\bar z}u^\lambda\Big).\end{aligned} \tag{1.4.61}$$

Тоді (1.4.60) випливає безпосередньо з (1.6.85)-(1.4.39), (1.4.52), поточкової оцінки $|u^\lambda|\le 1$ в G і наступного факту,

$$\frac{1}{\varepsilon}\|w^\lambda\|_{H^2(G)} \to 0 \text{ коли } \lambda\to 1-0. \tag{1.4.62}$$

Доведення (1.4.62). Оскільки w^λ є розв‘язком задачі (1.4.55)-(1.4.56), за допомогою еліптичних оцінок отримуємо,

$$\begin{aligned}\|w^\lambda\|_{H^2(G)} \le C\big(&\|\partial\tilde\varphi^\lambda/\partial z\|_{L^\infty(G;\mathbb{C})}\|\partial\tilde\theta^\lambda/\partial\bar z\|_{L^2(G;\mathbb{C})}\\ &+\|\mathrm{curl}\tilde A^\lambda+\frac12(|u^\lambda|^2-1)\|_{L^2(G)}+(1-\lambda)\||u^\lambda|^2-1\|_{L^2(G)}+(h_\omega^\lambda)^2\big),\end{aligned}$$

де також було використано оцінку $|\tilde\theta^\lambda| = e^{\tilde\varphi^\lambda}|u^\lambda|\le e^{\tilde\varphi^\lambda}\le C$ в G (див. (1.4.52)). Завдяки (1.6.85) і другій нерівності в (1.4.39), (1.4.47), (1.4.52) має місце наступний результат,

$$\Big\|\frac{\partial\tilde\theta^\lambda}{\partial\bar z}\Big\|_{L^2(G;\mathbb{C})} \le \|e^{-\tilde\varphi^\lambda}\|_{L^\infty(G)}\Big\|\frac{\partial u^\lambda}{\partial\bar z}+\frac{\tilde A_2^\lambda - i\tilde A_1^\lambda}{2}u^\lambda\Big\|_{L^2(G;\mathbb{C})} = O(\varepsilon)$$

ф $\|\partial\tilde\varphi^\lambda/\partial z\|_{L^\infty(G;\mathbb{C})}\to 0$ коли $\lambda\to 1-0$, також $(1-\lambda)\||u^\lambda|^2-1\|_{L^2(G)} = o(\varepsilon)$ і $|h_\omega^\lambda| = O(\varepsilon)$. Крім того $\mathrm{curl}\tilde A^\lambda+\frac12(|u^\lambda|^2-1) = v^\lambda-\tilde v^\lambda$ а з (1.4.46) витікає що $\|v^\lambda-\tilde v^\lambda\|_{L^2(G)} = o(\varepsilon)$ (за допомогою теорем про владення просторів Соболева), це завершує доведення (1.4.62). □

Насамкінець зазаначимо що, з огляду на поточкову нерівність $|u^\lambda|\le 1$ в G, (1.4.49) веде до наступної оцінки знизу

$$F_\lambda[u^\lambda, A^\lambda] \ge \pi + \frac{K_G}{2}(h_\omega^\lambda)^2 - \frac{1-\lambda}{8}\int_G\big(e^{-2\tilde\varphi^\lambda}|\theta^\lambda+w^\lambda|^2-1\big)^2\,\mathrm{d}x. \tag{1.4.63}$$

Крок V (Асимптотична поведінка θ^λ, $\tilde{\varphi}^\lambda$). Важливим є наступний результат.

Лема 1.4.6. *З властивостей (1.4.57)-(1.4.60) функцій θ^λ випливає, що*

(i) θ^λ має рівно один нуль ξ^λ коли $\lambda \to 1-0$ і $\xi^\lambda \to \partial\Omega$; більш того, існують сталі $C_1, C_2 > 0$, такі що

$$C_1|\gamma_{\xi^\lambda}| \leq |\theta^\lambda| \leq C_2|\gamma_{\xi^\lambda}| \text{ в } G,$$

де γ_{ξ^λ} визначається (1.4.19) з $\xi = \xi^\lambda$;

(ii) якщо,додатково відомо, що

$$\frac{1}{\varepsilon}\|\partial\theta^\lambda/\partial\bar{z}\|_{L^p(G;\mathbb{C})} \to 0 \text{ для деякого } p \geq 1, \tag{1.4.64}$$

тоді

$$\log|\theta^\lambda| - \log|\gamma_{\xi^\lambda}| = o(\varepsilon) \text{ on } \partial\omega$$

і існують ϑ^λ такі що $|\vartheta^\lambda| \leq C\varepsilon|\gamma_{\xi^\lambda}|$ в G,

$$\|\vartheta^\lambda\|_{L^q(G)} = o(\varepsilon), \quad \|\log(|\theta^\lambda - \vartheta^\lambda|/|\gamma_{\xi^\lambda}|)\|_{L^q(G)} = o(\varepsilon), \ \forall q \geq 1.$$

Зауваження 1.4.7. Функції γ_{ξ^λ} в Лемі 1.4.6 можна розглядати як проекції θ^λ на сім'ю голоморфних функцій визначену в (1.4.19). Зазначимо, що (постійне) значення $|\gamma_\xi|$ на $\partial\omega$ є однозначно визначеним нулем ξ функції γ_ξ. Таким чином Лема 1.4.6 дозволяє, зокрема, реконструювати невідоме (постійне) значення $|\theta^\lambda|$ на $\partial\omega$ через єдиний нуль ξ^λ функції θ^λ (з достатньою точністю). Крім того, з Леми 1.4.6 випливає, що $\|\,|\theta^\lambda|^2 - |\gamma_{\xi^\lambda}|^2\,\|_{L^q(G)} = o(\varepsilon)$ для всіх $q \geq 1$.

Доведення Леми 1.4.6 надано в Додатку С. Покажемо, що функції θ^λ задовольняють умові (1.4.64) Леми 1.4.6. Зазначимо, що внаслідок (1.4.43) і (1.4.61),

$$\Big|\frac{\partial\theta^\lambda}{\partial\bar{z}} + \frac{\partial w^\lambda}{\partial\bar{z}}\Big| = \frac{e^{\tilde{\varphi}^\lambda}}{|u^\lambda|}\Big|\frac{\partial v^\lambda}{\partial\bar{z}} - |u^\lambda|^2\frac{\partial\tilde{v}^\lambda}{\partial\bar{z}}\Big|, \quad \text{коли } |u^\lambda| > 0.$$

Завдяки (1.4.60), (1.4.62) маємо також $\Big\|\frac{1}{\varepsilon}\big|\frac{\partial\theta^\lambda}{\partial\bar{z}} + \frac{\partial w^\lambda}{\partial\bar{z}}\big|\,\Big\|_{L^2(G)} \leq C$. З іншого боку,

$$\frac{1}{\varepsilon}\Big|\frac{\partial v^\lambda}{\partial\bar{z}} - |u^\lambda|^2\frac{\partial\tilde{v}^\lambda}{\partial\bar{z}}\Big| \leq \frac{1}{\varepsilon}\Big|\frac{\partial v^\lambda}{\partial\bar{z}} - \frac{\partial\tilde{v}^\lambda}{\partial\bar{z}}\Big| + (1-|u^\lambda|^2)\frac{h^\lambda_\omega}{\varepsilon}\Big|\frac{\partial\, V}{\partial\bar{z}}\Big|,$$

де права частина прямує до нуля за мірою, що випливає з (1.4.35), (1.4.46) і другої оцінки в (1.4.39). Тоді, користуючись (1.4.35) і (1.4.52), бачимо що $\frac{1}{\varepsilon}|\frac{\partial\theta^\lambda}{\partial\bar{z}}+\frac{\partial w^\lambda}{\partial\bar{z}}|$ прямує до нуля за мірою, коли $\lambda\to 1-0$. Таким чином $\left\|\frac{1}{\varepsilon}|\frac{\partial\theta^\lambda}{\partial\bar{z}}+\frac{\partial w^\lambda}{\partial\bar{z}}|\right\|_{L^p(G)}\to 0$ для всих $1\leq p<2$. Насамкінець, скористуємось (1.4.62) і отримаємо, що умова (1.4.64) дійсно справджується.

За допомогою Леми 1.4.6 можна ідентификувати константу α^λ в задачі (1.4.51), $\alpha^\lambda=\log|\gamma_{\xi^\lambda}(\partial\Omega)|+\tilde{\alpha}^\lambda$ ($|\gamma_{\xi^\lambda}|=\mathrm{const}$ на $\partial\Omega$), з $\tilde{\alpha}^\lambda$ що задовольняє

$$\frac{1}{\varepsilon}|\tilde{\alpha}^\lambda|\to 0\quad \text{коли } \lambda\to 1-0. \tag{1.4.65}$$

Далі описується поведінка $\tilde{\varphi}^\lambda$ в наступному результаті.

Лема 1.4.8. *Нехай ξ^λ – єдиний нуль θ^λ (див. Лему 1.4.6), тоді*

$$\|2\tilde{\varphi}^\lambda+\varphi_{\xi^\lambda}\|_{H^2(G)}=o(\varepsilon)\quad \textit{коли } \lambda\to 1-0,$$

де φ_{ξ^λ} – розв‘язок задачі (1.4.17)-(1.4.18) з $\xi=\xi^\lambda$.

Доведення. Покладемо

$$f^\lambda:=2\tilde{\varphi}^\lambda+2\tilde{\alpha}^\lambda U,$$

де U – єдиний розв'язок рівняння $\Delta U=0$ в G з крайовими умовами $U=0$ на $\partial\Omega$ і $U=-1$ на $\partial\omega$. Тоді f^λ задовольняє $\Delta f^\lambda=2(v^\lambda-\tilde{v}^\lambda)-(e^{-2\tilde{\varphi}}|\theta^\lambda-w^\lambda|^2-1)$ і G (див. (1.4.51), (1.4.53), (1.4.54)). Звідсіля, за допомогою нескладних маніпуляцій отримуємо крайову задачу для f^λ,

$$\begin{cases}\Delta f^\lambda=1-|\gamma_{\xi^\lambda}|^2e^{-f^\lambda}+r^\lambda \text{ в } G\\ f^\lambda=0 \text{ на } \partial\Omega\\ f^\lambda=2\log|\gamma_{\xi^\lambda}| \text{ на } \partial\omega,\end{cases} \tag{1.4.66}$$

де

$$\begin{aligned} r^\lambda=2(v^\lambda-\tilde{v}^\lambda)+\big(|\gamma_{\xi^\lambda}|^2e^{-2\tilde{\alpha}^\lambda U}-|\theta^\lambda-\vartheta^\lambda|^2\big)e^{-2\tilde{\varphi}^\lambda}\\ -\big(|\vartheta^\lambda+w^\lambda|^2+2(\theta^\lambda-\vartheta^\lambda,\vartheta^\lambda+w^\lambda)\big)e^{-2\tilde{\varphi}^\lambda}, \end{aligned} \tag{1.4.67}$$

і ϑ^λ – функція з Леми 1.4.6. Покажемо, що L^2-норма r^λ є малою величиною порядку $o(\varepsilon)$. Для першого члена (1.4.67) скористаємось (1.4.46) і торемою про вкладення соболєвських просторів; для останнього члена використаємо твердження (ii) Леми 1.4.6 і (1.4.62) разом з теоремою про вкладення; насамкінець, середній член представимо як

$$\frac{1}{2}\big((e^{-2\tilde{\alpha}^\lambda U}-1)-(e^{2\log(|\theta^\lambda-\vartheta^\lambda|/|\gamma_{\xi^\lambda}|)}-1)\big)|\gamma_{\xi^\lambda}|^2e^{-2\tilde{\varphi}^\lambda}$$

і оцінимо його користуючись елементарною нерівністю $|e^t-1|\leq|t|e^{|t|}$, Лемою 1.4.6, (1.4.52) і (1.4.65). В результаті виводимо наступну оцінку

$$\|r^\lambda\|_{L^2(G)}=o(\varepsilon). \tag{1.4.68}$$

Ця оцінка дозволяє оцінити H^1-норму функції $\varphi_{\xi^\lambda}+f^\lambda$. Маємо, $\Delta(\varphi_{\xi^\lambda}+f^\lambda)=|\gamma_{\xi^\lambda}|^2e^{\varphi_{\xi^\lambda}}-|\gamma_{\xi^\lambda}|^2e^{-f^\lambda}+r^\lambda$ в G. Помножимо це рівняння на $\varphi_{\xi^\lambda}+f^\lambda$ і проінтегруємо частинами:

$$\int_G|\nabla(\varphi_{\xi^\lambda}+f^\lambda)|^2\mathrm{d}x\leq\int_G|r^\lambda||\varphi_{\xi^\lambda}+f^\lambda|\mathrm{d}x$$

де було використано монотонність оператора $\phi\mapsto|\gamma_{\xi^\lambda}|^2e^\phi$ і той факт що $\varphi_{\xi^\lambda}+f^\lambda=0$ на ∂G. Таким чином

$$\|\varphi_{\xi^\lambda}+f^\lambda\|_{H^1(G)}=o(\varepsilon). \tag{1.4.69}$$

Покажемо тепер, що H^1-оцінка (1.4.69) разом з L^∞-оцінкою для f^λ (що випливає з (1.4.52) і (1.4.65)) дають $\|\Delta(\varphi_{\xi^\lambda}+f^\lambda)\|_{L^2(G)}=o(\varepsilon)$. Внаслідок еліптичних оцінок це буде означати, що

$$\|\varphi_{\xi^\lambda}+f^\lambda\|_{H^2(G)}=o(\varepsilon). \tag{1.4.70}$$

Для оцінки $\Delta(\varphi_{\xi^\lambda}+f^\lambda)$ запишемо

$$\Delta(\varphi_{\xi^\lambda}+f^\lambda)=r^\lambda+|\gamma_{\xi^\lambda}|^2\int_0^1(\varphi_{\xi^\lambda}+f^\lambda)e^{t\varphi_{\xi^\lambda}+(t-1)f^\lambda}\,\mathrm{d}t,$$

і скористаємось поточковою нерівністю $|\gamma_{\xi^\lambda}| \le 1$ в G:

$$\|\Delta(\varphi_{\xi^\lambda} + f^\lambda)\|_{L^2(G)} \le \|r^\lambda\|_{L^2(G)} + \int_0^1 \big\| \, |\varphi_{\xi^\lambda} + f^\lambda| e^{t\varphi_{\xi^\lambda}+(t-1)f^\lambda} \big\|_{L^2(G)} \mathrm{d}t$$
$$\le \|r^\lambda\|_{L^2(G)} + \|\varphi_{\xi^\lambda} + f^\lambda\|_{L^4(G)} e^{\|f^\lambda\|_{L^\infty(G)}} \int_0^1 \|e^{2t(\varphi_{\xi^\lambda}+f^\lambda)}\|^{1/2}_{L^2(G)} \mathrm{d}t.$$

Таким чином, для завершення доведення (1.4.70), достатньо показати, що

$$\sup_{t\in[0,1]} \big\|\exp\big(2t(\varphi_{\xi^\lambda}+f^\lambda)\big)\big\|_{L^2(G)} \text{ залишається обмеженим коли } \lambda \to 1-0. \quad (1.4.71)$$

Дійсно, згідно з (1.4.68) і (1.4.69) маємо $\|r^\lambda\|_{L^2(G)}$, $\|\varphi_{\xi^\lambda} + f^\lambda\|_{L^4(G)} = o(\varepsilon)$, у той час як з (1.4.52) і (1.4.65) випливає , що $\|f^\lambda\|_{L^\infty(G)} \le \|\tilde\varphi^\lambda\|_{L^\infty(G)} + |\tilde\alpha^\lambda| \|U\|_{L^\infty(G)} \to 0$.

Неважко бачити, що для будь-якої функції $\phi \in H^1(G)$, $\phi \not\equiv 0$, і довільної константи $C_1 > 0$

$$\exp(2|\phi|) \le \exp(C_1\|\phi\|^2_{H^1}) \exp\Big(\frac{|\phi|^2}{C_1\|\phi\|^2_{H^1(G)}}\Big) \quad \text{в } G. \qquad (1.4.72)$$

З іншого боку, має місце нерівність (див., наприклад, [95], Розділ VII),

$$\int_G \exp\Big(\frac{|\phi|^2}{C_1\|\phi\|^2_{H^1(G)}}\Big)\mathrm{d}x \le C_2 \text{ for every } \phi \in H^1(G),\ \phi \not\equiv 0,$$

для деяких $C_1, C_2 > 0$ що не залежать від ϕ. Таким чином, інтегруючи (1.4.72) по G, отримуємо $\|\exp(\phi)\|_{L^2(G)} \le C \exp(C_1\|\phi\|^2_{H^1(G)})$. Тоді з (1.4.69) випливає (1.4.71), і таким чином (1.4.70) доведено. Насамкінець, оскільки $2\tilde\varphi^\lambda = f^\lambda - 2\tilde\alpha^\lambda U$ і $\tilde\alpha^\lambda = o(\varepsilon)$, твердження Леми остаточно доведено. □

Крок IV (Виведення оцінки знизу). Скористуємось (1.4.47), (1.4.50) і визначенням h^λ_ω (h^λ_ω є звуженням $\mathrm{curl}A^\lambda$ на ω):

$$\int_{\partial\omega} \frac{\partial\tilde\varphi^\lambda}{\partial\nu}\mathrm{d}s = \int_\omega \mathrm{curl}A^\lambda \,\mathrm{d}x - h^\lambda_\omega \int_{\partial\omega} \frac{\partial V}{\partial\nu}\mathrm{d}s = h^\lambda_\omega\Big(|\omega| - \int_{\partial\omega}\frac{\partial V}{\partial\nu}\mathrm{d}s\Big) = h^\lambda_\omega K,$$

звідки, зважаючи на Лему 1.4.8,

$$(h^\lambda_\omega)^2 = \frac{1}{4K_G^2}\Big(\int_{\partial\omega}\frac{\partial\varphi_{\xi^\lambda}}{\partial\nu}\mathrm{d}s\Big)^2 + o(\varepsilon^2). \qquad (1.4.73)$$

Неважко також показати що, з (1.4.36), (1.4.53)-(1.4.54), (1.4.62), Леми 1.4.8 і твердження (ii) Леми 1.4.6 випливає

$$\varepsilon^2 = \frac{1-\lambda}{8}\int_G \left(e^{-2\tilde{\varphi}^\lambda}|\theta^\lambda + w^\lambda|^2 - 1\right)^2 \mathrm{d}x = (1+o(1))\frac{1-\lambda}{8}\int_G \left(|\gamma_{\xi^\lambda}|^2 e^{\varphi_{\xi^\lambda}} - 1\right)^2 \mathrm{d}x. \tag{1.4.74}$$

Підставимо тепер (1.4.73) і (1.4.74) в (1.4.63), в результаті отримуємо (1.4.33). Лему 1.4.5 доведено. □

1.4.5 Вихорі біля межі і δ-подібна поведінка струмів

У цьому підрозділі вивчається асимтотична поведінка мінімізантів при $\lambda \to 1-0$ і описується ефект δ-подібної концентрації струмів на зовнішній межі G.

Лема 1.4.9. *Для $0 < \lambda < 1$ достатньо близьких до 1, u^λ має єдиний нуль (вихор) $\tilde{\xi}^\lambda$ і $\operatorname{dist}(\tilde{\xi}^\lambda, \xi^\lambda) = o(\operatorname{dist}(\xi^\lambda, \partial G))$, де ξ^λ є єдиний нуль θ^λ визначений через (1.4.53)-(1.4.54). Крім того, існує $\mu_0 > 0$ таке що*

$$|u^\lambda| \geq \mu_0 \ \text{в}\ G \setminus a_{\xi_\lambda}^{-1}(\mathbb{D}_{1/2}), \tag{1.4.75}$$

де a_{ξ^λ} – конформне відображення визначене формулою (1.4.20) з $\xi = \xi^\lambda$.

Доведення. Нагадаємо , що $u^\lambda = e^{-\tilde{\varphi}^\lambda}(\theta^\lambda + w^\lambda)$ і $\tilde{\varphi}^\lambda \to 0$ рівномірно в $\bar{G}$ (див. (1.4.52)). З (1.4.62) і твердження (i) Леми 1.4.6 випливає, що для λ близьких до 1 мають місце нерівності $|u^\lambda| \geq C(|\gamma_{\xi^\lambda}| - \varepsilon) \geq C(|a_{\xi^\lambda}| - \varepsilon) \geq C(1/2 - \varepsilon)$ in $a_{\xi_\lambda}^{-1}(\mathbb{D}_{1/2})$, де C – деяка додатна константа, що не залежить від λ. Це доводить (1.4.75).

Для вивчення локальної (в $a_{\xi_\lambda}^{-1}(\mathbb{D}_{1/2})$) поведінки u^λ використаємо заміну $x \mapsto \zeta = a_{\xi_\lambda}(x)$. Покладемо $U^\lambda(\zeta) = u^\lambda(a_{\xi_\lambda}^{-1}(\zeta))$, $\Theta^\lambda(\zeta) = \theta^\lambda(a_{\xi_\lambda}^{-1}(\zeta))$ і $W^\lambda(\zeta) = w^\lambda(a_{\xi_\lambda}^{-1}(\zeta))$. Зазначимо, що (1.4.55) можна записати як

$$\Delta w^\lambda = g_1^\lambda\Big(\frac{\partial\theta^\lambda}{\partial\bar{z}} + \frac{\partial w^\lambda}{\partial\bar{z}}\Big) + g_2^\lambda \mathrm{curl} A^\lambda + g_3^\lambda \tag{1.4.76}$$

з коефіцієнтами g_k^λ чиї L^∞-норми є рівномірно за λ обмеженими (це випливає з результатів Підрозділу 1.4.4, див. (1.4.47), (1.4.52), (1.4.53) і другу оцінку в

(1.4.39)). Далі буде показано, шо L^∞-норми $\mathrm{curl}A^\lambda$ є рівномірно обмеженими. Таким чином після заміни $x \mapsto \zeta = a_{\xi_\lambda}(x)$ в (1.4.76), для λ достатньо близьких до 1 маємо

$$|\Delta W^\lambda| \le C_1 \mathrm{dist}(\xi_\lambda, \partial\Omega)\Big|\frac{\partial \Theta^\lambda}{\partial \bar\zeta} + \frac{\partial W^\lambda}{\partial \bar\zeta}\Big| + C_2 \mathrm{dist}^2(\xi_\lambda, \partial\Omega) \text{ в } \mathbb{D}_{3/4}, \tag{1.4.77}$$

де використано оцінку $|\nabla(a_{\xi_\lambda}^{-1})| \le C\mathrm{dist}(\xi_\lambda, \partial\Omega)$ в $\mathbb{D}_{3/4}$. Поведінку Θ^λ при $\lambda \to 1-0$ було вивчено в Підрозділі C, зокрема доведено що (з точністю до помноження на константу з одиничеим модулем) $\Theta^\lambda(\zeta) \to \zeta$ в $C^k(\mathbb{D}_{3/4}; \mathbb{C})$ для кожного $k > 0$. Також доведено (див. (1.4.62)), що $\|W^\lambda\|_{H^1(\mathbb{D}_{3/4}(0);\mathbb{C})} \le \|W^\lambda\|_{H^1(a_{\xi_\lambda}(G);\mathbb{C})} \to 0$ при $\lambda \to 1-0$. Тоді з (1.4.77) знаходимо, що $W^\lambda \to 0$ in $H^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{D}_{3/4}; \mathbb{C})$. Зокрема, $\|W^\lambda\|_{W^{1,q}(\mathbb{D}_{2/3}(0);\mathbb{C})} \to 0$ для кожного $q \ge 1$. Розглядаючи тепер (1.4.77) в $\mathbb{D}_{2/3}$, доходимо висновку, що $\|W^\lambda\|_{W^{2,q}(\mathbb{D}_{1/2};\mathbb{C})} \to 0$ $(\forall q > 1)$, звідки $\|W^\lambda\|_{C^1(\mathbb{D}_{1/2};\mathbb{C})} \to 0$. Таким чином $\Theta^\lambda + W^\lambda$ має один нуль в $\mathbb{D}_{1/2}$ і він прямує до центра диску коли $\lambda \to 1-0$, тобто $u^\lambda = e^{-\tilde\varphi^\lambda}(\theta^\lambda + w^\lambda)$ має один нуль $\tilde\xi^\lambda$ і $a_{\xi_\lambda}(\tilde\xi^\lambda) \to 0$. Тоді, за допомогою явних обчислень, знаходимо $\mathrm{dist}(\tilde\xi^\lambda, \xi^\lambda) = o(\mathrm{dist}(\xi^\lambda, \partial G))$. □

Лема 1.4.10. *Мають місце наступні твердження: (i)* $\|h^\lambda\|_{L^\infty(G)} \le C$, *(ii)* $\frac{\partial h^\lambda}{\partial \nu} \le 0$ *на* $\partial\Omega$, *(iii)* h^λ *збігається до нуля слабко в* $H^1(G)$ *коли* $\lambda \to 1-0$.

Доведення. (i) Застосуємо curl до (1.5.9), в результаті маємо рівняння

$$-\Delta h = 2\frac{\partial u^\lambda}{\partial x_1} \times \frac{\partial u^\lambda}{\partial x_2} - \mathrm{curl}(|u^\lambda|^2 A^\lambda) \text{ в } G, \tag{1.4.78}$$

крім того h задовольняє крайові умови

$$h = 0 \text{ на } \partial\Omega \text{ and } h = h^\lambda_\omega \text{ на } \partial\omega. \tag{1.4.79}$$

Представимо h^λ як $h^\lambda = \hat h^\lambda + \tilde h^\lambda$ з $\tilde h^\lambda$ що задовольняє рівнянню $\Delta \tilde h^\lambda = \mathrm{curl}(|u^\lambda|^2 A^\lambda)$ в G і крайовим умовам $\tilde h^\lambda = 0$ на $\partial\Omega$ і $\tilde h^\lambda = h^\lambda_\omega$ на $\partial\omega$. Внаслідок апріорної оцінки (1.4.39) маємо $|h^\lambda_\omega| \le C$ і $\|A^\lambda\|_{L^q(G;\mathbb{R}^2)} \le C_q$, $\forall q \ge 1$, де C_q не залежить від λ (тут використовується кулонівська калібровка A^λ). Звідки, завдяки еліптичним оцінкам, норма $\|\tilde{h}^\lambda\|_{W^{1,q}(G)}$ є рівномірно відносно λ обмеженою. Це, в свою чергу, доводить рівномірну обмеженість $\|\tilde{h}^\lambda\|_{C(\bar{G})}$, внаслідок компактності вкладення $W^{1,q}(G) \subset C(\bar{G})$ для $q > 2$. Тепер розглянемо функції $\hat{h}^\lambda$ які задовольняють $-\Delta \hat{h}^\lambda = 2\frac{\partial u^\lambda}{\partial x_1} \times \frac{\partial u^\lambda}{\partial x_2}$ в G і крайову умову $\hat{h}^\lambda = 0$ на ∂G. Користуючись результатами [200] (див. також [48]) отримуємо оцінки $\|\hat{h}^\lambda\|_{H^1(G)}$, $\|\hat{h}^\lambda\|_{L^\infty(G)} \leq C\|u^\lambda\|^2_{H^1(G;\mathbb{C})}$, таким чином шукана L^∞-оцінка випливає з того факту, що $\|u^\lambda\|_{H^1(G;\mathbb{C})} \leq C$ (див. Підрозділ 1.4.4).

Для доведення (iii) помітимо, що слабка збіжність h^λ витікає з (1.4.39), (1.4.45), (1.4.46), і того факту, що норми $\|h^\lambda\|_{H^1(G)}$ обмежені.

Для доведення (ii) достатньо показати, що $h^\lambda \geq 0$ в G ($h^\lambda = 0$ на $\partial\Omega$). Для цього розділимо рівність $j^\lambda = -\nabla^\perp h$ на $|u^\lambda|$ і візьмемо curl, в результаті виводимо рівняння

$$-\operatorname{div}\Big(\frac{1}{|u^\lambda|^2}\nabla h^\lambda\Big) + h^\lambda = 0 \text{ в } \{x \in G; |u^\lambda(x)| > 0\}. \tag{1.4.80}$$

Нехай $1 > \rho > 0$ є регуляним значенням $|u^\lambda|$ (згідно з Лемою Сарда майже всі значення $\rho \in (0,1)$ є регулярними), нехай x_0 є точкою мінімума h^λ в замкненні області $G_\rho = \{x \in G; |u^\lambda(x)| > \rho\}$. Припустимо від супротивного, що $h^\lambda(x_0) < 0$. Тоді згідно принципу максимума (застосованого до рівняння (1.4.80)) точка x_0 не може бути внутрішньою точкою G_ρ. Вона також не може належати $\partial\omega$, в противному випадку $h^\lambda(x_0) = h^\lambda_\omega < 0$ і

$$\int_{\partial\omega} \frac{\partial h^\lambda}{\partial \nu}\,\mathrm{d}s = -\int_{\partial\omega} j^\lambda \cdot \tau\,\mathrm{d}s = -2\pi \deg(u^\lambda, \partial\omega) + \int_{\partial\omega} A^\lambda \cdot \tau\,\mathrm{d}s$$
$$= \int_\omega h^\lambda\,\mathrm{d}x = |\omega| h^\lambda_\omega < 0,$$

тоді $h^\lambda(x_0)$ напевно не є мінімальним значенням h^λ в $\overline{G_\rho}$. Аналогічні підрахунки показують, що якщо $|u^\lambda(x_0)| = \rho$ тоді

$$\frac{1}{\rho^2}\int_{|u^\lambda|=\rho} \frac{\partial h^\lambda}{\partial \nu}\,\mathrm{d}s = -2\pi + \int_{|u^\lambda|<\rho} h^\lambda \mathrm{d}x, \tag{1.4.81}$$

де використано той факт, що сума степеней відображення u^λ/ρ по зв'язним компонентам $\partial\{x \in G; |u^\lambda(x)| < \rho\}$ дорівнює 1. В границі $\rho \to 0$ в (1.4.81) знову приходимо до протиріччя, таким чином $h^\lambda \geq 0$ на $\bar{G}_\rho$ коли ρ є достатньо малим, і тоді $h^\lambda \geq 0$ в G. $\square$

Далі вивчається асимтотична поведінка струмів j^λ. Згідно Лемі 1.4.10, $j^\lambda \to 0$ слабко в $L^2(G;\mathbb{R}^2)$ при $\lambda \to 1-0$. Можна також показати що $j^\lambda \to 0$ в $C^k_{\mathrm{loc}}(G;\mathbb{R}^2)$ $\forall k \geq 1$. Таким чином спеціальний інтерес представляють струми на межі.

Лема 1.4.11. *Нехай $\xi^\lambda \to \xi^*$ ($\in \partial\Omega$, див. Лему 1.4.6) коли $\lambda \to 1-0$, за підпослідовністю. Тоді $j^\lambda \cdot \tau \to 2\pi\delta_{\xi^*}$ в $\mathcal{D}'(\partial\Omega)$, де δ_{ξ^*} позначає дельта-функцію Дірака з центром в ξ^*.*

Доведення. Згідно з твердженням (ii) Леми 1.4.10, $j^\lambda \cdot \tau \geq 0$. Таким чином повна варіація міри $j^\lambda \cdot \tau \, \mathrm{d}s$ можна обчислити наступним чином

$$\int_{\partial\Omega} j^\lambda \cdot \tau \, \mathrm{d}s = 2\pi \mathrm{deg}(u^\lambda, \partial\Omega) - \int_\Omega h^\lambda \, \mathrm{d}x = 2\pi - \int_\Omega h^\lambda \, \mathrm{d}x,$$

і, внаслідок (iii) Леми 1.4.10, вона прямує до 2π. Таким чином достатньо показати, що

$$\int_{\partial\Omega} \Phi j^\lambda \cdot \tau \, \mathrm{d}s \to 0 \quad \forall \Phi \in C^1(\partial\Omega) \text{ такої що } \Phi = 0 \text{ у околі } \ \xi^*.$$

Подов жимо Φ в G таким чином, що $\Phi \in C^1(\bar{G})$, $\Phi = 0$ на $\partial\omega$ та в $G \cap B_\rho(\xi^*)$ для деякого $\rho > 0$. Припустимо, що λ є настільки близьким до 1, що $a^{-1}_{\xi_\lambda}(B_{1/2}(0)) \subset B_\rho(\xi^*)$, тоді, згідно з Лемою 1.4.9, $|u^\lambda| \geq \mu_0 > 0$ в $G \backslash B_\rho(\xi^*)$. Помножимо (1.4.80) на Φ і проінтегруємо по $G \setminus B_\rho(\xi^*)$,

$$-\int_{\partial\Omega} \Phi j^\lambda \cdot \tau \, \mathrm{d}s = \int_{\partial\Omega} \Phi \frac{\partial h^\lambda}{\partial \nu} \, \mathrm{d}s = \int_G \Big(\frac{1}{|u^\lambda|^2} \nabla\Phi \cdot \nabla h^\lambda + h^\lambda \Phi \Big) \, \mathrm{d}x.$$

Права частина цієї рівності прямує до нуля коли $\lambda \to 1-0$, оскільки $\frac{1}{|u^\lambda|^2}\nabla\Phi \to \nabla\Phi$ сильно в $L^2(G;\mathbb{R}^2)$, у той час як $h^\lambda \to 0$ слабко в $H^1(G)$. $\square$

Зауваження 1.4.12. Міркування аналогічні Лемі 1.4.11 показують, що $j^\lambda \to 0$ в $D'(\partial\omega)$ коли $\lambda \to 1-0$. (Це є наслідком того, що u^λ має рівно один вихор який наближається до $\partial\Omega$ коли $\lambda \to 1-0$.)

1.4.6 Явні енергетичні оцінки

Праву частину $I(\xi,\lambda)$ в оцінці зверху (1.4.28) може бути еквівалентно записано як

$$I(\xi,\lambda)=\pi+\frac{1}{8K_G}\Big(\int_{\partial\omega}\frac{\partial\phi_\xi}{\partial\nu}\,\mathrm{d}s\Big)^2-\frac{1-\lambda}{8}\int_G(|a_\xi|^2e^{\phi_\xi}-1)^2\mathrm{d}x, \tag{1.4.82}$$

де ϕ_ξ є єдиним розв'язком задачі

$$\begin{cases} -\Delta\phi_\xi=1-|a_\xi(z)|^2e^{\phi_\xi} \text{ в } G \\ \phi_\xi=0 \text{ на } \partial\Omega \\ \phi_\xi=-\log|a_\xi(z)|^2 \text{ на } \partial\omega, \end{cases} \tag{1.4.83}$$

$a_\xi(z)$ – задається формулою (1.4.20) з деяким фіксованим конформним відображенням $\mathcal{F}$ з Ω на одиничний диск. Дійсно, розв'язок φ_ξ задачі (1.4.17)-(1.4.18) і ϕ_ξ пов'язані через $\varphi_\xi=\phi_\xi-\sigma_\xi$, де $\sigma_\xi=\log|\gamma_\xi/a_\xi|$ ($\Delta\sigma_\xi=0$ в G). Зазначимо також, що

$$\int_{\partial\omega}\frac{\partial\varphi_\xi}{\partial\nu}\,\mathrm{d}s=\int_{\partial\omega}\frac{\partial\phi_\xi}{\partial\nu}\,\mathrm{d}s,$$

оскільки σ_ξ задовольняє (1.4.21).

Наступна Лема доводить асимптотичну формулу (1.4.29).

Лема 1.4.13. *Нехай $\xi\in G$ і нехай $\xi^*=\xi^*(\xi)\in\partial\Omega$ позначає ортогональну проекцію ξ на $\partial\Omega$. Тоді для достатньо малих $\delta=dist(\xi,\partial\Omega)$*

(i) $\displaystyle\int_{\partial w}\frac{\partial\phi_\xi}{\partial\nu}\,\mathrm{d}s=4\pi\delta\frac{\partial V}{\partial\nu}(\xi^*)+o(\delta)$, *де V – розв'язок задачі (1.4.4),*

(ii) $\displaystyle\int_G(|a_\xi|^2e^{\phi_\xi}-1)^2\,\mathrm{d}x=8\pi\delta^2|\log\delta|+O(\delta^2)$.

В доведенні обох тверджень Леми 1.4.13 використовуються наступні формули, при $\xi\to\partial\Omega$

$$\int_G\big(1-|a_\xi|^2\big)^2\mathrm{d}x=8\pi\delta^2(|\log\delta|+O(1)), \tag{1.4.84}$$

$$\int_G\big(1-|a_\xi|^2\big)\mathrm{d}x=O(\delta), \tag{1.4.85}$$

де δ – відстань від ξ до $\partial\Omega$.

Доведення твердження (i) Леми 1.4.13. По-перше покажемо, що

$$\int_{\partial\omega} \frac{\partial \phi_\xi}{\partial \nu} \mathrm{d}s = \int_{\partial\omega} \frac{\partial \phi_\xi^*}{\partial \nu} \mathrm{d}s + o(\delta) \text{ коли } \delta \to 0, \tag{1.4.86}$$

де ϕ_ξ^* – розв'язок допоміжної задачі

$$\begin{cases} -\Delta\phi_\xi^* + \phi_\xi^* = 1 - |a_\xi(z)|^2 \text{ в } G \\ \phi_\xi^* = 0 \text{ на } \partial\Omega \\ \phi_\xi^* = -\log|a_\xi(z)|^2 \text{ на } \partial\omega. \end{cases} \tag{1.4.87}$$

Нижче буде доведено, що

$$\|\phi_\xi\|_{C(\bar{G})} < C\delta \text{ коли } \delta \to 0. \tag{1.4.88}$$

З цієї нерівності випливає оцінка

$$\begin{aligned} \| -\Delta(\phi_\xi - \phi_\xi^*) + (\phi_\xi - \phi_\xi^*)\|_{L^2(G)} &= \|\phi_\xi(1-|a_\xi|^2) + |a_\xi|^2(1 - e^{\phi_\xi} + \phi_\xi)\|_{L^2(G)} \\ &\leq \delta\|1-|a_\xi|^2\|_{L^2(G)} + C\delta^2 \leq C_1\delta^2(|\log\delta| + 1), \end{aligned}$$

де використано (1.4.84). Оскільки $\phi_\xi = \phi_\xi^*$ на ∂G, за допомогою еліптичних оцінок нескладно вивести (1.4.86).

Доведення (1.4.88). Згідно (1.4.83) маємо $-\Delta(\phi_\xi + \log|a_\xi(z)|^2) = 1 - |a_\xi(z)|^2 e^{\phi_\xi}$ в $G \setminus B_r(\xi)$ для кожного $r > 0$. Використаємо принцип максимуму, в результаті отримуємо нерівність $\phi_\xi \leq -\log|a_\xi(z)|^2$ в G. З останньої нерівності знаходимо $1 - |a_\xi(z)|^2 e^{\phi_\xi} \geq 0$. Тепер застосуємо принцип максимуму до (1.4.83) і дістанемо висновку, що $\phi_\xi \geq 0$ в G. Таким чином, $0 \leq 1 - |a_\xi(z)|^2 e^{\phi_\xi} \leq 1 - |a_\xi(z)|^2$. З іншого боку, за допомогогю прямих обчислень знаходимо

$$1 - |a_\xi(z)|^2 = (|\mathcal{F}(\xi)|^2 - 1)\frac{|\mathcal{F}(z)|^2 - 1}{|\mathcal{F}(z)\overline{\mathcal{F}(\xi)} - 1|^2} \leq C\frac{\delta}{|z - \xi^*|} \text{ коли } \delta \to 0. \tag{1.4.89}$$

Це дозволяє оцінити L^p-норму правої частини (1.4.83) для всіх $1 < p < 2$ і вивести наступну нерівність за допомогою еліптичних оцінок,

$$\|\phi_\xi\|_{W^{2,p}(G)} \leq C(p)\delta \text{ коли } \delta \to 0.$$

Нарешті шуканий результат (1.4.88) випливає внаслідок теореми про вложення Соболевських просторів. ☐

Зауваження 1.4.14. В доведенні (1.4.88) було показано, що $|a_\xi|e^{\phi_\xi} \leq 1$ в G, відкіля випливає, що $|\gamma_\xi|e^{\varphi_\xi} \leq 1$ в G (оскільки $\varphi_\xi = \phi_\xi - \log|\gamma_\xi/a_\xi|$).

Доведення твердження (i) Леми 1.4.13 завершено. Помножимо тепер рівняння в (1.4.87) на V (розв'язок задачі (1.4.4)) і проінтегруємо частинами:

$$\int_{\partial\omega} \frac{\partial \phi_\xi^*}{\partial \nu} \mathrm{d}s = \int_G (1 - |a_\xi|^2)V - \int_{\partial\omega} \log|a_\xi|^2 \frac{\partial V}{\partial \nu} \mathrm{d}s. \tag{1.4.90}$$

З іншого боку, оскільки $\Delta \log|a_\xi|^2 = 4\pi\delta_\xi(x)$ в Ω і $\log|a_\xi|^2 = 0$ на $\partial\Omega$, маємо

$$4\pi V(\xi) = \int_G \log|a_\xi|^2 V \mathrm{d}x + \int_{\partial\omega} \log|a_\xi|^2 \frac{\partial V}{\partial \nu} \mathrm{d}s. \tag{1.4.91}$$

Додамо (1.4.90) до (1.4.91):

$$\int_{\partial\omega} \frac{\partial \phi_\xi^*}{\partial \nu} \mathrm{d}s = 4\pi(V(\xi^*) - V(\xi)) + \int_G (\log|a_\xi|^2 + 1 - |a_\xi|^2) V \mathrm{d}x. \tag{1.4.92}$$

Таким чином, з огляду на (1.4.86) залишається тільки показати, що останній член в рівності (1.4.92) є порядку $o(\delta)$. Для цього представимо його наступним чином

$$\int_G (\log|a_\xi|^2 + 1 - |a_\xi|^2) V \mathrm{d}x = \int_{G \setminus \mathbb{D}_{\sqrt{\delta}}(\xi^*)} \dots + \int_{G \cap \mathbb{D}_{\sqrt{\delta}}(\xi^*)} \dots =: I_1 + I_2.$$

Згідно (1.4.89) маємо $|\log(1 - 1 + |a_\xi|^2) + 1 - |a_\xi|^2| \leq C\delta^2/|x - \xi^*|^2$ in $G \setminus \mathbb{D}_{\sqrt{\delta}}(\xi^*)$, звідки $I_1 = O(\delta^2)$ (зазначимо, що $|V(x)| \leq C|x - \xi^*|$); разом з тим $I_2 = O(\delta^{3/2}|\log\delta|)$, це можна перевірити користуючись очевидною оцінкою $|\log|a_\xi|^2 + 1 - |a_\xi|^2| \leq C(|\log|x - \xi|| + 1)$. Твердження (i) доказано. ☐

Доведення твердження (ii) Леми 1.4.13. Проінтегруємо тотожність

$$(|a_\xi|^2 e^{\phi_\xi} - 1)^2 = (|a_\xi|^2 - 1)^2 + 2|a_\xi|^2(e^{\phi_\xi} - 1)(|a_\xi|^2 - 1) + |a_\xi|^4(e^{\phi_\xi} - 1)^2$$

по G і скористаємось оцінками (1.4.84), (1.4.85), (1.4.88) і нерівністю Коші-Шварца

$$\int_G (|a_\xi(z)|^2 e^\varphi - 1)^2 dx = \int_G (|a(z,\xi)|^2 - 1)^2 dx + O(\delta^2) = 8\pi\delta^2 |\log\delta| + O(\delta^2).$$

Таким чином Лему 1.4.13 повністю доведено. □

Доведення формул (1.4.84) і (1.4.85). Для стислості доведемо тільки (1.4.84) ((1.4.85) доводиться аналогічно). Зробимо заміну змінних $\zeta = \mathcal{F}(x)$:

$$\int_G \big(1 - |a_\xi|^2\big)^2 \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{D}\setminus\mathcal{F}(\omega)} \big(1 - |m_{\mathcal{F}(\xi)}|^2\big)^2 \frac{d\zeta}{\mathrm{Jac}\mathcal{F}(\zeta)}$$
$$= \frac{1}{\mathrm{Jac}\mathcal{F}(\xi)} \int_{\mathbb{D}} \Big(1 - \big|m_{\mathcal{F}(\xi)}(\zeta)\big|^2\Big)^2 d\zeta + O(\delta^2), \quad (1.4.93)$$

де $m_\mu(z) = (z - \mu)/(\bar{\mu}z - 1)$ – класичне конформне перетворення Мебіуса одиничного диска на себе. Інтеграл в правій частині (1.4.93) може бути явно обчисленим. Скористаємося коареа формулою два рази:

$$\int_{\mathbb{D}} (|m_\mu(x)|^2 - 1)^2 \mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{d}t \int_{|m_\mu(x)|=t} (t^2 - 1)^2 \frac{\mathrm{d}\mathcal{H}^1}{|\nabla|m_\mu(x)||}$$
$$= \int_0^1 (t^2 - 1)^2 \mathrm{d} \int_0^t \mathrm{d}\tau \int_{|m_\mu(x)|=\tau} \frac{\mathrm{d}\mathcal{H}^1}{|\nabla|m_\mu(x)||}$$
$$= \int_0^1 (t^2 - 1)^2 \mathrm{d}\big(\mathrm{area}(m_\mu^{-1}(\mathbb{D}_t))\big).$$

Зазначимо, що обернене перетворення $m_\mu^{-1}(z)$ є саме перетворення $m_\mu(z)$. Більш того, прообраз $m_\xi^{-1}(\mathbb{D}_t)$ диску $\mathbb{D}_t$ є диск $\mathbb{D}_r(y)$ з радіусом $r = t(1 - |\mu|^2)/(1 - t^2|\mu|^2)$ і центром в $y = \mu(1-t^2)/(1-t^2|\mu|^2)$. Таким чином, інтегруючи частинами, знаходимо

$$\int_{\mathbb{D}} (|m_\mu(x)|^2 - 1)^2 \mathrm{d}x = 2(1 - |\mu|^2)^2 \pi \int_0^1 \frac{(1 - t^2)t^2 \mathrm{d}t^2}{(1 - t^2|\mu|^2)^2},$$

і елементарні обчислення ведуть до наступної асимптотичної формули: коли $|\mu| \to 1 - 0$

$$\int_{\mathbb{D}} \big(1 - |m_\mu(\zeta)|^2\big)^2 \mathrm{d}\zeta = 2\pi(1 - |\mu|^2)^2(|\log(1 - |\mu|^2)| + O(1)). \quad (1.4.94)$$

Насамкінець, з конформності $\mathcal{F}$ маємо

$$(1-|\mathcal{F}(\xi)|^2)^2 = 4\delta^2 \mathrm{Jac}\mathcal{F}(\xi) + O(\delta^3). \tag{1.4.95}$$

Комбінуючи (1.4.93), (1.4.94) і (1.4.95) знаходимо (1.4.84). $\square$

Лема 1.4.13 дозволяє переписати оцінку знизу (1.4.33) з Леми 1.4.5 у вигляді

$$m(\lambda) = F_\lambda[u^\lambda, A^\lambda] \geq \pi + \frac{2\pi^2}{K_G}\delta^2\Big|\frac{\partial V}{\partial\nu}(\hat{\xi}^\lambda)\Big|^2 - \pi\delta^2(1-\lambda)|\log\delta|(1+o(1)) + o(\delta^2), \tag{1.4.96}$$

коли $\lambda \to 1-0$, де $\hat{\xi}^\lambda$ ортогогнальна проекція $\partial\Omega$ точки ξ^λ і $\delta = \mathrm{dist}(\xi^\lambda, \partial\Omega)$ ($\delta = \delta(\lambda) \to 0$). Нагадаємо, що точку $\xi^\lambda \in G$ було визначено в Підрозділі 1.4.4 як єдиний нуль допоміжної функції θ^λ зконструйованої через u^λ і A^λ. З огляду на Лему 1.4.9 можна модіфікувати визначення ξ^λ вважаючи відтепер, що ξ^λ – єдиний нуль (вихор) функції u^λ, при цьому асимтотична формула (1.4.96) залишиться вірною. З іншого боку, внаслідок (1.4.28), (1.4.82) і Леми 1.4.13,

$$m(\lambda) \leq I(\xi,\lambda) = \pi + \frac{2\pi^2}{K_G}\tilde{\delta}^2\Big|\frac{\partial V}{\partial\nu}(\hat{\xi})\Big|^2 - \pi(1-\lambda)(\tilde{\delta}^2|\log\tilde{\delta}| + O(\tilde{\delta}^2)) + o(\tilde{\delta}^2), \tag{1.4.97}$$

де $\hat{\xi}$ – довільна точка на $\partial\Omega$ і $\tilde{\delta} > 0$ малий свободний параметр ($\hat{\xi}$ – ортогональна проекція на $\partial\Omega$ точки $\xi \in G$ і $\tilde{\delta} = \mathrm{dist}(\xi, \partial\Omega)$). З (1.4.96) і (1.4.97) витікає, що, при $\lambda \to 1-0$,

(a) $\delta = \exp\big(\frac{-2\pi}{(1-\lambda)K_G}|\frac{\partial V}{\partial\nu}(\hat{\xi}^\lambda)|^2(1+o(1))\big)$;

(b) $|\frac{\partial V}{\partial\nu}(\hat{\xi}^\lambda)|^2 \to M_G$, where $M_G = \min\{|\frac{\partial V}{\partial\nu}(\hat{\xi})|^2; \hat{\xi} \in \partial\Omega\}(>0)$.

Таким чином єдиний нуль (вихор) u^λ збігається (з точністю до підпослідовності) до точки, що мінімізує $|\frac{\partial V}{\partial\nu}|^2$ на $\partial\Omega$. Це завершує доведення Теореми 1.4.1. $\square$

1.5 Локальні мінімізанти повного функціонала Гінзбурга-Ландау в двозв'язних областях

Для доведення існування локальних мінімізантів $F_\lambda[u, A]$ в $\mathcal{J}$ розглянемо наступну мінімізаційну задачу

$$m_\lambda(p,q,d) := \inf\{F_\lambda[u,A];\ (u,A) \in \mathcal{J}_{pq}^{(d)}\}, \tag{1.5.1}$$

де p, q та d – задані цілі числа,

$$\mathcal{J}_{pq}^{(d)} = \{(u, A) \in \mathcal{J}_{pq}; d - 1/2 \leq \Phi(u, A, V_0) \leq d + 1/2\}, \tag{1.5.2}$$

і $\Phi(u, A, V_0)$ задається формулою

$$\Phi(u, A, V_0) = \frac{1}{2\pi} \int_G \Big(u \times \Big((\frac{\partial u}{\partial x_2} - iA_2 u) \frac{\partial V_0}{\partial x_1} - (\frac{\partial u}{\partial x_1} - iA_1 u) \frac{\partial V_0}{\partial x_2} \Big) + A \cdot \nabla^{\perp} V_0 \Big) \, \mathrm{d}x, \tag{1.5.3}$$

в якій V_0 є єдиний розв'язок крайової задачі

$$\begin{cases} -\Delta V_0 + V_0 = 1 & \text{в } G \\ V_0 = 1 & \text{на } \partial\Omega \\ V_0 = 0 & \text{на } \partial\omega. \end{cases} \tag{1.5.4}$$

Функціонал $\Phi(u, A, V)$ (з гармонічною V та $A \equiv 0$) було введено в [30] для знаходження нетрівіальних локальних мінімізантів спрощеного функціоналу Гінзбурга-Ландау з приписаними степенями відображення на зв'язних компонентах межі. Надалі буде використано $\Phi(u, A, V)$ для різних гладких функцій V. Зазначимо, що функціонал $\Phi(u, A, V_0)$ має наступні властивості

(a) для кожного $u \in H^1(G; S^1)$ та $A \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^2)$

$$\Phi(u, A, V_0) = \deg(u, \partial\omega) = \deg(u, \partial\Omega);$$

(b) відображення $\Phi(\,\cdot\,, V_0) : H^1(G; \mathbb{C}) \times H^1(\Omega; \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}$ є неперервним відносно слабкої збіжності.

Крім того, якщо зафіксувати $\Lambda > 0$ і розглянути пари (u, A) з множини підрівня $F_\lambda[u, A] \leq \Lambda$ тоді $\Phi(u, A, V_0)$ ніколи не приймає напівцілі значення для достатньо великих $\lambda > 0$. Більш точно, буде доведено наступний результат (див. Підрозділ 1.5.2):

Твердження 1.5.1. *Зафіксуємо* $\Lambda > 0$. *Існує* $\lambda_0 = \lambda_0(\Lambda) > 0$*, таке що якщо* $\lambda \geq \lambda_0$ *тоді для довільного цілого* d *та довільної пари* $(u, A) \in H^1(G; \mathbb{C}) \times$

$H^1(\Omega;\mathbb{R}^2)$ *яка задовольняє* $F_\lambda[u,A] \leq \Lambda$ *замкнена умова* $\Phi(u,A,V_0) \in [d - 1/2, d+1/2]$ *є еквівалентною відкритій* $\Phi(u,A,V_0) \in (d-1/2, d+1/2)$, *тобто*

$$d - 1/2 \leq \Phi(u,A,V_0) \leq d + 1/2 \iff d - 1/2 < \Phi(u,A,V_0) < d + 1/2. \quad (1.5.5)$$

Насправді буде показано, що $\Phi(u,A,V_0)$ приймає значення близькі до цілих рівномірно відносно пар (u,A) які задовольняють $F_\lambda[u,A] \leq \Lambda$, коли параметр λ є достатньо великим.

З Твердження 1.5.1 випливає, що якщо

- інфімум $m_\lambda(p,q,d)$ в (1.5.1) досягається і (u,A) є мінімізуючою парою,
- $m_\lambda(p,q,d) < \Lambda$ та $\lambda \geq \lambda_0$, де $\lambda_0 (= \lambda_0(\Lambda))$ – константа з Твердження 1.5.1,

тоді (u,A) є локальним мінімізантом $F_\lambda[u,A]$ в $\mathcal{J}$. Проте результат про те, що $m_\lambda(p,q,d)$ досягається є нетривіальним, це спричинено відсутністю неперервності $\deg(u,\partial\Omega)$ та $\deg(u,\partial\omega)$ відносно слабкої H^1-збіжності.

Основним результатом про існування розв'язків задачі (1.5.1) є наступна теорема:

Теорема 1.5.2. *Для довільних цілих p, q та $d > 0$ ($d < 0$) з $d \geq \max\{p,q\}$ ($d \leq \min\{p,q\}$) існує $\lambda_1 = \lambda_1(p,q,d) > 0$, таке що інфімум в (1.5.1) завжди досягається коли $\lambda \geq \lambda_1$ і кожний мінімізант (1.5.1) є локальним мінімізантом $F_\lambda[u,A]$ в $\mathcal{J}$.*

Будемо припускати, для визначеності, що $d > 0$ (у випадку $d < 0$ треба зробити заміну (u,A) на $(\overline{u}, -A)$). Як зазначено вище, основною проблемою в Теоремі 1.5.2 є доведення того факту, що інфімум в (1.5.1) досягається. Для цього використовується схема доведення з [30]; а саме, спочатку доводиться існування мінімізантів в (1.5.1) для $p = q = d$ а далі індуктивно переходимо до $p = d$, $q = d - 1$ та $p = d - 1$, $q = d$, і так далі. Основний техничний результат для переходу від приписаних степеней p, q до p, $q - 1$ та $p - 1$, q є наступні строгі нерівності

$$m_\lambda(p, q-1, d) < m_\lambda(p,q,d) + \pi \text{ та } m_\lambda(p-1, q, d) < m_\lambda(p,q,d) + \pi \quad (1.5.6)$$

які виконуються якщо $m_\lambda(p,q,d)$ досягається і параметр λ є достатньо великим. Оцінки (1.5.6) доводяться конструюванням тестових пар $(u,A)\in\mathcal{J}^{(d)}_{p(q-1)}$ або $(u,A)\in\mathcal{J}^{(d)}_{(p-1)q}$, таких що $F_\lambda[u,A]<m_\lambda(p,q,d)+\pi$, це і є головним моментом доведення. Конструкцієя тестових пар є повністю відмінною від [30], при цьому суттєвим чином використовується преставлення С. Богомольного [49] функціоналу енергії і метод факторізації з [195].

1.5.1 Властивості енергетичного функціонала і його критичних точок

Одною з основних важливих властивостей функціонала $F_\lambda[u,A]$ є його інваріантність відносно калибровочних трансформацій $u\mapsto e^{i\phi}u$, $A\mapsto A+\nabla\phi$ (де $\phi\in H^2(\Omega)$). Легко бачити, що $\Phi(u,A,V_0)$ також має цю властивість, як і $\deg(u,\partial\Omega)$, $\deg(u,\partial\omega)$. Таким чином, можна вважати, що

$$\begin{cases}\mathrm{div}A=0 \text{ в } \Omega\\ A\cdot\nu=0 \text{ на } \partial\Omega.\end{cases}\tag{1.5.7}$$

Критичні точки $F_\lambda[u,A]$ в $\mathcal{J}$, зокрема локалні мінімізанти, є розв'язками системи рівнянь Ейлера-Лагранжа

$$-(\nabla-iA)^2u+\frac{\lambda}{2}u(|u|^2-1)=0 \text{ в } G\tag{1.5.8}$$

$$-\nabla^\perp h=\begin{cases}j \text{ в } G\\ 0 \text{ в } \omega,\end{cases}\tag{1.5.9}$$

де $h=\mathrm{curl}A$ – магнитне поле (скалярна функція), та

$$j=(iu,\nabla u-iAu)$$

є вектором струму (зазначимо, що h і j є калібровочно інваріантними). Крім того, $h\in H^1(\Omega)$ і виконуються наступні крайові умови,

$$|u|=1, j\cdot\nu=0 \text{ на } \partial G,\ h=0 \text{ на } \partial\Omega, \frac{\partial h}{\partial\tau}=0 \text{ на } \partial\omega.\tag{1.5.10}$$

Будемо припускати, що $\partial G \in C^\infty$, тоді довільний розв'язок (u, A) задачі (1.5.8)–(1.5.10) є гладким, $u \in C^\infty(\overline{G}; \mathbb{C})$ і $A \in C^\infty(\overline{G}; \mathbb{R}^2)$ (див. [39]). Також виконується поточкова нерівність

$$|u| \leq 1 \text{ в } G,$$

яка є наслідком принципу максимуму застосованого до рівняння для $|u|^2$

$$\Delta |u|^2 = \lambda |u|^2(|u|^2 - 1) + 2|\nabla u - iAu|^2 \text{ в } G. \tag{1.5.11}$$

Зазначимо, що рівняння $-\nabla^\perp h = j$ може бути записаним у вигляді

$$\frac{\partial}{\partial z}\Big(h - \frac{1}{2}(|u|^2 - 1)\Big) = -\overline{u}\Big(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{A_2 + iA_1}{2} u\Big)$$

або

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\Big(h + \frac{1}{2}(|u|^2 - 1)\Big) = \overline{u}\Big(\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} + \frac{A_2 - iA_1}{2} u\Big),$$

тоді якщо застосувати $\partial/\partial\bar{z}$ (або $\partial/\partial z$) і скористатися (1.5.11), то отримуємо

$$\Delta\Big(h - \frac{1}{2}(|u|^2 - 1)\Big) - |u|^2 h = -4\Big|\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{A_2 + iA_1}{2} u\Big|^2 - \frac{\lambda}{2}|u|^2(|u|^2 - 1) \text{ в } G. \tag{1.5.12}$$

і

$$\Delta\Big(h + \frac{1}{2}(|u|^2 - 1)\Big) - |u|^2 h = 4\Big|\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} + \frac{A_2 - iA_1}{2} u\Big|^2 + \frac{\lambda}{2}|u|^2(|u|^2 - 1) \text{ в } G. \tag{1.5.13}$$

Важливу роль в аналізі $F_\lambda[u, A]$ відіграє насупне представлення, що є справедливим для довільної пари $(u, A) \in \mathcal{J}$,

$$\begin{aligned} F_\lambda[u, A] = \pm\pi(\deg(u, \partial\Omega) - \deg(u, \partial\omega)) + F^\pm[u, A] \\ + \frac{1}{2}\int_\omega |\mathrm{curl} A|^2 \mathrm{d}x + \frac{\lambda - 1}{8}\int_G (|u|^2 - 1)^2 \mathrm{d}x, \end{aligned} \tag{1.5.14}$$

де

$$F^+[u, A] = 2\int_G \Big|\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} + \frac{A_2 - iA_1}{2} u\Big|^2 \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_G \Big|\mathrm{curl} A + \frac{|u|^2 - 1}{2}\Big|^2 \mathrm{d}x, \tag{1.5.15}$$

$$F^-[u, A] = 2\int_G \Big|\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{A_2 + iA_1}{2} u\Big|^2 \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_G \Big|\mathrm{curl} A - \frac{|u|^2 - 1}{2}\Big|^2 \mathrm{d}x. \tag{1.5.16}$$

Це представлення було винайдено Е.Б. Богомольним [49], детальне виведення (1.5.14) можна знайти в [50].

1.5.2 Властивості функціонала $\Phi(u, A, V)$

Запишемо $\Phi(u, A, V)$ як суму двох доданків

$$\Phi(u,A,V) = \frac{1}{2\pi}\int_G u \times \Big(\frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial V}{\partial x_1} - \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial V}{\partial x_2}\Big)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2\pi}\int_G A\cdot\nabla^{\perp}V(1-|u|^2)\,\mathrm{d}x. \tag{1.5.17}$$

Тоді скориставшись результатами [30] (Розділ 3) для першого члена отримуємо, що для кожної фіксованої функції $V \in C^1(\overline{G})$ функціонал $\Phi(\,\cdot\,, V)$ є неперервним відносно слабкої збіжності в $H^1(G;\mathbb{C}) \times H^1(\Omega;\mathbb{R}^2)$. Якщо додатково функція V є такою, що $V = 0$ на $\partial\omega$ і $V = 1$ на $\partial\Omega$, тоді $\Phi(u, A, V) = \deg(u, \partial\omega) = \deg(u, \partial\Omega)$ для всіх $u \in H^1(G; S^1)$.

Зафіксуємо тепер $\Lambda > 0$. Покажемо, що

$$\sup\{\mathrm{dist}(\Phi(u, A, V_0), \mathbb{Z});\ F_\lambda[u, A] \le \Lambda\} \to 0 \qquad \text{коли } \lambda \to \infty. \tag{1.5.18}$$

Оскільки значення $\Phi(u, A, V_0)$ є інваріантним відносно калібровочних перетворень, можна вважати, що виконується (1.5.7). Тоді, для заданої послідовності пар (u^λ, A^λ), $\lambda \to \infty$, що задовольняє оцінку $F_\lambda[u^\lambda, A^\lambda] \le \Lambda$, можна виділити підпослідовність, що збігається слабко до деякої пари (u, A). Крім того, оскільки

$$\int_G (1 - |u^\lambda|^2)^2\,\mathrm{d}x \le 8\Lambda/\lambda \to 0$$

маємо $u \in H^1(G; \mathbb{S}^1)$. Таким чином $\Phi(u, A, V_0) \in \mathbb{Z}$, разом з тим $|\Phi(u, A, V_0) - \Phi(u^\lambda, A^\lambda, V_0)| \to 0$ коли $\lambda \to \infty$, завдяки неперервності $\Phi(\,\cdot\,, V_0)$ відносно слабкої збіжності. Таким чином доведено (1.5.18), що, в свою чергу, тягне за собою Твердження 1.5.1.

1.5.3 Конструкція тестових пар

Як зазначено вище, основним технічним моментом в доведенні Теореми 1.5.2 є нерівності (1.5.6). Нижче буде наведено детальну конструкцію тестових пар і використано їх для доведення (1.5.6).

Для заданого локального мінімізанта $(u, A) \in \mathcal{J}^{(d)}_{pq}$ функціонала $F_\lambda[u, A]$ в $\mathcal{J}$, конструюємо пару $(w^{(\xi)}, B^{(\xi)}) \in \mathcal{J}^{(d)}_{p(q-1)}$ у вигляді

$$w^{(\xi)} = u\bar{a}e^{\phi/2},\ B^{(\xi)} = \begin{cases} A + \frac{1}{2}\nabla^\perp\phi, \text{ в } G, \\ A + \nabla^\perp\theta + \nabla\chi \text{ в } \omega, \end{cases} \tag{1.5.19}$$

де a – конформне відображення Ω на одиничне коло з нулем в $\xi \in G$, і $\phi \in H^2(G)$, $\theta, \chi \in H^2(\omega)$ – скалярні функції. Будемо вважати, що ϕ, θ, χ залежать від параметру ξ проте для стислості його буде опущено в позначеннях. Для того щоб задовольнити умову $|w^{(\xi)}| = 1$ на ∂G маємо наступні умови

$$\phi = 0 \text{ на } \partial\Omega,\ \phi = -2\log|a| \text{ на } \partial\omega. \tag{1.5.20}$$

Оскільки (точно один) нуль ξ функції a лежить в G, то

$$\deg(w^{(\xi)}, \partial\omega) = p,\ \deg(w^{(\xi)}, \partial\Omega) = q - 1. \tag{1.5.21}$$

Обчислимо $F_\lambda[w^{(\xi)}, B^{(\xi)}]$ за допомогою (1.5.14), (1.5.16),

$$\begin{aligned} F_\lambda[w^{(\xi)}, B^{(\xi)}] =& \pi + F_\lambda[u, A] + 2\int_G \Big|\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{A_2 + iA_1}{2}u\Big|^2 (|a|^2e^\phi - 1)\,\mathrm{d}x \\ &+ \frac{1}{2}\int_G \Big(v\big(\Delta\phi - |u|^2(|a|^2e^\phi - 1)\big) + \frac{1}{4}\big(\Delta\phi - |u|^2(|a|^2e^\phi - 1)\big)^2\Big)\,\mathrm{d}x \\ &+ \frac{\lambda - 1}{8}\int_G \big((|u|^2|a|^2e^\phi - 1)^2 - (|u|^2 - 1)^2\big)\,\mathrm{d}x \\ &+ \frac{1}{2}\int_\omega \big((\Delta\theta + \mathrm{curl}A)^2 - (\mathrm{curl}A)^2\big)\,\mathrm{d}x, \end{aligned} \tag{1.5.22}$$

де $v = \mathrm{curl}A - (|u|^2 - 1)/2$. Наступним кроком розкладемо підінтегральні вирази в останніх двох членах (1.5.22) і скористаємось поточковою рівністю

$$\begin{aligned} 4\Big|\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{A_2 + iA_1}{2}u\Big|^2 (|a|^2e^\phi - 1) =& (-\Delta v + |u|^2 v)(|a|^2e^\phi - 1) \\ &- \frac{\lambda - 1}{2}|u|^2(|u|^2 - 1)(|a|^2e^\phi - 1) \end{aligned}$$

(див. (1.5.12)), в результаті отримуємо

$$\begin{aligned} F_\lambda[w^{(\xi)},B^{(\xi)}] = \pi + F_\lambda[u,A] + \frac{1}{2}\int_G (-\Delta v + |u|^2 v)(|a|^2 e^\phi - 1)\,\mathrm{d}x \\ + \frac{1}{2}\int_G \Big(v\big(\Delta\phi - |u|^2(|a|^2 e^\phi - 1)\big) + \frac{1}{4}(\Delta\phi - |u|^2\big(|a|^2 e^\phi - 1)\big)^2\Big)\,\mathrm{d}x \\ + \frac{\lambda - 1}{8}\int_G |u|^4\big(|a|^2 e^\phi - 1\big)^2\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_\omega \big((\Delta\theta)^2 + 2\Delta\theta\,\mathrm{curl}A\big)\,\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{1.5.23}$$

Виберемо $\phi \in H^2(G)$ як єдиний розв'язок рівняння

$$-\Delta\phi + |u|^2(|a|^2 e^\phi - 1) = 0 \qquad \text{в } G \tag{1.5.24}$$

з крайовими умовами (1.5.20) (відносно існування єдиного розв'язку $\phi \in H^2(G)$, див., наприклад, [50], Теорема 4.3), тоді (1.5.23) зводиться до

$$\begin{aligned} F_\lambda[w^{(\xi)}, B^{(\xi)}] =& \pi + F_\lambda[u,A] + \frac{1}{2}\int_G (-\Delta v + |u|^2 v)(|a|^2 e^\phi - 1)\,\mathrm{d}x \\ &+ \frac{\lambda - 1}{8}\int_G |u|^4(|a|^2 e^\phi - 1)^2\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_\omega \big((\Delta\theta)^2 + 2\Delta\theta\,\mathrm{curl}A\big)\,\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{1.5.25}$$

Будемо вимагати щоб

$$\frac{\partial\theta}{\partial\nu} = \frac{1}{2}\frac{\partial\phi}{\partial\nu} \qquad \text{на } \partial\omega; \tag{1.5.26}$$

це призводить, після інтегрування частинами в (1.5.25), до

$$\begin{aligned} F_\lambda[w^{(\xi)}, B^{(\xi)}] =& \pi + F_\lambda[u,A] + \frac{1}{2}\int_G v(-\Delta(|a|^2 e^\phi) + |u|^2(|a|^2 e^\phi - 1))\,\mathrm{d}x \\ &+ \frac{\lambda - 1}{8}\int_G |u|^4(|a|^2 e^\phi - 1)^2\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_\omega (\Delta\theta)^2\,\mathrm{d}x, \end{aligned} \tag{1.5.27}$$

де використано наступні факти: $v = \mathrm{curl}A$ на $\partial\omega$, $\mathrm{curl}A = \mathrm{Const}$ в $\overline{\omega}$ і

$$\int_{\partial\omega} \frac{\partial|a|^2}{\partial\nu}\frac{\mathrm{d}s}{|a|^2} = \int_\omega \Delta\log|a|^2\,\mathrm{d}x = 0$$

(a є голоморфною функцією без нулів в ω).

Виберемо тепер в якості θ розв'язок рівняння

$$\Delta\theta = \frac{1}{2|\omega|}\int_{\partial\omega}\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\,\mathrm{d}s \qquad \text{in } \omega$$

з крайовими умовами(1.5.26). Для того щоб $B^{(\xi)} \in H^1(\Omega;\mathbb{R}^2)$, виберемо функцію $\chi \in H^2(G)$, що задовольняє крайові умови $\chi = 0$ на $\partial\omega$, $\frac{\partial\chi}{\partial\nu} = -\frac{1}{2}\frac{\partial\phi}{\partial\tau} + \frac{\partial\theta}{\partial\tau}$ on $\partial\omega$ (для визначеності можна також постулювати рівняння $\Delta^2\chi = 0$ в ω). Таким чином, для кожного $\xi \in G$ маємо $(w^{(\xi)}, B^{(\xi)}) \in \mathcal{J}_{p(q-1)}$, і з (1.5.27) випливає

$$F_\lambda[w^{(\xi)}, B^{(\xi)}] = \pi + F_\lambda[u, A] + \frac{1}{2}\int_G v(-\Delta(|a|^2 e^\phi) + |u|^2(|a|^2 e^\phi - 1))\,\mathrm{d}x \\ + \frac{\lambda - 1}{8}\int_G |u|^4(|a|^2 e^\phi - 1)^2\,\mathrm{d}x + \frac{1}{8|\omega|}\Big(\int_{\partial\omega}\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\,\mathrm{d}s\Big)^2. \quad (1.5.28)$$

Далі доведемо, що $F_\lambda[w^{(\xi)}, B^{(\xi)}] < \pi + F_\lambda[u, A]$ коли точка ξ є достатньо близькою до $\partial\Omega$. Для цього спочатку вивчимо асимтотичну поведінку конформного відображення a і розв'язку ϕ задачі (1.5.20), (1.5.24) коли $\xi \to \partial\Omega$.

Лема 1.5.3. *Нехай $\tilde{\xi}$ – (ортогональна) проекція $\xi \in G$ на $\partial\Omega$ і нехай $\delta = |\xi - \tilde{\xi}|$ є достатньо малим. Тоді*

(i) $|\frac{\partial a}{\partial z}(x)| \leq C\delta/(\delta + |x - \tilde{\xi}|)^2$, і $\|1 - |a|^2\|_{L^2(G)} \leq C\delta|\log\delta|^{1/2}$;

(ii) $\|\phi\|_{W^{2,r}(G)} \leq C(r)\delta$ для кожного $1 < r < 2$, і $\|\phi\|_{W^{2,2}(G)} \leq C\delta|\log\delta|^{1/2}$,

де a – едине (з точністю до мультиплікативної сталої з одиничним модулем) конформне відображення Ω на одиничний диск з приписаним нулем в точці ξ, і ϕ – єдиний розв'язок задачі (1.5.20), (1.5.24).

Доведення. Для доведення твердження (i), зазначимо що a можна записати як $a = \sigma(\mathcal{F}(x) - \mathcal{F}(\xi))/(1 - \overline{\mathcal{F}(\xi)}\mathcal{F}(x))$, де $\sigma \in S^1$ – константа і $\mathcal{F}$ – фіксоване конформне відображення Ω на одиничний диск. Тоді перша оцінка в (i) є очевидною. Другу оцінку в (i) доведено в Розділі 8 роботи [37] (див. Підрозділ 1.4.6 дисертації). Доведення (ii) також проводиться як в [37, Розділ 8] (головну роль тут відіграє ланцюг нерівностей $0 \leq 1 - |a|^2 e^\phi \leq 1 - |a|^2$, що доводиться за допомогою принципу максимуму). $\square$

З Леми 1.5.3 випливає, що

$$F_\lambda[w^{(\xi)}, B^{(\xi)}] \le \pi + F_\lambda[u, A] \\ + \frac{1}{2}\int_G v(-\Delta(|a|^2 e^\phi) + |u|^2(|a|^2 e^\phi - 1))\,\mathrm{d}x + O(\delta^2|\log\delta|). \tag{1.5.29}$$

Помітимо, що

$$\Delta(|a|^2 e^\phi) - |u|^2(|a|^2 e^\phi - 1) = |u|^2(|a|^2 e^\phi - 1)^2 \\ + 4\Big|\frac{\partial a}{\partial z}\Big|^2 e^\phi + 4a\overline{\frac{\partial a}{\partial z}} e^\phi \frac{\partial \phi}{\partial z} + 4\bar{a}\frac{\partial a}{\partial z} e^\phi \frac{\partial \phi}{\partial \bar{z}} + |a|^2 e^\phi |\nabla\phi|^2$$

де використано (1.5.24). Тепер скористаємось Лемою 1.5.3 і тим фактом, що $v = 0$ на $\partial\Omega$,

$$\int_G v(\Delta(|a|^2 e^\phi) - |u|^2(|a|^2 e^\phi - 1))\mathrm{d}x = 4\int_G v\Big|\frac{\partial a}{\partial z}\Big|^2\,\mathrm{d}x + O(\delta^2|\log\delta|). \tag{1.5.30}$$

Підставимо $\tilde{v} = \frac{\partial v}{\partial \nu}(\tilde{\xi})\nu(\tilde{\xi})\cdot(x - \tilde{\xi})$ замість v в правій частині (1.5.30) (зазначимо, що $|v - \tilde{v}| \le C|x - \tilde{\xi}|^2$), в результаті маємо

$$4\int_G v\Big|\frac{\partial a}{\partial z}\Big|^2\,\mathrm{d}x = 4\int_\Omega \tilde{v}\Big|\frac{\partial a}{\partial z}\Big|^2\,\mathrm{d}x + O(\delta^2|\log\delta|). \tag{1.5.31}$$

Насамкінець, оскільки $\Delta\log|a|^2 = 4\pi\delta_\xi(x)$ в Ω (де $\delta_\xi(x)$ – Дельта-функція Дірака з центром в ξ) і $|a|^2 = 1$ на $\partial\Omega$, у той час як $\Delta\tilde{v} = 0$ в Ω, то

$$4\int_\Omega \tilde{v}\Big|\frac{\partial a}{\partial z}\Big|^2\mathrm{d}x = \int_\Omega \tilde{v}\Delta|a|^2\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega}\tilde{v}\frac{\partial|a|^2}{\partial\nu}\,\mathrm{d}s = \int_{\partial\Omega}\tilde{v}\frac{\partial\log|a|^2}{\partial\nu}\,\mathrm{d}s = 4\pi\tilde{v}(\xi). \tag{1.5.32}$$

Об'єднуючи (1.5.29)–(1.5.32) знаходимо

$$F_\lambda[w^{(\xi)}, B^{(\xi)}] \le \pi + F_\lambda[u, A] + 2\pi\frac{\partial v}{\partial\nu}(\tilde{\xi})\delta + O(\delta^2|\log\delta|), \tag{1.5.33}$$

де $\tilde{\xi}$ – (ортогональна) проекція ξ на $\partial\Omega$. З (1.5.33) випливає шукана нерівність $F_\lambda[w^{(\xi)}, B^{(\xi)}] < \pi + F_\lambda[u, A]$ для достатньо малих δ, за умови, що $\tilde{\xi}$ лежить на частині $\partial\Omega$ де $\frac{\partial v}{\partial\nu} < 0$. У наступному результаті встановлюється існування таких точок для достатньо великих λ.

Лема 1.5.4. *Нехай пара* $(u^{(\lambda)}, A^{(\lambda)})$ *є локальним мінімізантом* $F_\lambda[u, A]$ *в* $\mathcal{J}$. *Припустимо, що* $(u^{(\lambda)}, A^{(\lambda)}) \in \mathcal{J}^{(d)} = \bigcup_{p,q\in\mathbb{Z}} \mathcal{J}^{(d)}_{p,q}$ *(де* d *– фіксоване натуральне число) і* $F_\lambda[u^{(\lambda)}, A^{(\lambda)}] \leq \Lambda$ *для деякого фіксованого* $\Lambda > 0$. *тоді* $h^{(\lambda)} = \mathrm{curl} A^{(\lambda)}$ *задовольняє*

$$\frac{\partial h^{(\lambda)}}{\partial \nu}(\xi^{(\lambda)}) < 0 \text{ } for \text{ } some \text{ } \xi^{(\lambda)} \in \partial\Omega$$

де параметр λ *є достатньо великим,* $\lambda \geq \lambda_2(\Lambda)$.

Доведення. Припустимо, від супротивного, що $\frac{\partial h^{(\lambda)}}{\partial \nu} \geq 0$ на $\partial\Omega$ для підпослідовності $\lambda = \lambda_k$, $\lambda_k \to \infty$.

Оскільки $\mathrm{div} A^{(\lambda)} = 0$ в Ω і $A^{(\lambda)} \cdot \nu = 0$ на $\partial\Omega$, маємо $\|A^{(\lambda)}\|_{H^1(\Omega;\mathbb{R}^2)} \leq C\|h\|_{L^2(\Omega)}$. Звідси витікає, що $\|A^{(\lambda)}\|_{H^1(\Omega;\mathbb{R}^2)} \leq C$ завдяки оцінці $F_\lambda[u^{(\lambda)}, A^{(\lambda)}] \leq \Lambda$. З цих двох оцінок знаходимо нерівність $\|u^{(\lambda)}\|_{H^1(G;\mathbb{C})} \leq C$, де C не залежить від λ. Таким чином, з точністю до підпослідовності, $(u^{(\lambda)}, A^{(\lambda)}) \to (u, A)$ слабко в $H^1(G;\mathbb{C}) \times H^1(\Omega;\mathbb{R}^2)$ коли $\lambda \to \infty$, і $|u| = 1$ майже всюду в G (оскільки $\||u^{(\lambda)}|^2 - 1\|^2_{L^2(G)} \leq 8\Lambda/\lambda \to 0$).

З (1.5.9) випливає, що

$$-\Delta h^{(\lambda)} + h^{(\lambda)} = 2\frac{\partial u^{(\lambda)}}{\partial x_1} \times \frac{\partial u^{(\lambda)}}{\partial x_2} + \mathrm{curl}\big((1 - |u^{(\lambda)}|^2)A^{(\lambda)}\big) \text{ в } G, \tag{1.5.34}$$

також маємо $h^{(\lambda)} = 0$ на $\partial\Omega$ і $h^{(\lambda)} = \mathrm{const}$ в $\overline{\omega}$. Нехай $V \in C^1(\overline{\Omega})$ є єдиним розв'язком рівняння

$$\begin{cases} -\Delta V + V = 0 \text{ в } G, \\ V = g \text{ на } \partial\Omega, \ V = 0 \text{ на } \partial\omega, \end{cases} \tag{1.5.35}$$

де $g \in C^1(\partial\Omega)$ – деяка невід'ємна функція. Помножимо (1.5.34) на V і проінтегруємо результат по G, використовуючи інтегрування частинами,

$$-\int_{\partial\Omega} \frac{\partial h^{(\lambda)}}{\partial \nu} g \,\mathrm{d}s = \int_{\partial\omega} \frac{\partial V}{\partial \nu} h^{(\lambda)} \,\mathrm{d}s + \int_{\partial\Omega} u^{(\lambda)} \times \frac{\partial u^{(\lambda)}}{\partial \tau} g \,\mathrm{d}s - 2\pi\Phi(u^{(\lambda)}, A^{(\lambda)}, V)$$

Оскільки $u^{(\lambda)} \to u$ слабко в $H^{1/2}(\partial\Omega; S^1)$, то, згідно з Лемою 3.2 в [146], існує підпослідовність, така що для кожної тестової функції $g \in C^1(\partial\Omega)$

$$\int_{\partial\Omega} u^{(\lambda)} \times \frac{\partial u^{(\lambda)}}{\partial \tau} g \,\mathrm{d}s \to \int_{\partial\Omega} u \times \frac{\partial u}{\partial \tau} g \,\mathrm{d}s + 2\pi \sum_{\mathrm{i}} D_k g(\alpha_k),$$

де точки $\alpha_k \in \partial\Omega$ і цілі числа D_k не залежать від g. Виберімо тепер невід'ємну функція $g \not\equiv 0$, таку що $g(\alpha_k) = 0$ для всіх α_k. Тоді маємо

$$\int_{\partial\Omega} u^{(\lambda)} \times \frac{\partial u^{(\lambda)}}{\partial \tau} g \, \mathrm{d}s - 2\pi\Phi(u^{(\lambda)}, A^{(\lambda)}, V) \to \int_{\partial\Omega} u \times \frac{\partial u}{\partial \tau} g \, \mathrm{d}s - 2\pi\Phi(u, A, V)$$
$$= 2\int_G \frac{\partial u}{\partial x_1} \times \frac{\partial u}{\partial x_2} V \, \mathrm{d}x = 0,$$

де використано неперервність $\Phi(\,\cdot\,, V)$ відносно склабкої збіжності в $H^1(G;\mathbb{C}) \times H^1(\Omega;\mathbb{R}^2)$ і поточкову рівність $\frac{\partial u}{\partial x_1} \times \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0$ майже всюду в G (вона є справедливоюдля всіх $u \in H^1(G;S^1)$). Таким чином

$$0 \le \int_{\partial\Omega} \frac{\partial h^{(\lambda)}}{\partial \nu} g \, \mathrm{d}s = -\int_{\partial\omega} \frac{\partial V}{\partial \nu} h^{(\lambda)} \, \mathrm{d}s + o(1) \text{ коли } \lambda \to \infty.$$

З іншогог боку, оскільки $g \ge 0$ і $g \not\equiv 0$, застосовуючи принцип максимуму і Лему Хопфа до (1.5.35), отримуємо $\frac{\partial V}{\partial \nu} > 0$ на $\partial\omega$. Це веде до протиріччя, якщо буде показано, що $\int_{\partial\omega} h^{(\lambda)} \, \mathrm{d}s \ge c > 0$ для достатньо великих λ. Зазначимо, що з огляду на (1.5.9),

$$2\pi\Phi(u^{(\lambda)}, A^{(\lambda)}, V_0) = -\int_G \nabla h^{(\lambda)} \cdot \nabla V_0 \, \mathrm{d}x + \int_G A^{(\lambda)} \cdot \nabla^\perp V_0 \, \mathrm{d}x$$
$$= \int_{\partial\omega} \frac{\partial V_0}{\partial \nu} h^{(\lambda)} \, \mathrm{d}s + \int_G h^{(\lambda)} \Delta V_0 \, \mathrm{d}x + \int_G A^{(\lambda)} \cdot \nabla^\perp V_0 \, \mathrm{d}x.$$

Оскільки V_0 є розв'язком (1.5.4), маємо

$$2\pi\Phi(u^{(\lambda)}, A^{(\lambda)}, V_0) = \int_{\partial\omega} \frac{\partial V_0}{\partial \nu} h^{(\lambda)} \, \mathrm{d}s + \int_G h^{(\lambda)}(V_0 - 1) \, \mathrm{d}x + \int_G A^{(\lambda)} \cdot \nabla^\perp V_0 \, \mathrm{d}x$$
$$= \int_{\partial\omega} \frac{\partial V_0}{\partial \nu} h^{(\lambda)} \, \mathrm{d}s + \int_G \operatorname{curl}\big((V_0 - 1)A^{(\lambda)}\big) \, \mathrm{d}x. \quad (1.5.36)$$

Користуючись формулою Стокса два рази отримуємо

$$\int_G \operatorname{curl}\big((V_0 - 1)A^{(\lambda)}\big) \, \mathrm{d}x = \int_{\partial\omega} A^{(\lambda)} \cdot \tau \, \mathrm{d}s = \int_\omega h^{(\lambda)} \, \mathrm{d}x = \frac{|\omega|}{|\partial\omega|} \int_{\partial\omega} h^{(\lambda)} \, \mathrm{d}s,$$

у той час як

$$\int_{\partial\omega} \frac{\partial V_0}{\partial \nu} h^{(\lambda)} \, \mathrm{d}s = \int_{\partial\omega} \frac{\partial V_0}{\partial \nu} \, \mathrm{d}s \int_{\partial\omega} h^{(\lambda)} \frac{\mathrm{d}s}{|\partial\omega|}$$
$$= \int_G \big(|\nabla V_0|^2 + (V_0 - 1)^2\big) \, \mathrm{d}x \int_{\partial\omega} h^{(\lambda)} \frac{\mathrm{d}s}{|\partial\omega|}.$$

Таким чином, переходом до границі в (1.5.36) знаходимо

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_{\partial\omega} h^{(\lambda)}\,\mathrm{d}s = 2\pi d|\partial\omega|/\Big(|\omega| + \int_G \big(|\nabla V_0|^2 + (V_0-1)^2\big)\,\mathrm{d}x\Big) > 0,$$

де використано той факт, що $\Phi(u^{(\lambda)}, A^{(\lambda)}, V_0) \to d$ коли $\lambda \to \infty$. □

Зауваження 1.5.5. Таким самим способом як в Лемі 1.5.4 можна показати, що для достатньо великих λ $\frac{\partial h^{(\lambda)}}{\partial \nu} > 0$, в деякій точці $\partial\omega$.

Наслідок 1.5.6. *Якщо точка $\xi^{(\lambda)}$ є такою як в Лемі 1.5.4, тоді $\frac{\partial v^{(\lambda)}}{\partial \nu}(\xi^{(\lambda)}) < 0$, де $v^{(\lambda)} = \mathrm{curl}A^{(\lambda)} - (|u^{(\lambda)}|^2 - 1)/2$.*

Доведення. Оскільки $|u^{(\lambda)}| = 1$ на ∂G і $|u^{(\lambda)}| \le 1$ в G, маємо $\frac{\partial |u^{(\lambda)}|^2}{\partial \nu}(\xi^{(\lambda)}) \ge 0$. □

Для $\xi \in G$ достатньо близьких до точки $\xi^{(\lambda)}$, де $\frac{\partial v^{(\lambda)}}{\partial \nu}(\xi^{(\lambda)}) < 0$, з огляду на (1.5.33) і Наслідок 1.5.6 маємо $F_\lambda[w^{(\xi)}, B^{(\xi)}] < \pi + F_\lambda[u, A]$. З іншого боку, $(w^{(\xi)}, B^{(\xi)}) \in \mathcal{J}_{p(q-1)}$ і $(w^{(\xi)}, B^{(\xi)})$ слабко збігається to $(\gamma u, A)$ ($\gamma = \mathrm{Const} \in \mathbb{S}^1$) коли $\xi \to \partial\Omega$, з точністю до підпослідовності. Отже $\Phi(w^{(\xi)}, B^{(\xi)}, V_0) \to \Phi(u, A, V_0)$. Таким чином для ξ достатньо близького до $\xi^{(\lambda)}$ є справедливим наступне твердження, якщо $d - 1/2 < \Phi(u, A, V_0) < d + 1/2$ тоді $(w^{(\xi)}, B^{(\xi)}) \in \mathcal{J}^{(d)}_{p(q-1)}$. Так само можна показати, що існує пара з $\mathcal{J}^{(d)}_{(p-1)q}$ на якій значення функціоналу Гінзбурга-Ландау є меншим $\pi + F_\lambda[u, A]$. Ці результати зведено до наступної Леми.

Лема 1.5.7. *Для заданих цілих чисел $d > 0$, p і q, якщо $m_\lambda(p, q, d)$ досягається і параметр λ є достатньо великим, $\lambda \ge \lambda_3(p, q, d)$, тоді $m_\lambda(p1, q, d) < m_\lambda(p, q, d) + \pi$ і $m_\lambda(p, q-1, d) < m_\lambda(p, q, d) + \pi$.*

Доведення. Неважко знайти оцінку $m_\lambda(p, q, d) \le \Lambda(p, q, d)$ з $\Lambda(p, q, d)$, що не залежить від λ (дивись, наприклад, [30]). Тоді результат, що отримано вище, разом з Твердженням 1.5.1 доводять твердження Леми. □

1.5.4 Існування мінімізантів

Для початку сформулюємо наступний результат, який є важливим для доведення Теореми 1.5.2.

Лема 1.5.8. *([35]) Нехай $(u^{(n)}, A^{(n)}) \in \mathcal{J}_{pq}$ – послідовність, що збігається до (u, A) слабко в $H^1(G;\mathbb{C}) \times H^1(\Omega;\mathbb{R}^2)$. Тоді*

$$\liminf \frac{1}{2}\int_G |\nabla u^{(n)} - iA^{(n)}u^{(n)}|^2 \,\mathrm{d}x \geq \pi(|p - \deg(u, \partial\omega)| + |q - \deg(u, \partial\Omega)|) + \frac{1}{2}\int_G |\nabla u - iAu|^2 \,\mathrm{d}x.$$

Розглянемо тепер наступну допоміжну задачу мінімізації

$$M_\lambda(d) := \inf\{F_\lambda[u, A];\ (u, A) \in \mathcal{J}^{(d)}\}, \tag{1.5.37}$$

де $\mathcal{J}^{(d)} = \bigcup_{p,q\in\mathbb{Z}} \mathcal{J}^{(d)}_{pq} = \{(u, A) \in \mathcal{J}; d - 1/2 \leq \Phi(u, A, V_0) \leq d + 1/2\}$. Зазначимо, що $M_\lambda(d)$ завжди досягається. Дійсно, функціонал $\Phi(\,\cdot\,, V_0)$ є неперервним відносно слабкої збіжності (в $H^1(G;\mathbb{C}) \times H^1(\Omega;\mathbb{R}^2)$) і $\mathcal{J}^{(d)} \neq \emptyset$ ($\mathcal{J}^{(d)}$ містить, наприклад, пари $(u, 0)$ з $u \in H^1(G; S^1)$ і $\deg(u, \partial\Omega) = d$). Таким чином з довільної мінімізуючої послідовністі $(u^{(n)}, A^{(n)})$ можна виділити підпослідовність яка слабко збігається в $H^1(G;\mathbb{C}) \times H^1(\Omega;\mathbb{R}^2)$ до мінімізанта $(u, A) \in \mathcal{J}^{(d)}$.

Лема 1.5.9. *Для достатньо великих λ, $\lambda \geq \lambda_4(d)$, $M_\lambda(d) = m_\lambda(d, d, d)$ і мінімізанти (1.5.1) (з $p = q = d$) та (1.5.37) співпадають.*

Доведення. Очевидно, $M_\lambda(d) \leq m_\lambda(d, d, d)$. Припустимо, від супротивного, що для послідовності $\lambda = \lambda_k$, $\lambda_k \to \infty$, виконується наступне

$$M_\lambda(d) = F_\lambda[u^{(\lambda)}, A^{(\lambda)}] \text{ і } (u^{(\lambda)}, A^{(\lambda)}) \in \mathcal{J}^{(d)} \setminus \mathcal{J}^{(d)}_{dd}. \tag{1.5.38}$$

Іншими словами, або $\deg(u^{(\lambda)}, \partial\Omega) \neq d$ або $\deg(u^{(\lambda)}, \partial\omega) \neq d$. Будемо припускати, що $\mathrm{div}A^{(\lambda)} = 0$ in Ω і $A^{(\lambda)} \cdot \nu = 0$ на $\partial\Omega$ (кулонівська калібровка). Завдяки очевидній оцінці

$$M_\lambda(d) \leq M_\infty(d) := \inf\Big\{\frac{1}{2}\int_G |\nabla u - iAu|^2 \,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_\Omega (\mathrm{curl}A)^2 \,\mathrm{d}x;\ (u, A) \in \mathcal{J}^{(d)},\ u \in H^1(G; S^1)\Big\} < \infty \tag{1.5.39}$$

можна виділити підпослідовність, таку що $u^{(\lambda)} \to u$ слабко в $H^1(G;\mathbb{C})$, $A^{(\lambda)} \to A$ слабко в $H^1(\Omega;\mathbb{R}^2)$ as $\lambda \to \infty$, і $\deg(u^{(\lambda)}, \partial\Omega) = q$, $\deg(u^{(\lambda)}, \partial\omega) = p$ з цілими p,

q, що не залежать від λ. Зазначимо, що $(u, A) \in \mathcal{J}^{(d)}$ і $u \in H^1(G; S^1)$, отже

$$F_\lambda[u^{(\lambda)}, A^{(\lambda)}] \leq M_\lambda(d) \leq F_\lambda[u, A] = \frac{1}{2}\int_G |\nabla u - iAu|^2 \,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_\Omega (\mathrm{curl} A)^2 \,\mathrm{d}x,$$

у той час як

$$\liminf_{\lambda\to\infty} F_\lambda[u^{(\lambda)}, A^{(\lambda)}] \geq \pi(|d-p| + |d-q|) + \frac{1}{2}\int_G |\nabla u - iAu|^2 \,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_\Omega (\mathrm{curl} A)^2 \,\mathrm{d}x,$$

що випливає з Леми 1.5.8. Таким чином $p = q = d$ для достатньо великих λ, тобто $u^{(\lambda)} \in \mathcal{J}_{dd}^{(d)}$, це протирічить (1.5.38). □

Таким чином Лема 1.5.9 доводить, що $m_\lambda(d, d, d)$ завжди досягається для $\lambda \geq \lambda_4(d)$. Більш того, внаслідок Твердження 1.5.1 кожен мінімізант (1.5.1) з $p = q = d$ є локальним мінімізантом $F_\lambda[u, A]$ в $\mathcal{J} \times H^1(\Omega; \mathbb{R}^2)$ коли $\lambda \geq \lambda_0(M_\infty(d)+1)$, де $M_\infty(d)$ визначено в (1.5.39) (зазначимо, що $m_\lambda(d, d, d) < M_\infty(d) + 1$).

Далі доводиться твердження про те, що інфімум в (1.5.1) досягається.

Твердження 1.5.10. *Для кожного $K = 0, 1, 2, \ldots$ існує $\lambda_5 = \lambda_5(K) > 0$, таке що для всіх $\lambda \geq \lambda_5$ і всіх цілих p і q, що задовольняють $p \leq d$, $q \leq d$, і $|q - d| + |p - d| \leq K$*

(i) інфімум $m_\lambda(p, q, d)$ досягаєтьcя,

(ii) якщо $p \leq p' \leq d$, $q \leq q' \leq d$ і або $p \neq p'$ або $q \neq q'$, тоді

$$m_\lambda(p, q, d) < m_\lambda(p', q', d) + \pi(|p - p'| + |q - q'|).$$

Доведення. Вже доведено, що Твердження 1.5.10 є справедливим для $K = 0$ (база індукції). Припустимо тепер, що (i) і (ii) є справедливими для заданого $K \geq 0$. Тоді, внаслідок Леми 1.5.7, (ii) є справедливим для $K + 1$ замість K, коли $\lambda \geq \max\big\{\lambda_5(K), \max\{\lambda_3(p, q, d);\ |q - d| + |p - d| = K, p \leq d, q \leq d\}\big\}$.

Для доведення (i) розглянемо мінімізуючу послідовність $(u^{(n)}, A^{(n)})$ для задачі 1.5.1). Мінімізуюча послідовність існує оскільки $m_\lambda(p, q, d) < m_\lambda(d, d, d) +$

$\pi(|p-d|+|q-d|) \le M_\infty(d)+\pi(K+1)$. З цієї оцінки витікає, що, з точністю до підпослідовності, $u^{(n)} \rightharpoonup u \in \mathcal{J}$ слабко в $H^1(G;\mathbb{C})$ і $A^{(n)} \rightharpoonup A$ слабко в $H^1(\Omega;\mathbb{R}^2)$. Внаслідок Леми 1.5.8 маємо

$$m_\lambda(p,q,d) = \lim_{n\to\infty} F_\lambda[u^{(n)},A^{(n)}] \ge F_\lambda[u,A]+\pi(|q-\deg(u,\partial\Omega)|+|p-\deg(u,\partial\omega)|). \tag{1.5.40}$$

Покажемо, що $\deg(u,\partial\Omega)=q$ і $\deg(u,\partial\omega)=p$. Для цього знадобиться наступний результат.

Лема 1.5.11. *Для кожного $\Lambda>0$ існує $\lambda_6=\lambda_6(\Lambda)$, таке що $m_\lambda(p,q,d) \ge M_\infty(d)+\pi(|p-d|+|q-d|-1/2)$ коли $\lambda \ge \lambda_6$ і $M_\infty(d)+\pi(|p-d|+|q-d|) \le \Lambda$.*

З цієї Леми і строгої нерівності (1.5.40) випливає, що для $\lambda \ge \lambda_6$

$$\begin{aligned} m_\lambda(p,q,d) &\ge m_\lambda(\deg(u,\partial\omega),\deg(u,\partial\Omega),d)+\pi(|q-\deg(u,\partial\Omega)|+|p-\deg(u,\partial\omega)|) \\ &\ge M_\infty(d)+\pi(|p-\deg(u,\partial\omega)|)+|\deg(u,\partial\omega)-d|) \\ &\qquad +\pi(|q-\deg(u,\partial\Omega)|+|\deg(u,\partial\Omega)-d|))-\pi/2 \end{aligned}$$

З іншого боку, твердження (ii) гарантує, що $m_\lambda(p,q,d) < M_\infty(d)+\pi(|p-d|+|q-d|)$, таким чином $p \le \deg(u,\partial\omega) \le d$ і $q \le \deg(u,\partial\Omega) \le d$. Далі, якщо припустити, що $\deg(u,\partial\Omega) \ne q$ або $\deg(u,\partial\omega) \ne p$ тоді з (1.5.40) випливає, що $m_\lambda(p,q,d) \ge m_\lambda(\deg(u,\partial\omega),\deg(u,\partial\Omega),d)+\pi(|q-\deg(u,\partial\Omega)|+|p-\deg(u,\partial\omega)|)$, але це протирічить (ii). Таким чином $m_\lambda(p,q,d)$ завжди досягається для достатньо великих λ коли $p \le d$, $q \le d$, і $|q-d|+|p-d| \le K+1$. Твердження 1.5.10 доведено. □

Доведення Леми 1.5.11. Припустимо, від супротивного, що $m_\lambda(p,q,d) < M_\infty(d)+\pi(|p-d|+|q-d|-1/2)$ для деяких цілих p, q, d і послідовності $\lambda=\lambda_k$, $\lambda_k\to\infty$. Іншими словами, існують пари $(u^{(\lambda)},A^{(\lambda)}) \in \mathcal{J}^{(d)}_{pq}$, такі що $F_\lambda[u^{(\lambda)},A^{(\lambda)}] < M_\infty(d)+\pi(|p-d|+|q-d|-1/2)$ для $\lambda=\lambda_k$. Оскільки значення функціоналу $F_\lambda[u^{(\lambda)},A^{(\lambda)}]$ є обмеженими, то, з точністю до підпослідовності $u^{(\lambda)} \rightharpoonup u$ слабко в $H^1(G;\mathbb{C})$, $A^{(\lambda)} \rightharpoonup A$ слабко в $H^1(\Omega;\mathbb{R}^2)$. Крім того,

$u \in \mathcal{J}^{(d)} \cap H^1(G; S^1)$, отже

$$\frac{1}{2}\int_G |\nabla u - iAu|^2 \, \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_\Omega (\mathrm{curl} A)^2 \, \mathrm{d}x \geq M_\infty(d).$$

З іншого боку, внаслідок Леми 1.5.8 маємо

$$\liminf_{\lambda\to\infty} F_\lambda[u^{(\lambda)}, A^{(\lambda)}] \geq \frac{1}{2}\int_G |\nabla u - iAu|^2 \, \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_\Omega (\mathrm{curl} A)^2 \, \mathrm{d}x + \pi(|p-d| + |q-d|),$$

і таким чином отримуємо протиріччя з оцінкою $F_\lambda[u^{(\lambda)}, A^{(\lambda)}] < M_\infty(d) + \pi(|p - d| + |q - d| - 1/2)$. □

1.6 Немінізаційні критичні точки

У випадку, коли область Ω – диск, легко бачити, що для всіх $\varepsilon > 0$ функціонал (1.2.3) має критичні точки вигляду $u = \rho(r)e^{i\varphi}$ (де r, φ – полярні координати), що задовольняють (1.2.2) і мають одиничний степінь на межі. Для довільної однозв'язної області, що не має радіальної симетрії, існування критичних точок є більш складним питанням. У цьому підрозділі буде, зокрема, доведено наступний результат.

Теорема 1.6.1. *Нехай Ω – довільна обмежена гладка однозв'язна область в $\mathbb{R}^2$. Для достатньо великих $\varepsilon > 0$ існують критичні точки функціонала* (1.2.3) *в просторі* (1.2.4)*, що мають одиничний степінь на межі.*

Скористаємось конформним відображенням $\mathcal{F} : \Omega \to \mathbb{D}$ для зведення задачі в однозв'язній області Ω загального вигляду до одиничного диску $\mathbb{D}$. Визначимо $w = \mathrm{Jac}\ \mathcal{F}^{-1} \in C^\infty(\overline{\mathbb{D}}; (0, +\infty))$ і $\beta = \dfrac{1}{\varepsilon^2} w$. Тоді дослідження функціоналу (1.2.3) з крайовою умовою (1.0.2) на межі $\partial\Omega$ зводиться до вивчення функціонала

$$\mathcal{E}_\beta(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{D}} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{4}\int_{\mathbb{D}} \beta(x)(1 - |u|^2)^2 dx, \qquad (1.6.1)$$

в просторі

$$\mathcal{J} = \Cup_{d\in\mathbb{Z}} \mathcal{J}_d, \quad \mathcal{J}_d = \left\{ u \in H^1(\mathbb{D}; \mathbb{C});\ |u| = 1 \text{ на } \partial\mathbb{D}, \deg\ (u, \partial\mathbb{D}) = d \right\}. \qquad (1.6.2)$$

Буде також розглянуто функціонал енергії $\mathcal{E}_\beta$ для більш загальних вагових функцій β. У подальшому вважаємо, що β – обмежена функція, $\beta \geq 0$.

Критичні точки $\mathcal{E}_\beta$ в просторі $\mathcal{J}$ є розв'язками задачі

$$\begin{cases} -\Delta u = \beta\ u(1-|u|^2) \text{ в } \mathbb{D}, \\ |u| = 1 \text{ на } \partial\mathbb{D}, \\ \displaystyle\int_{\mathbb{D}} (u \times \nabla u) \cdot \nabla \zeta dx = 0 \quad \forall \zeta \in H^1(\mathbb{D}). \end{cases} \tag{1.6.3}$$

Остання умова є в цій задачі слабким формулюванням умови $u \times \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ на межі і задача (1.6.3) є квівалентною наступній:

$$\begin{cases} -\Delta u = \beta\ u(1-|u|^2) \text{ в } \mathbb{D}, \\ |u| = 1 \text{ на } \partial\mathbb{D}, \\ u \times \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ на } \partial\mathbb{D}. \end{cases} \tag{1.6.4}$$

Довільний розв'язок $u \in \mathcal{J}$ цієї задачі належить до $W^{2,p}(\mathbb{D})$, $\forall p \in [1, \infty)$, отже $u \in C^1(\overline{\mathbb{D}})$, і $u \in C^\infty(\overline{\mathbb{D}})$ якщо $\beta \in C^\infty(\overline{\mathbb{D}})$.

Як і раніше, для вивчення критичних точок функціонала $\mathcal{E}_\beta$ будемо користуватися Лемою 1.2.8 ([35]), точніше наступним її аналогом для загальної багатозв'язної області Ω:

Лема 1.6.2. *Нехай $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ – обмежена гладка область, і нехай Γ_j, $j = 1 \ldots k$ позначають зв'язні компоненти межі $\partial\Omega$. Розглянемо послідовність функцій $(u_n) \subset H^1(\Omega; \mathbb{C})$, таких що $u_n \rightharpoonup u$ слабко в $H^1(\Omega)$, $|u_n| = 1$ на $\partial\Omega$,* $\deg\ (u_n, \Gamma_j) \equiv d_j$ *(не залежать від n) . Тоді*

$$\liminf\ \mathcal{E}_\beta(u_n) \geq \mathcal{E}_\beta(u) + \pi \sum_{j=1}^{k} |d_j - \deg\ (u, \Gamma_j)|. \tag{1.6.5}$$

Наступний результат містить оцінки знизу для інтеграла Діріхле в однозв'язних областях через степінь відображення на межі.

Лема 1.6.3. *Нехай $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ – обмежена гладка однозв'язна область, і $u \in H^1(\Omega; \mathbb{C})$. Тоді*

1. *Якщо* $|u| = 1$ *на* $\partial\Omega$,

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 dx \geq 2\pi |\deg\ g(u, \partial\Omega)|. \tag{1.6.6}$$

2. *Якщо* $|u| \geq \rho > 0$ *на* $\partial\Omega$,

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 dx \geq 2\pi\rho^2 |\deg\ (u, \partial\Omega)|. \tag{1.6.7}$$

Доведення. Перша оцінка виводиться за допомогою поточкової нерівностії $2|\operatorname{Jac}\ u| \leq |\nabla u|^2$,

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 dx \geq 2\left|\int_\Omega \operatorname{Jac}\ u\, dx\right| = 2\pi |\deg\ (u, \partial\Omega)|.$$

Друга оцінка витікає з першої, якшо застосувати (1.6.6) до функції $\Psi(u)$, де

$$\Psi(z) = \begin{cases} z/\rho, & \text{якщо } |z| \leq \rho \\ z/|z|, & \text{якщо } |z| > \rho. \end{cases}$$ □

1.6.1 Критичні точки функціонала $\mathcal{E}_0$

Нагадаємо, що Бляшке добуток – функція вигляду

$$B_{\alpha,a_1,\ldots,a_d}(z) = \alpha \prod_{j=1}^{d} \frac{z - a_j}{1 - \overline{a_j} z}, \quad z \in \overline{\mathbb{D}},\ d \in \mathbb{N}^*,\ \alpha \in \mathbb{S}^1,\ a_j \in \mathbb{D}, \forall\, j = 1 \ldots d,$$

більш точно, будемо називати такий добуток d-Бляшке добудок. В спеціальному випадку $d = 1$, 1-Бляшке добуток зводиться до конформного відображення Мебіуса

$$M_{\alpha,a}(z) = \alpha \frac{z - a}{1 - \overline{a} z}, \quad z \in \overline{\mathbb{D}}, \alpha \in \mathbb{S}^1,\ a \in \mathbb{D}.$$

Для зручності введемо позначення $M_a = M_{1,a}$ і звуження M_a на $\mathbb{S}^1$ будемо позначати наступним чином:

$$N_a : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1,\ N_a(z) = M_a(z), \quad z \in \mathbb{S}^1. \tag{1.6.8}$$

Лема 1.6.4. *Для* $\beta = 0$ *функція* u *мінімізує* $\mathcal{E}_0$ *в* $\mathcal{J}_d$ *тоді і тільки тоді, коли* u *є* d*-Бляшке добутком.*

Доведення. Оскільки $|\nabla u|^2 = 2\,\mathrm{Jac}\ \ u + 4\left|\frac{\partial u}{\partial \overline{z}}\right|^2$, маємо

$$\mathcal{E}_0(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{D}} |\nabla u|^2 dx = \int_{\mathbb{D}} \mathrm{Jac}\ \ u dx + 2\int_{\mathbb{D}} \left|\frac{\partial u}{\partial \overline{z}}\right|^2 dx \geq \pi \deg\,(u, \mathbb{S}^1) = \pi d. \quad (1.6.9)$$

Звідси кожний d-Бляшке добуток є мінімізантом і кожний мінімізант є голоморфною функцією. З іншого боку мінімізанти є гладкими, зокрема

$$\lim_{|z|\to 1} |u(z)| = 1. \quad (1.6.10)$$

Для завершення доведення Леми 1.6.4 достатньо скомбінувати (1.6.10) з голоморфністю u і скористатися таким добре відомим результатом: нехай $u \in \mathrm{Hol}\,(\mathbb{D})$[1], тоді

$$\lim_{|z|\to 1} |u(z)| = 1 \text{ рівномірно } \iff u \text{ є Бляшке добутком.} \quad (1.6.11)$$

Для повноти нагадаємо доведення цього факту. Нехай $z_1, \ldots, z_d$ – нулі u в $\mathbb{D}$, з урахуванням кратності (їх скінчене число внаслідок (1.6.11)). Покладемо $v(z) = \prod_{j=1}^{d} \frac{z - z_j}{1 - \overline{z_j} z}$, $w = \frac{u}{v} \in \mathrm{Hol}\,(\mathbb{D})$. Тоді w не має нулів в $\mathbb{D}$ і $\lim_{|z|\to 1} |w(z)| = 1$. Таким чином $w(z)$ є константною функцією, тобто $u = \alpha v$ для деякого $\alpha \in \mathbb{S}^1$. □

Наслідок 1.6.5. *Нехай $g \in H^{1/2}(\mathbb{S}^1; \mathbb{S}^1)$ має степінь відображення $d > 0$ на межі. Тоді $|g|^2_{H^{1/2}} \geq \pi d$, і риність справджується тоді і тільки тоді коли g є d-Бляшке добутком.*

Зафіксуємо тепер гладку однозвязну обмежену область Ω і конформне відображення $\Phi : \Omega \to \mathbb{D}$. Визначимо (узагальнений) d-Бляшке добуток [2] формулою

$$B_{\alpha, a_1, \ldots, a_d, \Phi}(z) = \alpha \prod_{j=1}^{d} \frac{\Phi(z) - a_j}{1 - \overline{a_j}\Phi(z)}, \quad z \in \overline{\Omega},\, d \in \mathbb{N}^*,\, \alpha \in \mathbb{S}^1,\ a_j \in \mathbb{D},\, \forall\, j = 1, \ldots d,$$

і (узагальнене) перетворення Мебіуса:

$$M_{\alpha, a, \Phi}(z) = \alpha \frac{\Phi(z) - a}{1 - \overline{a}\Phi(z)}, \quad z \in \overline{\Omega},\, \alpha \in \mathbb{S}^1,\ a \in \mathbb{D}.$$

[1] $\mathrm{Hol}\,(\Omega)$ позначає клас функцій голоморфних в Ω.

[2] В Ω і відносно Φ, проте це буде розумітись за умовчанням в подальшому.

Користуючись Лемою 1.6.4 і інваріантністю інтегралу Діріхле отримуємо наступний результат.

Наслідок 1.6.6. *Мінімізанти E_∞ в $\mathcal{J}_d$ є в точності d-Бляшке добутки.*

З наступного результату випливає, зокрема, що інфімум E_ε в $\mathcal{J}_d$ не досягається для $\varepsilon < \infty$.

Лема 1.6.7. *Нехай $\beta \not\equiv 0$. Тоді функціонал F_β ніколи не досягає мінімального значення в $\mathcal{J}_d$ для $d \neq 0$.*

Доведення. Для всіх $u \in \mathcal{J}_d$ маємо$F_\beta(u) \geq \mathcal{E}_0(u) = \pi d$. З іншого боку, візьмемо d-Бляшке добуток $u = \prod_{j=1}^{d} \dfrac{\Phi - a_j}{1 - \overline{a_j}\Phi}$ і виберемо довільні $a_j \to -1$, $\forall\, j$. Тоді $u \rightharpoonup 1$ слабко в $H^1(\Omega)$, звідкіля знаходимо $F_\beta(u) \to \pi d$, тобто $\inf\limits_{\mathcal{J}_d} F_\beta = \pi d$. Тепер припустимо від супротивно, що u мінімізує F_β в $\mathcal{J}_d$, тоді $\mathcal{E}_\beta(u) = \mathcal{E}_0(u) = \pi d$. Таким чином u є d-Бляшке добуток і $\displaystyle\int_\Omega \beta\,(1-|u|^2)^2 dx = 0$. Це неможливо, тому що $|u| < 1$ в $\mathbb{D}$ звідки $\beta\,(1-|u|^2)^2 \not\equiv 0$. $\square$

Цей Підрозділ завершується наступним значним посиленням Леми 1.6.4.

Лема 1.6.8. *Критичні точки $\mathcal{E}_0$ в $\mathcal{J}_d$ є наступними:*

a) d-Бляшке добутки для $d > 0$.

b) комплексно спряжені до d-Бляшке добутків для $d < 0$.

c) сталі з модулем 1 для $d = 0$.

Доведення. Скористаємось властивостями диференціалу Хопфа в довільниій області $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, виведення яких можна знайти в [100, Розділ 4]. Для гладкої функції $u : \Omega \to \mathbb{C}$ її диференціал Хопфа ξ визначається формулою

$$\xi : \Omega \to \mathbb{C}, \quad \xi(z) = 4(\partial_z u)(\partial_z \overline{u}) = (\partial_x u - \imath \partial_y u)(\partial_x \overline{u} - \imath \partial_y \overline{u}). \tag{1.6.12}$$

Якщо, додатково, u є гармонічною функцією, тоді ξ є голоморфним, і для гладкої u рівність $\xi = 0$ можлива тоді і тільки тоді коли u або голоморфна або антіголоморфна.

Далі виводяться деякі тотожності справедливі коли Ω або u мають деякі додаткові властивості. Припустимо, що область Ω є гладкою і функція u є гладкою в околі $z \in \partial\Omega$, і позначимо через $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ зовнішню нормаль до $\partial\Omega$. Нехай $\dfrac{\partial}{\partial \tau}$ і $\dfrac{\partial}{\partial \nu}$ позначають відповідно нормальну і тангенціальну похідні на $\partial\Omega$. Користуючись рівностями

$$\frac{\partial}{\partial x_1} = \nu_1 \frac{\partial}{\partial \nu} - \nu_2 \frac{\partial}{\partial \tau} \text{ і } \frac{\partial}{\partial x_2} = \nu_2 \frac{\partial}{\partial \nu} + \nu_1 \frac{\partial}{\partial \tau} u,$$

визначення (1.6.12) можна переписати $\xi(z)$ наступним чином

$$\xi(z) = (\nu_1 - \imath\nu_2)^2 \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} - \imath \frac{\partial u}{\partial \tau} \right) \left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial \nu} - \imath \frac{\partial \overline{u}}{\partial \tau} \right). \tag{1.6.13}$$

Якщо $u \in \mathcal{J}$ є критичною точкою E_ε в Ω (або $\mathcal{E}_\beta$ в $\mathbb{D}$), тоді в представленні $u = \rho e^{i\varphi}$ маємо $\partial\rho/\partial\tau = \partial\varphi/\partial\nu = 0$ на $\partial\Omega$. У цьому випадку (1.6.13) спрощується до

$$\xi = (\nu_1 - \imath\nu_2)^2 \left[\left(\frac{\partial \rho}{\partial \nu} \right)^2 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} \right)^2 \right] \quad \text{на } \partial\Omega. \tag{1.6.14}$$

Оскільки задача (1.6.4) з $\beta = 0$ є інваріантною відносно конформних перетворень, можна припускати, що $\Omega = \mathbb{D}$. У випадку коли u є гармонічною, відображення $\eta : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$, $\eta(z) = z^2\xi(z)$, є голоморфним. Якщо додатково $\Omega = \mathbb{D}$ і u є розв'язком (1.6.4), тоді рівність (1.6.14) веде до

$$\eta = \left(\frac{\partial \rho}{\partial \nu} \right)^2 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} \right)^2 \in \mathbb{R} \quad \text{на } \mathbb{S}^1. \tag{1.6.15}$$

З (1.6.15) витікає, що η є константною в $\mathbb{D}$. З іншого боку, $\eta(0) = 0$. Отже $\xi \equiv 0$, і u є або голоморфною або антіголоморфною. Оскільки $|u| = 1$ на $\mathbb{S}^1$, то твердження Леми 1.6.8 випливає з результату наведеного в доведенні Леми 1.6.4. $\square$

1.6.2 Допоміжні твердження

Нагадаємо оцінки Г. Венте [200], які є важливим елементом в подальшому аналізі. Нижче наведено оцінки з найкращими константами, які було встановлено в [29].

Лема 1.6.9. *Для довільних* $f \in H_0^1(\Omega;\mathbb{R})$ *і* $g,h \in H^1(\Omega;\mathbb{R})$ *ров'язок* $u \in W_0^{1,1}(\Omega)$ *рівняння* $\Delta u = \mathrm{Jac}\ (g,h)$ *має такі властивості:*

1. $u \in C(\overline{\Omega}) \cap H^1(\Omega)$ *і*

$$\|u\|_{L^\infty} \leq 2\|\nabla g\|_{L^2}\|\nabla h\|_{L^2}, \tag{1.6.16}$$

$$\|\nabla u\|_{L^2} \leq \sqrt{2}\|\nabla g\|_{L^2}\|\nabla h\|_{L^2}. \tag{1.6.17}$$

Зокрема, відображення

$$[H^1(\Omega;\mathbb{R})]^2 \ni (g,h) \mapsto u \in C(\overline{\Omega}) \cap H^1\Omega)$$

є неперервним.

2. *Справедлива оцінка*

$$\left|\int_\Omega f\ \mathrm{Jac}\ (g,h)dx\right| \leq \sqrt{2}\|\nabla f\|_{L^2}\|\nabla g\|_{L^2}\|\nabla h\|_{L^2}. \tag{1.6.18}$$

Наступний результат є наслідком Леми 1.6.9.

Лема 1.6.10. *Визначимо*

$$\mathbf{H} := \{h \in H^1(\Omega;\mathbb{R});\ \Delta h = 0\}. \tag{1.6.19}$$

Нехай $f \in H_0^1(\Omega;\mathbb{R})$, $g \in H^1(\Omega;\mathbb{R})$ *і* $h \in \mathbf{H}$. *Тоді*

$$\left|\int_\Omega f\nabla g \cdot \nabla h dx\right| \leq C(\Omega)\|\nabla f\|_{L^2}\|\nabla g\|_{L^2}\|\nabla h\|_{L^2}. \tag{1.6.20}$$

Доведення Леми 1.6.10, як і наступних технічних результатів цього підрозділу наведено в Додатку N.

Для заданої функції f на $\partial\Omega$, $f \in L^1(\partial\Omega)$, визначимо $u(f)$ як гармонічне продовження f в Ω, тобто $u(f) \in W^{1,1}(\Omega)$ – єдиний розв'язок рівняння $\Delta u(f) = 0$ в Ω з крайовою умовою $u(f) = f$ на $\partial\Omega$. Для $f \in H^{1/2}(\partial\Omega;\mathbb{C})$ визначимо напівнорму в $H^{1/2}$ формулою[3]

$$|f|^2_{H^{1/2}} = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u(f)|^2 dx. \tag{1.6.21}$$

[3]Ця напівнорма є еквівалентною стандартній напівнормі $f \mapsto \left(\int_{\partial\Omega}\int_{\partial\Omega} \frac{|g(x)-g(y)|^2}{|x-y|^2}\, ds_x ds_y\right)^{1/2}$.

Лема 1.6.11. *Для довільних $f, g \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ функція $u := u(fg) - u(f)u(g)$ належить до $C(\overline{\Omega}) \cap H_0^1(\Omega)$ і*

$$\|u\|_{L^\infty} \leq C(\Omega)|f|_{H^{1/2}}|g|_{H^{1/2}}, \tag{1.6.22}$$

$$\|u\|_{H^1} \leq C\Omega)|f|_{H^{1/2}}|g|_{H^{1/2}}. \tag{1.6.23}$$

З Леми 1.6.11 випливає, що якщо $f_n \rightharpoonup f$ і $g_n \rightharpoonup g$ слабко в $H^{1/2}$, тоді для відповідних функцій $u_n = u(f_n g_n) - u(f_n)u(g_n)$ має місце слабка збіжність $u_n \rightharpoonup u$ в $H^1(\omega)$. Цей результат можна посилити наступним чином.

Лема 1.6.12. *Нехай функції $f, g_n, g \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ є такими, що $g_n \rightharpoonup g$ в $H^{1/2}$. Тоді $u(fg_n) - u(f)u(g_n) \to u(fg) - u(f)u(g)$ сильно в $H^1(\Omega)$.*

Як наслідок, якщо $f_n \to f$ сильно в $H^{1/2}$ і $g_n \rightharpoonup g$ слабко в $H^{1/2}$, тоді $u(f_n g_n) - u(f_n)u(g_n) \to u(fg) - u(f)u(g)$ сильно в $H^1(\Omega)$.

Зауваження 1.6.13. Лему 1.6.12 можна переформулювати наступним чином: якщо $g_n \rightharpoonup g$ слабко в $H^{1/2}$, тоді $\nabla u(f) \cdot \nabla u(g_n) \to \nabla u(f) \cdot \nabla u(g)$ сильно в $H^{-1}(\Omega)$. Доведення Леми 1.6.12 (наведене в Додатку N) веде до наступного більш загального результату: якщо $u \in H^1(\Omega)$ і $v_n \rightharpoonup v$ слабко в $H^1(\Omega)$, з гармонічними функціями v_n, тоді $\nabla u \cdot \nabla v_n \to \nabla u \cdot \nabla v$ сильно в $H^{-1}(\Omega)$.

Лема 1.6.14. *Нехай $f, g_n \in H^{1/2}(\partial\Omega; \mathbb{S}^1)$. Припустимо, що $g_n \rightharpoonup 1$ слабко в $H^{1/2}$. Тоді*

$$\int_\Omega |\nabla u(fg_n)|^2 dx = \int_\Omega |\nabla u(f)|^2 dx + \int_\Omega |\nabla u(g_n)|^2 dx + o(1) \quad \text{коли } n \to \infty, \tag{1.6.24}$$

що еквівалентно, $|fg_n|^2_{H^{1/2}} = |f|^2_{H^{1/2}} + |g_n|^2_{H^{1/2}} + o(1)$.

Далі розглядаються гармонічні функції u які є близькими до конформного відображення Мебіуса. Введемо позначення

$$\mathcal{H}_d = \{g \in H^{1/2}(\mathbb{S}^1; \mathbb{S}^1);\ \deg\ g = d\}.$$

Нагадаємо також, що N_a позначає звуження на $\mathbb{S}^1$ відображення Мебіуса $M_{1,a}$. Насамкінець, нагадаємо Наслідок 1.6.5: якщо $g \in \mathcal{H}_1$ тоді $|g|^2_{H^{1/2}} \geq \pi$, і рівність виконується тоді й лише тоді, коли $g = \alpha N_a$ для деяких $a \in \mathbb{D}$ і $\alpha \in \mathbb{S}^1$.

Теорема 1.6.15. *Існують $\delta_0 > 0$ і функція $f : (0, \delta_0) \to (0, \infty)$ з $\lim_{\delta \to 0} f(\delta) = 0$, такі що якщо $g \in \mathcal{H}_1$ задовольняє $|g|^2_{H^{1/2}} < \pi + \delta$ для деякого $\delta < \delta_0$, тоді:*

1. *Гармонічне продовження $u = u(g)$ функції g має точно один нуль, $a = a(u) = a(g)$.*
2. *Якщо записати $g = N_a e^{\imath\psi}$ з $\psi \in H^{1/2}(\mathbb{S}^1; \mathbb{R})$, тоді $|\psi|_{H^{1/2}} \le f(\delta)$.*
3. *Відображення $g \mapsto a$ є неперервним.*
4. *Для заданих $r \in (0, 1)$ і $\mu > 0$, можна вибрати δ_0, таке що $\|\alpha u \circ M_{-a} - \mathrm{Id}\|_{C^2(\mathbb{D}_r)} < \mu$ для певного $\alpha \in \mathbb{S}^1$.*

Зробимо два зауваження до Теореми 1.6.15. Зазначимо, що $\dfrac{g}{N_a}$ має нульовий степінь і тому можна записати $g = N_a e^{\imath\psi}$ для деякого $\psi \in H^{1/2}(\mathbb{S}^1; \mathbb{R})$. Змістовна частина твердження *2.* полягає в тому, що норма $|\psi|_{H^{1/2}}$ є малою коли норма $|g|^2_{H^{1/2}}$ є близькою до π. Друге, еквівалентним і, можливо, більш прозорим формулюванням твердження *4.* є наступне: для достатньо малого δ_0 і g як раніше, маємо $\|u \circ M^{-1}_{\alpha,a} - \mathrm{Id}\|_{C^2(\mathbb{D}_r)} < \mu$ для деякого $\alpha \in \mathbb{S}^1$; тобто функція u є близькою, в певному сенсі, до відображення Мебіуса.

Далі наведено результат близький до Теореми 1.6.15, але який дає менше інформації про нулі a функції $u(g)$ проте описує фазу ψ для функцій g з більшими $H^{1/2}$-нормами.

Теорема 1.6.16. *Існує незростаюча функція $h : (0, \pi] \to (0, \infty)$, така що: якщо $g \in \mathcal{H}_1$ задовольняє $|g|^2_{H^{1/2}} \le 2\pi - \delta$ для деякого $\delta \in (0, \pi]$, тоді:*

1. *Можна записати $g = N_a e^{\imath\psi}$ з функцією $\psi \in H^{1/2}(\mathbb{S}^1; \mathbb{R})$ для якої виконується оцінка $|\psi|_{H^{1/2}} \le h(\delta)$.*
2. *Додатково, в якості a можна взяти нуль $u(g)$, і нулі $u(g)$ є близькими один до одного в наступномі сенсі: існує $R = R(\delta) \in (0, 1)$ і $\mu = \mu(\delta) \in (0, 1)$, такі що $|u(g)| \ge \mu$ in $\mathbb{D} \setminus M_a^{-1}(\overline{\mathbb{D}}_R)$ для кожного нуля a функції $u(g)$.*

Підкреслимо наступну інформативну частину твердження *2.* Теореми 1.6.16:

$$\text{якщо } u(g)(0) = 0, \text{ тоді } |u(g)| \geq \mu \text{ в } \mathbb{D} \setminus \overline{\mathbb{D}}_R. \tag{1.6.25}$$

Наслідок 1.6.17. *Нехай* $t < 2\pi$ *і нехай* $\mathcal{K}_1^{(t)} = \{g \in \mathcal{H}_1;\ |g|^2_{H^{1/2}} \leq t\}$.

Тоді $\mathcal{K}_1^{(t)}$ *є слабко замкнутим по модулю перетворень Мебіуса: якщо* $(g_n) \subset \mathcal{K}_1^{(t)}$, *тоді існує* N_{a_n}, *таке що послідовність* $(g_n \circ N_{a_n}^{-1})$ *є слабко компактною в* $\mathcal{K}_1^{(t)}$. *Крім того, в якості* a_n *можна взяти довільний нуль* $u(g_n)$.

Зокрема, для кожного $t < 2\pi$ *і* $a_0 \in \mathbb{D}$, *клас*

$$\{g \in \mathcal{H}_1;\ |g|^2_{H^{1/2}} \leq t,\ u(g) \text{ має нуль в } a_0\}$$

є слабко компактним.

Далі наведено ще один простий наслідок Теореми 1.6.16.

Лема 1.6.18. *Нехай*

$$\beta \in L^\infty(\mathbb{D}),\ \beta \geq 0,\ \beta \not\equiv 0. \tag{1.6.26}$$

Розглянемо точку Лебега $a_0 \in \mathbb{D}$ *функції* β *в якій значення (суттєва границя)* β *є* $b > 0$. *Тоді*

$$c(\beta, a_0) := \inf \left\{ \mathcal{E}_\beta(v);\ g = v\big|_{\mathbb{S}^1} \in \mathcal{H}_1,\ u(g) \text{ має нуль в } a_0 \right\} > \pi. \tag{1.6.27}$$

1.6.3 Побудова послідовностей Пале-Смейла

У цьому підрозділі доводяться результати про існування послідовностей майже критичних точок функціоналу $\mathcal{E}_\beta$. Загальна ідея конструкції таких послідовностей базується на встановленні геометрії типу перевалу. Нагадаємо класичной результат А. Амброзетті і П. Рабіновича [15]. Нехай задано два компактні метричні простори $K_0 \subset K$, банахів простір (або банахів многовид) X, відображення (функціонал) $J : X \to \mathbb{R}$ (звичайно гладкості C^1), і фіксоване неперервне ведображення $\chi \in C(K_0; X)$. [4] Розглянемо задачу мінімізації

$$c = \inf \left\{ \max_K J \circ F;\ F \in M \right\}, \quad \text{де } M = \{F \in C(K;X);\ F = \chi \text{ на } K_0\}, \tag{1.6.28}$$

і припустимо, що виконується строга нерівність

$$c > c_1 = \max_{t \in K_0} J(\chi(t)). \tag{1.6.29}$$

Теорема 1.6.19. *([139, Theorem 4.3, p. 77]) Нехай K_0, K, J, X і χ є такими як зазначено вище (X – банахів простір і $J \in C^1(X;\mathbb{R})$). Припустимо, що виконується* (1.6.29). *Тоді для кожного $\delta > 0$ існує елемент $x_\delta \in X$, такий що*

$$c - \delta \le J(x_\delta) \le c + \delta \tag{1.6.30}$$

і

$$\|J'(x_\delta)\| \le \sqrt{\delta}. \tag{1.6.31}$$

Еквівалентно, існує послідовність

$$(x_n) \subset X, \textit{ така що } J(x_n) \to c \textit{ і } J'(x_n) \to 0 \textit{ при } n \to \infty. \tag{1.6.32}$$

Те саме є вірним у випадку, коли X є банаховим многовидом і $J \in C^1$.

Послідовність, що задовольняє (1.6.32) називається *послідовністю Пале-Смейла*, а її елементи x_n є *майже критичними точками* J.[5] За додаткової умови

$$\begin{aligned} (\mathrm{PS})_c \quad & \text{кожна послідовність } (x_n)\text{, яка задовольняє (1.6.32),} \\ & \text{має підпослідовність, що збігається} \end{aligned} \tag{1.6.33}$$

(модифікація умови Пале-Смейла) (1.6.29) веде до існування критичної точки x функціоналу J з $J(x) = c$. Таку умову $(\mathrm{PS})_c$ було введено Х. Брезісом, Ж. Короном і Л. Ніренбергом в [53].

[4] Для того, щоб розрізняти дві конструкції, що використано далі відповідні функціональні простори X будемо позначати через X^* і $X^\sharp$, відповідно. Таким саме чином будемо відрізняти інші об'єкти.

[5] Для енергетичного рівня c, проте це будемо опускати.

На практиці завжди будемо брати

$$K = \overline{\mathbb{D}}_r,\ K_0 = \partial\mathbb{D}_r \quad \text{для деякого } r \in (0,1). \tag{1.6.34}$$

В якості χ буде взято відображення задане $\chi(a) = M_a, \forall\, a \in \partial\mathbb{D}_r$, і $J = \mathcal{E}_\beta$. Якщо вибір χ не є очевидним, власно він і містить сутність конструкції, природними кандидатами для J і X є $J = \mathcal{E}_\beta$ і $X = \mathcal{J}$ (множина комплексно-значних функцій, які належать до простору H^1 і мають модуль 1 на межі) або, можливо, $X = \mathcal{J}_1$. Проте $\mathcal{J}$ і $\mathcal{J}_1$ не мають очевидної структури многовиду, і в цьому Підрозілі буде запропоновано перший спосіб як обійти цю трудність. Цей підхід дозволяє довести Теорему 1.6.1, проте він пряцює тільки для великих значень ε.[6]

Таким чином, питання існування критичних точок буде розглянуто в цьому Підрозділі для малих β. Конкретно, будемо припускати, що перше власне значення $\lambda_1(-\Delta - \beta)$ оператора $-\Delta - \beta$ задовольняє [7]

$$\lambda_1(-\Delta - \beta) > 0, \tag{1.6.35}$$

тобто, існує $\delta > 0$, таке що

$$(1-\delta)\int_{\mathbb{D}} |\nabla v|^2 dx \geq \int_{\mathbb{D}} \beta v^2 dx, \quad \forall\, v \in H_0^1(\mathbb{D};\mathbb{R}).$$

Для таких β і фіксованих крайових значень $g \in H^{1/2}(\mathbb{S}^1;\mathbb{C})$, функціонал $\mathcal{E}_\beta$ є неперервним, коерцитивним і строго опуклим в афінному просторі

$$H_g^1(\mathbb{D};\mathbb{C}) = \{u \in H^1(\mathbb{D};\mathbb{C});\ \mathrm{tr}\ \ u = g\}.$$

Звідси випливає, що $\mathcal{E}_\beta$ має точно одну критичну точку в означеному просторі. Еквівалентно, задача

$$\begin{cases} -\Delta u = \beta u(1-|u|^2) & \text{в } \mathbb{D}, \\ u = g & \text{на } \partial\mathbb{D} \end{cases} \tag{1.6.36}$$

[6] Другий, більш тонкий, підхід буде запропоновано в наступному Підрозділі.

[7] Зокрема, перепущення (1.6.35) виконується якщо в вихідній задачі про критичні точки E_ε взяти достатньо велике ε.

має єдинеий розв'язок, який будемо позначати $T(g)$.

В якості простору X виберемо $X^* = H^{1/2}(\mathbb{S}^1;\mathbb{R})$, функціонал J визначимо наступним чином

$$J^* : X^* \to \mathbb{R},\ J^*(\psi) = \mathcal{E}_\beta\left(T\left(N_0 e^{\imath\psi}\right)\right), \quad \forall\, \psi \in X^*.$$

Крім того нагадаємо, що $K = \overline{\mathbb{D}}_r$ і $K_0 = \partial\overline{\mathbb{D}}_r$, де $0 < r < 1$. Залишається визначити функцію χ^* на роль χ. Помітимо, що звуження N_a функції M_a на $\mathbb{S}^1$ можна записати як $N_a = N_0 e^{\imath\psi_a} = e^{\imath(\theta+\psi_a)}$ для деякого $\psi_a \in H^{1/2}(\mathbb{S}^1;\mathbb{R})$. Тоді для кожного $a \in \partial\overline{\mathbb{D}}_r$ покладемо$\chi^*(a) = \psi_a$. Наступний результат показує, що (при правильному виборі ψ_a) χ^* є непервним відображеннням з $\partial\overline{\mathbb{D}}_r$ в X^*.

Лема 1.6.20. *Існує функція $H \in C^\infty(\mathbb{D}; C^\infty(\mathbb{S}^1;\mathbb{R}))$, така що $N_a = N_0 e^{\imath H(a)}$, $\forall\, a \in \mathbb{D}$.*

Доведення. Покладемо $g_a = N_a/N_0$ і

$$F(a,\cdot) = g_a \times \frac{\partial g_a}{\partial \tau} = -\imath \overline{g_a}\frac{\partial g_a}{\partial \tau}$$

(Останню рівність легко перевірити користуючись рівністю $|g_a|^2 = 1$, звідки $g_a \cdot \dfrac{\partial g_a}{\partial \tau} = 0$.) Очевидно, $F \in C^\infty(\mathbb{D}\times\mathbb{S}^1;\mathbb{R})$, і $\int_{\mathbb{S}^1} F(a,z)ds_z = 0$. Тоді можна ввести первісну функцію з нульовим середнім $\eta(a,\cdot)$, і η є гладкою за обома аргументами. Крім того, маємо

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\left(g_a\, e^{-\imath\eta(a,\cdot)}\right) = g_a\, e^{-\imath\eta(a,\cdot)}\left(\overline{g_a}\frac{\partial}{\partial \tau}g_a - \imath\frac{\partial}{\partial \tau}\eta(a,\cdot)\right) = 0,$$

тобто $g_a\, e^{-\imath\eta(a,\cdot)}$ є константою. Визначимо $L(a) := g_a(1)\, e^{-\imath\eta(a,1)}$. Тоді $L \in C^\infty(\mathbb{D};\mathbb{S}^1)$, і можна знайти представлення $L = e^{\imath\zeta}$ з $\zeta \in C^\infty(\mathbb{D};\mathbb{R})$. Насамкінець, покладемо $H = \eta + \zeta$, і визначена таким чином функція H має всі необхідні властивості. $\square$

Всюди в подальшому $\psi_a = H(a)$, $a \in \partial\overline{\mathbb{D}}_r$.

Лема 1.6.21. *Нехай виконуються умови* (1.6.26) *і* (1.6.35)*. Тоді, для* $0 < r < 1$ *достатньо близьких до* 1,

$$\begin{aligned} c^* := \inf \left\{ \max_{\overline{\mathbb{D}}_r} J^* \circ F;\ F \in C(\overline{\mathbb{D}}_r; H^{1/2}(\mathbb{S}^1;\mathbb{R})),\ F\big|_{\partial \mathbb{D}_r} = \chi^* \right\} \\ > c_1^* := \max_{\partial \mathbb{D}_r} J^* \circ \chi^*. \end{aligned} \tag{1.6.37}$$

Доведення. Легко бачити, що $|M_a| \to 1$ в $L^4(\mathbb{D})$ при $|a| \to 1$, таким чином $c_1^* \to \pi$ коли $r \to 1$. Покажемо тепер, що (для r близьких до 1) інфімум c^* є обмеженим знизу константою більшою за π. Для цього зафуксуємо точку Лебега a_0 of β де значення (суттєва границя) β є (строго) додатною. Припустимо, що $c^* < \pi + \delta_0$, з δ_0 як в Теоремі 1.6.15, в противному випадку більше нема чого доводити. Розглянемо $r > |a_0|$. Тоді існує точка $z_0 \in \mathbb{D}_r$ (що залежить від F), така що гармонічне продовження $u(F(z_0)\big|_{\partial \mathbb{D}_r})$ звуження $F(z_0)$ на $\partial \mathbb{D}_r$ має нуль в a_0. Дійсно згідно з Теоремою 1.6.15 відображення

$$G : \overline{\mathbb{D}}_r \to \mathbb{D}, \quad \overline{\mathbb{D}}_r \ni z \xrightarrow{G} a(\mathrm{tr}\ \ F(z)) \in \mathbb{D}$$

є неперервним. Оскільки G є тотожним відображенням на $\partial \mathbb{D}_r$, G обов'язково приймає значення a_0 в $\mathbb{D}_r$ згідно з теоремою Брауера про нерухому точку. З Леми 1.6.18 випливає, що $J^*(F(z_0)) \geq c(\beta, a_0) > \pi$, тобто $c^* > c(\beta, a_0) > \pi$. Залишається тільки вибрати r настільки близьким до 1 щоб $c_1^* < \min\{c(\beta, a_0), \pi + \delta_0\}$.
□

Далі наведено доведення того факту, що J^* is C^1 (Лема 1.6.26). Для цього знадобиться наступний елементарний факт.

Лема 1.6.22. *Нехай* $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ *– нормовані простори і нехай* $\mathcal{Z}$ *– щільна підмножина* $\mathcal{X}$*. Припустимо, що* $\mathcal{F} \in C(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$ *і* $\mathcal{T} \in C(\mathcal{X}; B(\mathcal{X}; \mathcal{Y}))$ *є такими, що*

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z}(x) = \mathcal{T}(x)(z), \quad \forall\, x, z \in \mathcal{Z}. \tag{1.6.38}$$

Тоді $\mathcal{F} \in C^1$ *і* (1.6.38) *має місце для всіх* $x, z \in \mathcal{X}$.

Тут $B(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$ позначає простір обмежених лінійних операторів, що діють з $\mathcal{X}$ в $\mathcal{Y}$. Приведений вище результат буде використано з $\mathcal{Z} = C^\infty$, і основним завданням буде доведення неперервності $\mathcal{F}$ і $\mathcal{T}$.

Почнемо з прямого наслідку вкладення $H^1(\mathbb{D}) \hookrightarrow L^4(\mathbb{D})$.

Лема 1.6.23. *Відображення $\mathcal{E}_\beta$ є C^1 в $H^1(\mathbb{D};\mathbb{C})$ і*

$$F'_\beta(u)(v) = \int_{\mathbb{D}} \nabla u \cdot \nabla v dx - \int_{\mathbb{D}} \beta u \cdot v(1-|u|^2)dx, \quad \forall\, u, v \in H^1(\mathbb{D};\mathbb{C}); \quad (1.6.39)$$

також відображення

$$G : H^1(\mathbb{D};\mathbb{C}) \to \mathbb{R}, \quad H^1(\mathbb{D};\mathbb{C}) \ni u \mapsto \frac{1}{4}\int_{\mathbb{D}} \beta\,(1-|u|^2)^2,$$

є C^1, і $G'(u)(v) = -\int_{\mathbb{D}} \beta u \cdot v(1-|u|^2)dx$.

Нагадаємо, що $\cdot$ позначає скалярний добуток в $\mathbb{C}$.

Лема 1.6.24. *Припустимо, що виконується* (1.6.35)*. Тоді відображення $g \to T(g)$, де $T(g)$ позначає единий розвязок* (1.6.36)*, є C^1 в околі $\mathcal{H}$.*

Доведення. Розглянемо відображення

$$U : H^{1/2}(\mathbb{S}^1;\mathbb{C}) \to H^1(\mathbb{D};\mathbb{C}), \quad g \xrightarrow{U} u(g)$$

і

$$V : H^1_0(\mathbb{D};\mathbb{C}) \times H^{1/2}(\mathbb{S}^1;\mathbb{C}) \to H^{-1}(\mathbb{D};\mathbb{C}),$$
$$(v, g) \xrightarrow{V} -\Delta v - \beta(v + u(g))(1 - |v + u(g)|^2).$$

Завдяки вкладенню $H^1(\mathbb{D}) \hookrightarrow L^4(\mathbb{D})$ і неперервності U, легко бачити, що $V \in C^1$ і частинний диференціал $V(v, g)$ за змінною v задається формулою

$$\frac{\partial V}{\partial v}(v, g)(w) = -\Delta w - \beta(1 - |v + u(g)|^2)w + 2\beta(w \cdot (v + u(g)))\,(v + u(g)),$$
$$\forall\, w \in H^1_0(\mathbb{D};\mathbb{C}).$$

Твердження Леми випливає за допомогою теореми про неявну функцію якщо буде доведено, що оператор $W = \dfrac{\partial V}{\partial v}(v, g)$ є оборотний для кожної пари $(T(g)-u(g), g)$ з $g \in \mathcal{H}$. Оскільки оператор W є симетричним в $H^1_0(\mathbb{D};\mathbb{C})$,[8] достатньо

[8]Поле $\mathbb{C}$ наділяється скалярним продуктом з $\mathbb{R}^2$ і $H^1_0(\mathbb{D};\mathbb{C})$ ототожнюється з простором $\mathbb{R}^2$-значних функцій.

довести, що квадратична форма Q пов'язана з W є додатно визначеною. Маємо

$$
\begin{aligned}
Q(w) = \int_{\mathbb{D}} |\nabla w|^2 dx - \int_{\mathbb{D}} \beta(1 - |T(g)|^2)|w|^2 dx + 2\int_{\mathbb{D}} \beta(w \cdot T(g))^2 dx \\
\geq \int_{\mathbb{D}} |\nabla w|^2 dx - \int_{\mathbb{D}} \beta(1 - |T(g)|^2)|w|^2 dx,
\end{aligned}
$$

і додатність випливає з (1.6.35) і поточкової нерівності $|T(g)| \leq 1$. □

Наступний результат є варіантом того факту, що гармонічні функції з простору H^1 мають слід нормальної похідної на межі.

Лема 1.6.25. *Нехай $g \in \mathcal{H}$ і нехай функція u задовольнє* (1.6.36). *Тоді нормальна компонента векторного поля $u \times \nabla u$ має слід $(u \times \frac{\partial}{\partial \nu} u)\big|_{\partial\mathbb{D}}$ на $\mathbb{S}^1$, і він належить до $H^{-1/2}(\mathbb{S}^1)$.*

Якщо, додатково, виконується (1.6.35), *тоді відображення*

$$
Y : \mathcal{H} \to H^{-1/2}(\mathbb{S}^1), \quad \mathcal{H} \ni g \xrightarrow{Y} T(g) \times \frac{\partial}{\partial \nu} T(g) \in H^{-1/2}(\mathbb{S}^1),
$$

є неперервним.

Доведення. Векторне поле $u \times \nabla u$ належить до L^2 і (внаслідок (1.6.36)) є бездивергентним. Тоді факт існування нормальної компоненти сліду є стандартним, проте нагадаємо аргументацію. Завдяки Лемі Пуанкаре (в її L^2-версії), можна записати $u \times \nabla u = -\nabla^{\perp} h$ для деякої функції $h \in H^1(\mathbb{D})$. Покладемо

$$
\left(u \times \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) \Big|_{\partial\mathbb{D}} = \frac{\partial}{\partial \tau} h \in H^{-1/2}(\mathbb{S}^1).
$$

Коли функція u є гладкою, наприклад $u \in C^1$, $\dfrac{\partial}{\partial \tau} h$ є нічим іншим як $u \times \dfrac{\partial u}{\partial \nu}$; таке саме позначення $u \times \dfrac{\partial u}{\partial \nu}$ буде використовуватись якщо u тільки є функцією з H^1.

За допомогую інтегрування частинами встановлюється наступна важлива формула

$$
\int_{\mathbb{D}} (u \times \nabla u) \cdot \nabla \zeta dx = \left\langle u \times \frac{\partial u}{\partial \nu}, \zeta \right\rangle_{H^{-1/2}, H^{1/2}} = \int_{\mathbb{S}^1} \left(u \times \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) \zeta dx, \qquad (1.6.40)
$$

$\forall\,\zeta \in H^1(\mathbb{D};\mathbb{R})$. Її можна розглядати як означення $u \times \dfrac{\partial u}{\partial \nu}$.

Друге твердження Леми доводиться наступним чином: нехай $g_n \to g$ сильно в $\mathcal{H}$. Покладемо $u_n = T(g_n)$ і $u = T(g)$. Тоді $u_n \to u$ сильно в H^1 (оскільки оператор T є неперервним). Користуючись поточковими нерівностями $|u_n| \leq 1$, знаходимо, що $u_n \times \nabla u_n \to u \times \nabla u$ сильно в L^2. Якщо нормалізувати відповідні потенціали h_n рівностями $\displaystyle\int_{\mathbb{D}} h_n = 0$, тоді $h_n \to h$ сильно в H^1, звідси випливає збіжність $u_n \times \frac{\partial}{\partial \nu} u_n$ до $u \times \frac{\partial}{\partial \nu} u$ сильно в $H^{-1/2}$. □

Лема 1.6.26. *Нехай виконується умова* (1.6.35)*. Тоді* $J^* \in C^1$ *і диференціал* $J^{*\prime}(\psi)(\eta)$ *(для* $u := T\left(N_0 e^{\imath\psi}\right)$*) задається формулою*

$$J^{*\prime}(\psi)(\eta) = \int_{\mathbb{S}^1} \left(u \times \frac{\partial u}{\partial \nu}\right) \eta ds = \int_{\mathbb{D}} (u \times \nabla u) \cdot \nabla \zeta dx,\ \forall\,\psi, \eta \in H^{1/2}(\mathbb{S}^1;\mathbb{R}),$$
$$\forall\,\zeta \in H^1(\mathbb{D};\mathbb{R})\ ,\ \textit{такої що}\ \zeta = \eta\ \textit{на}\ \partial\mathbb{D}. \tag{1.6.41}$$

Те саме має місце у загальному випадку відображення

$$H^{1/2}(\mathbb{S}^1;\mathbb{R}) \ni \psi \xrightarrow{J_d^*} \mathcal{E}_\beta(T(N_0^d\, e^{\imath\psi})), \quad \textit{де}\ d \in \mathbb{Z}.$$

Доведення. Внаслідок (1.6.40) два інтеграли в (1.6.41) є однаковими. Для доведення (1.6.41) скористаємося Лемою 1.6.22. Ясно, що функціонал J^* є неперервним. З іншого боку, покладемо $\zeta = u(\eta)$ в (1.6.41) і, користуючись неперервностю відображення $H^{1/2} \ni \psi \mapsto u \times \nabla u \in L^2$, помітимо, що другий інтеграл в (1.6.41) задає відображення

$$\mathcal{T} \in C(H^{1/2}(\mathbb{S}^1;\mathbb{R}), H^{-1/2}(\mathbb{S}^1;\mathbb{R})), \quad \mathcal{T}(\psi)(\eta) := \int_{\mathbb{D}} (u \times \nabla u) \cdot \nabla u(\eta) dx.$$

Таким чином, достатньо довести (1.6.41) для гладких ψ, η і $\zeta = u(\eta)$. Для таких ψ і η, lпокладемо$g_t = N_0\, e^{\imath(\psi + t\eta)}$, $u_t = T(g_t)$ (так що $u = u_0$). Відображення $t \mapsto g_t \in \mathcal{H}$, як легко бачимти, є гладким. З Леми 1.6.23 і Леми 1.6.24 випливає, що відображення $t \mapsto u_t$ і $t \mapsto J^*(\psi + t\eta)$ є класу C^1, і

$$\frac{d}{dt}[J^*(\psi + t\eta)] = \int_{\mathbb{D}} \nabla u_t \cdot \nabla \left(\frac{d}{dt} u_t\right) dx - \int_{\mathbb{D}} \beta u_t \cdot \left(\frac{d}{dt} u_t\right) (1 - |u_t|^2) dx. \tag{1.6.42}$$

З іншого боку, для $v \in H^1(\Omega;\mathbb{C})$ заданого рівністю $v = \imath u\zeta$ на $\mathbb{S}^1$, де $\zeta \in C^1(\mathbb{S}^1;\mathbb{R})$, і u, що є розв'язком (1.6.36), маємо

$$\int_{\mathbb{D}} \nabla u \cdot \nabla v dx - \int_{\mathbb{D}} \beta(u\cdot v)(1-|u|^2)dx = \int_{\mathbb{S}^1} \left(u \times \frac{\partial u}{\partial \nu}\right) \zeta dx. \qquad (1.6.43)$$

Дійсно, для гладких u це є наслідком (1.6.36) і тотожності

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}\cdot(\imath u\zeta) = \left(u \times \frac{\partial u}{\partial \nu}\right)\zeta \quad \text{на } \mathbb{S}^1.$$

В загальному випадку треба наблизити β рівнмірно обмеженою послідовністю (β_n) гладких функцій, які задовольняють (1.6.35) і збігаються поточково, $\beta_n \to \beta$.[9]

Далі, помітимо, що $u_t = N_0 e^{\imath(\psi+t\eta)}$ на $\mathbb{S}^1$, звідки $\dfrac{\partial}{\partial t}u_t = \imath u_t\eta$ на $\mathbb{S}^1$. Таким чином можна взяти $u = u_t$ і $v = \dfrac{\partial}{\partial t}u_t$ в (1.6.43). Тоді отримуємо першу рівність в (1.6.41) скориставшись (1.6.42). $\square$

Зауваження 1.6.27. Наведемо альтернативне доведення (1.6.43), яке є вірним і без умови (1.6.35). Внаслідок (1.6.36) рівність (1.6.43) є вірною для $v \in H^1_0$, тобто достатньо довести (1.6.43) для $v = \imath u\zeta$ на $\mathbb{S}^1$. Розглянемо C^1 продовження ζ, за яким збережемо позначення ζ, і покладемо $v = \imath u\zeta$. Для такого v, (1.6.43) є нічим іншим як (1.6.40).

Зауваження 1.6.28. Лема 1.6.26 містить невеличкий сюрприз. Нагадаємо, що J^* сконструйовано наступним чином:

$$J^* = \mathcal{E}_\beta \circ T \circ S, \quad H^{1/2}(\mathbb{S}^1;\mathbb{R}) \ni \psi \xrightarrow{S} g = N_0 e^{\imath\psi} \xrightarrow{T} u = T(g) \xrightarrow{\mathcal{E}_\beta} \mathcal{E}_\beta(u).$$

З Леми1.6.24 і Леми 1.6.23 відомо, що T і $\mathcal{E}_\beta$ є класу C^1. Також J^* є класу C^1 (Лема 1.6.26). Проте, відображення S *не належить* до класу C^1; див. Лему 1.6.29 нижче. Оскільки J^* є композицією двох відображень, одне, $\mathcal{E}_\beta \circ T$, є гладким, але інше, S, не є гладким, результат Леми 1.6.26 показує, що ефект згладжування превалює. Це згладжування пояснюється головним інгредієнтом доведення Леми1.6.26, який полягає в тому, що існує слід нормальної компоненти

[9] Альтернативне доведення, яке не спирається на (1.6.35), наведено в Зауваженні 1.6.27 нижче.

поля $u \times \nabla u$ якщо u є розв'язком (1.6.36). Останнє, в свою чергу, встановлюється за допомогою Леми Пуанкаре і принципу максимуму. Отже обмеженість розв'язків (1.6.36) є тим, що перетворює $\mathcal{E}_\beta \circ T$ (і згодом J^*) в гладке відображення. З іншого боку, зазначимо, що відображення S є майже гладким, принаймні ліпшецевим.

Лема 1.6.29. *S не є диференційовним.*

Доведення. Легко бачити, що для $\eta \in C^\infty(\mathbb{S}^1; \mathbb{R})$,

$$\lim_{t\to 0} \frac{S(\psi + t\eta) - S(\psi)}{t} = A(\psi, \eta) := \imath S(\psi)\eta, \tag{1.6.44}$$

де границя розглядається в $H^{1/2}$. Якщо S є є диференційовним в ψ, тоді (1.6.44) є вірним для всіх $\eta \in H^{1/2}(\mathbb{S}^1; \mathbb{R})$, і функція $A(\psi, \eta)$ належить до $H^{1/2}$. Ідеє полягає в тому, що $H^{1/2} \cap L^\infty$ є алгеброю, проте $H^{1/2}$ – ні. Таким чином, якщо вибрати $\eta \in H^{1/2} \cap L^\infty$, тоді $A(\psi, \eta) \in H^{1/2}$, проте це не обов'язково є вірним коли η належить тільки до $H^{1/2}$. Наступні міркування доводять, що S не є диференційовним: якщо S є диференційовним в ψ, тоді $A(\psi, \psi) = \imath e^{\imath\psi}\psi \in H^{1/2}$, зокрема $B(\psi) := \psi \cos\psi$ належить до $H^{1/2}$. Тепер нагадаємо наступний результат [51]: оператор суперпозиції $\psi \mapsto G \circ \psi$ є визначеним на $H^{1/2}$ тоді і тільки тоді коли функція G є ліпшецевою. Хоча результат [51] сформульовано для $H^{1/2}(\mathbb{R}^n)$, конструкція контрприкладу дає, для неліпшецевої функції G, функції ψ з компактним носієм, проте такі що $G \circ \psi \notin H^{1/2}$; див. [174, Розділ 5.3.1, доведення Теореми 1]. Таким чином, G має бути ліпшецевою функцією, але $t \mapsto t\cos t$ не є ліпшецевою. $\square$

Комбінуючи Теорему 1.6.19 з Лемами 1.6.21 і 1.6.26, дістаємо наступний результат про існування послідовностей майже критичних точок.

Наслідок 1.6.30. *Припустимо, що виконується умова* (1.6.35). *Нехай c^* задається* (1.6.37). *Тоді, для кожного $\delta > 0$, існує функція $\psi_\delta \in H^{1/2}(\mathbb{S}^1; \mathbb{R})$, така що $u_\delta = T(N_0\, e^{\imath\psi_\delta})$ задовольняє*

$$c^* - \delta \le J^*(\psi_\delta) = \mathcal{E}_\beta(u_\delta) \le c^* + \delta, \tag{1.6.45}$$

і
$$\left|\int_{\mathbb{S}^1}\left(u_\delta \times \frac{\partial u_\delta}{\partial \nu}\right)\eta ds\right| \le \sqrt{\delta}|\eta|_{H^{1/2}}, \quad \forall\, \eta \in H^{1/2}(\mathbb{S}^1;\mathbb{R}). \tag{1.6.46}$$

Цей наслідок, зокрема, можна застосовувати якщо взяти достатньо великі ε в вихідному функціоналі енергії E_ε. Зазначимо, що з огляду на (1.6.40), нерівність (1.6.46) еквівалентна
$$\left|\int_{\mathbb{D}}(u_\delta \times \nabla u_\delta)\cdot \nabla\zeta dx\right| \le \sqrt{\delta}\|\nabla\zeta\|_{L^2}, \quad \forall\, \zeta \in H^1(\mathbb{D};\mathbb{R}). \tag{1.6.47}$$

Наслідок 1.6.31. *Припустимо, що виконується умова* (1.6.35)*. Тоді кожна слабка границя u_δ при $\delta \to 0$ є критичною точкою $\mathcal{E}_\beta$ в $\mathcal{J}$, тобто розв'язком задачі* (1.6.4).

Доведення. Припустимо, що $u_\delta \rightharpoonup u$ слабко в H^1 (можливо для підпослідовності). Тоді u задовольняє $-\Delta u = \beta u(1-|u|^2)$ (що неважко бачити за допомогою переходу до границі в рівнянні). Крім того, $u_\delta \times \nabla u_\delta \rightharpoonup u \times \nabla u$ в L^2, і (внаслідок (1.6.47)) u задовольняє (1.6.3) (або, еквівалентно, (1.6.4)). □

1.6.4 Існування критичних точок

У цьому підрозділі встановлюється наступне узагальнення Теореми 1.6.1.

Теорема 1.6.32. *Припустимо, що виконується умова* (1.6.35) *і c^* в* (1.6.37) *задовольняє*
$$c^* < 2\pi. \tag{1.6.48}$$
Тоді c^* є критичним значенням $\mathcal{E}_\beta$ в $\mathcal{J}_1$, тобто існує розв'язок u задачі (1.6.4) *в $\mathcal{J}_1$ і $\mathcal{E}_\beta(u) = c^*$.*

Перед тим як перейти безпосередньо до доведенням, зазначимо, що Теорема 1.6.32 є узагальненням Теореми 1.6.1 через наступні міркування. Виберемо $F(a) = N_a$, $a \in \overline{\mathbb{D}}_r$, в (1.6.37), і для $\beta = \dfrac{1}{\varepsilon^2}\,\mathrm{Jac}\ \mathcal{F}^{-1}$ в (1.6.1), де $\mathcal{F}$ є конформним відображенням Ω на $\mathbb{D}$, тоді
$$c^* \le \max_{a\in\mathbb{D}}\left(\int_{\mathbb{D}}|\nabla M_a|^2 dx + \frac{1}{4\varepsilon^2}\int_{\mathbb{D}}(1-|M_a|^2)^2\ \mathrm{Jac}\ \mathcal{F}^{-1}dx\right) \le \pi + \frac{|\Omega|}{4\varepsilon^2}.$$

Права частина в цій нерівності є меншою 2π для достатньо великих ε.

Доведення. Нехай (u_δ) – послідовність майже критичних точок з Наслідка 1.6.30. Розглянемо слабку границю u функцій u_{δ_n}, $u_{\delta_n} \rightharpoonup u$ в H^1, яка існує для деякої послідовності $\delta_n \to 0$. Згідно з Наслідком 1.6.31, u задовольняє (1.6.4). Для завершення доведення Тореми 1.6.32, треба показати, що $\deg\,(u, \mathbb{S}^1) = 1$ і $\mathcal{E}_\beta(u) = c^*$. Для доведення першого з цих тверджень достатньо показати існування $r \in (0,1)$ і $\lambda > 0$, таких що (з точністю до виділення підпослідовності, для якої залишимо позначення (δ_n))

$$|u_{\delta_n}(z)| \geq \lambda \quad \text{коли } |z| \geq r. \tag{1.6.49}$$

Нерівність (1.6.49) також є вирішальною в доведенні сильної збіжносі $u_{\delta_n} \to u$ в H^1.

Справедливість (1.6.49) доведемо від супротивного: припустимо, що існують посдідовності $\delta_n \to 0$ і (a_n), такі що

$$u_{\delta_n}(a_n) \to 0 \;\text{ і }\; |a_n| \to 1, \tag{1.6.50}$$

і покажемо, що

$$\mathcal{E}_\beta(u_{\delta_n}) \to \pi, \tag{1.6.51}$$

що протирічить Лемі 1.6.21. Але перед цим спростимо позначення: будемо писати u_n замість u_{δ_n} і будемо залишати позначення (u_n) для підпослідовностей виділених з (u_n), те ж саме стосується (a_n).

Перш за все застосуємо заміни змінних за допомогою конформних відображень $\mathcal{F}_n = M_{-a_n}$

$$v_n = u \circ \mathcal{F}_n,\; \beta_n = \beta \circ \mathcal{F}_n \text{ Jac } \mathcal{F}_n,\; F_n(w) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{D}} |\nabla w|^2 dx + \frac{1}{4}\int_{\mathbb{D}} \beta_n (1-|w|^2)^2 dx. \tag{1.6.52}$$

З Наслідку 1.6.30 і конформної інваріантності інтегралу Діріхле маємо наступні властивості $(v_n) \subset \mathcal{J}_1$

$$\begin{cases} -\Delta v_n = \beta_n v_n(1-|v_n|^2) \quad \text{в } \mathbb{D} \\ |v_n| = 1 \quad \text{на } \partial\mathbb{D} \\ \left|\int_{\mathbb{D}} (v_n \times \nabla v_n)\cdot\nabla\zeta dx\right| \leq c_n \|\nabla\zeta\|_{L^2}, \quad \forall\, \zeta \in H^1(\mathbb{D}) \, , \\ v_n(0) \to 0 \\ F_n(v_n) = \mathcal{E}_\beta(u_n) \to c^*, \end{cases} \tag{1.6.53}$$

з $c_n \to 0$. Почнемо з описання властивостей β_n і v_n.

Лема 1.6.33. *1.* $\beta_n \to 0$ *рівномірно на компактних підмножинах. Зокрема,* (v_n) *збігається (з точністю до підпослідовності) в* $C^{1,\alpha}_{loc}(\mathbb{D})$, $0 < \alpha < 1$, *до деякого розвязку* $v \in \mathcal{J}$ *задачі* (1.6.4) *з* $\beta = 0$, *такого що* $v(0) = 0$. *Більш того, (внаслідок Леми 1.6.8)* $v \in \mathcal{J}_d$ *для деякого* $d \neq 0$, *і* v *є або* d*-Бляшке доданок, або спряжений до такого доданку.*

2. $\lambda_1(-\Delta - \beta_n) > 0$. *Зокрема,* v_n *є мінімізантом* F_{β_n} *відносно власних крайових даних.*

Доведення. Той факт, що $\beta_n \to 0$ рівномірно на компактних підмножинах випливає з визначення (1.6.52) і рвномірної збіжності $|\nabla\Phi_n| \to 0$ на компактних підмножинах. Тоді, з огляду на (1.6.53), легко бачити , що $\Delta v_n \to 0$ рівномірно на компактних підмножинах. Нехай K – компактна підмножина $\mathbb{D}$ і нехай $L \subset \mathbb{D}$ – компактний окіл K. Внаслідок стандартних еліптичних оцінок [95, Теорема 9.13, p. 239], маємо

$$\|v_n\|_{W^{2,p}(K)} \leq C(\|v_n\|_{L^2(\mathbb{D})} + \|\Delta v_n\|_{L^p(L)}) \leq C', \quad 1 < p < \infty,$$

послідовність (v_n) є компактною в $C^{1,\alpha}_{loc}(\mathbb{D})$, $0 < \alpha < 1$. Тоді, з огляду на (1.6.53), (v_n) збігається (з точністю до підпослідовності) в $C^{1,\alpha}_{loc}(\mathbb{D})$, $0 < \alpha < 1$, до деякої гармонічної функції $v \in \mathcal{J}$, такої що $v(0) = 0$. Таким чином остання частина твердження *1.* є просто переформулюванням Леми 1.6.8.

Твердження *2.* випливає з (1.6.35). □

Крок I (доведення Теореми 1.6.32). Нехай v – гранична функціє з Леми 1.6.33. Тоді $v = M_{\alpha,0}$ для деякого $\alpha \in \mathbb{S}^1$. Дійсно, скористуємось міркуваннями близькими до ти[, що ведуть до (N.9): з огляду на Лему 1.6.2 і Наслідок 1.6.5,

$$2\pi > c^* \geq \liminf \frac{1}{2}\int_{\mathbb{D}} |\nabla v_n|^2 dx \geq \frac{1}{2}\int_{\mathbb{D}} |\nabla v|^2 dx + \pi|1-d| \geq \pi|d| + \pi|1-d|,$$

де $d = \deg\,(v, \mathbb{S}^1)$. Існує дві можливості $d = 0$ або $d = 1$, і твердження *1.* Леми 1.6.33 дає шуканий результат.

Крок II. Існують $r \in (0,1)$ і $\lambda > 0$, такі що $|v_n(z)| \geq \lambda$ коли $|z| \geq r$. Припустимо, від супротивного, що (з точністю до підпослідовності) $v_n(z_n) \to 0$, де точки $z_n \in \mathbb{D}$ збігаються до межі, $|z_n| \to 1$. Повторюючи міркування, що призвели до (N.17) і (N.18), знаходимо, що для кожного $s \in (0,1)$, існує деяке $R \in (0,1)$, таке що

$$\liminf \frac{1}{2}\int_{\mathbb{D}_R} |\nabla v_n|^2 dx \geq \pi s^2 \tag{1.6.54}$$

і

$$\liminf \frac{1}{2}\int_{\mathbb{D}\setminus\overline{\mathbb{D}}_R} |\nabla v_n|^2 dx \geq \pi s^2. \tag{1.6.55}$$

Дійсно, нерівність (1.6.54) доводиться точно як (N.17). Проте, щоб повторити міркування, шо ведуть до (N.18), потрібно щоб виконувалась умова твердження *3.* Леми N.2, тобто функція v_n повинна мінімізувати F_n відносно власних крайових значень. Ця вимога виконується завдяки твердженню *2.* Леми 1.6.33.

Комбінуючи (1.6.54) з (1.6.55), знаходимо, що $\liminf \frac{1}{2}\int_{\mathbb{D}} |\nabla v_n|^2 dx \geq 2\pi$. Це протирічить умові $c^* < 2\pi$.

Крок III (Доведення збіжності $F_n(v_n) \to \pi$, протиріччя). Цей результат є наслідком Кроку II і Леми 1.6.34, що сформульвано і доведено нижче. Проте зручно попередньо ввести умови Леми 1.6.34.

Розглядаються дві послідовності функцій (β_n), (v_n) і функції γ, v, такі що:

$$\beta_n, \gamma \in L^\infty(\mathbb{D}),\ \beta_n, \gamma \geq 0, \tag{1.6.56}$$

$$\beta_n \to \gamma \text{ рівномірно на компактних підмпожинах } \mathbb{D}, \tag{1.6.57}$$

$$v_n, v \in H^1(\mathbb{D};\mathbb{C}),\ v_n \in \mathcal{J},\ v_n \rightharpoonup v \text{ слабко в } H^1, \tag{1.6.58}$$

$$-\Delta v_n = \beta_n v_n(1-|v_n|^2) \text{ в } \mathbb{D}, \tag{1.6.59}$$

$$\left|\int_{\mathbb{D}}(v_n \times \nabla v_n)\cdot \nabla\zeta dx\right| \leq c_n\|\nabla\zeta\|_{L^2},\ \forall\,\zeta \in H^1(\mathbb{D}),\ \text{ з } c_n \to 0 \text{ при } n \to \infty. \tag{1.6.60}$$

Лема 1.6.34. *Припустимо, що виконуються умови* (1.6.56)-(1.6.60). *Припустимо також, що існує $\lambda > 0$, таке що*

$$|v_n(z)| \geq \lambda \quad \forall\, z \in \mathbb{D},\ \textit{таких що } |z| \geq 1-\lambda. \tag{1.6.61}$$

Тоді

$$\int_{\mathbb{D}} |\nabla v_n|^2 dx \to \int_{\mathbb{D}} |\nabla v|^2 dx \tag{1.6.62}$$

і

$$\int_{\mathbb{D}} \beta_n(1-|v_n|^2)^2 dx \to \int_{\mathbb{D}} \gamma(1-|v|^2)^2 dx. \tag{1.6.63}$$

еквівалентно, $v_n \to v$ сильно в H^1 і

$$F_n(v_n) \to F_\gamma(v). \tag{1.6.64}$$

Крок III (продовження: завершення доведення Теореми 1.6.32). Залишається тільки застосувати Лему 1.6.34 з $\gamma = 0$ і $v = M_{\alpha,0}$ як в Кроці I. □

Доведення Леми 1.6.34. Достатньо встановити (1.6.62)-(1.6.63) для підпослідовності. Внаслідок принципу максимуму виконуються поточкові оцінки $|v_n|, |v| \leq 1$ в $\mathbb{D}$. Тоді, за допомогою стандартних еліптичних оцінок [95, Теорема 9.13, ст. 239], отримуємо

$$v_n \to v \quad \text{in } W^{2,p}_{loc}(\mathbb{D}),\ \forall\, p < \infty. \tag{1.6.65}$$

З (1.6.57) і (1.6.65), знаходимо, що (1.6.62) і (1.6.63) виконуються для області $\mathbb{D}_{1-\varepsilon}$ (замість $\mathbb{D}$) для кожного $\varepsilon > 0$. З іншого боку, маємо

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{D}\setminus\overline{\mathbb{D}}_{1-\varepsilon}} (|\nabla v|^2 + \gamma(1-|v|^2)^2)dx = 0.$$

Отже достатньо показати, що

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\limsup_{n\to\infty}\int_{\mathbb{D}\setminus\overline{\mathbb{D}}_{1-\varepsilon}}(|\nabla v_n|^2+\beta_n(1-|v_n|^2)^2)dx=0. \tag{1.6.66}$$

З (1.6.65) витпливає, що $v_n\to v$ рівномірно на компактних підмножинах в $\mathbb{D}$. Комбінуя цей факт з (1.6.61), знаходимо, що для достатньо великих n,

$$d:=\deg\,\left(\frac{v}{|v|},\partial\mathbb{D}_r\right)=\deg\,\left(\frac{v_n}{|v_n|},\partial D_r\right),\forall\, r\in[1-\lambda,1].$$

Тоді в кільці $\omega=\mathbb{D}\setminus\overline{\mathbb{D}}_{1-\lambda}$ можна записати $v_n=\rho_n e^{\imath(d\theta+\varphi_n)}$, і $v=\rho e^{\imath(d\theta+\varphi)}$, з $\lambda\leq\rho_n,\rho\leq 1$, і $\varphi_n,\varphi\in H^1(\omega)$. Оскільки послідовності (φ_n) and (ρ_n) є обмеженими в $H^1(\omega)$, то, можливо віднявши від φ_n сталі кратні 2π, маємо $\varphi_n\rightharpoonup\varphi$ і $\rho_n\rightharpoonup\rho$ в $H^1(\omega)$. З інщого боку, з (1.6.65) витікає, що $\varphi_n\to\varphi$ і $\rho_n\to\rho$ в $C^1_{loc}(\omega)$.

Опишемо властивості ρ_n і φ_n : з (1.6.59) і (1.6.60) випливає, що

$$\begin{cases}\text{div }(\rho_n^2\nabla(d\theta+\varphi_n))=0 & \text{в } \omega\\ -\Delta\rho_n=\beta_n\rho_n(1-\rho_n^2)-\rho_n|\nabla(d\theta+\varphi_n)|^2 & \text{в } \omega\\ \rho_n=1 & \text{на } \mathbb{S}^1\\ v_n\times\nabla v_n=\rho_n^2\nabla(d\theta+\varphi_n) & \text{в } \omega\\ \left|\int_{\mathbb{D}}(v_n\times\nabla v_n)\cdot\nabla\zeta dx\right|\leq c_n\|\nabla\zeta\|_{L^2}, & \forall\,\zeta\in H^1(\mathbb{D})\end{cases}. \tag{1.6.67}$$

Виберемо $0<\varepsilon<\lambda$. Оскільки $\varphi_n\to\varphi$ в $C^1(\partial\mathbb{D}_{1-\varepsilon})$, то функція $\varphi_n-\varphi$, задана в $\mathbb{D}\setminus\overline{\mathbb{D}}_{1-\varepsilon}$, має продовження $\zeta_n\in H^1(\mathbb{D})$, таке що $\|\nabla\zeta_n\|_{L^2(\mathbb{D}_{1-\varepsilon})}\to 0$. Тоді користуючись наступними фактами

$$\rho_n^2\nabla(d\theta)\to\rho^2\nabla(d\theta)\text{ і }\rho_n^2\nabla\varphi_n\rightharpoonup\rho^2\nabla\varphi\quad\text{в } L^2(\omega),$$

знаходимо

$$\begin{aligned}0&=\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{D}}(v_n\times\nabla v_n)\cdot\nabla\zeta_n dx=\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{D}\setminus\overline{\mathbb{D}}_{1-\varepsilon}}(v_n\times\nabla v_n)\cdot\nabla\zeta_n dx\\ &=\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{D}\setminus\overline{\mathbb{D}}_{1-\varepsilon}}[\rho_n^2\nabla(d\theta+\varphi_n)]\cdot\nabla(\varphi_n-\varphi)dx\\ &=\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{D}\setminus\overline{\mathbb{D}}_{1-\varepsilon}}\rho_n^2|\nabla\varphi_n|^2dx-\int_{\mathbb{D}\setminus\overline{\mathbb{D}}_{1-\varepsilon}}\rho^2|\nabla\varphi|^2dx,\end{aligned}$$

звідки
$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{D}\setminus\overline{\mathbb{D}}_{1-\varepsilon}}\rho_n^2|\nabla(d\theta+\varphi_n)|^2dx=\int_{\mathbb{D}\setminus\overline{\mathbb{D}}_{1-\varepsilon}}\rho^2|\nabla(d\theta+\varphi)|^2dx,$$
і, зокрема,
$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{D}\setminus\overline{\mathbb{D}}_{1-\varepsilon}}\rho_n^2|\nabla(d\theta+\varphi_n)|^2dx=0. \tag{1.6.68}$$
Помножимо тепер на $\eta_n=1-\rho_n$ рівняння для ρ_n, і проінтегруємо по $\mathbb{D}\setminus\overline{\mathbb{D}}_{1-\varepsilon}$:
$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{D}\setminus\overline{\mathbb{D}}_{1-\varepsilon}}\left(|\nabla\rho_n|^2+\frac{\rho_n}{1+\rho_n}\beta_n(1-|v_n|^2)^2\right)dx=&\int_{\mathbb{D}\setminus\overline{\mathbb{D}}_{1-\varepsilon}}\rho_n\eta_n|\nabla(d\theta+\varphi_n)|^2dx\\&+\int_{\partial\mathbb{D}_{1-\varepsilon}}\eta_n\frac{\partial\rho_n}{\partial\nu}ds,\end{aligned} \tag{1.6.69}$$
де ν – зовнішня одинична нормаль до $\mathbb{D}_{1-\varepsilon}$.

Оскільки $v\in C^1(\overline{\mathbb{D}})$ і $|v|=1$ на $\mathbb{S}^1$, то
$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{n\to\infty}\int_{\partial\mathbb{D}_{1-\varepsilon}}\eta_n\frac{\partial\rho_n}{\partial\nu}ds=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\partial\mathbb{D}_{1-\varepsilon}}(1-\rho)\frac{\partial\rho}{\partial\nu}ds=0. \tag{1.6.70}$$
Тоді об'єднуя (1.6.68)–,(1.6.70) з (1.6.61), знаходимо,
$$\lim_{\varepsilon\to 0}\limsup_{n\to\infty}\int_{\mathbb{D}\setminus\overline{\mathbb{D}}_{1-\varepsilon}}\left(|\nabla\rho_n|^2+\beta_n(1-|v_n|^2)^2\right)dx=0. \tag{1.6.71}$$
Насамкінець,з (1.6.68) і (1.6.71) витікає (1.6.66), і, таким чином, доведення Леми 1.6.34 завершено. □

Комбінуючи (1.6.49)з Лемою 1.6.34, застосованою до вихідної полідовності (u_n) і вагових функцій $\beta_n=\beta$ і $\gamma=\beta$, знаходимо наступне покращення Теореми 1.6.32.

Теорема 1.6.35. *Припустимо, що має місце* (1.6.35) *і* $c^*<2\pi$. *Тоді* J^* *задовольняє умову Пале-Смейла для рівня* c^*.

1.6.5 Асимптотична поведінка критичних точок.

У цьому підрозділі описується асимптотична поведінка критичних точок E_ε в $\mathcal{J}_1$, що побудовано за допомогою підходу наведеного в Підрозділі 1.6.3, при

$\varepsilon \to \infty$. Для цього, застосувавши конформне відображення, зведемо задачу до дослідження функціонала енергії $\mathcal{E}_\beta$ в області $\mathbb{D}$, де

$$\beta = \beta_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^2}\,\mathrm{Jac}\ \mathcal{F}^{-1} = \frac{1}{\varepsilon^2} w. \tag{1.6.72}$$

Щоб підкреслити залежність від ε, будемо позначати величину c^* пов'язану з $\mathcal{E}_\beta$ через c^*_ε,

$$\begin{aligned} c^*_\varepsilon := \inf\Big\{ \max_{\overline{\mathbb{D}}_r} \mathcal{E}_{\beta_\varepsilon}\left(T\left(N_0\, e^{\imath F}\right)\right);\ F \in C(\overline{\mathbb{D}}_r; H^{1/2}(\mathbb{S}^1;\mathbb{R})), \\ F(a) = \psi_a \text{ для } a \in \partial\mathbb{D}_r \Big\}; \end{aligned} \tag{1.6.73}$$

нагадаємо, що

$$J^*(\psi) = \mathcal{E}_{\beta_\varepsilon}\left(T\left(N_0\, e^{\imath F}\right)\right). \tag{1.6.74}$$

Будемо вважати, що r є достатньо близьким до 1, так що можна застосувати Лему 1.6.21 (вважаємо також, що r залежить від ε).[10]

Введемо деякі позначення. Для заданого $v \in H^1(\mathbb{D};\mathbb{C})$, будемо позначати через

$$\widetilde{v} \text{ гармонічну функцією в } \mathbb{D}, \text{ що співпадає з } v \text{ на } \partial\mathbb{D}; \tag{1.6.75}$$

також, для функції $F \in C(\overline{\mathbb{D}}_r; H^{1/2}(\mathbb{S}^1;\mathbb{R}))$ покладемо

$$\underline{F}(a) := \text{гармонічне продовження } N_0\, e^{\imath F(a)}. \tag{1.6.76}$$

Для того, щоб сформулювати основний результат про асимтотичну поведінку u_ε при $\varepsilon \to \infty$ зазначимо, що перетворення Мебіуса $M_{\alpha,a}$ задовольняють

$$\int_{\mathbb{D}} w(1-|M_{\alpha,a}|^2)^2 dx > 0,\ \forall\, \alpha \in \mathbb{S}^1, \forall\, a \in \mathbb{D},\ \text{і} \quad \lim_{|a|\to 1} \int_{\mathbb{D}} w(1-|M_{\alpha,a}|^2)^2 dx = 0.$$

Таким чином, задача максимізації

$$M := \max_{\substack{a\in\mathbb{D}\\ \alpha\in\mathbb{S}^1}} \int_{\mathbb{D}} w(1-|M_{\alpha,a}|^2)^2 dx \tag{1.6.77}$$

[10] В доведенні Теореми 1.6.36 буде показано, що для достатньо великих ε, r можна вибрати незалежно від ε.

має розвязки (зазначимо, що якщо $M_{\alpha,a}$ є розв'яком задачі (1.6.77), то $M_{\gamma,a}$ також є розв'язком для довільного $\gamma \in \mathbb{S}^1$). Крім того, існує $r_0 < 1$, таке що довільний розв'язок (1.6.77) задовольняє $|a| \leq r_0$. В подальшому всюди будемо вважати, що $r_0 < r < 1$.

Теорема 1.6.36. *Нехай u_ε – критична точка знайдена через* (1.6.73)*. Тоді, з точністю до підпослідовності, $u_\varepsilon \to M_{\alpha,a}$ сильно в $H^1(\mathbb{D})$ при $\varepsilon \to \infty$, і $M_{\alpha,a}$ є розв'язком задачі максимізації* (1.6.77)*.*

Зауваження 1.6.37. Теорему 1.6.36 можна еквівалентно переформулвати наступним чином: якщо v_ε є критичною точкою E_ε в класі функцій $\mathcal{J}_1$ (заданих в області Ω) знайденою за допомогою підходу представленого в Підрозділі 1.6.3, тоді послідовність (v_ε) збігається (з точністю до підпослідовності) при $\varepsilon \to \infty$, сильно в $H^1(\Omega)$, до розв'язку задачі максимізації

$$M := \max_{\substack{a\in\Omega \\ \alpha\in\mathbb{S}^1}} \int_\Omega (1 - |M_{\alpha,a,\mathcal{F}}|^2)^2 dx.$$

Перш ніж перейти безпосередньо до доведення зробимо технічне зауваження. Нехай H – відображення описане в Лемі 1.6.20. Тоді звуження $H^{(r)}$ функції H на $\overline{\mathbb{D}}_r$ є допустимим в (1.6.73), так що (з $\beta = \beta_\varepsilon$)

$$c_\varepsilon^* \leq \max_{\overline{\mathbb{D}}_r} \mathcal{E}_\beta \left(T \left(N_0\, e^{\imath H^{(r)}} \right) \right) = \max_{a\in\overline{\mathbb{D}}_r} \mathcal{E}_\beta \left(T \left(N_a \right) \right). \tag{1.6.78}$$

Крок I. Справедлива асимптотика

$$c_\varepsilon^* = \pi + \frac{1}{4\varepsilon^2} M + o\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right) \quad \textit{при } \varepsilon \to \infty. \tag{1.6.79}$$

Дійсно, з одного боку оцінка зверху $c_\varepsilon^* \leq \pi + \dfrac{1}{4\varepsilon^2} M$ є наслідком (1.6.78) і наступної нерівності

$$\mathcal{E}_\beta(T(N_a)) \leq \mathcal{E}_\beta(M_a) = \pi + \frac{1}{4\varepsilon^2} \int_\mathbb{D} w(1 - |M_a|^2)^2 dx.$$

Для оцінки знизу виберемо $\xi \in \overline{\mathbb{D}}_r$, таке що M_ξ є розв'язком (1.6.77). Нехай F – таке тестове відображення в (1.6.73), що $J^*(F(a)) < c_\varepsilon^* + \dfrac{1}{\varepsilon^4}$ для кожного

$a \in \overline{\mathbb{D}}_r$. Ясно, що відображення $u \mapsto \widetilde{u}$ є неперервним з $H^1(\mathbb{D};\mathbb{C})$ на себе. Згідно Твердженню *3.* Теореми 1.6.15 , для великих ε відображення

$$G : \overline{\mathbb{D}}_r \to \mathbb{D},\ G(a) = \text{нуль гармонічного продовження } \underline{F}(a) \text{ функції } N_0\, e^{\imath F(a)}$$

є неперервним і задовольняє $G(a) = a$ якщо $|a| = r$. За допомогою Теореми Брауера про нерухому точку, знайдеться точка $a = a_\varepsilon$, така що $\underline{F}(a)(z) = 0$ в $z = \xi$. Оскільки $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\mathbb{D}} |\nabla \underline{F}(a)|^2 dx \leq c^*_\varepsilon$, за допомогою Наслідка 1.6.17 і Наслідка 1.6.5 знаходимо, що функція $\underline{F}(a)$ (що також залежить від ε) збігається при $\varepsilon \to 0$ сильно в $H^1(\mathbb{D})$ до $M_{\alpha,\xi}$ для деякого $\alpha \in \mathbb{S}^1$. Таким чином

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{D}} |\nabla \underline{F}(a)|^2 dx + \frac{1}{4\varepsilon^2}\int_{\mathbb{D}} w(1 - |\underline{F}(a)|^2)^2 dx \geq \pi + \frac{1}{4\varepsilon^2} M + o\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right) \quad \text{при } \varepsilon \to \infty. \tag{1.6.80}$$

Нижня оцінка в (1.6.79) встановлюється комбінуванням (1.6.80) з Лемою 1.6.38 нижче. Для формулювання цієї Леми, і подальшого користання в іншому контексті, введемо наступний клас,

$$Z_\varepsilon = \left\{ u \in \mathcal{J};\ -\Delta u = \frac{1}{\varepsilon^2} w\, u(1 - |u|^2) \right\}. \tag{1.6.81}$$

Лема 1.6.38. *Нехай $u \in Z_\varepsilon$. Тоді*

$$\|\nabla u - \nabla \widetilde{u}\|_{L^2(\mathbb{D})} + \|u - \widetilde{u}\|_{L^\infty(\mathbb{D})} = O\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right) \quad \textit{при } \varepsilon \to \infty, \tag{1.6.82}$$

$$\int_{\mathbb{D}} |\nabla u|^2 dx = \int_{\mathbb{D}} |\nabla \widetilde{u}|^2 dx + O\left(\frac{1}{\varepsilon^4}\right) \quad \textit{при } \varepsilon \to \infty, \tag{1.6.83}$$

і

$$\int_{\mathbb{D}} w(1 - |u|^2)^2 dx = \int_{\mathbb{D}} w(1 - |\widetilde{u}|^2)^2 dx + O\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right) \quad \textit{при } \varepsilon \to \infty. \tag{1.6.84}$$

Доведення Леми 1.6.38. Покладемо $v = u - \widetilde{u}$ і виберемо довільне $p > 2$. Скористаємось в задачі (1.6.36) (кожна функція $u \in Z_\varepsilon$ задовольняє (1.6.36)) принципом максимуму, еліптичними оцінками [95, Теорема 9.15, ст. 241] разом з Теоремою про вкладення соболевських просторів, в результаті маємо

$$\|\nabla v\|_{L^2(\mathbb{D})} + \|v\|_{L^\infty(\mathbb{D})} \leq C\|\Delta v\|_{L^p(\mathbb{D})} = C\|\Delta u\|_{L^p(\mathbb{D})} \leq \frac{C'}{\varepsilon^2},$$

тобто (1.6.82) доведено. Для доведення (1.6.83) комбінуємо (1.6.82) і рівність $\int_{\mathbb{D}} |\nabla u|^2 = \int_{\mathbb{D}} |\nabla \widetilde{u}|^2 dx + \int_{\mathbb{D}} |\nabla v|^2 dx$. Насамкінець, згідно з принципом максимуму $|u| \leq 1$, $|\widetilde{u}| \leq 1$, звідки $|v| \leq |u| + |\widetilde{u}| \leq 2$. Тоді внаслідок (1.6.82) маємо

$$\int_{\mathbb{D}} w(1-|u|^2)^2 dx - \int_{\mathbb{D}} w(1-|\widetilde{u}|^2)^2 dx = O\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right) \text{ при } \varepsilon \to \infty,$$

і оцінку (1.6.84) також доведено. □

Доведення Теореми 1.6.36, продовження. В асимптотичній формулі (1.6.79) скористаємось поточковою рівністю $|\nabla u|^2 = 2\,\mathrm{Jac}\ \ u + 4|\partial_{\bar{z}} u|^2$, в результаті отримуємо

$$2\int_{\mathbb{D}} |\partial_{\bar{z}} u_\varepsilon|^2\, dx + \frac{1}{4\varepsilon^2}\int_{\mathbb{D}} w(|u_\varepsilon|^2 - 1)^2 dx = \frac{1}{4\varepsilon^2} M + o\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right) \quad \text{при } \varepsilon \to \infty. \tag{1.6.85}$$

Для завершення доведення Теореми 1.6.36 достатньо показати, що

$$\int_{\mathbb{D}} |\partial_{\bar{z}} u_\varepsilon|^2\, dx = o\left(\frac{1}{\epsilon^2}\right) \quad \text{при } \varepsilon \to \infty. \tag{1.6.86}$$

Дійсно, припустимо що (1.6.86) доведено. Як і в доведенні Леми 1.6.33, Крок I, виводимо, що можливими слабкими границями u_ε при $\varepsilon \to \infty$ є або константа з модулем 1, або відображення Мебіуса $M_{\alpha,a}$. Випадок константної границі є неможливим через (1.6.85) і (1.6.86). Таким чином, з (1.6.79), (1.6.85), (1.6.86) випливає, що $u_\varepsilon \to M_{\alpha,a}$ сильно в $H^1(\mathbb{D})$, де $M_{\alpha,a}$ максимізує (1.6.77).

Крок II (в доведенні Теореми 1.6.36: оцінка (1.6.86)) Введемо до розгляду функцію h_ε яка є розв'язком задачі

$$\begin{cases} \nabla^\perp h_\varepsilon = u_\varepsilon \times \nabla u_\varepsilon & \text{в } \mathbb{D}, \\ h_\varepsilon = 0 & \text{на } \mathbb{S}^1. \end{cases}$$

Існування h_ε випливає з того, що (внаслідок (1.6.4)) div $(u_\varepsilon \times \nabla u_\varepsilon) = 0$ в $\mathbb{D}$ і $u_\varepsilon \times \dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu} = 0$ на $\partial\mathbb{D}$. Покладемо

$$v_\varepsilon = \frac{1 - |u_\varepsilon|^2}{2} + h_\varepsilon. \tag{1.6.87}$$

Наступні властивості h_ε і v_ε встановлюються прямою перевіркою.

Лема 1.6.39. *Функції h_ε і v_ε є розв'язками задач*

$$\begin{cases} \Delta h_\varepsilon = 2\,\mathrm{Jac}\ u_\varepsilon & \text{в } \mathbb{D}, \\ h_\varepsilon = 0 & \text{на } \mathbb{S}^1, \end{cases} \tag{1.6.88}$$

$$\begin{cases} \Delta v_\varepsilon = \dfrac{w}{\varepsilon^2}|u_\varepsilon|^2(1-|u_\varepsilon|^2) - 4\,|\partial_{\bar z} u_\varepsilon|^2 & \text{в } \mathbb{D}, \\ v_\varepsilon = 0 & \text{на } \mathbb{S}^1, \end{cases} \tag{1.6.89}$$

і

$$|\nabla v_\varepsilon|^2 = 4|u_\varepsilon|^2\,|\partial_{\bar z} u_\varepsilon|^2\,. \tag{1.6.90}$$

Ключовим елементом в Кроці II є наступний результат.

Лема 1.6.40. *Має місце збіжність*

$$\|v_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{D})} \to 0 \quad \text{при } \varepsilon \to \infty. \tag{1.6.91}$$

Доведення Леми 1.6.40. Нехай $a = a_\varepsilon$ позначає єдиний (для великих ε) нуль функції $\widetilde{u_\varepsilon}$ (див. Твердження *1* Теореми 1.6.15.). Покладемо $U_\varepsilon = u_\varepsilon \circ M_{-a}$ і $H_\varepsilon = h_\varepsilon \circ M_{-a}$. З огляду на (1.6.87), $v_\varepsilon \circ M_{-a} = \dfrac{1-|U_\varepsilon|^2}{2} + H_\varepsilon$, і (1.6.91) зводиться до

$$\frac{1-|U_\varepsilon|^2}{2} + H_\varepsilon \to 0 \quad \text{рівномірно в } \overline{\mathbb{D}} \text{ при } \varepsilon \to \infty. \tag{1.6.92}$$

Як в Кроці *1.*, комбінуючи Наслідки 1.6.17 і 1.6.5 з (1.6.79) знаходимо, що, з точністю до підпослідовності,

$$\widetilde{U_\varepsilon} \to M_{\gamma,0} = \gamma\,\mathrm{Id} \quad \text{сильно в } H^1(\mathbb{D}) \text{ при } \varepsilon \to \infty. \tag{1.6.93}$$

З огляду на (1.6.82), також маємо

$$U_\varepsilon \to M_{\gamma,0} = \gamma\,\mathrm{Id} \quad \text{сильно в } H^1(\mathbb{D}) \text{ при } \varepsilon \to \infty. \tag{1.6.94}$$

Користуючись твердженням *1.* Леми 1.6.9 разом з (1.6.94) і тим фактом, що (внаслідок (1.6.88)) H_ε задовольняє

$$\begin{cases} \Delta H_\varepsilon = 2\,\mathrm{Jac}\ U_\varepsilon & \text{в } \mathbb{D}, \\ H_\varepsilon = 0 & \text{на } \mathbb{S}^1, \end{cases},$$

знаходимо

$$H_\varepsilon(z) \to \frac{1}{2}(|z|^2 - 1) \quad \text{рівномірну в } \overline{\mathbb{D}} \text{ при } \varepsilon \to \infty. \tag{1.6.95}$$

З іншого боку, з огляду на (1.6.93), неважко показати, що

$$|\widetilde{U_\varepsilon}(z)| \to |z| \quad \text{рівномірно в } \overline{\mathbb{D}} \text{ при } \varepsilon \to \infty.$$

З цього результату скомбінованого з (1.6.82) знаходимо, що

$$|U_\varepsilon(z)| \to |z| \quad \text{рівномірно в } \overline{\mathbb{D}} \text{ при } \varepsilon \to \infty. \tag{1.6.96}$$

Твердження (1.6.92) (і разом з цим (1.6.91)) випливає з (1.6.96) і (1.6.95). □

Крок II (продовження). Помножимо (1.6.89) на v_ε проінтегруємо по $\mathbb{D}$, і за допомогою інтегрування частинами, з урахуванням (1.6.85), (1.6.90) і Леми 1.6.40, знаходимо, що

$$\int_{\mathbb{D}} |u_\varepsilon|^2 |\partial_{\bar z} u_\varepsilon|^2 dx = o\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right) \quad \text{при } \varepsilon \to \infty. \tag{1.6.97}$$

З огляду на (1.6.96) і конформну інваріантність інтегралу (1.6.97), оцінка (1.6.97) зокрема тягне за собою

$$\int_{\mathbb{D}\setminus\mathbb{D}_{1/2}} |\partial_{\bar z} U_\varepsilon|^2 dx = o\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right) \quad \text{при } \varepsilon \to \infty. \tag{1.6.98}$$

Таким чином, для того щоб закінчити Крок II достатньо показати, що

$$\int_{\mathbb{D}_{1/2}} |\partial_{\bar z} U_\varepsilon|^2 dx = o\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right) \quad \text{при } \varepsilon \to \infty. \tag{1.6.99}$$

Для доведення оцінки (1.6.99) розглянемо рівняння

$$\Delta(\partial_{\bar z} U_\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^2}\partial_{\bar z}\big(\underbrace{\beta \circ M_{-a_\varepsilon} \operatorname{Jac}\ M_{-a_\varepsilon} U_\varepsilon (1 - |U_\varepsilon|^2)}_{\gamma_\varepsilon}\big) \quad \text{in } \mathbb{D}. \tag{1.6.100}$$

для $\partial_{\bar z} U_\varepsilon$ (див. (1.6.36)). Скористаємось наступною (стандартною) еліптичною оцінкою. Для довільної області ω, такої що $\overline{\omega} \subset \Omega$, і довільного розв'язку u рівняння $-\Delta u = f$ в Ω, маємо

$$\|\nabla u\|_{L^2(\omega)} \le C\|u\|_{L^2(\Omega\setminus\omega)} + C\|f\|_{L^2(\Omega)}.[11] \tag{1.6.101}$$

Зазначимо, що функції γ_ε є рівномірно обмеженими на компактах в $\mathbb{D}$, і користаючись (1.6.98) і (1.6.101) отримуємо

$$\|\partial_{\bar z} U_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{D}_{1/2})} \leq C\|\Delta(\partial_{\bar z} U_\varepsilon)\|_{L^2(\mathbb{D}_{3/4})} + C\|\partial_{\bar z} U_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{D}_{3/4}\setminus\mathbb{D}_{1/2})} \leq C\frac{1}{\varepsilon^2} + o\left(\frac{1}{\varepsilon}\right),$$

тобто оцінку (1.6.99), а разом з нею і всю Теорему 1.6.36, доведено. □

Зауваження 1.6.41. Конструкцію критичних точок функціоналу E_ε в $\mathcal{J}_1$ і Теорему 1.6.36 можна адаптувати до випадку функціоналу Гінзбурга-Ландау з магнітним полем, чиї мінімізанти з приписаними степенями відображення вивчені в Підрозділі 1.3 для $\varepsilon \geq \sqrt{2}$. Таким чином критичні точки з приписаним степенем один продовжують існувати і для $\varepsilon < \sqrt{2}$. Проте, їх тип змінюється при переході через критичне значення $\sqrt{2}$, для $\varepsilon > \sqrt{2}$ вони є мінімізантами а для $\varepsilon < \sqrt{2}$ – критичні точки типу перевалу.

1.6.6 Структура послідовностей Пале-Смейла

Коли ε є малим доведення Теореми 1.6.1 стає некоректним. Навіть саме визначення J^* є коректним тільки для великих ε, тому що потребує єдиності розв'язку задачі (1.6.36).

В цьому Підрозділі викладено модіфіковану функціональну постановку яка є коректною для всіх $\varepsilon > 0$, і доведено існування послідовностей майже критичних точок або (що те ж саме) послідовностей Пале-Смейла. Більш того, в основному результаті цього Підрозділу описано асимтотичну поведінку послідовностей Пале-Смейла, що є узагальненням Наслідку 1.6.17.

---

[11] В доведенні цієї оцінки можна вважати, що функція u є дійснозначна. Помножимо рівняння $-\Delta u = f$ на $\zeta^2 u$, де $\zeta \in C_c^\infty(\Omega;\mathbb{R})$ – зрізаюча функція, така що $\zeta = 1$ в ω, і проінтегруємо по Ω. Тоді, після нескладних обчислень знаходимо

$$\int_\Omega |\nabla(\zeta u)|^2 dx = \int_\Omega \zeta^2 f u dx + 2\int_\Omega \zeta u \nabla u \cdot \nabla\zeta dx,$$

звідки

$$\int_\Omega |\nabla(\zeta u)|^2 dx \leq C_1\|u\|^2_{L^2(\Omega\setminus\omega)} + \varepsilon\|\zeta u\|^2_{L^2(\Omega)} + C(\varepsilon)\|f\|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{1.6.102}$$

Шукану оцінку (1.6.101) виводимо застосовуючи нерівність Пуанкаре $\|\zeta u\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|\nabla(\zeta u)\|_{L^2(\Omega)}$ в (1.6.102).

Нехай $X^\sharp := H^1_0(\mathbb{D};\mathbb{C}) \times H^{1/2}(\mathbb{S}^1;\mathbb{R})$ і

$$U : X^\sharp \to H^1(\mathbb{D};\mathbb{C}), \quad X^\sharp \ni (v,\psi) \mapsto U(v,\psi) := v + u\left(N_0 e^{\imath\psi}\right).$$

Нагадаємо, що N_0 є тотожним відображенням $\mathbb{S}^1$ і $u(w)$ – гармонічне продовження w. Покладемо $J^\sharp(v,\psi) := \mathcal{E}_\beta(U(v,\psi))$.

Як і в Підрозділі 1.6.3, $K = \overline{\mathbb{D}}_r$, $K_0 = \partial\mathbb{D}_r$ і $N_a = N_0 e^{\imath\psi_a}$. Визначимо

$$\chi^\sharp : \partial\mathbb{D}_r \to X^\sharp, \quad \partial\mathbb{D}_r \ni a \mapsto \chi^\sharp(a) = (0,\psi_a),$$

тоді $U \circ \chi^\sharp(a) = M_a$.

Введемо також $c_1^\sharp := \max_{K_0} J^\sharp \circ \chi^\sharp$ і розглянемо

$$c^\sharp := \inf\left\{\max_K J^\sharp \circ F;\ F \in C(K;X^\sharp),\ F = \chi^\sharp \text{ on } K_0\right\} \geq c_1^\sharp. \tag{1.6.103}$$

Зауваження 1.6.42. Припустимо, тільки в цьому зауваженні, що виконується (1.6.35). Тоді, очевидно, $c^\sharp = c^*$ and $c_1^\sharp = c_1^*$, з c^* і c_1^* як в (1.6.37).

Повторюючи доведення Леми 1.6.21, отримуємо наступний результат.

Лема 1.6.43. *Нехай виконується умова* (1.6.26). *Тоді, для r достатньо близьких до* 1, *маємо $c^\sharp > c_1^\sharp$.*

Далі встановлюється аналог Леми 1.6.26 і Наслідку 1.6.30 у випадку коли J^* замінюється на $J^\sharp$. Почнемо з прямих наслідків Леми 1.6.22.

Лема 1.6.44. *Нехай $1 \leq p < \infty$ і нехай $u_0 \in H^{1/2} \cap L^\infty(\mathbb{S}^1;\mathbb{C})$. Тоді відображення*

$$\mathcal{F}_1 : H^{1/2}(\mathbb{S}^1;\mathbb{R}) \to L^p(\mathbb{S}^1;\mathbb{C}), \quad H^{1/2}(\mathbb{S}^1;\mathbb{R}) \ni \psi \xrightarrow{\mathcal{F}_1} u_0\, e^{\imath\psi},$$

належить до класу C^1, і $\mathcal{F}_1{}'(\psi)(\eta) = \imath u_0\, e^{\imath\psi}\eta$.

Доведення. Потрібно перевірити той факт, що $\mathcal{T}(\psi)(\eta) := \imath u_0\, e^{\imath\psi}\eta$ визначає відображення $\mathcal{T} \in C(H^{1/2}; B(H^{1/2}; L^p))$. Дійсно,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{T}(\psi_1) - \mathcal{T}(\psi_2)\| &\leq \sup_{\|\eta\|_{H^{1/2}} \leq 1} \|(\psi_1 - \psi_2)\eta\|_{L^p} \\ &\leq \sup_{\|\eta\|_{H^{1/2}} \leq 1} \|\psi_1 - \psi_2\|_{L^{2p}} \|\eta\|_{L^{2p}} \leq C\|\psi_1 - \psi_2\|_{H^{1/2}}, \end{aligned}$$

де використано вкладення $H^{1/2}(\mathbb{S}^1) \hookrightarrow L^{2p}(\mathbb{S}^1)$. $\square$

Лема 1.6.45. *Для довільних* $1 \le p < \infty$ *і* $u_0 \in H^{1/2} \cap L^\infty(\mathbb{S}^1;\mathbb{C})$ *відображення*

$$\mathcal{F}_2 : H_0^1(\mathbb{D};\mathbb{C}) \times H^{1/2}(\mathbb{S}^1;\mathbb{R}) \to L^p(\mathbb{D}),$$
$$H_0^1(\mathbb{D};\mathbb{C}) \times H^{1/2}(\mathbb{S}^1;\mathbb{R}) \ni (v,\psi) \xrightarrow{\mathcal{F}_2} v + u\left(u_0\, e^{\imath\psi}\right),$$

належить до класу C^1, *і* $\mathcal{F}_2{}'(v,\psi)(w,\eta) = w + u\left(\imath u_0\, e^{\imath\psi}\eta\right)$.

Доведення. Шуканий результат випливає з попередньої Леми, враховуючи вкладення $H^1(\mathbb{D}) \hookrightarrow L^p(\mathbb{D})$ і неперервність відображення $L^p(\mathbb{S}^1) \ni f \mapsto u(f) \in L^p(\mathbb{D})$. $\square$

Комбінуючи Леми 1.6.45 і 1.6.23, знаходимо наступний результат.

Лема 1.6.46. *Для довільних* $u_0 \in H^{1/2} \cap L^\infty(\mathbb{S}^1;\mathbb{C})$ *і* $\beta \in L^\infty(\mathbb{D})$ *відображення*

$$\mathcal{F}_3 : H_0^1(\mathbb{D};\mathbb{C}) \times H^{1/2}(\mathbb{S}^1;\mathbb{R}) \to \mathbb{R},$$
$$H_0^1(\mathbb{D};\mathbb{C}) \times H^{1/2}(\mathbb{S}^1;\mathbb{R}) \ni (v,\psi) \xrightarrow{\mathcal{F}_3} \frac{1}{4}\int_{\mathbb{D}} \beta\left(1 - \left|v + u\left(u_0\, e^{\imath\psi}\right)\right|^2\right)^2 dx,$$

належить до класу C^1, *і*

$$\mathcal{F}_3{}'(v,\psi)(w,\eta) = -\int_{\mathbb{D}} \beta u \cdot \left(w + u\left(\imath u_0 e^{\imath\psi}\eta\right)\right)(1 - |u|^2)dx,$$

де $u := v + u\left(u_0\, e^{\imath\psi}\right)$.

Лема 1.6.47. *Відображення*

$$\mathcal{F}_4 : H^{1/2}(\mathbb{S}^1;\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \quad H^{1/2}(\mathbb{S}^1;\mathbb{R}) \ni \psi \xrightarrow{\mathcal{F}_4} \frac{1}{2}\int_{\mathbb{D}} \left|\nabla u\left(u_0 e^{\imath\psi}\right)\right|^2 dx,$$

належить до класу C^1, *і для довільних функцій* $\psi, \eta \in H^{1/2}(\mathbb{S}^1;\mathbb{R})$ *і* $\zeta \in H^1(\mathbb{D};\mathbb{R})$, *такої що* $\zeta\big|_{\partial\mathbb{D}} = \eta$,

$$\mathcal{F}_4{}'(\psi)(\eta) = \int_{\mathbb{S}^1} \left(u \times \frac{\partial u}{\partial\nu}\right)\eta ds = \int_{\mathbb{D}} (u \times \nabla u)\cdot\nabla\zeta dx, \tag{1.6.104}$$

де $u = u\left(u_0 e^{\imath\psi}\right)$.

Доведення. Той факт, що обидва інтеграли в (1.6.104) є однаковими можна показати так само як в доведенні (1.6.41).

Доведення формули $\mathcal{F}_4'(\psi)(\eta) = \mathcal{T}(\psi)(\eta)$, де $\mathcal{T}(\psi)(\eta) := \int_{\mathbb{D}} (u \times \nabla u) \cdot \nabla u(\eta) dx$, базується на Лемі 1.6.22. Відображення $\psi \mapsto u \times \nabla u \in L^2(\mathbb{D})$ є неперервним,[12] звідки $\mathcal{T} \in C(H^{1/2}; H^{-1/2})$. З іншого боку, ясно, що відображення $\mathcal{F}_4$ є неперервним. Тиким чином, достатньо показати (1.6.104) у випадку коли ψ і η є гладкими. За допомогою заміни u_0 на $u_0 e^{\imath\psi}$, можна вважати, що $\psi = 0$. Маємо

$$u_0 e^{\imath t\eta} = u_0(1 + \imath t\eta) + R(t), \quad \text{де } \|R(t)\|_{H^{1/2}} \le Ct^2 \text{ при } t \to 0,$$

таким чином

$$\mathcal{F}_4(t\eta) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{D}} |\nabla u|^2 dx + t\int_{\mathbb{D}} \nabla u \cdot \nabla u\,(\imath u_0 \eta)\,dx + S(t), \qquad \text{де } \|S(t)\|_{H^{1/2}} \le Ct^2 \text{ при } t \to 0. \tag{1.6.105}$$

Користуючись (1.6.105) і (1.6.43) з $\beta = 0$, знаходимо, що

$$\frac{\partial \mathcal{F}_4}{\partial \eta}(0) = \int_{\mathbb{D}} \nabla u \cdot \nabla(\imath u_0 \eta) dx = \int_{\mathbb{S}^1} \left(u \times \frac{\partial u}{\partial \nu}\right) \eta ds = \mathcal{T}(0)(\eta). \qquad \square$$

Прямим наслідком Леми 1.6.47 є наступний аналог Леми 1.6.26.

Лема 1.6.48. *Відображення $J^\sharp$ є C^1-гладким, і*

$$J^{\sharp\prime}(v,\psi)(w,\eta) = \int_{\mathbb{D}} \nabla v \cdot \nabla w dx + \int_{\mathbb{D}} (U \times \nabla U) \cdot \nabla\zeta dx - \int_{\mathbb{D}} \beta u \cdot \left(w + u\left(\imath N_0 e^{\imath\psi}\eta\right)\right)(1 - |u|^2) dx, \tag{1.6.106}$$

де $u = v + u\left(N_0 e^{\imath\psi}\right)$, $U = u\left(N_0 e^{\imath\psi}\right)$ і $\zeta \in H^1(\mathbb{D})$ – довільна функція, така що $\zeta\big|_{\partial\mathbb{D}} = \eta$.

Доведення. Результат випливає з представлення $J^\sharp(v,\psi) = \mathcal{F}_4(\psi) + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{D}} |\nabla v|^2 dx$, де $\mathcal{F}_4$ визначено в Лемі 1.6.47.[13] $\square$

Далі досліджуються послідовності майже критичних точок (послідовності Пале-Смейла), що відповідають функціоналу $J^\sharp$. Зазначимо, що застосування

[12] Ці міркування вже було застосовано в доведенні Леми 1.6.25.

[13] З $u_0 = N_0$.

Теореми 1.6.19 в комбінації з Лемою 1.6.43 призводить до послідовності (v_n, ψ_n), такої що

$$J^{\sharp\prime}(v_n, \psi_n) \to 0,\ J^{\sharp}(v_n, \psi_n) \to c^{\sharp},\ \text{ і }\ u_n^* := v_n + u\left(N_0 e^{\imath\psi_n}\right) \rightharpoonup u \text{ в } H^1 \text{ при } n \to \infty. \tag{1.6.107}$$

Для дослідження аимптотичної поведінки послідовностей Пале-Смейла гладкість u_n^* не є достатньою. Розглянемо функції $u_n := v + u\left(N_0 e^{\imath\psi_n}\right)$, де $v \in H_0^1(\mathbb{D})$ є слабкою границею v_n, $v_n \rightharpoonup v$ при $n \to \infty$. В вихідних змінних $J^\sharp$ це зводиться до заміни v_n слабкою границею v. Наступний результат є аналогом Наслідку 1.6.30.

Лема 1.6.49. *Нехай послідовність пар* (v_n, ψ_n) *задовольняє* (1.6.107), *і* $v_n \rightharpoonup v$ *при* $n \to \infty$. *Тоді послідовність* (u_n),

$$u_n := v + u\left(N_0 e^{\imath\psi_n}\right),$$

має наступні властивості.

1. *u задовольняє* (1.6.4), *і* $-\Delta v = \beta u(1 - |u|^2)$.

2. $|u_n| \le C$.

3. $-\Delta u_n - \beta u_n(1 - |u_n|^2) \to 0$ *при* $n \to \infty$ *в* L^p, $\forall 1 \le p < \infty$.

4. $u_n - u_n^* \to 0$ *при* $n \to \infty$ *в* $H^1(\mathbb{D})$. *Зокрема,* $u_n \rightharpoonup u$ *і* $\mathcal{E}_\beta(u_n) \to c^\sharp$ *при* $n \to \infty$.

5. (u_n) *є послідовністю Пале-Смейла, тобто* $J^{\sharp\prime}(v, \psi_n) \to 0$.

6. *Виконуються нерівності*

$$\left| \int_{\mathbb{D}} (u_n \times \nabla u_n) \cdot \nabla \zeta dx \right| \le c_n \|\nabla \zeta\|_{L^2}, \quad \forall\, \zeta \in H^1(\mathbb{D}; \mathbb{R}), \tag{1.6.108}$$

   з $c_n \to 0$ *при* $n \to \infty$.

Доведення. Всі твердження окрім твердження *6.* є очевидними. Дійсно, покладемо $U_n := u\left(N_0 e^{\imath\psi_n}\right)$. Оскільки $u_n^* = v_n + U_n \rightharpoonup u$, то $U_n \rightharpoonup U$ при $n \to \infty$, для деякої гармонічної функції $U \in \mathcal{J}$, отже $v_n \rightharpoonup v := u - U$ при $n \to \infty$. Користуючись тим, що (u_n^*) є послідовністю Пале-Смейла, можна перейти до границі $n \to \infty$ в (1.6.106),[14] що призводить до рівняння $-\Delta v = \beta u(1-|u|^2)$. Поточкова оцінка твердження *2.* випливає з поточкової нерівності $|U_n| \le 1$ і гладкості v. Твердження *3.* є наслідком того факту, що $u_n \to u$ при $n \to \infty$ в L^p для кожного $1 \le p < \infty$. Для доведення тверджень *4.* і *5.* перейдемо до границі $J^{\sharp\prime}(v_n, \psi_n)(v_n, 0) \to 0 = J^{\sharp\prime}(v,\psi)(v,0)$, звідки випливає, що має місці не тільки слабка а і сильна збіжність $v_n \to v$ в H^1. Це доводить твердження *4.*, а разом з ним і *5.*

Перейдемо до доведення твердження *6.*. Оскільки $\Delta U_n = 0$ в $\mathbb{D}$, маємо

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{D}} (U_n \times \nabla U_n)\cdot \nabla\zeta dx = \int_{\mathbb{D}} \operatorname{div}\left((U_n \times \nabla U_n)\zeta\right) dx &= \int_{\mathbb{S}^1} \frac{\partial U_n}{\partial \nu}\cdot (\imath U_n \eta) dx \\ &= \int_{\mathbb{D}} \nabla U_n \cdot \nabla u(\imath N_0 e^{\imath\psi_n}\eta) dx.\end{aligned}$$

Підставимо це в (1.6.106) і проінтегруємо. Інтегрування частинами з функцією $\zeta \in H^1(\mathbb{D})$, такою що $\zeta\big|_{\partial\mathbb{D}} = \eta$, дає

$$\begin{aligned}J^{\sharp\prime}(v,\psi_n)(0,\eta) &= \int_{\mathbb{D}} \nabla U_n \cdot \nabla u(\imath N_0 e^{\imath\psi_n}\eta)dx - \int_{\mathbb{D}} \beta u_n \cdot u\left(\imath N_0 e^{\imath\psi_n}\eta\right)(1-|u_n|^2)dx \\ &= \int_{\mathbb{D}} \nabla u_n \cdot \nabla u(\imath N_0 e^{\imath\psi_n}\eta)dx - \int_{\mathbb{D}} \beta u_n \cdot u\left(\imath N_0 e^{\imath\psi_n}\eta\right)(1-|u_n|^2)dx \\ &= \int_{\mathbb{S}^1} u_n \times \frac{\partial u_n}{\partial\nu}\eta dx - \int_{\mathbb{D}} \left(\Delta u_n + \beta u_n(1-|u_n|^2)\right)\cdot u\left(\imath N_0 e^{\imath\psi_n}\eta\right) dx \\ &= \int_{\mathbb{D}} (u_n \times \nabla u_n)\cdot\nabla\zeta dx + \int_{\mathbb{D}} u_n \times \Delta u_n \zeta dx \\ &\quad - \int_{\mathbb{D}} \left(\Delta u_n + \beta u_n(1-|u_n|^2)\right)\cdot u\left(\imath N_0 e^{\imath\psi_n}\eta\right) dx.\end{aligned}$$

Представлені обчислення є справедливим для гладких η і ζ, і у загальному випадку $\eta \in H^{1/2}(\mathbb{S}^1;\mathbb{R})$ і $\zeta \in H^1(\mathbb{D};\mathbb{R})$, $\zeta\big|_{\partial\mathbb{D}} = \eta$, обгрунтовуються, як звичайно,

[14] (1.6.106) застосовується для пари (v_n, ψ_n), з $\eta = 0$ і фіксованою функцією w.

апроксімацією гладкими. Зокрема, маємо

$$\left|\int_{\mathbb{D}}(u_n \times \nabla u_n)\cdot\nabla\zeta dx\right| \le \left|J^{\sharp\prime}(v,\psi_n)(0,\eta)\right| + \int_{\mathbb{D}}|u_n \times \Delta u_n|\,|\zeta|dx$$
$$+ \int_{\mathbb{D}}\left|\Delta u_n + \beta u_n(1-|u_n|^2)\right|\left|u\left(\imath N_0 e^{\imath\psi_n}\eta\right)\right|dx.$$

Візьмемо в цій нерівності довільну функцію ζ з нульовим середнім значенням і слідом $\zeta\big|_{\partial\mathbb{D}} = \eta$. Тоді, користуючись нерівністю Пуанкаре, а також оцінками

$$|\eta|_{H^{1/2}} \le C\|\nabla\zeta\|_{L^2} \text{ і } \|u\left(\imath N_0 e^{\imath\psi_n}\eta\right)\|_{L^p} \le C|\eta|_{H^{1/2}},\ \forall\, p<\infty,$$

твердженнями *3.* і *5.*, отримуємо (1.6.108).

Насамкінець, перша частина твердження *1.* випливає з твердження *6.* і другої частини твердження *1.* □

Для подальшого зручно ввести універсальне позначення для перетворення Мебіуса $\mathcal{B}_a = M_a$ і його комплексного спряження $\mathcal{B}_a = \overline{M_a}$.

Основним результатом, що описує асимтотичну поведінку послідовностей Пале-Смейла для $J^\sharp$ є наступне твердження.

Лема 1.6.50. *Нехай $(v_n) \subset \mathcal{J}$ – послідовність гармонічних функцій з наступними властивостями:*

$$v_n \rightharpoonup 1 \quad in\ H^1(\mathbb{D}) \text{ при } n\to\infty; \tag{1.6.109}$$

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{D}}|\nabla v_n|^2 dx \to K\pi \text{ при } n\to\infty; \tag{1.6.110}$$

$$\left|\int_{\mathbb{D}}(v_n\times\nabla v_n)\cdot\nabla\zeta dx\right| \le c_n\|\nabla\zeta\|_{L^2},\quad \forall\,\zeta\in H^1(\mathbb{D};\mathbb{R}),\ з\ c_n\to 0 \text{ при } n\to\infty. \tag{1.6.111}$$

Тоді K є цілим і, з точністю до підпослідовності, існують $a_1(n),\dots,a_K(n)$, $\mathcal{B}_{a_j(n)}$ $(j\in\{1,\dots K\})$ і константа $\gamma\in\mathbb{S}^1$, такі що

$$|a_j(n)|\to 1 \text{ при } n\to\infty,\ \forall\, j\in\{1,\dots K\}; \tag{1.6.112}$$

$$v_n - \gamma\prod_{j=1}^{K}\mathcal{B}_{a_j(n)} \to 0 \text{ сильно в } H^1(\mathbb{D}) \text{ при } n\to\infty. \tag{1.6.113}$$

Доведення. Застосуємо індукцію за цілою частиною K, $[K]$.

Крок I(Випадок $K < 1$). У цьому випадку буде показано, що $v_n \to 1$ сильно в $H^1(\mathbb{D})$ при $n \to \infty$. Дійсно, внаслідок Твердження *4.* ЛемиN.2 маємо $|v_n| \geq a$ для деякої сталої $a > 0$ і достатньо великих n. Тоді має місце представлення $v_n = \rho_n e^{\imath\varphi_n}$ в $\mathbb{D}$. Якщо вибрати $\zeta = \varphi_n$ в (1.6.111), то за допомогою поточкової рівності $(v_n \times \nabla v_n) \cdot \nabla\varphi_n = \rho_n^2 |\nabla\varphi_n|^2$ знаходимо, що $\nabla\varphi_n \to 0$ в L^2 при $n \to \infty$. Оскільки функції v_n є гармонічними, маємо $\begin{cases} \Delta\rho_n = \rho_n |\nabla\varphi_n|^2 & \text{в } \mathbb{D}, \\ \rho_n = 1 & \text{на } \mathbb{S}^1, \end{cases}$ отже $\rho_n \to 1$ сильно в $H^1(\mathbb{D})$ при $n \to \infty$.[15] Зі збіжностей $\nabla\varphi_n \to 0$ і $\nabla\rho_n \to 1$ в L^2 випливає шукана силна збіжність $v_n \to 1$ при $n \to \infty$, тобто (1.6.113) виконується з $K = 0$.

Крок II (Індуктивний перехід). Припустимо, що $[K] \geq 1$. Тоді H^1 збіжність (v_n) (або довільної підпослідовності (v_n)) до 1 є завжди слабкою. З міркувань в Кроці *1.* випливає, що не існує $a > 0$, такого що нерівність$|v_n| \geq a$ виконується для деякої підпослідовності. Отже можна вибрати точки $z_n \in \mathbb{D}$, такі що $v_n(z_n) \to 0$. З огляду на (1.6.109), маємо $|z_n| \to 1$ при $n \to \infty$.

Покладемо $w_n = v_n \circ M_{-z_n}$. Нова послідовність (w_n) задовольняє (1.6.110), (1.6.111) і $w_n(0) \to 0$ при $n \to \infty$.

Нехай w – слабка границя (w_n) (деякої підпослідовності). Тоді функція w є гармонічною, $w(0) = 0$ і, внаслідок (1.6.111), w задовольняє (1.6.4) з $\beta = 0$. Згідно з Лемою 1.6.8, існують $a_1, \ldots, a_L$ в $\mathbb{D}$ і стала $\gamma \in \mathbb{S}^1$, такі що

$$w = \gamma M_{a_1} \ldots M_{a_L}, \quad \text{або} \quad \overline{w} = \gamma M_{a_1} \ldots M_{a_L}. \tag{1.6.114}$$

Зокрема, $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\mathbb{D}} |\nabla w|^2 dx = L\pi$, з цілим $L > 0$. Покладемо $f := w\big|_{\partial\mathbb{D}}$ і $g_n := (w_n \overline{w})_{\partial\mathbb{D}}$. Тоді $g_n \rightharpoonup 1$ в $H^{1/2}(\mathbb{S}^1; \mathbb{S}^1)$ при $n \to \infty$. Крім того, з одного боку $w_n = u(fg_n)$, з іншого, послідовність функцій $h_n := u(g_n)$ збігається до 1 слабко в $H^1(\mathbb{D})$ при $n \to \infty$ (також $h_n \to 1$ в $C^1_{loc}(\mathbb{D})$ при $n \to \infty$.) Згідно з Лемами 1.6.12 і 1.6.14, маємо $w_n - wh_n \to 0$ в $H^1(\mathbb{D})$ і $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\mathbb{D}} |\nabla h_n|^2 dx \to (K - L)\pi$ при $n \to \infty$.

[15] В цьому легко переконатись поноживши рівняння для ρ_n на $\rho_n - 1$ і проінтегрувавши частинами результат.

Повернемося тепер до вихідної послідовності (v_n). Покладемо $t_n := \overline{\gamma_n} w \circ M_{z_n}$, $y_n := h_n \circ M_{z_n}$, де $\gamma_n = w \circ M_{z_n}(0)/|w \circ M_{z_n}(0)|$ (зазначимо, що $|w \circ M_{z_n}(0)| = |w(-z_n)| \to 1$ при $n \to \infty$). Тоді маємо:

1. $v_n - \gamma_n t_n y_n \to 0$ в $H^1(\mathbb{D})$ при $n \to \infty$.
2. Покладемо $a_j(n) := M_{-z_n}(a_j)$, тоді $|a_j(n)| \to 1$ при $n \to \infty$, і або $t_n = \overline{\gamma_n} \gamma \prod_j M_{a_j(n)}$, або $\bar{t}_n = \gamma_n \gamma \prod_j M_{a_j(n)}$.
3. $\dfrac{1}{2} \displaystyle\int_{\mathbb{D}} |\nabla y_n|^2 dx \to (K - L)\pi$ as $n \to \infty$.
4. $y_n \rightharpoonup 1$ в $H^1(\mathbb{D})$ при $n \to \infty$ (оскільки $v_n \rightharpoonup 1$ і $\overline{\gamma_n} w \circ M_{z_n} \rightharpoonup 1$ при $n \to \infty$).

Для завершення доведення Леми 1.6.50 скористаємось індуктивним припущенням для послідовності (y_n). Для цього потрібно довести (1.6.111) для послідовності (y_n).

Користуючись конформеою інваріантністю (1.6.111) і тим фактом, що (1.6.111) виконується для (v_n), знаходимо, що (1.6.111) виконується для (w_n). З іншого боку, з (1.6.114) випливає, що $\int_{\mathbb{D}} (w \times \nabla w) \cdot \nabla \zeta dx = 0$. Нагадаємо тепер, що $w_n = w h_n + r_n$, де $r_n \to 0$ в $H^1(\mathbb{D})$ при $n \to \infty$. Оскільки $\|\Delta r_n\|_{L^2} = \| -2\nabla w \cdot \nabla h_n\|_{L^2} \le C$, послідовність (r_n) є обмеженою в $W^{1,p}(\mathbb{D})$, $\forall p \in [1, \infty)$, звідки $r_n \to 0$ в $L^\infty(\mathbb{D})$ при $n \to \infty$. Отже маємо

$$w_n \times \nabla w_n = |h_n|^2 (w \times \nabla w) + |w|^2 (h_n \times \nabla h_n) + F_n,$$

де $F_n \in L^2(\mathbb{D};\mathbb{R}^2)$ і $\|F_n\|_{L^2} \to 0$ при $n \to \infty$. Далі,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{D}} (h_n \times \nabla h_n)\cdot \nabla\zeta dx =& \int_{\mathbb{D}} \big((w_n \times \nabla w_n) + (1-|w|^2)(h_n \times \nabla h_n)\big)\cdot \nabla\zeta dx \\ &+ \int_{\mathbb{D}} \big((1-|h_n|^2)(w\times\nabla w) - (w \times \nabla w)\big)\cdot\nabla\zeta dx \\ &- \int_{\mathbb{D}} F_n \cdot \nabla\zeta dx \\ =& \int_{\mathbb{D}} \big((w_n \times \nabla w_n) + (1-|w|^2)(h_n \times \nabla h_n)\big)\cdot \nabla\zeta dx \\ &+ \int_{\mathbb{D}} (1-|h_n|^2)(w\times\nabla w)\cdot\nabla\zeta dx - \int_{\mathbb{D}} F_n\cdot\nabla\zeta dx.\end{aligned} \tag{1.6.115}$$

Оскільки $h_n \to 1$ в $C^1_{loc}(\mathbb{D})$ і в $L^4(\mathbb{D})$ при $n \to \infty$, і $|w(z)| \to 1$ при $|z| \to 1$, то маємо

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{D}} (1-|w|^2)(h_n \times \nabla h_n)\cdot\nabla\zeta dx\right| + \left|\int_{\mathbb{D}} (1-|h_n|^2)(w\times\nabla w)\cdot\nabla\zeta dx\right| \\ \le c_n \|\nabla\zeta\|_{L^2}, \text{ де } c_n \to 0 \text{ при } n\to\infty.\end{aligned} \tag{1.6.116}$$

З (1.6.115) і (1.6.116) випливає, що (h_n) задовольняє (1.6.111), і, з огляду на конформну інваріантність (1.6.111), те саме є вірним для (y_n). □

Зауваження 1.6.51. Лема 1.6.50 стосується гармонічних функцій в одиничному диску $\mathbb{D}$. Цей аналіз, очевидно, розповсюджується на випадок довільної однозв'язної області. Аналогічні результати можна отримати для багатозв'язних областей [36, Розділ 9].

Лема 1.6.52. *Нехай (v_n, ψ_n) – послідовність Пале-Смейла для $J^\sharp$, і нехай $u_n^* := v_n + u\left(N_0 e^{\imath\psi_n}\right)$. Припустимо, що $u_n^* \rightharpoonup u$ в $H^1(\mathbb{D})$ при $n \to \infty$. Нехай $g_n := \operatorname{tr}(u_n^* \overline{u})$ і $w_n := u(g_n)$. Тоді*

1. *$u_n^* - uw_n \to 0$ сильно в $H^1(\mathbb{D})$ при $n \to \infty$.*
2. *$\mathcal{E}_\beta(u_n^*) = \mathcal{E}_\beta(u) + \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\mathbb{D}} |\nabla w_n|^2 dx + c_n$, з $c_n \to 0$ при $n \to \infty$.*
3. *Послідовність (w_n) задовольняє умови Леми 1.6.50.*

Доведення. Покладемо $u_n = v + u\left(N_0 e^{\imath\psi_n}\right)$, де $v = \lim_n v_n$ (як і в Лемі 1.6.49). З огляду на Лему 1.6.49, доведення твердження *1.* зводиться до демонстрації сильної сбіжності $z_n := uw_n - u_n$ до 0 в $H^1(\mathbb{D})$ при $n \to \infty$. Комбінуючи ті факти, що u є розв'язком (1.6.3), u_n задовольняє рівняння $-\Delta u_n = -\Delta v = \beta u(1-|u|^2)$ (див. Лему 1.6.49), і w_n є гармонічною функцією, знаходимо, що функція z_n є розв'язком задачі

$$\begin{cases} -\Delta z_n = \beta u(w_n - 1)(1-|u|^2) - 2\nabla u \cdot \nabla w_n & \text{in } \mathbb{D} \\ z_n = 0 & \text{on } \mathbb{S}^1 \end{cases}.$$

Тоді, внаслідок Зауваження 1.6.13, отримуємо, що $z_n \to 0$ в $H^1(\mathbb{D})$.

Для доведення твердження *2* зазначимо, що оскільки $w_n \rightharpoonup 1$ слабко в H^1 і $w_n \to 1$ сильно в L^p при $n \to \infty$, $\forall p \in [1,\infty)$ $(p \geq 1)$, і з огляду на твердження *1.*, достатньо показати, що, при $n \to \infty$,

$$\int_{\mathbb{D}} |\nabla(uw_n)|^2 dx = \int_{\mathbb{D}} |\nabla u|^2 dx + \int_{\mathbb{D}} |\nabla w_n|^2 dx + o(1). \tag{1.6.117}$$

Відправною точкою в доведенні (1.6.117) є тотожність

$$|\nabla(uw_n)|^2 = |u|^2|\nabla w_n|^2 + |\nabla u|^2|w_n|^2 + 2(u\nabla w_n)\cdot(w_n\nabla u).$$

Оскільки функції w_n є гармонічними і $w_n \rightharpoonup 1$ в H^1 при $n \to \infty$, то $w_n \to 1$ в C^1_{loc} при $n \to \infty$. З іншого боку $|u(x)| \to 1$ рівномірно при $x \to \partial\mathbb{D}$. Таким чином

$$\int |u|^2|\nabla w_n|^2 dx = \int |\nabla w_n|^2 dx + o(1) \quad \text{і} \quad \int |\nabla u|^2|w_n|^2 dx = \int |\nabla u|^2 dx + o(1)$$

при $n \to \infty$. Насамкінець, оскільки $\overline{u}w_n\nabla u \to \overline{u}\nabla u$ сильно в $L^2(\mathbb{D})$ і $\nabla w_n \rightharpoonup 0$ слабко в $L^2(\mathbb{D})$, маємо

$$\int (u\nabla w_n)\cdot(w_n\nabla u)\, dx = o(1)$$

при $n \to \infty$. Це завершує доведення (1.6.117).

Що стосується твердження *3.*, запишемо рівність

$$\int_{\mathbb{D}}((uw_n)\times\nabla(uw_n))\cdot\nabla\zeta dx=\int_{\mathbb{D}}(|u|^2-1)(w_n\times\nabla w_n)\cdot\nabla\zeta dx$$
$$+\int_{\mathbb{D}}(w_n\times\nabla w_n)\cdot\nabla\zeta dx+\int_{\mathbb{D}}|w_n|^2(u\times\nabla u)\cdot\nabla\zeta dx,$$

далі міркуємо як в доведенні Леми 1.6.50. □

Прямим наслідком попередніх двох лем є наступний рузультат.

Теорема 1.6.53. *Нехай* (v_n,ψ_n) *– послідовність Пале-Смейла для* $J^\sharp$*, і нехай* $u_n^*:=v_n+u\left(N_0e^{\imath\psi_n}\right)$*. Тоді, з точністю до підпослідовності, існують: критична точка* u *функціоналу* $\mathcal{E}_\beta$ *в* $\mathcal{J}$*, ціле число* $K\geq 0$*, точки* $a_1(n),\dots,a_K(n)$*, функції* $\mathcal{B}_{a_j(n)}$*,* $j\in\{1,\dots K\}$ *і стала* $\gamma\in\mathbb{S}^1$*, такі що*

$$|a_j(n)|\to 1 \text{ \textit{при} } n\to\infty,\ \forall\, j\in\{1,\dots K\};\tag{1.6.118}$$

$$u_n^*-\gamma u\prod_{j=1}^{K}\mathcal{B}_{a_j(n)}\to 0\ \ \text{\textit{сильно в} } H^1(\mathbb{D}) \text{ \textit{при} } n\to\infty;\tag{1.6.119}$$

$$\mathcal{E}_\beta(u_n^*)=\mathcal{E}_\beta(u)+K\pi+c_n,\quad \text{\textit{з} } c_n\to 0 \text{ \textit{при} } n\to\infty.\tag{1.6.120}$$

Зокрема, маємо (з $c^\sharp$*, що задається* (1.6.107)*)*

$$c^\sharp=\mathcal{E}_\beta(u)+K\pi.\tag{1.6.121}$$

Доведення. З Леми 1.6.52 випливає, що $\|u_n^*-uw_n\|_{H^1}\to 0$ при $n\to\infty$, де (w_n) задовольняє умови Леми 1.6.50. Тепер залишається тільки застосувати Лему 1.6.50 до (w_n). □

Насамкінець приведемо наступний наслідок аналізу послідовностей Пале-Смейла.

Теорема 1.6.54. *Нехай* $c^\sharp$*, що задається* (1.6.103)*, задовольняє нерівність* $c^\sharp<2\pi$*. Припустимо додатково, що*

$$\text{\textit{не існує розв'язків} } u\in\mathcal{J} \text{ \textit{задачі} } (1.6.4)\text{\textit{, таких що} } \mathcal{E}_\beta(u)=c^\sharp-\pi.\tag{1.6.122}$$

Тоді $\mathcal{E}_\beta$ *має критичну точку* $u\in\mathcal{J}_1$*. Крім того, функціонал* $\mathcal{E}_\beta$ *задовольняє* $(PS)_c$ *умові описаній в* (1.6.33) *для рівня* $c=c^\sharp$*.*

Відмітимо, що згідно з Зауваженням 1.6.42, умова на $c^\sharp$ узагальнює умову (1.6.48).

З Теореми 3.2.6 і наступного результата випливає Теорема 1.6.32 (і, як окремий випадок, Теорема 1.6.1).

Лема 1.6.55. *Припустимо, що виконується умова* (1.6.35)*. Нехай u – критична точка $\mathcal{E}_\beta$ в $\mathcal{J}$ і $\mathcal{E}_\beta(u) < \pi$. Тоді u є постійною функцією (тобто $\mathcal{E}_\beta(u) = 0$).*

Доведення. З припущення (1.6.35) випливає, що критичні точки $\mathcal{E}_\beta$ насправді є мінімізантами $\mathcal{E}_\beta$ відносно власних крайових даних. Далі міркуємо як в Кроці *1.* доведення Леми 1.6.50. Якщо u є таким мінімізантом і $\mathcal{E}_\beta(u) < \pi$, тоді існує стала $a > 0$, така що $|u| \geq a$ (Твердження *4.* Леми N.2). Тоді можна записати $u = \rho e^{\imath\varphi}$ в $\mathbb{D}$. Оскільки u є критичною точкою $\mathcal{E}_\beta$, то виконується (1.6.3). Виберемо $\zeta = \varphi$ в (1.6.3) і знайдемо, що φ є константною. Тоді ρ задовольняє $-\Delta\rho = \beta\rho(1-\rho^2)$ в $\mathbb{D}$ (і $\rho = 1$ на $\mathbb{S}^1$). Помножимо це рівняння на $\rho - 1$ і проінтегруємо по $\mathbb{D}$. За допомогою інтегрування частинами доходимо висновку, що $\rho \equiv 1$. □

Висновки до Розділу 1

У Розділі 1 вивчено варіаційні задачі для спрощеного функціонала Гінзбурга-Ландау у класі коплекснозначних функцій із заданими одиничним модулем і степенями відображення на компонентах межі. Аналогічну задачу розглянуто для повного функціонала Гінзбурга-Ландау. Основними результатами розділу є

- Теорема 1.1.1 про існування скінченного порогового значення параметра Гінзбурга-Ландау більше якого не існують глобальні мінімізанти з заданими одиничними степенями відображення на обох компонентах межі двозв'язної області з ємністю більшою π.

- Теорема 1.2.1 (див. також Теорему 1.2.3) про існування локальних мінімізантів з вихорями спрощеного функціонала Гінзбурга-Ландау з заданими степенями відображення на межі двозв'язної області.

- Теорема 1.3.1, що повністю вирішує питання існування/неіснування глобальних мінімізантів повного функціонала Гінзбурга-Ландау в однозв'язних областях з заданим степенем відображення на межі.

- Теореми 1.4.4 і 1.4.1 про існування/неіснування і сінгулярну поведінку глобальних мінімізантів повного функціонала Гінзбурга-Ландау в двозв'язних областях з заданими одиничним і нульовим степенеми відображення на компонентах межі.

- Теорема 1.5.2 про існування локальних мінімізантів з вихорями повного функціонала Гінзбурга-Ландау з заданими степенями відображення на межі двозв'язної області.

- Теореми 1.6.1 і 1.6.32 про існування критичних точок спрощеного функціонала Гінзбурга-Ландау в однозв'язних областях з заданим одиничним степенем відображення на межі, а також Теорема 1.6.53, що описує структуру послідовностей Пале-Смейла.

Розділ 2

АСИМПТОТИЧНИЙ АНАЛІЗ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНИХ ЕЛІПТИЧНИХ СПЕКТРАЛЬНИХ ЗАДАЧ

Цей розділ присвячений дослідженню спектральних асимптотик для сингулярно збурених еліптичних операторів вигляду $\mathcal{L}_\varepsilon u = \varepsilon^2 a^{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \varepsilon b^j \frac{\partial u}{\partial x_j} + cu$ або $\mathcal{L}_\varepsilon u = \varepsilon a^{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + b^j \frac{\partial u}{\partial x_j} + cu$ (де $\varepsilon > 0$ – малий параметр) з крайовими умовами Діріхле, Неймана і Фур'є (Робена). Розглядаються випадки, коли коефіцієнти є локально періодичними швидко осцилюючими функціями, наприклад $b^j = b^j(x, x/\varepsilon)$ (і $b^j = b^j(x, x/\varepsilon^\alpha)$, $\alpha > 0$), або плавно змінюються (у випадку задачі Неймана). Основна частина результатів стосується асимптотичної поведінки першого власного значення λ_ε і першої власної функції u_ε, цю пару називають основном станом, проте в Підрозділі 2.3 вивчено асимтотики всіх власних значень на межі спектру для задачі у тонкому циліндрі.

Основні стани відіграють важливу роль в дослідженні асимптотичної поведінки за великим часом відповідних параболічних початково-крайових задач. Перше власне значення характеризує експонеціальне затухання або зростання типичного розв'язку, коли $t \to \infty$, а відповідна власна функція описує граничну форму нормалізованого розв'язку. Крім того, оскільки зазвичай перша власна функція має сингулярну поведінку, коли $\varepsilon \to 0$, для прикладних питань важливо знати множину точок концентрації функції u_ε, так званих горячих точок. Ця множина точок коцентрації може складатися з однієї або кількох точок, поверхні позитивної корозмірності, або мати більш складну структуру. Цікаве обговорення горячих точок можна знайти в [170].

Крайові задачі для сингулярно збурених еліптичних операторів достатньо активно вивчались в минулому. Важливим вкладом в цю тематику зроблено в класичній роботі [199] де вивчено сингулярно збурені оператори з гладкими неосцилюючими коефіцієнтами в припущенні, що для $\varepsilon = 0$ задача залишається (в певному сенсі) коректно поставленою.

Задачу Діріхле для оператора конвекції-дифузії з малою дифузією і зовнішньо спрямованою на межі ковекцією вивчено в [88]. Підхід розвинений в цій роботі спирається на теорію великих відхилень для дифузійного процесу, який є розв'язком відповідного стохастичного диференціального рівняння. Ймовірнісна інтерпретація ров'язків і згаданий вище принцип великих відхилень були також використані в роботах [118], [119], [80], де вивчено асимтотику першого власного значення задачі Діріхле для сингулярно збурених операторів, проте асимптотичну поведінку відповідної власної функції не описано.

Існує два підходи до вивчення логарифмічних асимптотик першої власної функції сингулярно збурених операторів другого порядку. Один з них спирається на згадану вище теорію великих відхилень для дифузійних процесів з малими коефіцієнтами дифузії. Цей метод використано в [161] для дослідження операторів з плавно змінними коефіцієнтами на компактних рімановых многовидах.

В дисертаційній роботі використано інший (детерміністичний) підхід, що базується на методах в'язкісних розв'язків для нелінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними. В контексті лінійних сингулярно збурених рівянь ці методи були вперше застосовані в роботі [84], і згодом також в роботах [22], [105], [158], [62], [63] та інших (див. також огляд в [21]).

У випадку, коли коефіцієнти рівняння не залежать від повільної змінної питання усереднення сингулярно збурених несамоспряжених задач вивчались в кількох роботах. Спектральні задачі для операторів з періодичними коефіцієнтами було розглянуто в [59], де було використано принцип факторизації. Подібні результати про періодичне усереднення для слабко пов'язаних систем було отримано в [7], [60]. Слабко зв'язані системи з статистично однорідними осцилюючими коефіцієнтами було розглянуто в роботі [18].

В Підрозділі 2.1 вивчається задача Діріхле з локально періодичними осцілюючими коефіцієнтами, причому розглянуто випадки різних масштабних співвідношень між параметром збурення ε і періодом. Доведено загальний результат про усереднення для основних станів: показано, що асимптотична поведінка λ_ε і $W_\varepsilon := -\varepsilon \log u_\varepsilon$ у головному члені розвинень описується адитивною задачею на власні значення (2.1.4)–(2.1.5) для ефективного рівняння Гамільтона-Якобі. Виведення ефективної проблеми (2.1.4)–(2.1.5) базується на ідеї методу збурених тестових функції, що було запропоновано в [81]. При цьому основна складність і новизна полягає в граничному переході в крайовій умові.

Зазначимо, що адитивне власне значення в ефективній задачі є єдиним, що не є справедливим для власних функцій. Точніше неєдиність виникає, коли так звана множини Обрі, яка задає (приховану) межу для ефективної задачі, не є зв'язною. У цьому випадку виникає питання про селекцію власної функції ефективної задачі, що відповідає границі функцій W_ε. За припущеннями, що коефіцієнт $c(x, y)$ в рівнянні є нульовим і адитивне власне значення теж дорівнює нулю, а множина Обрі складається тільки з гіперболічних нерухомих точок ефективного знесення, в Підрозділах 2.1.6, 2.1.7 побудовано уточнені асимтотики власних значень і знайдено алгоритм селекції власної функції ефективної задачі. Для цього застосовано локальний аналіз на масштабі $\sqrt{\varepsilon}$, що веде до спектральних задач для оператора Орштейна-Уленбека у всьому просторі, при цьому основна трудність пов'язана з ідентифікацією умов на нескінченності. Цю схему застосовано також для рівнянь з молодшими членами одного порядку, коли $\mathcal{L}_\varepsilon u = \varepsilon a^{ij}(x, \frac{x}{\varepsilon})\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + b^j(x, \frac{x}{\varepsilon})\frac{\partial u}{\partial x_j} + c(x, \frac{x}{\varepsilon})u$, і в припущенні, що множина Обрі відповідної ефективної задачі може містити як нерухомі точки так і граничні цикли дінамічної системи породженої ефективним знесенням. Для асимптотичного аналізу розв'язків локалізованих на граничних циклах застосовано аналіз в рухомих координатах, що веде до параболічних спектральних задач.

У Підрозділі 2.2 вивчено асимптотичну поведінку першого власного значення і відповідної власної функції оператора $\mathcal{L}_\varepsilon u = \varepsilon a^{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + b^j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j} + c(x)u$ з граничною умовою Неймана на межі. Цю задачу досліджено у припущенні, що коефіцієнти є плавано змінними функціями, щоб уникнути (нерозв'язної на сьогоднішній день) проблеми неузгодженості періоду задачі з межею (див., наприклад, [57]). У випадку умови Неймана на межі типовою є ситуація, коли множина Обрі має компноненти на межі області, що потребує розвинення іншої техніки асимптотичного аналізу ніж усереднення на проміжному масштабі застосованого для внутрішніх компонент множини Обрі.

Насамкінець, у Підрозділі 2.3 досліджуєтья сингулярно збурена задача з локально періодичними коефіцієнтами у тонкому циліндрі з умовою Неймана на бічній поверхні і Фур'є на основах. В цій задачі присутні три види збурення: сингулярне збурення рівняння малими множниками перед членами з похідними (в рівнянні і умові Фур'є), осціляції коефіцієнтів рівняння, і мала товщина циліндру. Проте через малу товщину циліндра відбувається асимтотична редукція до одновимірної задачі, і це дозволяє, за певних припущень, отримати двочленні асимптотичні формули не тільки для першого а і для наступних власних значень.

Доведення деяких допоміжних і додаткових результатів цього розділу наведено в Додатках D–H.

2.1 Задача Діріхле

В цьому підрозділі розглядаються сингулярно збурені еліптичні оператори вигляду

$$\mathcal{L}_\varepsilon u = \varepsilon^2 a^{ij}(x, x/\varepsilon^\alpha)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \varepsilon b^j(x, x/\varepsilon^\alpha)\frac{\partial u}{\partial x_j} + c(x, x/\varepsilon^\alpha)u \qquad (2.1.1)$$

з малим параметром $\varepsilon > 0$. Вивчається спектральна задача Діріхле в гладкій обмеженій області $\Omega \subset \mathbb{R}^N$:

$$\mathcal{L}_\varepsilon u = \lambda u \quad \text{в } \Omega, \qquad u = 0 \quad \text{на } \partial\Omega. \tag{2.1.2}$$

В (2.1.1) $\alpha > 0$ є фіксованим параметром, а коефіцієнти $a^{ij}(x, y)$, $b^j(x, y)$ і $c(x, y)$ – достатньо регулярні функції, періодичні за змінною y, крім того $a^{ij}(x, y)$ задовольняють умову рівномірної еліптичності. Зазначимо, що в відповідній моделі конвекції-дифузії параметр ε відповідає характерному відношенню між коефіцієнтами дифузії і конвекції, а ε^α описує період мікроструктури.

Добре відомо, що оператор $\mathcal{L}_\varepsilon$ має дискретний спектр, і перше власне значення λ_ε власне значення з найбільшою дійсною частиною) є простим і дійсним; відповідна власна функція u_ε зберігає знак, тобто можна вважати, що $u_\varepsilon > 0$ в Ω. Основною задачею є дослідження асимптотичної поведінки λ_ε і u_ε при $\varepsilon \to 0$.

Оскільки $u_\varepsilon > 0$ в Ω можна представити u_ε як $u_\varepsilon(x) = e^{-W_\varepsilon(x)/\varepsilon}$, тоді W_ε задовольняє

$$-\varepsilon a^{ij}(x, x/\varepsilon^\alpha)\frac{\partial^2 W_\varepsilon}{\partial x_i \partial x_j} + H(\nabla W_\varepsilon, x, x/\varepsilon^\alpha) = \lambda_\varepsilon \tag{2.1.3}$$

з $H(p, x, y) = a^{ij}(x, y)p_i p_j - b^j(x, y)p_j + c(x, y)$, і крайова умова Діріхле для u_ε перетворюється на $W_\varepsilon = +\infty$ на $\partial\Omega$. Користуючись методом збурених тестових функцій, можна перейти до границі в (2.1.3), в результаті отримуємо рівняння Гамільтона-Якобі вигляду

$$\overline{H}(\nabla W(x), x) = \lambda \qquad \text{в } \Omega. \tag{2.1.4}$$

з ефективним гамільтоніаном $\overline{H}(p, x)$ який визначається через розв'язки деяких коміркових задач (різного типу для $\alpha > 1$, $\alpha = 1$ або $0 < \alpha < 1$). В граничному переході $\varepsilon \to 0$ крайова умова $W_\varepsilon = +\infty$ на $\partial\Omega$ з врахуванням (2.1.3) призводить до наступної крайової умови:

$$\overline{H}(\nabla W(x), x) \geq \lambda \qquad \text{на } \partial\Omega. \tag{2.1.5}$$

Така умова відома в літературі [191], [61] як фазове обмеження (state constraint boundary condition). Як рівняння (2.1.4) так і крайова умова (2.1.5) розуміються у в'язкісному сенсі.[1]

Нагадаємо, що неперервна в Ω функція W є в'язкісним розв'язком рівняння (2.1.4) якщо для довільної точки $x \in \Omega$ і довільної функції φ класу C^∞ , такої що $W - \varphi$ має максимум (мінімум) в x виконується нерівність

$$\overline{H}(\nabla\varphi(x), x) \leq \lambda \quad (\overline{H}(\nabla\varphi(x), x) \geq \lambda).$$

Функція $W \in C(\overline{\Omega})$ задовольняє крайову умову (2.1.5) якщо для довільної точки $x \in \partial\Omega$ і довільної функції φ класу C^∞, такої що мінімум $W - \varphi$ по $\overline{\Omega}$ досягається в точці x, виконується нерівність

$$\overline{H}(\nabla\varphi(x), x) \geq \lambda.$$

Рівняння типу (2.1.3) добре вивчені в літературі. Можна знайти короткий огляд стану досліджень в [133], [121] і в більш в недавніх роботах [58], [17] (а також в посиланнях з цих робіт). Для виведення ефективної проблеми (2.1.4)-(2.1.5) застосовано метод збурених тестових функції (див., наприклад, [81]). При цьому основна складність і новизна полягає в граничному переході в крайовій умові.

Задача (2.1.4)–(2.1.5) називається адитивною задачею на власні значення. Розв'язність задачі було вперше доведено в [132] в періодичній постановці, недавні результати наведено, наприклад, в [106] а також в [76], де розглянуто стаціонарні ергодичні гамільтоніани. Існує єдине адитивне власне значення λ задачі (2.1.4)–(2.1.5) між тим власна функція W не завжди є єдиною (з точністю до адитивної сталої). Це питання неєдиності розв'язку тісно пов'язане зі структурою так званої множини Обрі ефективного гамільтоніана, яка відіграє роль прихованої межі для задачі (2.1.4)–(2.1.5). Якщо множини Обрі не є

[1] Всюди в подальшому апелюєчи до умови (2.1.5) будемо вимагати неперервність розв'язку в $\overline{\Omega}$ (аж до межі) і виконання (2.1.5) у в'язкісному сенсі, що є більш жорсткою умовою ніж поточкова нерівність в (2.1.5). Останнє досить часто є джерелом непорозуміння.

зв'язною, тоді задача (2.1.4)–(2.1.5) має багато (континуум) розв'язків. З іншого боку, для кожного $\varepsilon > 0$ власна функція u_ε є єдиною (з точністю до нормалізації), тоді виникає натуральне питання селекції розв'язку (2.1.4)–(2.1.5) який відповідає границі $W_\varepsilon = -\varepsilon \log u_\varepsilon$ при $\varepsilon \to 0$. Ця задача вивчається в Підрозділах 2.1.6, 2.1.7 у окремому випадку оператора (2.1.1) з $c(x,y) = 0$, $\alpha \geq 1$. Слідуючи [160] вводиться ефективне поле знесення (конвекції) і детально вивчається випадок коли ефективне поле знесення породжує дінамічну систему зі скінченим числом гіперболічних нерухомих точок в Ω, і множина Обрі співпадає з цією колекцією точок (зазначимо, що кожна нерухома точка належить до множини Обрі). Тоді λ_ε прямує до нуля при $\varepsilon \to 0$, і $\lambda_\varepsilon/\varepsilon$ має скінчену границю, яку можна визначити через власні значення оператора Орнштейна-Уленбека в $\mathbb{R}^N$ (останній оператор виникає в локальному аналізі (2.1.1) на масштабі $\sqrt{\varepsilon}$ в околі згаданих нерухомих точок). Це, в свою чергу, уможливлює селекцію адитивної власної функції, що відповідає $\lim_{\varepsilon\to 0} W_\varepsilon$.

2.1.1 Ефективна задача і теорема про усереднення

Будемо припускати, що область Ω і коефіцієнти $a^{ij}(x,y)$, $b^j(x,y)$, $c(x,y)$ задовольняють наступні умови: Ω – зв'язна обмежена область в $\mathbb{R}^N$) з межею $\partial\Omega$ класу C^2; $a^{ij}(x,y)$, $b^j(x,y)$, $c(x,y) \in C^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^N)$ – Y-періодичні за змінною y функції, де $Y = (0,1)^N$; матриця $(a^{ij})_{i,j=\overline{1,N}}$ є рівномірно додатно визначеною,

$$a^{ij}(x,y)\zeta_i\zeta_j \geq m|\zeta|^2 > 0 \qquad \forall \zeta \neq 0, \tag{2.1.6}$$

і $a^{ij} = a^{ji}$.

Першу власну функцію u_ε оператора (2.1.1) можна нормалізувати так, що

$$1 = \max_\Omega u_\varepsilon \ \ (u_\varepsilon > 0 \text{ в } \Omega), \tag{2.1.7}$$

тоді її масштабоване логарифмічне перетворення

$$W_\varepsilon := -\varepsilon \log u_\varepsilon$$

є невід'ємною функцією, і $W_\varepsilon = 0$ в точках максимуму u_ε.

Асимптотичну поведінку λ_ε і W_ε описує наступний результат.

Теорема 2.1.1. *Власні значення λ_ε збігаються при $\varepsilon \to 0$ до границі λ, що є єдиним дійсним числом для якого задача (2.1.4), (2.1.5) має неперервний в'язкісний розв'язок. Функції W_ε збігаються (з точністю до підпослідовності) до границі W рівномірно на компактах в Ω (див. Зауваження 2.1.2 нижче), і кожна гранична функція W, продовжена за неперервністю на $\overline{\Omega}$, є в'язкісним розв'язком задачі (2.1.4), (2.1.5).*

Ефективний гамільтоніан $\overline{H}(p,x)$ в (2.1.4) задається наступними формулами (залежно від параметру α).

(i) Якщо $\alpha > 1$ тоді

$$\overline{H}(p,x) = \int_Y H(p,x,y)\vartheta(y)\,\mathrm{d}y \tag{2.1.8}$$

де

$$H(p,x,y) = a^{ij}(x,y)p_ip_j - b^j(x,y)p_j + c(x,y),$$

і $\vartheta(y)$ є єдиним $Y-$періодичним розв'язком рівняння $\frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j}(a^{ij}(x,y)\vartheta) = 0$, нормалізованим рівністю $\int_Y \vartheta(y)\,\mathrm{d}y = 1$.

(ii) Якщо $\alpha = 1$ тоді $\overline{H}(p,x)$ є першим власним значенням (власним значенням з максимальною дійсною частиною) задачі

$$\begin{aligned} & a^{ij}(x,y)\frac{\partial^2\vartheta}{\partial y_i \partial y_j} + (b^j(x,y) - 2a^{ij}(x,y)p_i)\frac{\partial\vartheta}{\partial y_j} + H(p,x,y)\vartheta = \overline{H}(p,x)\vartheta, \\ & \vartheta(y) \quad \text{є } Y\text{-періодичною функцією.} \end{aligned} \tag{2.1.9}$$

Згідно з Теоремою Крейна-Рутмана $\overline{H}(p,x)$ є дійсним числом.

(iii) Якщо $0 < \alpha < 1$ тоді $\overline{H}(p,x)$ є единим числом, таким що задача

$$H(p + \nabla\vartheta(y), x, y) = \overline{H}(p,x) \tag{2.1.10}$$

має $Y-$періодичний в'язкісний розв'язок $\vartheta(y)$; тут $p \in \mathbb{R}^N$ і $x \in \overline{\Omega}$ є параметрами.

Зауваження 2.1.2. Хоча для кожного $\varepsilon > 0$ функція $W_\varepsilon(x)$ прямує до $+\infty$ коли x наближається до межі $\partial\Omega$, можна показати (див. Лему 2.1.10 в Підрозділі 2.1.4), що для кожного $\beta > 0$ існує стала C_β, що не залежить від ε, така що

$$|W_\varepsilon(x) - W_\varepsilon(z)| \le C_\beta |x - z|,$$

$\forall x, z \in \Omega$ з $\min\{\mathrm{dist}(x, \partial\Omega), \mathrm{dist}(z, \partial\Omega)\} \ge \beta\varepsilon$. Звідси випливає, що, з точністю до підпослідовності, функції W_ε збігаються в Ω до неперервної за Ліпшицем функції. Ця остання функція допускає неперервне продовження на $\overline{\Omega}$.

Зазначимо, що ефективний гамільтоніан $\overline{H}(p, x)$ є неперервним в $\mathbb{R}^N \times \overline{\Omega}$, опуклим за p і коерцитивним, більш того $\overline{H}(p, x) \ge m_1|p|^2 - C$, $m_1 > 0$. Теорія в'язкісний розв'язків для таких гамільтоніанів є добре розвиненою. Слідуючи [61], [106] і [148], нижче наведено представлення для розв'язків задачі (2.1.4)–(2.1.5).

Запишемо задачу (2.1.4)–(2.1.5) у вигляді

$$\overline{H}(\nabla W(x), x) \le \lambda \qquad \text{в } \Omega \tag{2.1.11}$$

$$\overline{H}(\nabla W(x), x) \ge \lambda \qquad \text{в } \overline{\Omega}, \tag{2.1.12}$$

тобто (2.1.11) вимагає щоб функція W в'язкісним суб-розв'язком в Ω, а (2.1.12) вимагає щоб W була в'язкісним супер-розв'язком в $\overline{\Omega}$. Відомо, що існує єдине число $\lambda = \lambda_{\overline{H}}$ (адитивне власне значення), для якого (2.1.4)-(2.1.5) має розв'язок. Для зручності читача нижче сформульовано перше твердження Теореми VIII.1 з [61].

Теорема 2.1.3 (див. [61]). *Нехай $\overline{H}(p, x)$ – неперервний гамільтоніан в $\mathbb{R}^N \times \overline{\Omega}$, і $\overline{H}(p, x) \to \infty$ при $|p| \to \infty$, рівномірно відносно $x \in \overline{\Omega}$. Тоді існує єдине число $\lambda = \lambda_{\overline{H}}$, таке що задача (2.1.11)–(2.1.12) має розв'язок.*

Згідно з [148, Розділ 3] число $\lambda_{\overline{H}}$ характеризується наступним чином

$$\lambda_{\overline{H}} = \inf\{\lambda;\ (2.1.11) \text{ має розв'язок } W \in C(\overline{\Omega})\}. \tag{2.1.13}$$

Також це число визначається за допомогою мінімізації функціоналу дії (див. [61, Теорема X.1, Твердження (3)]),

$$\lambda_{\overline{H}} = -\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\inf\int_0^t \overline{L}(\dot\eta,\eta)\,\mathrm{d}\tau,$$

де інфімум береться серед абсолютно неперервних кривих $\eta:[0,t]\to\overline{\Omega}$, і $\overline{L}(v,x)$ є перетворенням Лежандра $\overline{H}(p,x)$,

$$\overline{L}(v,x) = \max\{v\cdot p - \overline{H}(p,x)\}.$$

Визначимо тепер функцію відстані

$$d_{\overline{H}-\lambda_{\overline{H}}}(x,y) = \sup\{W(x)-W(y);\ W\in C(\overline{\Omega}) \text{ є розв'язком (2.1.11) для } \lambda=\lambda_{\overline{H}}\}. \tag{2.1.14}$$

Відомо (див. , наприклад, [106, Теорема 1.4]), що $d_{\overline{H}-\lambda_{\overline{H}}}(x,x)=0$, $d_{\overline{H}-\lambda_{\overline{H}}}(x,y)$ є неперервною за Ліпшицем, $d_{\overline{H}-\lambda_{\overline{H}}}(x,y)\le d_{\overline{H}-\lambda_{\overline{H}}}(x,z)+d_{\overline{H}-\lambda_{\overline{H}}}(z,y)$. Крім того, для кожної точки $y\in\overline{\Omega}$ функція $d_{\overline{H}-\lambda_{\overline{H}}}(x,y)$ є розв'язоком (2.1.11) для $\lambda=\lambda_{\overline{H}}$ і, згідно з [106, Лема 6.3], $\overline{H}(\nabla_x d_{\overline{H}-\lambda_{\overline{H}}}(x,y),x)\ge\lambda_{\overline{H}}$ в $\overline{\Omega}\setminus\{y\}$. Число $\lambda_{\overline{H}}$ є таким, що множина *Обрі* $\mathcal{A}_{\overline{H}-\lambda_{\overline{H}}}$,

$$\mathcal{A}_{\overline{H}-\lambda_{\overline{H}}} = \{y\in\overline{\Omega};\ d_{\overline{H}-\lambda_{\overline{H}}}(x,y) \text{ is a solution of (2.1.12) for } \lambda=\lambda_{\overline{H}}\}, \tag{2.1.15}$$

є непустою, див. [148, Твердження 6.4]. Зазначимо також, що згідно з [106, Твердження 1.6], функція відстані $d_{\overline{H}-\lambda_{\overline{H}}}(x,y)$ має представлення

$$d_{\overline{H}-\lambda_{\overline{H}}}(x,y) = \inf\Big\{\int_0^t(\overline{L}(\dot\eta,\eta)+\lambda_{\overline{H}})\mathrm{d}\tau\,;\ \eta(0)=y,\eta(t)=x,t>0\Big\}, \tag{2.1.16}$$

і множину Обрі можна охарактеризувати наступним чином

$$y\in\mathcal{A}_{\overline{H}-\lambda_{\overline{H}}} \Longleftrightarrow \sup_{\delta>0}\inf\Big\{\int_0^t(\overline{L}(\dot\eta,\eta)+\lambda_{\overline{H}})\,\mathrm{d}\tau\,;\ \eta(0)=\eta(t)=y,t>\delta\Big\}=0. \tag{2.1.17}$$

Інфімуми в (2.1.16) і (2.1.17) беруться серед абсолютно неперервних кривих $\eta:[0,t]\to\overline{\Omega}$. Оскільки доведення (2.1.17) не було знайдено в існуючій літературі, його наведено в Додатку А.

Внаслідок означення функції відстані $d_{\overline{H}-\lambda_{\overline{H}}}(x,y)$, кожен розв'язок W задачі (2.1.4)–(2.1.5) задаовольняє $W(x)-W(y)\leq d_{\overline{H}-\lambda_{\overline{H}}}(x,y)$; ця нерівність виконується, зокрема, для всих $x,y\in\mathcal{A}_{\overline{H}-\lambda_{\overline{H}}}$. Зворотно, для заданої функції $g(x)$ на $\mathcal{A}_{\overline{H}-\lambda_{\overline{H}}}$, яка задовольняє умову сумісності $g(x)-g(y)\leq d_{\overline{H}-\lambda_{\overline{H}}}(x,y)$ $\forall x,y\in\mathcal{A}_{\overline{H}-\lambda_{\overline{H}}}$, згідно з [106, Твердження 7.1 і Теорема 7.2], функція

$$W(x)=\min\{d_{\overline{H}-\lambda_{\overline{H}}}(x,y)+g(y);\,y\in\mathcal{A}_{\overline{H}-\lambda_{\overline{H}}}\} \tag{2.1.18}$$

є єдиним розв'язком (2.1.4)–(2.1.5) for $\lambda=\lambda_{\overline{H}}$, що задовольняє $W(x)=g(x)$ на $\mathcal{A}_{\overline{H}-\lambda_{\overline{H}}}$. У Додатку E наведено наступний простий критерій єдиності розв'язку (2.1.4)-(2.1.5): розв'язок W (для $\lambda=\lambda_{\overline{H}}$) є єдиним з точністю до адитивної константи тоді і тільки тоді коли $S_{\overline{H}-\lambda_{\overline{H}}}(x,y)=0$ $\forall x,y\in\mathcal{A}_{\overline{H}-\lambda_{\overline{H}}}$, де $S_{\overline{H}-\lambda_{\overline{H}}}(x,y)$ позначає симетризовану відстань, $S_{\overline{H}-\lambda_{\overline{H}}}(x,y)=d_{\overline{H}-\lambda_{\overline{H}}}(x,y)+d_{\overline{H}-\lambda_{\overline{H}}}(y,x)$.

2.1.2 Уточнені асимптотики для рівняння конвекції-дифузії

Оскільки розв'язок ефективного рівняння в Теоремі 2.1.1 не є, взагалі кажучі, єдиним, важливим питанням є селекція розв'язку, що відповідає за асимптотичну поведінку першої власної функції задачі (2.1.2). За деякими додатковими припущеннями це питання може бути розв'язане побудовою двочленних асимтотик власних значень λ_ε. Розглянемо окремий випадок рівняння конвекції-дифузії, коли $c(x,y)=0$ в (2.1.1). Нижче наведено результати для $\alpha=1$, а випадок $\alpha>1$ розглянуто у Додатку D. За означеними припущеннями оператор (2.1.1) має вигляд

$$\mathcal{L}_\varepsilon u=\varepsilon^2a^{ij}(x,x/\varepsilon)\frac{\partial^2u}{\partial x_i\partial x_j}+\varepsilon b^j(x,x/\varepsilon)\frac{\partial u}{\partial x_j}. \tag{2.1.19}$$

Більш того, будемо припускати, що $\lambda_{\overline{H}}=0$ і відповідна множина Обрі $\mathcal{A}_{\overline{H}}$ має спеціальну структуру.

Для $\alpha\geq1$ ефективний гамільтоніан $\overline{H}(p,x)$ є гладкою строго опуклою функцією за змінною p, тобто матриця $\left(\frac{\partial^2}{\partial p_i\partial p_j}\overline{H}(p,x)\right)_{i,j=\overline{1,N}}$ є додатно визначеною для всіх $p \in \mathbb{R}^N$ і $x \in \overline{\Omega}$, див. [59] для $\alpha = 1$, а для $\alpha > 1$ ефективний гамільтоніан $\overline{H}(p,x)$ є квадратичною фунцією (від p). Зазначимо також, що (для $c(x,y) = 0$) $\overline{H}(0,x) = 0$. Таким чином відповідний лагранжіан $\overline{L}(v,x)$ є строго опуклим і $\overline{L}(v,x) = \max\{p \cdot v - \overline{H}(p,x)\} \geq -\overline{H}(0,x) = 0$. Отже маємо

$$\overline{L}(v,x) \geq 0, \quad \text{і } \overline{L}(v,x) = 0 \iff v_j = \frac{\partial \overline{H}}{\partial p_j}(0,x).$$

З іншого боку (прямими обчисленнями) можна показати, що

$$-\frac{\partial \overline{H}}{\partial p_j}(0,x) = \overline{b}^j(x) := \int_Y b^j(x,y)\theta^*(x,y)\mathrm{d}y, \tag{2.1.20}$$

де функції $\overline{b}^j(x)$, які є компонентами так званого вектора ефективного знесення $\overline{b}(x)$, визначаються правою частиною (2.1.20) через Y-періодичні розв'язки θ^* рівняння

$$\frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j}\Big(a^{ij}(x,y)\theta^*\Big) - \frac{\partial}{\partial y_j}\Big(b^j(x,y)\theta^*\Big) = 0, \tag{2.1.21}$$

нормалізовані рівністю $\int_Y \theta^* \mathrm{d}y = 1$. (Зазначимо, що θ^* є додатною функцією класу C^2.) Таким чином лагранжіан $\overline{L}(v,x)$ можна представити наступним чином:

$$\overline{L}(v,x) = \kappa \sum (v_j + \overline{b}^j(x))^2 + \tilde{L}(v,x), \quad \text{з } 0 \leq \tilde{L}(v,x) \leq \tilde{\kappa} \sum (v_j + \overline{b}^j(x))^2, \tag{2.1.22}$$

$0 < \kappa < \tilde{\kappa}$. Користуючись цим представленням в (2.1.17), отримуємо, що множина Обрі $\mathcal{A}_{\overline{H}}$ гамільтоніану $\overline{H}$ співпадає з такою гамільтоніану $\sum p_j^2 - \overline{b}^j(x)p_j$, якому відповідає лагранжіан $\frac{1}{4}\sum(v_j + \overline{b}^j(x))^2$. Зокрема, адитивне власне значення $\lambda_{\overline{H}}$ є нульовим тоді і тільки тоді коли існує повна орбіта $\eta : \mathbb{R} \to \overline{\Omega}$, $\dot{\eta} = -\overline{b}(\eta)$, що, в свою чергу, виконується тоді і тільки тоді коли $\mathcal{A}_{\overline{H}} \neq \emptyset$. Ці міркування мотивують наступні додаткові умови, які будуть накладатись у асимптотичному аналізі задачі (2.1.19):

$$\begin{aligned} &\mathcal{A}_{\overline{H}} \neq \emptyset \text{ і } \mathcal{A}_{\overline{H}} \subset \Omega, \\ &\mathcal{A}_{\overline{H}} \text{ є скінченою множиною гіперболічних нерухомих точок } \xi \\ &\qquad \text{звичайного диференціального рівняння } \dot{x} = -\overline{b}(x). \end{aligned} \tag{2.1.23}$$

За цих умов $\lambda_\varepsilon \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ (оскільки $\lambda_{\overline{H}} = 0$). Натуральним питанням тоді є встановлення уточнених асимтотик (порядку ε) для λ_ε, які, зокрема, є важливими для селекції розв'язоку (2.1.4)–(2.1.5) який відповідає $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} W_\varepsilon$.

Введемо матриці $B(\xi)$ і $Q(\xi)$ з елементами

$$B^{ji}(\xi) = \frac{\partial \overline{b}^j}{\partial x_i}(\xi), \qquad Q^{ij}(\xi) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \overline{H}}{\partial p_i \partial p_j}(0,\xi).$$

Для нерухомих точок ξ рівняння $\dot{x} = \overline{b}(x)$ матриця $-B(\xi)$ відповідає лінеаризації ефективного знесення. Визначимо число $\sigma(\xi)$ як суму від'ємних дійсних частин власних значень $-B(\xi)$. Оскільки припускається, що кожна нерухома точка ξ є гіперболічною, $-B(\xi)$ не має власних значень з нульовою дійсною частиною. Розглянемо також спектральні пректори Π_s і Π_u на інваріантні підпростори матриці B, які відповідають власним значенням з додатними і від'ємними дійсними частинами (стійкі і нестійкі підпростори системи $\dot{z}_i = -B^{ij} z_j$).

Теорема 2.1.4. *Нехай $\alpha = 1$ і $c(x,y) = 0$. Тоді, за умовами (2.1.23) маємо*

$$\lambda_\varepsilon = \varepsilon\overline{\sigma} + \bar{o}(\varepsilon), \qquad \text{де } \overline{\sigma} = \max\{\sigma(\xi);\, \xi \in \mathcal{A}_{\overline{H}}\}. \tag{2.1.24}$$

Крім того,якщо максимум в (2.1.24) досягається в точно одній точці $\xi = \overline{\xi}$, тоді

(i) масштабовані логарифмічні перетворення $W_\varepsilon = -\varepsilon \log u_\varepsilon$ власних функцій u_ε нормалізованих рівністю (2.1.7) збігаютьса до $W(x) = d_{\overline{H}}(x, \overline{\xi})$ рівномірно на компактах в Ω, тобто W є максимальним в'язкісним розв'язком задачі $\overline{H}(\nabla W(x), x) = 0$ в Ω, $\overline{H}(\nabla W(x), x) \geq 0$ на $\partial\Omega$, таким що $W(\overline{\xi}) = 0$;

(ii) $u_\varepsilon(\overline{\xi} + \sqrt{\varepsilon} z)/u_\varepsilon(\overline{\xi}) \to u(z)$ в $C(K)$ аі слабко в $H^1(K)$ для кожного компакта $K \subset \mathbb{R}^N$, і гранична функція u є единою додатною власною функцією оператора Орнштейна-Уленбека,

$$Q^{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial z_i \partial z_j} + z_i B^{ji}\frac{\partial u}{\partial z_j} = \overline{\sigma} u \qquad \text{в } \mathbb{R}^N, \tag{2.1.25}$$

нормалізованою рівністю $u(0) = 1$ *і такою, що задовольняє умови:* $u(z)e^{\mu|\Pi_s z|^2 - \nu|\Pi_u z|^2} \leq C$ *в* $\mathbb{R}^N$ *для деякого* $\mu > 0$ *і всих* $\nu > 0$*; існування і єдиність такої додатної власної функції доведено в Лемі 2.1.16 (див. Підрозділ 2.1.7). Коефіцієнти (2.1.25) задаються рівностями* $B^{ji} = B^{ji}(\overline{\xi})$, $Q^{ji} = Q^{ji}(\overline{\xi})$.

Зауваження 2.1.5.

I. *Умова (2.1.23) виконується, зокрема, коли векторне поле* $b(x, y)$ *є малим збудженням (в* C^1 *топології) градієнтного поля* $\nabla P(x)$ *з потенціалом* $P(x)$ *класу* C^2*, що має такі властивості:*

- *множина* $\{x \in \overline{\Omega};\ \nabla P(x) = 0\}$ *є скінченим числом точок в* Ω,

- *Матриця Гессе* $\left(\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} P(x)\right)_{i,j=\overline{1,N}}$ *є невиродженою в кожній з цих точок*

(доведення наведено в Додатку F).

II. *Умова (2.1.23) виконується тоді і тільки тоді коли векторне поле* $\overline{b}$ *має наступні властивості:*

• *рівняння* $\dot{x} = -\overline{b}(x)$ *має скінчене число нерухомих точок в* $\overline{\Omega}$, $\xi^1, \dots \xi^n$. *Кожна з них є гіперболічною, і лежить в* Ω.

• $\forall\, y \in \overline{\Omega}$, *або* $\sup\{t < 0 \,:\, x^y(t) \notin \overline{\Omega}\} > -\infty$, *або* $\lim\limits_{t \to -\infty} x^y(t) = \xi^j$ *для деякого* $j \in \{1, \dots, n\}$, *де* x^y *є розв'язком* $\dot{x}^y = -\overline{b}(x^y)$, $x^y(0) = y$.

• *не існеє замкненого ланцюга* $\xi^{j_1}, \xi^{j_2}, \dots, \xi^{j_k} = \xi^{j_1}$ *з* $k \geq 2$, *такого що дві полідовні точки* ξ^{j_s} *і* $\xi^{j_{s+1}}$ *поєднуються розв'язком* $\dot{x} = -\overline{b}(x)$ *з* $\lim\limits_{t \to -\infty} x(t) = \xi^{j_s}$ *і* $\lim\limits_{t \to +\infty} x(t) = \xi^{j_{s+1}}$. *Зазначимо, що* ξ^{j_1} *може співпадати з* ξ^{j_2}.

Зауваження 2.1.6. *Неважко бачити, що за умовою (2.1.23) маємо* $S_{\overline{H}}(\xi, \xi') > 0$ *для всіх* $\xi, \xi' \in \mathcal{A}_{\overline{H}}$, $\xi \neq \xi'$. *Це означає, що задача (2.1.4), (2.1.5) дійсно має багато розв'язків якщо* $\mathcal{A}_{\overline{H}}$ *не є однією точкою.*

Зазначимо, що умова (2.1.23) Теореми 2.1.4 гарантує, зокрема, що всі ω(і α)-границі рівняння $\dot{x} = -\overline{b}(x)$ є нерухомими точками. Інший важливий випадок, коли рівняння $\dot{x} = -\overline{b}(x)$ має граничні цикли в Ω розглянуто в Підрозділі 2.1.8.

2.1.3 Періодична сингулярно збурена задача

В цьому підрозділі вивчається допоміжна коміркова задача для сингулярно збуреного еліптичного оператора вигляду

$$\mathcal{L}_\varepsilon^{(\mathrm{per})}u = \varepsilon^2 a^{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \varepsilon b^j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j} + c(x)u, \tag{2.1.26}$$

з Y-періодичними коефіцієнтами a^{ij}, b^j, $c \in C^1(\mathbb{R}^N)$, на функцію u також накладається умова Y-періодичності. Ця задача відіграє важливу роль в доведенні Теореми 2.1.1 у випадку $\alpha < 1$. Як і раніше припускається, що $a^{ij} = a^{ji}$ і виконуєтья умова рівномірної елептичності $a^{ij}(x)\zeta_i\zeta_j \geq m|\zeta|^2 > 0$, $\forall \zeta \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$. Згідно з Теоремою Крейна-Рутмана першевласне значення μ_ε оператора $\mathcal{L}_\varepsilon^{(\mathrm{per})}$ (власне значення з максимальною дійсною частиною) є дійсним і простим, відповідні власні функції u_ε можна вибрати так, що $0 < u_\varepsilon(x) \leq \max u_\varepsilon = 1$. Асимптотичну поведінку μ_ε і u_ε при $\varepsilon \to 0$ було вивчено в [161] за допомогою комбінації ймовірностних методів великих відхилень і варіційних методів. Нижче результати [161] отримано за допомогю чисто детерміністичної техніки в'язкісних розв'язків. Також, як побічний продукт, встановлено рівномірні оцінки для функції $W_\varepsilon(x) = -\varepsilon \log u_\varepsilon(x)$, які є важливими для доведення Теореми 2.1.1.

Перш за все встановимо апріорні оцінки для власних значень.

Лема 2.1.7. *Для всіх $\varepsilon > 0$ власне значення μ_ε оператора $L_\varepsilon^{(\mathrm{per})}$ задовольняє нерівності*

$$\min c(x) \leq \mu_\varepsilon \leq \max c(x). \tag{2.1.27}$$

Доведення. Нехай x' – точка максимуму u_ε, тоді маємо

$$\nabla u_\varepsilon(x') = 0, \qquad \varepsilon^2 a^{ij}(x')\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x_i \partial x_j}(x') \leq 0,$$

звідки $c(x')u_\varepsilon(x') \geq \mu_\varepsilon u_\varepsilon(x')$, тобто $\mu_\varepsilon \leq \max c(x)$. Аналогічно, якщо x'' є точкою мінімуму u_ε, тоді $\mu_\varepsilon u_\varepsilon(x'') \geq c(x'')u_\varepsilon(x'')$ отже $\mu_\varepsilon \geq \min c(x)$. $\square$

Оскільки $u_\varepsilon = e^{-W_\varepsilon(x)/\varepsilon}$, $W_\varepsilon(x)$ є розв'язком рівняння

$$-\varepsilon a^{ij}(x)\frac{\partial^2 W_\varepsilon}{\partial x_i \partial x_j} + a^{ij}(x)\frac{\partial W_\varepsilon}{\partial x_i}\frac{\partial W_\varepsilon}{\partial x_j} - b^j(x)\frac{\partial W_\varepsilon}{\partial x_j} + c(x) = \mu_\varepsilon. \tag{2.1.28}$$

Оцінки для перших і других частинних похідних $W_\varepsilon(x)$ функції встановлюються в наступній Лемі.

Лема 2.1.8. *Існує константа C, що не залежить від ε і така, що*

$$\max|\nabla W_\varepsilon| \leq C, \qquad \max|\partial^2 W_\varepsilon/\partial x_i \partial x_j| \leq C/\varepsilon. \tag{2.1.29}$$

Доведення. Перша оцінка в (2.1.29) встановлюється як в [84]. Покладемо $D_1(x) := |\nabla W_\varepsilon(x)|^2$ і $D_2(x) := \sum |\partial^2 W_\varepsilon(x)/\partial x_i \partial x_j|^2$. З (2.1.28) в комбінації з (2.1.27) отримуємо, що $mD_1 \leq C(\varepsilon D_2^{1/2} + D_1^{1/2} + 1)$, звідки маємо

$$D_1 \leq C(\varepsilon D_2^{1/2} + 1). \tag{2.1.30}$$

Припустимо, що D_1 досягає максимуму в точці x', тоді $\nabla D_1(x') = 0$ і $a^{ij}(x')\frac{\partial^2 D_1}{\partial x_i \partial x_j}(x') \leq 0$, або

$$\frac{\partial^2 W_\varepsilon}{\partial x_i \partial x_k}(x')\frac{\partial W_\varepsilon}{\partial x_k}(x') = 0 \tag{2.1.31}$$

тобто

$$\varepsilon \sum_k a^{ij}\frac{\partial^2 W_\varepsilon}{\partial x_i \partial x_k}\frac{\partial^2 W_\varepsilon}{\partial x_j \partial x_k} \leq -\varepsilon \sum_k a^{ij}\frac{\partial^3 W_\varepsilon}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}\frac{\partial W_\varepsilon}{\partial x_k} \qquad \text{at } x'. \tag{2.1.32}$$

Для того, щоб знайти оцінку для правої частини (2.1.32) міркуємо наступном чином. Віьмемо частинні похідні (2.1.28), в результаті маємо

$$-\varepsilon a^{ij}\frac{\partial^3 W_\varepsilon}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} = \varepsilon \frac{\partial a^{ij}}{\partial x_k}\frac{\partial^2 W_\varepsilon}{\partial x_i \partial x_j} - 2a^{ij}\frac{\partial^2 W_\varepsilon}{\partial x_i \partial x_k}\frac{\partial W_\varepsilon}{\partial x_j} + b^i\frac{\partial^2 W_\varepsilon}{\partial x_i \partial x_k} + \frac{\partial b^i}{\partial x_k}\frac{\partial W_\varepsilon}{\partial x_i} - \frac{\partial c}{\partial x_k}. \tag{2.1.33}$$

Тепер помножимо (2.1.33) на $\partial W_\varepsilon/\partial x_k$, знайдемо суму по k і підставимо результат в (2.1.32):

$$\begin{aligned}\varepsilon m D_2(x') \leq & \varepsilon \sum_k a^{ij}(x')\frac{\partial^2 W_\varepsilon}{\partial x_i \partial x_k}(x')\frac{\partial^2 W_\varepsilon}{\partial x_j \partial x_k}(x') \\ & \leq C\Big(\varepsilon D_1^{1/2}(x')D_2^{1/2}(x') + D_1(x') + D_1^{1/2}(x')\Big).\end{aligned}$$

Користаючись (2.1.30) в останній нерівності знаходимо $D_2(x') \le C/\varepsilon$, і, ще раз скориставшись (2.1.30), приходимо до першої оцінки в (2.1.29).

Для доведення другої оцінки в (2.1.29) користуємось наступною інтерполяційною нерівністю

$$\|\nabla u\|^2_{L^\infty} \le C(\big\|a^{ij}\tfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\big\|_{L^\infty} + \|u\|_{L^\infty})\|u\|_{L^\infty}, \tag{2.1.34}$$

яка є вірною для довільної Y-періодичної функції u зі сталою C, що не залежить від u. Доведення цієї нерівності є таким самим як в Додатку до [47] (важливим є той факт, що коефіцієнти a^{ij} є неперервними за Ліпшицем). Застосуємо (2.1.34) до (2.1.33), в результаті отримаємо

$$\Big\|\frac{\partial^2 W_\varepsilon}{\partial x_l \partial x_k}\Big\|^2_{L^\infty} \le \frac{C}{\varepsilon}\Big(\sum \Big\|\frac{\partial^2 W_\varepsilon}{\partial x_i \partial x_j}\Big\|_{L^\infty} + 1\Big) \qquad \forall l, k, \tag{2.1.35}$$

тут використано також першу оцінку з (2.1.29). З (2.1.35) неважко вивести другу оцінку з (2.1.29). $\square$.

З Леми 2.1.7 випливає, що $\mu_\varepsilon \to \mu$, з точністю до підпослідовності. Згідно з Лемою 2.1.8 сім'я функцій $W_\varepsilon(x)$ рівностепенно неперервною, крім того $\min W_\varepsilon(x) = 0$, тоді (можливо, після переходу до нової підпослідовності) $W_\varepsilon(x) \to W(x)$ рівномірно. За допомогою стандартних міркувань (див., наприклад, [73]) можна показати, що μ і W задовольняють рівнянню

$$a^{ij}(x)\frac{\partial W}{\partial x_i}\frac{\partial W}{\partial x_j} - b^j(x)\frac{\partial W}{\partial x_j} + c(x) = \mu \tag{2.1.36}$$

у в'язкісному сенсі.

Число μ, для якого (2.1.36) існує періодичний в'язкісний розв'зок, є єдиним (див. [132], [82]), отже вся послідовність μ_ε збігається до μ при $\varepsilon \to 0$.

2.1.4 Апріорні оцінки

У цьому підрозділі буде показано, що власні значення λ_ε задачі (2.1.1) є рівномірно обмеженими і функції W_ε (визначені в (2.1.1)) рівномірно збігаються на компактах в Ω при $\varepsilon \to 0$, з точністю до підпослідовності. Також встановлюється існування неперервних аж до межі області напівграниць (2.1.41). Останній результат відіграє важливу роль для виведення ефективної крайової умови (2.1.5).

Оскільки тут розглядається умова Діріхле на межі $\partial\Omega$ і оператори з швидко осцилюючими коефіцієнтами, доведення є більш складними ніж в періодичному випадку (розглянутому у Підрозділі 2.1.3).

Лема 2.1.9. *Існує стала Λ, що не залежить від ε і така,що*

$$-\Lambda \le \lambda_\varepsilon \le \sup c(x,y). \tag{2.1.37}$$

Доведення. Як і в Лемі 2.1.7 оцінка зверху доводиться за допомогою принципу максимуму.

Щоб оцінити власні значення λ_ε знизу покажемо, що існує $\Lambda > 0$ і функція v_ε, такі що $v_\varepsilon = 0$ на $\partial\Omega$, і

$$\mathcal{L}_\varepsilon v_\varepsilon - \lambda v_\varepsilon > 0 \qquad \text{в } \Omega \tag{2.1.38}$$

для всих $\lambda < -\Lambda$, $0 < \varepsilon < 1$. Дійсно, існує функція $V \in C^2(\overline{\Omega})$ яка задовольняє наступним умовам: $V > 0$ в Ω і $V = 0$ на $\partial\Omega$, $|\nabla V| > 1$ в околі $\partial\Omega$. Покладемо $v_\varepsilon(x) := e^{\kappa V(x)/\varepsilon} - 1$, де κ – додатний параметр, який виберемо пізніше. Припускаємо, що $-\Lambda \le \min c(x,y)$, тоді $\lambda < \min c(x,y)$. Маємо

$$\mathcal{L}_\varepsilon v_\varepsilon - \lambda v_\varepsilon \ge \big(m\kappa^2 - \kappa(M_1 + \varepsilon M_2) + (c(x,x/\varepsilon^\alpha) - \lambda)\big)e^{\kappa V(x)/\varepsilon} - (c(x,x/\varepsilon^\alpha) - \lambda) > 0$$

в Ω' коли $\kappa > \kappa_1 := (M_1 + M_2)/m$. Тут $\Omega' = \{x \in \Omega; |\nabla V| \ge 1\}$, $M_1 = \max\big|b^i(x,y)\frac{\partial V}{\partial x_i}(x)\big|$, $M_2 = \max\big|a^{ij}(x,y)\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}(x)\big|$. З іншого боку, $\delta := \inf\{V(x);\, x \in \Omega \setminus \Omega'\} > 0$. Отже $e^{\kappa V(x)/\varepsilon} > 2$ в $\Omega \setminus \Omega'$, коли $\kappa > \kappa_2 := (\log 2)/\delta$. Припустимо додатково, що $\min c(x,y) - \lambda > 2\kappa(M_1 + M_2)$, тоді

$$\mathcal{L}_\varepsilon v_\varepsilon - \lambda v_\varepsilon \ge (-\kappa(M_1 + \varepsilon M_2) + (c(x,x/\varepsilon^\alpha) - \lambda))\exp(\kappa\gamma/\varepsilon) - (c(x,x/\varepsilon^\alpha) - \lambda) > 0$$

в $\Omega \setminus \Omega'$. Таким чином, якщо покласти $\kappa := \max\{\kappa_1, \kappa_2\}$ і $\Lambda := 2\kappa(M_1 + M_2) - \min c(x,y)$, то маємо (2.1.38).

Зазначимо, що λ_ε є також першим власним значенням (власним значенням з максимальною дійсною частиною) спряженого оператора $\mathcal{L}^*_\varepsilon u = \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}(a^{ij}u) - \varepsilon \frac{\partial}{\partial x_i}(b^i u) + cu$, і вивповідну власну функцію u^*_ε можна вибрати додатною в Ω. Тоді, якщо $\lambda_\varepsilon < -\Lambda$ то $(\mathcal{L}_\varepsilon v_\varepsilon - \lambda_\varepsilon v_\varepsilon)u^*_\varepsilon > 0$ в Ω. Це протирічить Теоремі Фредгольма. □

Наступні два результати показують, що, з точністю до підпослідовності, функції W_ε збігаються рівномірно на компактах в Ω.

Введемо позначення $d(x) = \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$.

Лема 2.1.10. *Для кожного $\beta > 0$ існує стала C_β, що не залежить від ε і така, що*

$$\|\nabla W_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega_{\beta\varepsilon})} \le C_\beta, \tag{2.1.39}$$

де $\Omega_{\beta\varepsilon} = \{x \in \Omega;\ d(x) > \beta\varepsilon\}$.

Доведення. Як і в Лемі 2.1.8 скористаємось методом С.Н. Бернштейна, але в локальній його версії, оскільки $W_\varepsilon(x)$ прямує до $+\infty$ при $x \to \partial\Omega$. Нехай ξ – довільна точка в $\Omega_{\beta\varepsilon}$. Введемо гладку зрізаючу функцію $\varphi \ge 0$ з носієм в кулі $B_\beta = \{x;\ |x| < \beta\}$ і таку, що $\varphi = 1$ в $B_{\beta/2}$. Розглянемо функції

$$D_1(x) := \varphi^4((x-\xi)/\varepsilon)|\nabla W_\varepsilon|^2 \qquad \text{і} \qquad D_2(x) := \sum \Big|\frac{\partial^2 W_\varepsilon}{\partial x_i \partial x_j}\Big|^2.$$

Такі самі міркування як в Лемі 2.1.8 показують, що якщо D_1 досягає ненульовий максимум в деякій точці x', тоді

$$\varphi^4_\varepsilon D_2 \le \frac{C}{\varepsilon^2}\Big(1 + \varphi^2_\varepsilon |\nabla W_\varepsilon|^2 + \varepsilon \varphi^3_\varepsilon D_2^{1/2} |\nabla W_\varepsilon| + \varepsilon \varphi^3_\varepsilon |\nabla W_\varepsilon|^3\Big), \quad \varphi_\varepsilon(x) = \varphi((x-\xi)/\varepsilon),$$

де стала C не залежить від ε і ξ. Ця оцінка в комбінації з поточковою нерівністю $|\nabla W_\varepsilon|^2 \le C_1(\varepsilon D_2^{1/2} + 1)$ ведуть до оцінки $\varphi^4((x'-\xi)/\varepsilon)D_2(x') \le C_3/\varepsilon^2$. Таким чином $\max\{|\nabla W_\varepsilon(x)|; |x-\xi| \le \beta\varepsilon/2\} \le C_4$ з $C_4 = C_4(\beta, m, \|a^{ij}\|_{C^1}, \|b^i\|_{C^1}, \|c\|_{C^1}, \Omega)$. □

З Леми 2.1.10 випливає, що якщо модіфікувати функції W_ε відніманням слушних констант (наприклад $W_\varepsilon(x_0)$ для деякої фіксованої точки $x_0 \in \Omega$) тоді модіфіковані функції W_{ε_n} будуть збігатися рівномірно до деякої функції $W(x)$ по підпослідовності $\varepsilon_n \to 0$. Останню функцію можна продовжити за неперервністю до ліпшицевої функції на $\overline{\Omega}$, більш того, маємо

$$\sup_{x\in\Omega_{\beta\varepsilon_n}} |W_{\varepsilon_n}(x) - W(x)| \to 0 \quad \text{при } n \to \infty, \quad \forall \beta > 0. \tag{2.1.40}$$

Тепер визначимо функцію $\tilde{W}$ для всіх $x \in \overline{\Omega}$ формулою

$$\tilde{W}(x) = \liminf_{\Omega \ni x_n \to x} W_{\varepsilon_n}(x_n). \tag{2.1.41}$$

З визначення $\tilde{W}$ ясно, що ця функція співпадає з W в Ω. Наступний результат показує, що $\tilde{W} = W$ і на $\overline{\Omega}$ (ясно, що $\tilde{W} \leq W$, проте навіть обмеженість $\tilde{W}(x)$ на $\partial\Omega$ не є очевидною).

Лема 2.1.11. *Нехай $\phi \in C^2(\overline{\Omega})$, тоді кожна точка глобального мінімума x_ε функції $W_\varepsilon - \phi$ задовольняє $d(x) \geq \beta\varepsilon$ з деяким $\beta > 0$, що не залежить від ε. Таким чином, функція $W(x)$ задана формулою (2.1.40) і $\tilde{W}$ зада формулою (2.1.41) співпадають всюди в $\overline{\Omega}$.*

Доведення. Розглянемо функцію $V_\varepsilon(x) = \phi(x) - \rho_\varepsilon(x)$, де $\rho_\varepsilon = 2d(x) - Kd^2(x)/\varepsilon$ і K – додатний параметр, який буде вибрано пізніше. Покажемо, що V_ε задовольняє

$$-\varepsilon a^{ij}(x, x/\varepsilon^\alpha)\frac{\partial^2 V_\varepsilon}{\partial x_i \partial x_j} + H(\nabla V_\varepsilon, x, x/\varepsilon^\alpha) < -A_K \text{ в } \Omega \setminus \Omega_{\varepsilon/K}, \tag{2.1.42}$$

де $\Omega_{\varepsilon/K} = \{x \in \Omega;\, d(x) > \varepsilon/K\}$, і A_K – додатна стала яку можна вибрати настільки великою наскільки необхідно шляхом підбору $K > 0$. Дійсно, $|\nabla\rho_\varepsilon| \leq 4$ коли $d(x) \leq \varepsilon/K$, в той самий час

$$\varepsilon a^{ij}(x, x/\varepsilon^\alpha)\frac{\partial^2 \rho_\varepsilon}{\partial x_i \partial x_j} \leq -2Ka^{ij}(x, x/\varepsilon^\alpha)\frac{\partial d(x)}{\partial x_i}\frac{\partial d(x)}{\partial x_j} + \varepsilon C \leq -2mK + C \text{ в } \Omega \setminus \Omega_{\varepsilon/K},$$

де стала C не залежить від ε і K. Таким чином, якщо взяти достатньо велике K, то буде виконуватись (2.1.42) з константою $A_K > -\lambda_\varepsilon$ (згідно з Лемою 2.1.9, $-\lambda_\varepsilon \leq \Lambda$ для деякого Λ, що не залежить від ε). Тоді з (2.1.3) і (2.1.42) випливає, що функція $W_\varepsilon - V_\varepsilon$ не може досягати свій локальний мінімум у внутрішніх точках $\Omega\setminus\Omega_{\varepsilon/K}$, в противному випадку в такій точці $-\varepsilon a^{ij}(x,x/\varepsilon^\alpha)\frac{\partial^2 W_\varepsilon}{\partial x_i\partial x_j} + H(\nabla W_\varepsilon, x, x/\varepsilon^\alpha) \le -\varepsilon a^{ij}(x,x/\varepsilon^\alpha)\frac{\partial^2 V_\varepsilon}{\partial x_i\partial x_j} + H(\nabla V_\varepsilon, x, x/\varepsilon^\alpha)$, що веде до нерівності $A_K \le -\lambda_\varepsilon$ (яка протирічить нерівності $A_K > -\lambda_\varepsilon$ отриманій вище). Таким чином для $x\in\Omega\setminus\Omega_{\varepsilon/K}$ маємо

$$W_\varepsilon - \phi + \rho_\varepsilon \ge \min_{\partial\Omega_{\varepsilon/K}}(W_\varepsilon - \phi_\varepsilon + \rho_\varepsilon) = \min_{\partial\Omega_{\varepsilon/K}}(W_\varepsilon - \phi) + \varepsilon/K.$$

Разом з цим у внутрішніх точках $\Omega\setminus\Omega_{\varepsilon/K}$ виконується нерівність $\rho_\varepsilon < \varepsilon/K$, яка випливає безпосередньо з визначення ρ_ε. Відсіля, зокрема, випливає, що мінімум $W_\varepsilon - \phi$ в Ω ніколи не досягається в точці x_ε, такій що $d(x_\varepsilon) < \varepsilon/K$.

Для доведення нерівності $\tilde W \ge W$ наблизимо W функціями $w_\delta \in C^2(\overline\Omega)$ так, що $\max_{\overline\Omega}|W - w_\delta| \le \delta$, $\delta > 0$. Тоді

$$\begin{aligned}\tilde W(x) - w_\delta(x) &= \liminf_{n\to\infty,\,\Omega\ni x_n\to x}(W_{\varepsilon_n}(x_n) - w_\delta(x_n)) \ge \liminf_{n\to\infty}\min_{\overline\Omega}(W_{\varepsilon_n} - w_\delta)\\ &= \liminf_{n\to\infty}\inf\{W_{\varepsilon_n}(x) - w_\delta(x);\, x\in\Omega_{\beta\varepsilon_n}\},\end{aligned} \tag{2.1.43}$$

для декого числа $\beta > 0$, яке залежить від δ проте є незалежним від n. Внаслідок (2.1.40) права частина (2.1.43) є $\min_{\overline\Omega}(W(x) - w_\delta)$, і в границі $\delta\to 0$ в (2.1.43) отримуємо $\tilde W(x) \ge W(x)$. □

Наслідок 2.1.12. *Існує стала $\kappa > 0$, така що кожна точка максимума x_ε функції u_ε задовольняє $d(x_\varepsilon) \ge \kappa\varepsilon$.*

Доведення. Достатньо вибрати $\phi \equiv 0$ в Лемі 2.1.11. □

2.1.5 Доведення теореми про усереднення

Цей підрозділ присвячений доведенню Теореми 2.1.1. Згідно з результатами Підрозділу 2.1.4 існує підпослідовність $\varepsilon_n \to 0$, така що

$$\lambda_{\varepsilon_n} \to \lambda \tag{2.1.44}$$

і виконується (2.1.40) з деякою функцією W яка є ліпшицевою на $\overline{\Omega}$. Завдяки Наслідку 3.2.55 і Лемі 2.1.10 можна повернутися до нормалізації (2.1.7) функцій W_n. Покажемо, що пара λ і W є розв'язком задачі (2.1.4), (2.1.5).

Для стислості позначень будемо опускати індех n і писати ε замість ε_n. Доведення слідує єдиній схемі для $\alpha > 1$, $\alpha = 1$ і $\alpha < 1$. Розглянемо довільну функцію $\phi \in C^2(\overline{\Omega})$. Нижче будуть сконструйовані тестові функції ϕ_ε, що збігаються до ϕ рівномірно в $\overline{\Omega}$, і такі, що

$$-\,\varepsilon a^{ij}(x_\varepsilon, x_\varepsilon/\varepsilon^\alpha)\frac{\partial^2\phi_\varepsilon}{\partial x_i \partial x_j}(x_\varepsilon) + H\big(\nabla\phi_\varepsilon(x_\varepsilon), x_\varepsilon, x_\varepsilon/\varepsilon^\alpha\big) \to \overline{H}(\nabla\phi(x_0), x_0) \quad (2.1.45)$$

для кожної збіжної послідовності точок $x_\varepsilon \in \Omega$, $x_\varepsilon \to x_0$. Припустимо, що $W - \phi$ досягає строгий мінімум в точці $x_0 \in \overline{\Omega}$. Оскільки W можна визначити за допомогою границь (2.1.41) ($\tilde{W} = W$ всюди в $\overline{\Omega}$ завдяки Лемі 2.1.11) існує послідовність $x_\varepsilon \in \Omega$ точок мінімуму $W_\varepsilon - \phi_\varepsilon$, що збігається до x_0. Маємо

$$\nabla\phi_\varepsilon(x_\varepsilon) = \nabla W_\varepsilon(x_\varepsilon) \quad \text{і} \quad a^{ij}(x_\varepsilon, x_\varepsilon/\varepsilon^\alpha)\frac{\partial^2 W_\varepsilon}{\partial x_i \partial x_j}(x_\varepsilon) \geq a^{ij}(x_\varepsilon, x_\varepsilon/\varepsilon^\alpha)\frac{\partial^2\phi_\varepsilon}{\partial x_i \partial x_j}(x_\varepsilon).$$

Користуючись (2.1.3) виводимо

$$-\varepsilon a^{ij}(x_\varepsilon, x_\varepsilon/\varepsilon^\alpha)\frac{\partial^2\phi_\varepsilon}{\partial x_i \partial x_j}(x_\varepsilon) + H\big(\nabla\phi_\varepsilon(x_\varepsilon), x_\varepsilon, x_\varepsilon/\varepsilon^\alpha\big) - \lambda_\varepsilon \geq 0,$$

і в границі $\varepsilon \to 0$ за допомогою (2.1.45) одержуємо $\overline{H}(\nabla\phi(x_0), x_0) \geq \lambda$. Якщо $W - \phi$ досягає строгий максимум в точці $x_0 \in \Omega$, аналогічні міркування приводять до нерівності $\overline{H}(\nabla\phi(x_0), x_0) \leq \lambda$. Таким чином $W(x)$ є в'язкісним розв'язком задачі (2.1.4)–(2.1.5).

Залишається сконструктувати функції ϕ_ε, що задовольняють (2.1.45), і збігаються до ϕ рівномірно в $\overline{\Omega}$.

Випадок $\alpha > 1$. Покладемо

$$\phi_\varepsilon(x) = \phi(x) + \varepsilon^{2\alpha-1}\theta(x/\varepsilon^\alpha),$$

де $\theta(y)$ є Y-періодичним розв'язком рівняння

$$-\,a^{ij}(x_0, y)\frac{\partial^2\theta}{\partial y_i \partial y_j} = \overline{H}(\nabla\phi(x_0), x_0) - H(\nabla\phi(x_0), x_0, y). \quad (2.1.46)$$

Завдяки (2.1.8) такий розв'язок існує. Дійсно, (2.1.8) є ні чим іншим як умовою розв'язності (2.1.46). Більш того, оскільки коефіцієнти і права частина в (2.1.46) є ліпшицевими , $\theta \in C^{2,1}$ (див., наприклад, [95]). Таким чином, якщо $x_\varepsilon \to x_0$ при $\varepsilon \to 0$, тоді

$$
\begin{aligned}
&-\varepsilon a^{ij}(x_\varepsilon, x_\varepsilon/\varepsilon^\alpha)\frac{\partial^2\phi_\varepsilon}{\partial x_i \partial x_j}(x_\varepsilon) + H\big(\nabla\phi_\varepsilon(x_\varepsilon), x_\varepsilon, x_\varepsilon/\varepsilon^\alpha\big)\\
&\quad = -a^{ij}(x_\varepsilon, x_\varepsilon/\varepsilon^\alpha)\frac{\partial^2\theta}{\partial y_i \partial y_j}(x_\varepsilon/\varepsilon^\alpha) + H\big(\nabla\phi(x_\varepsilon) + O(\varepsilon^{\alpha-1}), x_\varepsilon, x_\varepsilon/\varepsilon^\alpha\big) + O(\varepsilon)\\
&\quad = -a^{ij}(x_0, x_\varepsilon/\varepsilon^\alpha)\frac{\partial^2\theta}{\partial y_i \partial y_j}(x_\varepsilon/\varepsilon^\alpha)\\
&\quad + H\big(\nabla\phi(x_0), x_0, x_\varepsilon/\varepsilon^\alpha\big) + \underline{O}(|x - x_\varepsilon| + \varepsilon + \varepsilon^{\alpha-1}) = \overline{H}(\nabla\phi(x_0), x_0) + \overline{o}(1).
\end{aligned}
$$

Випадок $\alpha = 1$. Покладемо $\phi_\varepsilon(x) = \phi(x) + \varepsilon\theta(x/\varepsilon)$, де $\theta(y) = -\log\vartheta(y)$ і $\vartheta(y)$ є єдиним (з точністю до помноження на додатну сталу) $Y-$періодичний додатний розв'язок рівняння

$$
a^{ij}(x_0, y)\frac{\partial^2\vartheta}{\partial y_i \partial y_j} + \hat{b}^j(y)\frac{\partial\vartheta}{\partial y_j} + \hat{c}(y))\vartheta = \overline{H}(p, x_0)\vartheta, \tag{2.1.47}
$$

де $p = \nabla\phi(x_0)$, $\hat{b}^j(y) = b^j(x_0, y) - 2a^{ij}(x_0, y)p_i$, $\hat{c}(y) = a^{ij}(x_0, y)p_ip_j - b^j(x_0, y)p_j + c(x_0, y)$. Внаслідок стандартних результатів про регулярність, маємо $\theta \in C^{2,1}$ (див. [95]), і неважко перевірити, що

$$
-\varepsilon a^{ij}(x_\varepsilon, x_\varepsilon/\varepsilon)\frac{\partial^2\phi_\varepsilon}{\partial x_i \partial x_j}(x_\varepsilon) + H\big(\nabla\phi_\varepsilon(x_\varepsilon), x_\varepsilon, x_\varepsilon/\varepsilon\big) = \overline{H}(\nabla\phi(x_0), x_0) + \overline{o}(1),
$$

як тільки $x_\varepsilon \to x_0$ коли $\varepsilon \to 0$.

Випадок $\alpha < 1$. Покладемо $\phi_\varepsilon(x) = \phi(x) + \varepsilon^\alpha\theta_\varepsilon(x/\varepsilon^\alpha)$, де θ_ε є Y-періодичним розв'язком рівняння

$$
-\varepsilon^{1-\alpha}a^{ij}(x_0, y)\frac{\partial^2\theta_\varepsilon}{\partial y_i \partial y_j} + H\big(p + \nabla\theta_\varepsilon(y), x_0, y\big) = \overline{H}_\varepsilon(p, x_0) \quad \text{з } p = \nabla\phi(x_0). \tag{2.1.48}
$$

Такий розв'язок існує якщо $\overline{H}_\varepsilon(p, x_0)$ співпадає з першим власним значенням μ_ε (власним значенням з максимальною дійсною частиною) спекральної задачі

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon^{2(1-\alpha)}a^{ij}(x_0, y)\frac{\partial^2\vartheta_\varepsilon}{\partial y_i \partial y_j} + \varepsilon^{1-\alpha}\hat{b}^j(y)\frac{\partial\vartheta_\varepsilon}{\partial y_j} + \hat{c}(y)\vartheta_\varepsilon = \mu_\varepsilon\vartheta_\varepsilon,\\
&\vartheta_\varepsilon \quad \text{є } Y\text{-періодичною},
\end{aligned}
$$

де $\hat{b}^j$, $\hat{c}$ є такими самими як в (2.1.47). Згідно з Теоремою Крейна-Рутмана μ_ε є простим дійсним власним значенням, а відповідну власну функцію ϑ_ε можна вибрати додатною. Тоді розв'язок (2.1.48) визначається формулою $\theta_\varepsilon = -\varepsilon^{1-\alpha}\log\vartheta_\varepsilon$. Скористаємось тепер результатами знайденими в Підрозділі 2.1.3,

$$\overline{H}_\varepsilon(p, x_0) \to \overline{H}(p, x_0) = \overline{H}(\nabla\phi(x_0), x_0) \tag{2.1.49}$$

(де границю $\overline{H}(p, x_0)$ описано в (2.1.10)),

$$\|\partial^2\vartheta_\varepsilon/\partial y_i\partial y_j\|_{L^\infty} \leq C/\varepsilon^{1-\alpha} \tag{2.1.50}$$

Це дозволяє вивести (2.1.45) аналогічно іншим випадкам розглянутим вище,

$$\begin{aligned}
&-\varepsilon a^{ij}(x_\varepsilon, x_\varepsilon/\varepsilon^\alpha)\frac{\partial^2\phi_\varepsilon}{\partial x_i\partial x_j}(x_\varepsilon) + H\big(\nabla\phi_\varepsilon(x_\varepsilon), x_\varepsilon, x_\varepsilon/\varepsilon^\alpha\big)\\
&\quad= -\varepsilon^{1-\alpha}a^{ij}(x_\varepsilon, x_\varepsilon/\varepsilon^\alpha)\frac{\partial^2\theta_\varepsilon}{\partial y_i\partial y_j}(x_\varepsilon/\varepsilon^\alpha) + H\big(\nabla\phi(x_\varepsilon) + \nabla\theta_\varepsilon(x_\varepsilon/\varepsilon^\alpha), x_\varepsilon, x_\varepsilon/\varepsilon^\alpha\big)\\
&\qquad\qquad + O(\varepsilon)\\
&\quad= -\varepsilon^{1-\alpha}a^{ij}(x_0, x_\varepsilon/\varepsilon^\alpha)\frac{\partial^2\theta_\varepsilon}{\partial y_i\partial y_j}(x_\varepsilon/\varepsilon^\alpha) + H\big(\nabla\phi(x_0) + \nabla\theta_\varepsilon(x_\varepsilon/\varepsilon^\alpha), x_0, x_\varepsilon/\varepsilon^\alpha\big)\\
&\qquad\qquad + O(|x - x_\varepsilon| + \varepsilon) = \overline{H}(\nabla\phi(x_0), x_0) + o(1).
\end{aligned}$$

Теорему 2.1.1 повністю доказано. □

2.1.6 Рівняння конвекції-дифузії: оцінка знизу для власних значень

Цей і наступний підрозділи присвячено доводенню Теореми 2.1.4. Нагадаємо, що в Теоремі 2.1.4 йдеться про спеціальний випадок оператора (2.1.1), коли $\alpha = 1$ і $c(x, y) = 0$, так що цей оператор добуває вигляду (2.1.19). Буде показано, що в умовах Теореми 2.1.4 перше власне значення має порядок ε, і його асимтотична поведінка може бути описана за допомогою локального аналізу в околі точок множини Обрі $\mathcal{A}_{\overline{H}}$ ефективного гамільтоніану.

Головний результат цього Підрозділу дає уточнену оцінку знизу для власних значень.

Теорема 2.1.13. *Нехай* $c(x,y) = 0$ *і* $\alpha = 1$*, і припустимо, що виконується (2.1.23). Тоді*

$$\liminf_{\varepsilon\to 0} \lambda_\varepsilon/\varepsilon \geq \overline{\sigma} = \max\{\sigma(\xi);\ \xi \in \mathcal{A}_{\overline{H}}\}, \tag{2.1.51}$$

де числа $\sigma(\xi)$ *описано в Теоремі 2.1.4.*

Доведення. Виберемо якусь нерухому точку $\xi \in \mathcal{A}_{\overline{H}}$. Внаслідок принципу максимуму маємо $\lambda_\varepsilon < 0$. Для знаходження оцінки знизу розглянемо, для малих $\delta > 0$, допоміжну задачу $\mathcal{L}_\varepsilon v_\varepsilon - \delta|x-\xi|^2 v_\varepsilon = \varepsilon\tilde{\sigma}_\varepsilon v_\varepsilon$, тобто

$$\varepsilon a^{ij}(x, x/\varepsilon)\frac{\partial^2 v_\varepsilon}{\partial x_i \partial x_j} + b^j(x, x/\varepsilon)\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_j} - \frac{\delta|x-\xi|^2}{\varepsilon} v_\varepsilon = \tilde{\sigma}_\varepsilon v_\varepsilon \qquad \text{в } \Omega \tag{2.1.52}$$

з умовою Діріхле $v_\varepsilon = 0$ на $\partial\Omega$. Згідно з [169] власні значення λ_ε і $\varepsilon\tilde{\sigma}_\varepsilon$ визнсчаються формулами

$$\lambda_\varepsilon = \inf\Big\{\sup_{x\in\Omega}\frac{\mathcal{L}_\varepsilon\phi}{\phi}\Big\}, \qquad \varepsilon\tilde{\sigma}_\varepsilon = \inf\Big\{\sup_{x\in\Omega}\frac{\mathcal{L}_\varepsilon\phi - \delta|x-\xi|^2\phi}{\phi}\Big\},$$

де інфімум береться серед функцій з множини

$$\{\phi \in C^2(\Omega)\cap C(\overline{\Omega}),\ \phi > 0 \text{ в } \Omega,\ \phi = 0 \text{ на } \partial\Omega\}.$$

Таким чином, для кожного $\delta > 0$, маємо

$$\lambda_\varepsilon \geq \varepsilon\tilde{\sigma}_\varepsilon.$$

Будемо вважати в подальшому, що перша власна функція v_ε задачі (2.1.52) є нормалізованою наступним чином $v_\varepsilon(\xi) = 1$.

Зведемо (2.1.52) до форми більш зручної для аналізу. Поперше, зробимо заміну змінних $z = (x-\xi)/\sqrt{\varepsilon}$ і покладемо, $w_\varepsilon(z) = v_\varepsilon(\xi + \sqrt{\varepsilon}z)$, тоді рівняння (2.1.52) перетворюється на

$$a^{ij}_{\xi,\xi/\varepsilon}\big(\sqrt{\varepsilon}z, z/\sqrt{\varepsilon}\big)\frac{\partial^2 w_\varepsilon}{\partial z_i z_j} + \frac{b^j_{\xi,\xi/\varepsilon}\big(\sqrt{\varepsilon}z, z/\sqrt{\varepsilon}\big)}{\sqrt{\varepsilon}}\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial z_j} - \delta|z|^2 w_\varepsilon = \tilde{\sigma}_\varepsilon w_\varepsilon \quad \text{в } (\Omega-\xi)/\sqrt{\varepsilon}. \tag{2.1.53}$$

Тут і в подальшому індекс "$\xi, \xi/\varepsilon$"позначає ссув на ξ у змінній x і на ξ/ε у змінній y, тобто, наприклад, $a^{ij}_{\xi,\xi/\varepsilon}(x,y) = a^{ij}(x+\xi, y+\xi/\varepsilon)$. Далі, помножимо (2.1.53) на $\theta^*_{\xi,\xi/\varepsilon}\big(\sqrt{\varepsilon}z, z/\sqrt{\varepsilon}\big)$, де $\theta^*(x,y)$ визначається в (2.1.21). Тоді, за допомогою нескладних перетворень знаходимо

$$\frac{\partial}{\partial z_i}\Big(\theta^*_{\xi,\xi/\varepsilon}\big(\sqrt{\varepsilon}z, z/\sqrt{\varepsilon}\big)a^{ij}_{\xi,\xi/\varepsilon}\big(\sqrt{\varepsilon}z, z/\sqrt{\varepsilon}\big)\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial z_j}\Big) + \frac{S^j_{\xi,\xi/\varepsilon}\big(\sqrt{\varepsilon}z, z/\sqrt{\varepsilon}\big)}{\sqrt{\varepsilon}}\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial z_j}$$
$$+\Big(\frac{\overline{b}^j(\sqrt{\varepsilon}z+\xi)}{\sqrt{\varepsilon}} + \sqrt{\varepsilon}h^j_\varepsilon(z)\Big)\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial z_j} = (\tilde{\sigma}_\varepsilon + \delta|z|^2)\theta^*_{\xi,\xi/\varepsilon}\big(\sqrt{\varepsilon}z, z/\sqrt{\varepsilon}\big)w_\varepsilon, \quad (2.1.54)$$

де

$$S^j(x,y) = b^j(x,y)\theta^*(x,y) - \frac{\partial}{\partial y_i}\Big(a^{ij}(x,y)\theta^*(x,y)\Big) - \overline{b}^j(x);$$

h^j_ε в (2.1.54) – рівномірно обмежені функції вид яких не є важливим. Оскільки θ^* є розв'язком (2.1.21), Y-періодичне векторне поле $S(x,y) = (S^1(x,y),\ldots,S^N(x,y))$ є бездивергентним (для всіх x), і, згідно з визначенням $\overline{b}$, це поле має нульове середнє значення на періоді. Тоді $S(x,y)$ допускає представлення (див., наприклад, [59])

$$S^j(x,y) = \frac{\partial}{\partial y_i}T^{ij}(x,y)$$

з Y-періодичним за y кососиметричним тензором $T^{ij}(x,y)$ ($T^{ij} = -T^{ji}$). Крім того, функції T^{ij} є неперервними і мають обмежені частинні похідні $\partial T^{ij}/\partial x_k$. Отже можна переписати (2.1.54) у вигляді

$$\frac{\partial}{\partial z_i}\Big(q^{ij}_{\xi,\xi/\varepsilon}\big(\sqrt{\varepsilon}z, z/\sqrt{\varepsilon}\big)\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial z_j}\Big) + \frac{\overline{b}^j(\sqrt{\varepsilon}z+\xi)}{\sqrt{\varepsilon}}\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial z_j} = \tilde{\sigma}_\varepsilon\theta^*_{\xi,\xi/\varepsilon}\big(\sqrt{\varepsilon}z, z/\sqrt{\varepsilon}\big)w_\varepsilon$$
$$+\,\delta|z|^2\theta^*_{\xi,\xi/\varepsilon}\big(\sqrt{\varepsilon}z, z/\sqrt{\varepsilon}\big)w_\varepsilon - \sqrt{\varepsilon}\tilde{h}^j_\varepsilon(z)\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial z_j}, \quad (2.1.55)$$

де $q^{ij}_{\xi,\xi/\varepsilon}(x,y) = q^{ij}(x+\xi, y+\xi/\varepsilon)$, $q^{ij}(x,y) = \theta^*(x,y)a^{ij}(x,y) + T^{ij}(x,y)$, і $\tilde{h}^j_\varepsilon$ – рівномірно обмежені функції. Зазначимо, що для кожного фіксованого компакта

$$\frac{\overline{b}^j(\sqrt{\varepsilon}z+\xi)}{\sqrt{\varepsilon}} = \frac{\overline{b}^j(\sqrt{\varepsilon}z+\xi) - \overline{b}^j(\xi)}{\sqrt{\varepsilon}} \to z_i\frac{\partial \overline{b}^j}{\partial x_i}(\xi)$$

рівномірно відносно z при $\varepsilon \to 0$.

Лема 2.1.14. *Якщо $\overline{b}(\xi) = 0$ для деякого $\xi \in \overline{\Omega}$ тоді перше власне значення λ_ε оператора (2.1.19) задовольняє нерівність $-\Lambda\varepsilon \le \lambda_\varepsilon < 0$ з деяким $\Lambda > 0$, що не залежить від ε.*

Доведення. За допомогою принципу максимумуму отримуємо нерівність $\lambda_\varepsilon < 0$. В процесі доведення оцінки знизу зручно спочатку припускати, що $\xi \in \Omega$. Тоді для достатньо малих ε рівняння (2.1.55) виконується в $B_2 = \{z;\ |z| < 2\}$. Введемо допоміжний оператор

$$\mathcal{L}_\varepsilon^{(\mathrm{aux})} w = \frac{\partial}{\partial z_i}\Big(q^{ij}_{\xi,\xi/\varepsilon}\big(\sqrt{\varepsilon} z, \frac{z}{\sqrt{\varepsilon}}\big)\frac{\partial w}{\partial z_j}\Big) + \Big(\frac{\overline{b}^j(\sqrt{\varepsilon} z + \xi)}{\sqrt{\varepsilon}} + \sqrt{\varepsilon}\tilde{h}^j_\varepsilon(z)\Big)\frac{\partial w}{\partial z_j} \\ - \delta|z|^2\theta^*_{\xi,\xi/\varepsilon}\big(\sqrt{\varepsilon} z, \frac{z}{\sqrt{\varepsilon}}\big) w,$$

так що (2.1.55) можна записати в операторному вигляді як $\mathcal{L}_\varepsilon^{(\mathrm{aux})} w_\varepsilon = \tilde{\sigma}_\varepsilon \theta^*_{\xi,\xi/\varepsilon}\big(\sqrt{\varepsilon} z, z/\sqrt{\varepsilon}\big) w_\varepsilon$. Розглянемо параболічну задачу для оператора $\mathcal{L}_\varepsilon^{(\mathrm{aux})}$

$$\frac{\partial \tilde{w}_\varepsilon}{\partial t} - \mathcal{L}_\varepsilon^{(\mathrm{aux})}\tilde{w}_\varepsilon = 0 \qquad \text{in} \ \ (0,+\infty)\times B_2,$$

з початковою умовою $\tilde{w}_\varepsilon(0,z) = w_\varepsilon(z)$ і крайовою умовою $\tilde{w}_\varepsilon(t,z) = 0$ на $(0,+\infty)\times \partial B_2$. Розв'язок $\tilde{w}_\varepsilon$ цієї задачі задовольняє поточкову оцінку

$$\tilde{w}_\varepsilon(t,z) \le \exp\big(\tilde{\sigma}_\varepsilon(\min\theta^*)t\big)\, w_\varepsilon(z), \tag{2.1.56}$$

у цьому нескладно переконатись застосувавши принцип максимуму до

$$\Big(\frac{\partial}{\partial t} - \mathcal{L}_\varepsilon^{(\mathrm{aux})}\Big)\Big(\exp\big(\tilde{\sigma}_\varepsilon(\min\theta^*)t\big)\, w_\varepsilon(z) - \tilde{w}_\varepsilon(t,z)\Big) \\ = \tilde{\sigma}_\varepsilon\Big(\min\theta^* - \theta^*_{\xi,\xi/\varepsilon}\big(\sqrt{\varepsilon} z, z/\sqrt{\varepsilon}\big)\Big) w_\varepsilon(z) \ge 0.$$

З іншого боку, оскільки коєфіцієнти оператора $\mathcal{L}_\varepsilon^{(\mathrm{aux})}$ є рівномірно обмеженими в B_2 і задовольняють умову рівномірної еліптичності $\theta^*_{\xi,\xi/\varepsilon}\big(\sqrt{\varepsilon} z, z/\sqrt{\varepsilon}\big) a^{ij}_{\xi,\xi/\varepsilon}\big(\sqrt{\varepsilon} z, z/\sqrt{\varepsilon}\big)\zeta^{i}$ $(\min\theta^*) m\,|\zeta|^2$, за допомогою оцінок Аронсона (див. [19]) виводмо

$$\min\{\tilde{w}_\varepsilon(1,z);\ z \in B_1\} \ge M \min\{\tilde{w}_\varepsilon(0,z);\ z \in B_1\}$$

з $M > 0$, що не залежить від ε, де B_1 – одинична куля $B_1 = \{z; |z| < 1\}$. Скомбінувавши це з (2.1.56) знаходимо

$$e^{(\min\theta^*)\tilde{\sigma}_\varepsilon} \min_{B_1} w_\varepsilon \geq \min\{\tilde{w}_\varepsilon(1,z);\ z \in B_1\} \geq M \min\{\tilde{w}_\varepsilon(0,z);\ z \in B_1\}$$
$$= M \min_{B_1} w_\varepsilon,$$

тобто $\tilde{\sigma}_\varepsilon \geq \log M / \min\theta^* =: -\Lambda$. Таким чином $\tilde{\sigma}_\varepsilon \geq -\Lambda$ і $\lambda_\varepsilon \geq -\Lambda\varepsilon$.

У випадку $\xi \in \partial\Omega$ можна повторити наведені вище міркування з $\xi_\varepsilon \in \Omega$ замість ξ, де $|\xi_\varepsilon - \xi| = \mathrm{dist}(\xi_\varepsilon, \partial\Omega) = 2\sqrt{\varepsilon}$. □

В процесі доведення Леми 2.1.14 одержано рівномірну оцінку знизу для $\tilde{\sigma}_\varepsilon$, яка (в комбінації з очевидною нерівністю $\tilde{\sigma}_\varepsilon < 0$) дозволяє отримати рівеомірну оцінку для норми w_ε в $C^{0,\beta}(K)$ (з $\beta > 0$, що залежить тільки від оцінок для коефіцієнтів в (2.1.55)) і $H^1(K)$, для кожного компакта K (див., наприклад, [95, Розділ 8.9]). Таким чином, з точністю до підпослідовності, $w_\varepsilon \to w$ в $C_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$ і $\tilde{\sigma}_\varepsilon \to \tilde{\sigma}$. Більш того, за допомогою стандартних методів усереднення (що базуються на div-curl Лемі, наприклад), неважко показати, що w є розв'язком рівняння

$$Q^{ij}\frac{\partial^2 w}{\partial z_i \partial z_j} + z_i B^{ji}\frac{\partial w}{\partial z_j} - \delta|z|^2 w = \tilde{\sigma} w \qquad \text{в } \mathbb{R}^N, \tag{2.1.57}$$

де $Q^{ij} = Q^{ji}$ – сталі ефективні коефіцієнти, що задовольняють умову еліптичності (можна показати, що насправді $Q^{ij} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \overline{H}}{\partial p_i \partial p_j}(0,\xi)$) і

$$B^{ji} = B^{ji}(\xi) = \frac{\partial \overline{b}^j}{\partial x_i}(\xi).$$

Завдяки нормалізації $w_\varepsilon(0) = 1$, гранична функція $w(z)$ є нетрівіальним розв'язком (2.1.57). Крім того, для точок максимуму z_ε функцій $w_\varepsilon(z)$, користуючись (2.1.53), отримуємо $|z_\varepsilon|^2 \leq -\tilde{\sigma}_\varepsilon/\delta$. Тоді, завдяки Лемі 2.1.14, $|z_\varepsilon| \leq C$. Таким чином $w(z)$ є обмеженим додатним розв'язком (2.1.57). Побудуємо тепер пару (σ', w'), що задовольняє (2.1.57) з функцією w' вигляду $w'(z) = e^{-\Gamma_\delta^{ij} z_i z_j}$, де $(\Gamma_\delta^{ij})_{i,j=\overline{1,N}}$ – симетрична додатно визначена матриця. Для цього розглянемо матричне рівняння Ріккаті

$$4\Gamma_\delta Q \Gamma_\delta - \Gamma_\delta B - B^*\Gamma_\delta - \delta I = 0, \tag{2.1.58}$$

де I позначає одиничну матрицю. Добре відомо (див., наприклад, [125, Теорема 9.1.5]), що для додатно визначеної Q і $\delta > 0$ рівняння (2.1.58) має максимальний невід'ємний розв'язок Γ_δ, більш того матриця Γ_δ є додатно визначеною. Тоді $w'(z) = e^{-\Gamma_\delta^{ij} z_i z_j}$ є додатним обмеженим розв'язком (2.1.57), що відповідає власному значенню $\sigma' = -2\mathrm{tr}(Q\Gamma_\delta)$. Зазначимо тепер, що за допомогою перетворення $\tilde{w}(z) = e^{-r|z|^2} w(z)$ з $r > 0$ рівняння (2.1.57) перетворюється на

$$Q^{ij}\frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial z_i \partial z_j} + (B^{ji} + 4rQ^{ij})z_i \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z_j} + (4r^2 Q^{ij} z_i z_j + 2r\,\mathrm{tr}Q + 2rB^{ji} z_i z_j - \delta|z|^2)\tilde{w}$$
$$= \tilde{\sigma}\tilde{w} \quad \text{в } \mathbb{R}^N.$$

Для достатньо малих $r > 0$ маємо $((4r^2 Q^{ij} z_i z_j + 2r\,\mathrm{tr}Q + 2rB^{ji} z_i z_j - \delta|z|^2) \to -\infty$, і, з огляду на обмеженість w, $\tilde{w}(z) \to 0$ при $|z| \to \infty$. Тоді , згідно з [167, Теорема 1], власне значення $\tilde{\sigma}$, що відповідає такій додатній власній функції $\tilde{w}$, що згасає при $|z| \to \infty$, є єдиним. Таким чином $\tilde{\sigma} = \sigma' = -2\mathrm{tr}(Q\Gamma_\delta)$, і, підсумувавши зроблений вище аналіз, маємо $\liminf_{\varepsilon\to 0} \lambda_\varepsilon/\varepsilon \geq -2\mathrm{tr}(Q\Gamma_\delta)$. Насамкінець зазначимо, що матриці Γ_δ збігаються до масимального невід'ємного розв'язоку рівняння Бернуллі (див., наприклад, [125, Теорема 11.2.1])

$$4\Gamma Q \Gamma - \Gamma B - B^*\Gamma = 0, \tag{2.1.59}$$

при $\delta \to +0$. Обчислення, що надано в Додатку G, показують, що $-2\mathrm{tr}(Q\Gamma) = \sigma(\xi)$, де $\sigma(\xi)$ – сума від'ємних дійсних частин власних значень $-B(\xi)$. Таким чином, після максимізації на множині $\xi \in \mathcal{A}_{\overline{H}}$, отримуємо шукану оцінку знизу

$$\liminf_{\varepsilon\to 0} \lambda_\varepsilon/\varepsilon \geq \overline{\sigma} = \max\{\sigma(\xi);\, \xi \in \mathcal{A}_{\overline{H}}\}.$$

□

2.1.7 Рівняння конвекції-дифузії: оцінка зверху для власних значень

У цьому підрозділі встановлюється оцінка зверху для першого власного значення, що завершує доведення формули (2.1.24). Як і в Підрозділі 2.1.6 тут застосовується локальний аналіз в околі точок множини Обрі, проте основну увагу приділяється спеціальним (так званим *вагомим*) точкам множини Обрі, де вдається контролювати асимптотичну поведінку перемасштабованих власних функцій на нескінченності. Буде показано, що тільки ці точки впливають на головні члени асимптотик першого власного значення і першої власної функції.

Щоб надати означення вагомої точки нагадаємо, що, згідно з Теоремою 2.1.1, функції $W_\varepsilon = -\varepsilon \log u_\varepsilon$ збігаються (з точністю до підпослідовності) рівномірно на компактах до в'язкісного розв'язку W задачі (2.1.4)–(2.1.5) з $\lambda = 0$. З (2.1.18) випливає, що для W є справедливим представлення $W(x) = \min\{d_{\overline{H}}(x,\xi) + W(\xi);\, \xi \in \mathcal{A}_{\overline{H}}\}$.

Будемо називати точку $\xi \in \mathcal{A}_{\overline{H}}$ *вагомою* якщо

$$W(x) = d_{\overline{H}}(x,\xi) + W(\xi) \qquad \text{у деякому околі } \xi.$$

В противному випадку точка ξ називається *невагомою*. Для кожної невагомої точки $\xi \in \mathcal{A}_{\overline{H}}$ існують послідовності $x^n \to \xi$ і $\xi^n \in \mathcal{A}_{\overline{H}} \setminus \{\xi\}$, такі що $d_{\overline{H}}(x^n,\xi) + W(\xi) > d_{\overline{H}}(x^n,\xi^n) + W(\xi^n)$. Оскільки множина Обрі складається зі скінченого числа точок, послідовність ξ^n збігається (або має збіжну підпослідовність) до $\xi' \in \mathcal{A}_{\overline{H}}$, $\xi' \neq \xi$. В границі $n \to \infty$, користуючись неперервністю функції відстані, отримуємо $d_{\overline{H}}(\xi,\xi') = W(\xi) - W(\xi')$ (нерівність $d_{\overline{H}}(\xi,\xi') \geq W(\xi) - W(\xi')$ завжди є вірною). Введемо тепер (часткове) відношення порядку $\preceq$ на $\mathcal{A}_{\overline{H}}$:

$$\xi' \preceq \xi \iff d_{\overline{H}}(\xi,\xi') = W(\xi) - W(\xi'). \tag{2.1.60}$$

Це відношення є (очевидно) рефлексивним, його транзитивність є наслідком нерівності трикутника $d_{\overline{H}}(\xi,\xi'') \leq d_{\overline{H}}(\xi,\xi') + d_{\overline{H}}(\xi',\xi'')$, і його антисиметричність випливає з нерівності $S_{\overline{H}}(\xi,\xi') > 0$ яка є вірною для всіх $\xi \neq \xi'$, $\xi,\xi' \in \mathcal{A}_{\overline{H}}$. Тоді кожний мінімальний елемент $\xi \in \mathcal{A}_{\overline{H}}$ є вагомою точкою. Оскільки множина $\mathcal{A}_{\overline{H}}$ є скінченою, то існує мінімальний елемент, тобто існує щонайменше одна вагома точка $\xi \in \mathcal{A}_{\overline{H}}$.

Теорема 2.1.15. *Припустимо, що виконуються умови Теореми 2.1.4, і нехай ξ – вагома точка з $\mathcal{A}_{\overline{H}}$, пов'язана з (під)послідовністю $W_\varepsilon \to W$. Тоді $\lim_{\varepsilon\to 0} \lambda_\varepsilon/\varepsilon = \sigma(\xi)$ і функції $u_\varepsilon(\xi+\sqrt{\varepsilon}z)/u_\varepsilon(\xi)$ збігаються слабко в $H^1(K)$ для кожного компакту $K\subset\mathbb{R}^N$ до граничної функції $w(z)$, яка є єдиною додатною власною функцією рівняння*

$$Q^{ij}\frac{\partial^2 w}{\partial z_i \partial z_j} + z_i B^{ji}\frac{\partial w}{\partial z_j} = \sigma w \qquad \text{в } \mathbb{R}^N, \tag{2.1.61}$$

що відповідає власному значенню $\sigma=\sigma(\xi)$, є нормалізованою рівністю $w(\xi) = 1$ і є такою, що задовольняє додаткову умову

$$w(z)e^{\mu|\Pi_s z|^2-\nu|\Pi_u z|^2} \text{ є обмеженою на } \mathbb{R}^N \text{ для деякого } \mu>0 \text{ і всіх } \nu>0, \tag{2.1.62}$$

де Π_s і Π_u позначають спектральні проектори на інваріантні підпростори B, що відповідають власним значенням з додатними і від'ємними дійсними частиними (стійким і нестійким підпросторам системи $\dot z_i = -B^{ij}z_j$). Коефіцієнти Q^{ij} і B^{ij} є такими самими як в Теоремі 2.1.4.

Доведення. Всюду нижче вважаємо, що власна функція u_ε є нормалізованою рівністю $u_\varepsilon(\xi)=1$, якщо явно не сказано протилежного; W позначає границю масштабованих логарифмічних перетворень функцій u_ε нормалізованих означеним шляхом. Завдяки оцінкам зверху і знизу для власного значення λ_ε частка $\lambda_\varepsilon/\varepsilon$ збігається при $\varepsilon\to 0$, для деякої підпослідовності, до скінченої границі, яку будемо позначати σ_0. Застосуємо ті самі міркування, що і вдоведенні оцінки знизу для λ_ε. Розглянемо масштабовані власні функції $w_\varepsilon(z) = u_\varepsilon(\xi+\sqrt{\varepsilon}z)$ які задовольняють рівняння

$$\frac{\partial}{\partial z_i}\Big(q^{ij}_{\xi,\frac{\xi}{\varepsilon}}(\sqrt{\varepsilon}z, z/\sqrt{\varepsilon})\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial z_j}\Big) + \frac{\overline{b}^j(\sqrt{\varepsilon}z+\xi)}{\sqrt{\varepsilon}}\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial z_j} = \frac{\lambda_\varepsilon}{\varepsilon}\theta^*_{\xi,\frac{\xi}{\varepsilon}}(\sqrt{\varepsilon}z, z/\sqrt{\varepsilon})w_\varepsilon$$
$$-\sqrt{\varepsilon}\tilde h^j_\varepsilon(z)\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial z_j} \quad \text{в } \frac{\Omega-\xi}{\sqrt{\varepsilon}}.$$

З точністю до підпослідовності, w_ε збігаються в $C(K)$ і слабко в $H^1(K)$, для кожного компакту K, до додатного розв'язку w_0 рівняння (2.1.61) з $\sigma=\sigma_0$.

Задача на власні значення (2.1.61) має, взагалі кажучи, багато розв'язків $w(z)$. Буде доведено, що гранична функція w_0 задовольняє також (2.1.62). Це дає можливість скористатися наступним результатом про єдиність.

Лема 2.1.16. *Спектральна задача (2.1.61) має єдиний розв'язок – пару* (σ, w) *з додатною функцією* w*, що задовольняє (2.1.62) і нормалізована рівністю* $w(0) = 1$*. Більш того,* $w(z) = e^{-\Gamma^{ij}z_iz_j}$*, де* Γ *є максимальним невід'ємно визначеним розв'язком рівняння Бернуллі (2.1.59), і* $\sigma = -2\mathrm{tr}(\Gamma Q)$*.*

Доведення. По-перше зазначимо, що $w(z) = e^{-\Gamma^{ij}z_iz_j}$ задовольняє (2.1.62). Це випливає з нерівності $\Gamma = \Pi_s^*\Gamma\Pi_s \geq \gamma\Pi_s^*\Pi_s$, де $\gamma > 0$, див. Твердження G.1 в Додатку G. Ясно також, що $w(z)$ задовольняє (2.1.61) з $\sigma = -2\mathrm{tr}(\Gamma Q)$.

Щоб довести єдиність σ і $w(z)$ скористаємось перетворенням $\tilde{w}(z) = e^{\phi(z)}w(z)$, з квадратичною фуукцією $\phi(z)$, що буде побудовано нижче. Це перетворення веде до рівняння вигляду

$$Q^{ij}\frac{\partial^2\tilde{w}}{\partial z_i\partial z_j} + z_i\tilde{B}^{ji}\frac{\partial\tilde{w}}{\partial z_j} + \tilde{C}(z)\tilde{w} = \sigma\tilde{w} \qquad \text{в } \mathbb{R}^N. \tag{2.1.63}$$

Функцію $\phi(z)$ буде сконструйовано таким чиином, що $\tilde{C}(z) \to -\infty$, $\tilde{w}(z) \to 0$ при $|z| \to \infty$. Тоді, згідно з [167], існує єдине число σ, таке що (2.1.63) иає додатний розв'язок $\tilde{w}(z)$, що прямує до нуля при $|z| \to \infty$ (функція $\tilde{w}(z)$ є також єдиною з точністю до помноження на додатну сталу).

Приступимо до побудови $\phi(z)$. Покладемо $\phi = rA_s^{ij}z_iz_j - rA_u^{ij}z_iz_j$, з симетричними матрицями A_s і A_u, тоді в (2.1.63) маємо

$$\tilde{B}^{ji} = B^{ji} + 4rQ^{jl}(A_u^{li} - A_s^{li})$$

і

$$\begin{aligned}\tilde{C}(z) = 4r^2(A_u^{il} - A_s^{il})Q^{lm}(A_u^{mj} - A_s^{mj})z_iz_j \\ + r\Big(\big(B^{li}(A_u^{lj} - A_s^{lj}) + (A_u^{il} - A_s^{il})B^{jl}\big)z_iz_j + 2\mathrm{tr}\big(Q(A_u - A_s)\big)\Big).\end{aligned}$$

Задамо A_s і A_u як окремі розв'язки матричних рівнянь Ляпунова

$$A_sB + B^*A_s = \Pi_s^*\Pi_s, \qquad A_uB + B^*A_u = -\Pi_u^*\Pi_u, \tag{2.1.64}$$

які задаються формулами

$$A_s = \int_{-\infty}^{0} e^{B^*t}\Pi_s^*\Pi_s e^{Bt}\,\mathrm{d}t, \qquad A_u = \int_{0}^{\infty} e^{B^*t}\Pi_u^*\Pi_u e^{Bt}\,\mathrm{d}t, \tag{2.1.65}$$

і виберемо достатньо мале $r_0 > 0$ таким чином щоб матриця

$$\begin{aligned} &4r(A_u - A_s)Q(A_u - A_s) + (A_u - A_s)B + B^*(A_u - A_s) \\ &\qquad = 4r(A_u - A_s)Q(A_u - A_s) - \Pi_s^*\Pi_s - \Pi_u^*\Pi_u \end{aligned}$$

була від'ємно визначеною для $0 < r < r_0$. Тоді $\tilde{C}(z) \to -\infty$ при $|z| \to \infty$. Залишається помітити, що для функції $w(z)$ яка задовольняє (2.1.62) можна вибрати настільки мале $r > 0$ щоб $\tilde{w}(z) \to 0$ при $|z| \to \infty$. Тут використано той факт, що нерівності $A_s \le \gamma_1\Pi_s^*\Pi_s$ і $A_u \ge \gamma_2\Pi_u^*\Pi_u$ є вірними для деяких $\gamma_1, \gamma_2 > 0$. $\square$

Оскільки $\lambda_\varepsilon/\varepsilon \to \sigma_0$ і функції $w_\varepsilon(z) = u_\varepsilon(\xi + \sqrt{\varepsilon}z)$ збігаються рівномірно на компактах до додатного розв'язку w_0 рівняння (2.1.61) з $\sigma = \sigma_0$, то щоб застосувати Лему 2.1.16 необхідно тільки встановити (2.1.62). З цією метою побудуємо квадратичну функцію $\Phi_\mu^\nu(x)$, що задовольняє

$$\overline{H}(\nabla\Phi_\mu^\nu(x), x) \le -\delta|x-\xi|^2 \qquad \text{в околі } U(\xi) \text{ точки } \xi, \tag{2.1.66}$$

для деякого $\delta > 0$.

Лема 2.1.17. *Нехай $\phi_s(x) := A_s^{ij}x_ix_j$ і $\phi_u(x) := A_u^{ij}x_ix_j$, де A_s і A_u є розв'язками матричних рівнянь Ляпунова (2.1.64) визначені формулами (2.1.65). Тоді функція*

$$\Phi_\mu^\nu(x) := \mu\phi_s(x-\xi) - \nu\phi_u(x-\xi) \tag{2.1.67}$$

задовольняє (2.1.66) для деякого $\delta > 0$, якщо $0 < \mu$, $\nu < r$ і $r > 0$ є достатньо малим.

Доведення. Маємо, для малих $|x-\xi|$,

$$\begin{aligned}\overline{H}(\nabla\Phi^\nu_\mu(x),x) &\le \overline{H}(0,x)+\frac{\partial\overline{H}}{\partial p_j}(0,x)\frac{\partial\Phi^\nu_\mu}{\partial x_j}(x)+C|\nabla\Phi^\nu_\mu(x)|^2\\ &= -(x_i-\xi_i)\frac{\partial\bar{b}^j}{\partial x_i}(\xi)\frac{\partial\Phi^\nu_\mu}{\partial x_j}(x)+C|\nabla\Phi^\nu_\mu(x)|^2+\bar{o}(|x-\xi|^2)\\ &\le -2(x_i-\xi_i)B^{ji}(\mu A^{lj}_s-\nu A^{lj}_u)(x_l-\xi_l)\\ &\quad + C_1(\mu^2|\Pi^*_s(x-\xi)|^2+\nu^2|\Pi^*_u(x-\xi)|^2)+\bar{o}(|x-\xi|^2). \quad (2.1.68)\end{aligned}$$

Зазначимо, що $(\mu A_s-\nu A_u)B+B^*(\mu A_s-\nu A_u)=\mu\Pi^*_s\Pi_s+\nu\Pi^*_u\Pi_u$, отже перший член в правій частині (2.1.68) можна звписати як $-\mu|\Pi_s(x-\xi)|^2-\nu|\Pi_u(x-\xi)|^2$. Таким чином нерівність (2.1.66) є вірною якщо $0<\mu<1/C_1$ і $0<\nu<1/C_1$. $\square$

Лема 2.1.18. *Нехай $\Phi^\nu_\mu(x)$ і μ, ν є такими як в Лемі 2.1.17, тоді $W(x)>\Phi^\nu_\mu(x)$ в $\overline{U'(\xi)}\setminus\{\xi\}$, де $U'(\xi)\subset U(\xi)$ – деякий окіл точки ξ.*

Доведення. Оскільки ξ є вагомою точкою, маємо $W(x)=d_{\overline{H}}(x,\xi)$ в деяому околі $U(\xi)$ точки ξ. Згідно з представленням (2.1.16), існує послідовність чисел $\{t^n>0\}_{n=1}^\infty$ і абсолютно неперервних траєкторій $\eta^n:[0,t^n]\to\overline{\Omega}$ які задовольняють крайовим умовам $\eta^n(0)=\xi$, $\eta^n(t^n)=x$, і є такими, що

$$d_{\overline{H}}(x,\xi)=\lim_{n\to\infty}\int_0^{t^n}\overline{L}(\dot\eta^n,\eta^n)\,\mathrm{d}\tau.$$

Тоді існує окіл $U'(\xi)\subset U(\xi)$, такий що для достатньо великих n і всіх $x\in U'(\xi)$ маємо $\{\eta^n(\tau)\,;\,\tau\in[0,t^n]\}\subset U(\xi)$. Дійсно, якщо припустити що такого околу не існує, тоді знайдуться послідовності точок $x^n\to\xi$ і кривих $\eta^n(t)$, такі що

- η^n поєднює ξ і x^n, тобто $\eta^n(0)=\xi$, $\eta^n(t^n)=x^n$;
- $\eta^n(\tau^n)\in\partial U(\xi)$ для деякого $\tau^n\in(0,t^n)$;
- $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{t^n}\overline{L}(\dot\eta^n,\eta^n)\,\mathrm{d}\tau=0$.

Покладемо $y^n:=\eta^n(\tau^n)\in\partial U(\xi)$, тоді з неперервності функції відстані маємо $\lim\limits_{n\to\infty}S_{\overline{H}}(y^n,\xi)=0$, де $S_{\overline{H}}(y^n,\xi)=d_{\overline{H}}(y^n,\xi)+d_{\overline{H}}(\xi,y^n)$ – симеризована відстань. Якщо виділити збіжну підпослідовність $y^n\to y\in\partial U(\xi)$, то знаходимо

$S_{\overline{H}}(y,\xi)=0$. Отже $y\in\mathcal{A}_{\overline{H}}$. Таким чином точки множини Обрі лежать на межі кожного (достатньо малого) околу ξ, тобто ξ не може бути ізольованою точкою $\mathcal{A}_{\overline{H}}$. Але це протирічить (2.1.23).

Тепер, користуючись (2.1.66) отримуємо, що для кожної точки $x\in U'(\xi)$

$$\Phi^\nu_\mu(x)=\int_0^{t^n}\nabla\Phi^\nu_\mu(\eta^n)\cdot\dot\eta^n\,\mathrm{d}\tau=\int_0^{t^n}\big(\nabla\Phi^\nu_\mu(\eta^n)\cdot\dot\eta^n-\overline{H}(\nabla\Phi^\nu_\mu(\eta^n),\eta^n)\big)\,\mathrm{d}\tau$$
$$+\int_0^{t^n}\overline{H}(\nabla\Phi^\nu_\mu(\eta^n),\eta^n)\,\mathrm{d}\tau\le\int_0^{t^n}\overline{L}(\dot\eta^n,\eta^n)\,\mathrm{d}\tau,$$

коли n є достатньо великим. Таким чином $\Phi^\nu_\mu\le W$ в $U'(\xi)$. Крім того, якщо $\Phi^\nu_\mu=W$ в точці $x_0\in U'(\xi)$ тоді x_0 є локальним мінімумом $W-\Phi^\nu_\mu$, звідки $\overline{H}(\nabla\Phi^\nu_\mu(x_0),x_0)\ge 0$ оскільки W є в'язкісним розв'язком рівняння $\overline{H}(\nabla W(x),x)=0$ в Ω. Тоді внаслідок (2.1.66) маємо $x_0=\xi$, тобто $\Phi^\nu_\mu<W$ в $U'(\xi)\setminus\{\xi\}$. $\square$

Для завершення доведення (2.1.62) побудуємо тестову функцію $\Psi_\varepsilon(x)$ вигляду $\Psi_\varepsilon(x)=\Phi^\nu_\mu(x)+\varepsilon\tilde\theta_\varepsilon(x,x/\varepsilon)$, таку що

$$-\varepsilon a^{ij}(x,x/\varepsilon)\frac{\partial^2\Psi_\varepsilon}{\partial x_i\partial x_j}+H\big(\nabla\Psi_\varepsilon(x),x,x/\varepsilon\big)\le\overline{H}(\nabla\Phi^\nu_\mu(x),x)+C\varepsilon\qquad\text{в } U'(\xi).\tag{2.1.69}$$

Для цього, спочатку припустимо, що розв'язок $\vartheta(p,x,y)$ рівняння (2.1.9), нормалізований рівністю $\int_Y\vartheta(p,x,y)\mathrm{d}y=1$, є достатньо гладким, і покладемо $\tilde\theta_\varepsilon(x,y)=\theta\big(\nabla\Phi^\nu_\mu(x),x,y\big)$, де $\theta(p,x,y)=\log\vartheta(p,x,y)$. Тоді, оскільки

$$-a^{ij}(x,y)\frac{\partial^2\theta(p,x,y)}{\partial y_i\partial y_j}+H\big(p+\nabla_y\theta(p,x,y),x,y\big)=\overline{H}(p,x),$$

(2.1.69) є очевидним. У цьому випадку $\tilde\theta_\varepsilon(x,y)$ не залежить від ε. В загальному випадку, завдяки C^1-регулярності коефіцієнтів $a^{ij}(x,y)$ і $b^j(x,y)$, всі перші та другі частинні похідні $\vartheta(p,x,y)$ існують та є неперервними на $\mathbb{R}^N\times\overline{\Omega}\times\mathbb{R}^N$, за винятком (можливо) $\partial^2\vartheta(p,x,y)/\partial x_i\partial x_j$. Для досягнення бажаної регулярності $\tilde\theta_\varepsilon(x,y)$ покладемо

$$\tilde\theta_\varepsilon(x,y)=\int\varphi_\varepsilon(x-x')\theta\big(\nabla\Phi^\nu_\mu(x),x',y\big)\mathrm{d}x',$$

де $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-N}\varphi(x/\varepsilon)$, з невід'ємною функцією $\varphi(x)$ класу $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, такою що $\int \varphi(x)\,\mathrm{d}x = 1$. Тоді маємо

$$a^{ij}(x, x/\varepsilon)\Big(\frac{\partial^2\theta}{\partial y_i \partial y_j}\big(\nabla\Phi^\nu_\mu(x), x, x/\varepsilon\big) - \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\big(\tilde\theta_\varepsilon(x, x/\varepsilon)\big)\Big) \le \frac{C}{\varepsilon}$$

і $\big|\nabla_y\theta\big(\nabla\Phi^\nu_\mu(x), x, x/\varepsilon\big) - \nabla\big(\tilde\theta_\varepsilon(x, x/\varepsilon)\big)\big| \le C$. Таким чином $\tilde\theta_\varepsilon(x, y)$ дійсно задовольняє (2.1.69).

З (2.1.69) і (2.1.66) випливає, що

$$-\varepsilon a^{ij}(x, x/\varepsilon)\frac{\partial^2\Psi_\varepsilon}{\partial x_i \partial x_j} + H\big(\nabla\Psi_\varepsilon(x), x, x/\varepsilon\big) \le -\delta|x-\xi|^2 + C\varepsilon \qquad \text{в } U'(\xi). \quad (2.1.70)$$

Розглянемо тепер функцію $W_\varepsilon - \Psi_\varepsilon$. Згідно з Лемою 2.1.18 маємо $W_\varepsilon > \Psi_\varepsilon$ на $\partial U'(\xi)$ для достатньо малих ε, отже або $W_\varepsilon \ge \Psi_\varepsilon$ в $U'(\xi)$ або $W_\varepsilon - \Psi_\varepsilon$ досягає свій від'ємний мінімум в $U'(\xi)$ в точці x_ε. В останньому випадку $\nabla W_\varepsilon(x_\varepsilon) = \nabla\Psi_\varepsilon(x_\varepsilon)$ і

$$a^{ij}(x_\varepsilon, x_\varepsilon/\varepsilon)\frac{\partial^2 W_\varepsilon}{\partial x_i \partial x_j}(x_\varepsilon) \ge a^{ij}(x_\varepsilon, x_\varepsilon/\varepsilon)\frac{\partial^2 \Psi_\varepsilon}{\partial x_i \partial x_j}(x_\varepsilon).$$

Отже

$$\begin{aligned}\lambda_\varepsilon &= -\varepsilon a^{ij}(x_\varepsilon, x_\varepsilon/\varepsilon)\frac{\partial^2 W_\varepsilon}{\partial x_i \partial x_j}(x_\varepsilon) + H\big(\nabla W_\varepsilon(x_\varepsilon), x_\varepsilon, x_\varepsilon/\varepsilon\big) \\ &\le -\varepsilon a^{ij}(x_\varepsilon, x_\varepsilon/\varepsilon)\frac{\partial^2 \Psi_\varepsilon}{\partial x_i \partial x_j}(x_\varepsilon) + H\big(\nabla \Psi_\varepsilon(x_\varepsilon), x_\varepsilon, x_\varepsilon/\varepsilon\big) \le -\delta|x_\varepsilon - \xi|^2 + C\varepsilon.\end{aligned}$$

Таким чином, або $W_\varepsilon > \Psi_\varepsilon$ в $U'(\xi)$ або $W_\varepsilon \ge \Psi_\varepsilon + W_\varepsilon(x_\varepsilon) - \Psi_\varepsilon(x_\varepsilon)$ в $U'(\xi)$ і x_ε задовольняє $|x_\varepsilon - \xi| \le C\sqrt{\varepsilon}$. В обох випадках маємо оцінку $W_\varepsilon(x) \ge \Phi^\nu_\mu(x) + W_\varepsilon(\tilde x_\varepsilon) - \beta\varepsilon$, де $\tilde x_\varepsilon$ є або ξ або x_ε (нагадаємо, що фунції u_ε нормалізовані рівністю $u_\varepsilon(\xi) = 1$, тобто $W_\varepsilon(\xi) = 0$). Тоді, скориставшись заміною $z = (x - \xi)/\sqrt{\varepsilon}$ і визначенням Φ^ν_μ в (2.1.67), отримуємо

$$w_\varepsilon(z) \le C w_\varepsilon(z_\varepsilon) e^{-\mu\phi_s(z) + \nu\phi_u(z)} \qquad \text{in } (U(\xi) - \xi)/\sqrt{\varepsilon},$$

де $z_\varepsilon = (\tilde x_\varepsilon - \xi)/\sqrt{\varepsilon}$, отже $|z_\varepsilon| \le C$. Помітимо, що точка z_ε залишається в деякому фіксованому компакті при $\varepsilon \to 0$, тоді $w_\varepsilon(z_\varepsilon) \le C$ і в границі $\varepsilon \to 0$ отримуємо

$$w(z) \le C e^{-\mu\phi_s(z) + \nu\phi_u(z)} \qquad \text{в } \mathbb{R}^N.$$

Залишається зазначити, що $\phi_s(z) \geq \gamma_3|\Pi_s z|^2$ і $\phi_u(z) \leq \gamma_4|\Pi_u z|^2$ для деяких $\gamma_3, \gamma_4 > 0$. Таким чином $w(z)$ дійсно задовольняє (2.1.62), і застосування Леми 2.1.16 разом з пунктом (iii) Твердження G.1 (див. Додаток G) завершує доведення Теореми 2.1.15. $\square$

Доведення Теореми 2.1.4. З Теорем 2.1.13, 2.1.15 і того факту, що множина вагомих точок є непустою, випливає формула (2.1.24). Більш того маємо єдиність граничної адитивної власної функції $W(x)$ за умовою, що максимум в (2.1.24) досягається в точно одній точці $\xi = \overline{\xi}$ множини Обрі. Дійсно, з точністю до підпослідовності, функції W_ε збігаються рівномірно (на компактах в Ω) до адитивної власної функції $W(x)$; тут $W_\varepsilon = -\varepsilon \log u_\varepsilon$ і через u_ε позначено власні функції нормалізовані рівністю (2.1.7). Згідно з Теоремою 2.1.15 єдина вагома точка (асоційована з вибраною підпослідовністю) є $\overline{\xi}$. Таким чином $\overline{\xi}$ є єдиним мінімальним єлементом $\mathcal{A}_{\overline{H}}$ відносно відношення порядку $\preceq$ визначеного в (2.1.60); отже він є найменшим елементом $\mathcal{A}_{\overline{H}}$, тобто $\overline{\xi} \preceq \xi$ для кожного $\xi \in \mathcal{A}_{\overline{H}}$. Це означає, що $W(\xi) = W(\overline{\xi}) + d_{\overline{H}}(\xi, \overline{\xi})$ для всіх $\xi \in \mathcal{A}_{\overline{H}}$, звідки $W(x) = d_{\overline{H}}(x, \overline{\xi}) + W(\overline{\xi})$. Для завершення доведення Твердження (i) Теореми 2.1.4 достаньо встановити, що $W(\overline{\xi}) = 0$, але це випливає з Наслідку 3.2.55. Що стосується Твердження (ii) Тореми 2.1.4, то його адресовано в Теоремі 2.1.15. $\square$

2.1.8 Сингулярно збурені рівняння з молодшими членами одного порядку

Теорему 2.1.4, де йдеться про рівняння конвеції-дифузії без дисипації, нескладно узагальнити на рівняння вигляду

$$\varepsilon\, a^{ij}\Big(x, \frac{x}{\varepsilon}\Big) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + b^j\Big(x, \frac{x}{\varepsilon}\Big) \frac{\partial u}{\partial x_j} + c\Big(x, \frac{x}{\varepsilon}\Big) u = \lambda u \qquad \text{в } \Omega \tag{2.1.71}$$

з крайовою умовою Діріхле $u = 0$ на $\partial\Omega$, де $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ – гладка обмежена область. Більш того, якщо ефективне рівняння Гамільтона-Якобі $\overline{H}(\nabla W, x) = \lambda_{\overline{H}}$ має достатньо гладкий розв'язок $\overline{W}(x)$, можна шукати власні функції і власні значення задачі (2.1.2) (з $\alpha = 1$) у вигляді $e^{-\overline{W}(x)/\varepsilon}\vartheta(\nabla\overline{W}(x), x, x/\varepsilon)u_\varepsilon$ і $\lambda_{\overline{H}} + \varepsilon\lambda_\varepsilon$, відповідно, де $\vartheta(p, x, y)$ – розв'язки коміркових задач (2.1.9). Тоді задача (2.1.2) зводиться до (2.1.71), з точністю до диференціального оператора першого порядку з коефіцієнтами порядку ε, який у стійких випадках (що розглянуто нижче) не впливає на головні члени асимтотик.

Будемо припускати, що коефіцієнти в (2.1.71) є гладкими функціями (класу $C^2(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^N)$) Y-періодичними відносно другої змінної, де $Y = (0, 1)^N$ – комірка періодичності; також a^{ij} мають симетрію $a^{ij} = a^{ji}$ і задовольняють умову рівномірної еліптичності. Вивчається асимптотична поведінка першого власного значення λ_ε і відповідної власної функції u_ε, $0 < u_\varepsilon \le \max u_\varepsilon = 1$ в Ω, при $\varepsilon \to 0$. Міркування наведені в Підрозділах 2.1.4–2.1.5 адаптуються майже без змін. А саме, покладемо $W_\varepsilon := -\varepsilon \log u_\varepsilon$, тоді маємо рівняння

$$-\varepsilon a^{ij}\Big(x, \frac{x}{\varepsilon}\Big)\frac{\partial^2 W_\varepsilon}{\partial x_i \partial x_j} + H(\nabla W_\varepsilon, x, x/\varepsilon) + \varepsilon c\Big(x, \frac{x}{\varepsilon}\Big) = \varepsilon\lambda_\varepsilon, \tag{2.1.72}$$

де гамільтоніан H задається формулою $H(p, x, y) = a^{ij}(x, y)p_i p_j - b^j(x, y)p_j$. Тоді $\varepsilon\lambda_\varepsilon \to \lambda_{\overline{H}}$, де $\lambda = \lambda_{\overline{H}}$ – адитивне власне значення задачі (2.1.4)–(2.1.5) з ефективним гамільтоніаном $\overline{H}$, що визначається комірковою задачею (2.1.9). Далі, як і в Підрозділі 2.1.2, розглянемо випадок, коли $\lambda_{\overline{H}} = 0$, тобто множина Обрі $\mathcal{A}_{\overline{H}}$ є непустою. Проте структурні припущення відносно $\mathcal{A}_{\overline{H}}$ будуть тепер слабкішими; конкретно, на $\mathcal{A}_{\overline{H}}$ накладається наступна умова:

множина Обрі $\mathcal{A}_{\overline{H}}$ складається з скінченого числа *гіперболічних нерухомих точок і граничних циклів* рівняння $\dot{x} = -\overline{b}(x)$, що лежать у внутрішній частині Ω, (2.1.73)

де компоненти вектора ефективного знесення $\overline{b}(x)$ визначаються в (2.1.20) через Y-періодичний розв'язок $\theta^*(x, y)$ рівняння (2.1.21) нормалізований рівністю

$$\int_Y \theta^*(x, y)\,\mathrm{d}y = 1. \tag{2.1.74}$$

Зазначимо, що, на відміну від Теореми 2.1.4 Підрозділу 2.1.2, в $\mathcal{A}_{\overline{H}}$ крім нерухомих точок допускаються також граничні цикли.

Теорема 2.1.19. *Нехай коефіцієнти рівняння (2.1.71) задовольняють означеним раніше припущенням і є такими, що множина Обрі $\mathcal{A}_{\overline{H}} \neq \emptyset$ має структуру описану в (2.1.73), тоді (i)*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lambda_\varepsilon = \overline{\sigma} := \max\Big\{\sigma_1(\xi)+\sigma_2(\xi); \xi\in\mathcal{A}_{\overline{H}}\Big\}, \tag{2.1.75}$$

де $\sigma_1(\xi)$ є або сумою відємних дійсних частин власних значень матриці

$$\Big(-\frac{\partial \overline{b}^i}{\partial x_j}(\xi)\Big)_{i,j=\overline{1,N}}$$

якщо ξ є нульом $\overline{b}$ (нерухомою точкою рівняння $\dot{x} = -\overline{b}(x)$), або

$$\sigma_1(\xi) = \frac{1}{P}\sum_{|\Lambda_k(\xi)|<1}\log|\Lambda_k(\xi)| \tag{2.1.76}$$

якщо ξ лежить на граничному циклі, де $P>0$ – період циклу, і $\Lambda_k(\xi)$ – власні значення лінеарізованого відображення Пуанкаре які задовольняють нерівність $|\Lambda_k(\xi)|<1$; в (2.1.75)

$$\sigma_2(\xi) = \int_Y c(\xi,y)\theta^*(\xi,y)\,\mathrm{d}y$$

якщо ξ є фіксованою точкою, або

$$\sigma_2(\xi) = \frac{1}{P}\int_0^P\int_Y c\big(x(t),y\big)\theta^*\big(x(t),y\big)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t \quad (\dot{x} = -\overline{b}(x),\ x(0)=\xi),$$

якщо ξ лежить на граничному циклі.

(ii) Крім того, якщо максимум в (2.1.75) досягається на точно одній зв'язній компоненті множини Обрі (нерухомій точці або граничному циклі), тоді функції W_ε збігаються рівномірно на компактах в Ω до максимального в'язкісного розв'язку задачі (2.1.4)–(2.1.5) *з $\lambda_{\overline{H}} = 0$, що дорівнює нулю на згаданій компоненті множини Обрі.*

Зауваження 2.1.20. В Теоремі 2.1.19 $\Lambda_k(\xi)$ позначають власні значення лінеарізованого відображення Пуанкаре, що відповідає точці ξ на граничному циклі і трансверсальній гіперплоскості яка проходить через цю точку. Добре відомо, що власні значення лінеарізованого відображення Пуанкаре не залежать ні від окремого вибору ξ ні від вибору трансверсальної гіперплоскості. Також зазначимо, що умова гіперболічності, накладена на граничні цикли означає, що означені власні значення не лежать на одиничному колі.

Хоча схема доведення Теореми 2.1.19 є близькою до Теореми 2.1.4, присутність граничних циклів потребує нових методів. Зокрема, для того щоб провести аналіз власних функцій в околі граничних циклів штучно вводяться рухомі координати, що веде до параболічних задач на власні значення для отриманих операторів. Аналіз останніх задач потребує детального вивчення періодичних спектральних задач для параболічних операторів Орнштейна-Уленбека у всьому просторі.

2.1.9 Локальний аналіз в рухомих координатах

У цьому підрозділі знаходиться оцінка знизу для першого власного значення λ_ε шляхом локального аналізу в околі зв'язних компонент множини Обрі $\mathcal{A}_{\overline{H}}$. Нагадаємо, що ці компоненти є або нерухомі точки або граничні цикли рівняння $\dot{x} = -\overline{b}(x)$. Оскільки міркування для нерухомих точок є такими самими як в доведенні Теореми 2.1.4, основну увагу буде присвячено граничним циклам.

З міркувань які будуть зрозумілими пізніше, помножимо рівняння(2.1.71) на $\theta^*(x, x/\varepsilon) > 0$, так що воно набуває вигляд

$$\mathcal{L}_\varepsilon u = \lambda\theta^*(x, x/\varepsilon)u, \tag{2.1.77}$$

де коефіцієнти оператора $\mathcal{L}_\varepsilon$, для яких збережемо позначення $a^{ij}(x, x/\varepsilon)$, $b^j(x, x/\varepsilon)$ і $c(x, x/\varepsilon)$, задовольняють тепер такому рівнянню

$$\frac{\partial}{\partial y_j}\Big(\frac{\partial}{\partial y_i}a^{ij}(x, y) - b^j(x, y)\Big) = 0. \tag{2.1.78}$$

Зазначимо також, що внаслідок (2.1.20) маємо

$$\overline{b}^j(x) = \int_Y b^j(x,y)\,\mathrm{d}y. \tag{2.1.79}$$

Припустимо, що рівняння $\dot{x} = -\overline{b}(x)$ має граничний цикл $\mathcal{C} \subset \Omega$ з (мінімальним) періодом $P > 0$. Зафіксуємо точку $\xi_0 \in \mathcal{C}$, тоді розв'язок $\xi(t)$ задачі

$$\dot{\xi}(t) = -\overline{b}(\xi(t)), \qquad \xi(0) = \xi_0, \tag{2.1.80}$$

є P-періодичним $\xi(t+P) = \xi(t)$, і $\mathcal{C} = \bigcup_{t\in[0,P)}\{\xi(t)\}$.

Для виведення оцінки знизу для першого власного значення λ_ε оператору $\mathcal{L}_\varepsilon$ розглянемо, для фіксованого $\delta > 0$, допоміжний оператор

$$\tilde{\mathcal{L}}_\varepsilon u = \varepsilon\, a^{ij}\Big(x, \frac{x}{\varepsilon}\Big)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + b^j\Big(x, \frac{x}{\varepsilon}\Big)\frac{\partial u}{\partial x_j} + c\Big(x, \frac{x}{\varepsilon}\Big)u - \delta\frac{\rho(x)}{\varepsilon}u \qquad \text{в } \Omega \tag{2.1.81}$$

з умовою Діріхле $u = 0$ на $\partial\Omega$, де ρ – гладка функція, така що $\rho > 0$ в $\overline{\Omega}\setminus\mathcal{C}$, і $\rho(x) = \mathrm{dist}^2(x,\mathcal{C})$ в околі $\mathcal{C}$. Ідея введення $\tilde{\mathcal{L}}_\varepsilon$ полягає в переході до аналізу власної функції, яка, завдяки останньому пеналізуючому члену, напевно локалізована в околі $\mathcal{C}$.

Нехай $\tilde{\lambda}_\varepsilon$ – перше власне значення задачі

$$\tilde{\mathcal{L}}_\varepsilon u = \lambda\theta^*(x, x/\varepsilon)u. \tag{2.1.82}$$

Оскільки $\tilde{\mathcal{L}}_\varepsilon\phi(x) \le \mathcal{L}_\varepsilon\phi(x)$ для кожної функції $\phi > 0$, маємо

$$\tilde{\lambda}_\varepsilon \le \lambda_\varepsilon, \tag{2.1.83}$$

завдяки відомим представленням для власних значень (див. [169]),

$$\tilde{\lambda}_\varepsilon = \inf_\phi \sup_{x\in\Omega} \tilde{\mathcal{L}}_\varepsilon\phi(x)/\big(\theta^*(x,x/\varepsilon)\phi(x)\big) \text{ і } \lambda_\varepsilon = \inf_\phi \sup_{x\in\Omega} \mathcal{L}_\varepsilon\phi(x)/\big(\theta^*(x,x/\varepsilon)\phi(x)\big),$$

де інфімуми беруться в класі функцій $\phi \in C^2(\overline{\Omega})$, $\phi > 0$ в Ω і $\phi = 0$ на $\partial\Omega$.

Нехай $\tilde{u}_\varepsilon$ – перша власна функція (2.1.82) нормалізована рівністю $\tilde{u}_\varepsilon(\xi_0) = 1$. Перейдемо до координатної системи з рухаючимся центром: $x' = x - \xi(t)$. Ця заміна змінних перетворює (2.1.82) на параболічне рівняння для $\tilde{U}_\varepsilon(t,x') := \tilde{u}_\varepsilon(x'+\xi(t))$,

$$-\frac{\partial \tilde{U}_\varepsilon}{\partial t} + \varepsilon a^{ij}_{\xi,\frac{\xi}{\varepsilon}}\Big(x', \frac{x'}{\varepsilon}\Big)\frac{\partial^2 \tilde{U}_\varepsilon}{\partial x'_i \partial x'_j} + b^j_{\xi,\frac{\xi}{\varepsilon}}\Big(x', \frac{x'}{\varepsilon}\Big)\frac{\partial \tilde{U}_\varepsilon}{\partial x'_j}$$
$$- \overline{b}^j\big(\xi(t)\big)\frac{\partial \tilde{U}_\varepsilon}{\partial x'_j} + \Big(c_{\xi,\frac{\xi}{\varepsilon}}\Big(x', \frac{x'}{\varepsilon}\Big) - \frac{\delta}{\varepsilon}\rho\big(\xi(t)+x'\big)\Big)\tilde{U}_\varepsilon = \tilde{\lambda}_\varepsilon \theta^*_{\xi,\frac{\xi}{\varepsilon}}\Big(x', \frac{x'}{\varepsilon}\Big)\tilde{U}_\varepsilon, \tag{2.1.84}$$

$x' \in \Omega - \xi(t)$, де використано поточкову рівність

$$\frac{\partial \tilde{U}_\varepsilon}{\partial t} = -\overline{b}^j\big(\xi(t)\big)\frac{\partial \tilde{U}_\varepsilon}{\partial x'_j} \tag{2.1.85}$$

(остання рівність випливає з визначення $\tilde{U}_\varepsilon(t,x')$ і (2.1.80)). Індекс "$\xi, \frac{\xi}{\varepsilon}$"в (2.1.84) (і нижче) позначає ссув на $\xi(t)$ відносно x і на $\xi(t)/\varepsilon$ відносно y. Введемо Y-періодичні (відносно y) розв'язки T^{ij} системи

$$\frac{\partial T^{ij}}{\partial y_i}(x,y) = b^j(x,y) - \overline{b}^j(x) - \frac{\partial a^{ij}}{\partial y_i}(x,y), \qquad T^{ij} = -T^{ji}. \tag{2.1.86}$$

Внаслідок (2.1.78) і (2.1.79) ця система має розв'язки T^{ij} які є неперервними і мають обмежені частинні похідні $\partial T^{ij}/\partial x_k$. Введемо також функції $q^{ij}(x,y) = a^{ij}(x,y) + T^{ij}(x,y)$, $\tilde{q}^j = \partial q^{ij}/\partial x_i$, тоді завдяки (2.1.86) можна переписати перший рядок (2.1.84) у вигляді

$$-\frac{\partial \tilde{U}_\varepsilon}{\partial t} + \varepsilon\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(q^{ij}_{\xi,\frac{\xi}{\varepsilon}}\Big(x', \frac{x'}{\varepsilon}\Big)\frac{\partial \tilde{U}_\varepsilon}{\partial x'_j}\Big) + \overline{b}^j\big(x'+\xi(t)\big)\frac{\partial \tilde{U}_\varepsilon}{\partial x'_j} - \varepsilon\tilde{q}^j_{\xi,\frac{\xi}{\varepsilon}}\Big(x', \frac{x'}{\varepsilon}\Big)\frac{\partial \tilde{U}_\varepsilon}{\partial x'_j}.$$

Покладемо $z' = x'/\sqrt{\varepsilon}$ і $\tilde{v}_\varepsilon = \tilde{U}_\varepsilon(t, \sqrt{\varepsilon}z')$. Тоді маємо

$$-\frac{\partial \tilde{v}_\varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z'_i}\Big(a^{ij}_\varepsilon(t,z')\frac{\partial \tilde{v}_\varepsilon}{\partial z'_j}\Big) + h^j_\varepsilon(t,z')\frac{\partial \tilde{v}_\varepsilon}{\partial z'_j}$$
$$+\Big(c_{\xi,\frac{\xi}{\varepsilon}}\Big(\sqrt{\varepsilon}z', \frac{z'}{\sqrt{\varepsilon}}\Big) - \delta\rho_\varepsilon(t,z')\Big)\tilde{v}_\varepsilon = \tilde{\lambda}_\varepsilon \theta^*_{\xi,\frac{\xi}{\varepsilon}}\Big(\sqrt{\varepsilon}z', \frac{z'}{\sqrt{\varepsilon}}\Big)\tilde{v}_\varepsilon,\ z' \in \frac{\Omega - \xi(t)}{\sqrt{\varepsilon}}, \tag{2.1.87}$$

з

$$a^{ij}_\varepsilon(t,z') = a^{ij}\big(\xi(t)+\sqrt{\varepsilon}z', \xi(t)/\varepsilon + z'/\sqrt{\varepsilon}\big) + T^{ij}\big(\xi(t)+\sqrt{\varepsilon}z', \xi(t)/\varepsilon + z'/\sqrt{\varepsilon}\big),$$

$$h^j_\varepsilon(t,z') = \frac{\overline{b}^j\big(\sqrt{\varepsilon}z' + \xi(t)\big) - \overline{b}^j\big(\xi(t)\big)}{\sqrt{\varepsilon}} + \sqrt{\varepsilon}\tilde{q}^j_{\xi,\frac{\xi}{\varepsilon}}\Big(\sqrt{\varepsilon}z', \frac{z'}{\sqrt{\varepsilon}}\Big) = z'_i\frac{\partial \overline{b}^j}{\partial x_i}(\xi(t)) + o(1),$$

$$\rho_\varepsilon(t,z') = \frac{1}{\varepsilon}\rho\big(\xi(t) + \sqrt{\varepsilon}z'\big) = \varrho^2(t,z') + o(1);$$

тут $\varrho(t,z')$ – відстань від точки z' до лінії $\ell(t) = \{z' = \alpha\overline{b}(\xi(t))\,;\, \alpha \in \mathbb{R}\}$, і $o(1)$ позначає функцію, яка прямує до нуля, при $\varepsilon \to 0$ рівномірно відносно $t \in [0,P)$ і z' на кожному компакті K.

Лема 2.1.21. *Перше власне значення λ_ε задовольняє оцінку*

$$-C \le \lambda_\varepsilon \le \max\big\{c(x,y)\,;\, x \in \overline{\Omega},\, y \in \overline{Y}\big\}$$

зі сталою $C > 0$, що не залежить від ε.

Доведення. Оцінку зверху для λ_ε неважко отримати за допомогою принципу максимуму.

Доведення оцінки знизу для $\tilde{\lambda}_\varepsilon$ базується на оцінках Аронсона [19]. Зазначимо, що коефіцієнти в (2.1.87) є рівномірно обмеженими, член з старшими похідними є рівномірно еліптичним, і для всіх достатньо малих ε область $(\Omega - \xi(t))/\sqrt{\varepsilon}$ містить кулю $B_2 = \{z'; |z'| < 2\}$. Введемо допоміжну функцію $g_\varepsilon(t,z')$ яка є розв'язком наступної параболічної задачі:

$$-\frac{\partial g_\varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z'_i}\Big(a^{ij}_\varepsilon(t,z')\frac{\partial g_\varepsilon}{\partial z'_j}\Big) + h^j_\varepsilon(t,z')\frac{\partial g_\varepsilon}{\partial z'_j} + \Big(c_{\xi,\frac{\xi}{\varepsilon}}\Big(\sqrt{\varepsilon}z', \frac{z'}{\sqrt{\varepsilon}}\Big) - \delta\rho_\varepsilon(t,z')\Big)g_\varepsilon = 0 \quad \text{в } (0,+\infty)\times B_2, \tag{2.1.88}$$

$$g_\varepsilon(0,z') = \tilde{w}_\varepsilon(0,z'), \qquad g_\varepsilon = 0 \quad \text{на } (0,+\infty)\times\partial B_2.$$

Тоді

$$f_\varepsilon := g_\varepsilon(t,z') - \exp\big(t\,\max\big(\tilde{\lambda}_\varepsilon\theta^* - c\big)\big)\tilde{w}_\varepsilon(t,z') \le 0.$$

Дійсно, $f_\varepsilon(0,z') = 0$ в B_2 і $f_\varepsilon(t,z') < 0$ на ∂B_2 для $t > 0$, разом з цим

$$\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z'_i}\Big(a^{ij}_\varepsilon(t,z')\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial z'_j}\Big) - h^j_\varepsilon(t,z')\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial z'_j} + \Big(\delta\rho_\varepsilon(t,z') - c_{\xi,\frac{\xi}{\varepsilon}}\Big(\sqrt{\varepsilon}z', \frac{z'}{\sqrt{\varepsilon}}\Big)\Big)f_\varepsilon \le 0$$

в $(0,+\infty)\times B_2$. За допомогою принципу максимума неважко переконатись, що $f_\varepsilon \le 0$. З іншого боку, застосовуючи оцінки Аронсона до (2.1.88), отримуємо

$$\min\{g_\varepsilon(P,z');\ |z'|\le 1\} \ge M' \min\{g_\varepsilon(0,z');\ |z'|\le 1\}$$

з $M'>0$, що не залежить від ε. Таким чином, завдяки P-періодичності $v_\varepsilon(t,z')$ відносно t, маємо $\exp\big(\tilde\lambda_\varepsilon(\min\theta^*)P\big) \ge M'$ or $\tilde\lambda_\varepsilon \ge \log M'/\big(P\min\theta^*\big)$. □

З Леми 2.1.21 випливає, що, з точністю до підпослідовності, $\tilde\lambda_\varepsilon \to \tilde\lambda$. Тоді, за допомогою параболічних оцінок, одержуємо, що, можливо після виділення ще однієї підпослідовності, $\tilde v_\varepsilon \to \tilde v$ в $C([0,P]\times K)$ і слабко в $L^2((0,P);H^1(K))$ для кожного компакта K; гранична функція $\tilde v$ є додатною.

Лема 2.1.22. *Функція $\tilde v$ є додатним розв'язком рівняння*

$$-\frac{\partial \tilde v}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial z_i'}\Big(\tilde Q^{ij}(\xi(t))\frac{\partial \tilde v}{\partial z_j'}\Big)+z_i'\frac{\partial \overline{b}^j}{\partial x_i}(\xi(t))\frac{\partial \tilde v}{\partial z_j'}+\Big(\overline{c}(\xi(t))-\delta\varrho^2(t,z')\Big)\tilde v=\tilde\lambda\tilde v,\ z'\in\mathbb{R}^N, \tag{2.1.89}$$

де коефіцієнти $\tilde Q^{ij}(\xi(t))$ є неперервними P-періодичними функціями, матриця $\tilde Q(\xi(t)) = \Big(\tilde Q^{ij}(\xi(t))\Big)_{i,j=\overline{1,N}}$ є симетричною і задовольняє умову рівномірної еліптичності, і

$$\overline{c}(\xi,t)=\int\limits_Y c(\xi,y)\mathrm{d}y.$$

Крім того, функція $\tilde w$ є P-періодичною відносно t, і задовольняє рівняння

$$\overline{b}^j(\xi(t))\frac{\partial \tilde v}{\partial z_j'}=0 \quad \textit{for all } t\in\mathbb{R} \textit{ і } z'\in\mathbb{R}^N. \tag{2.1.90}$$

Доведення. Той факт, що пара $(\tilde\lambda,\tilde w)$ задовольняє (2.1.89) встановлюється за допомогою стандартної техніки усереднення рівнянь з частинними похідними другого порядку. P-періодичність функції $\tilde v(t,z')$ відносно t є очевидною.

Для того щоб вивести співвідношення (2.1.90), заміною змінних в (2.1.85) отримуємо

$$\sqrt{\varepsilon}\frac{\partial \tilde v_\varepsilon}{\partial t}=-\overline{b}^j(\xi(t))\frac{\partial \tilde v_\varepsilon}{\partial z_j'}.$$

Слабка границя в останній рівності дає $\overline{b}^j(\xi(t))\frac{\partial \tilde{v}_\varepsilon}{\partial z'_j} \rightharpoonup 0$ у сенсі узагальнених функцій. Оскільки функція $\tilde{v}$ є C^1-гладкою (внаслідок (2.1.89)) це веде до шуканого співвідношення (2.1.90). □

Рівність (2.1.90) показує, що функція $\tilde{v}$ є сталою уздовж кривих орієнтованих за векторним полем $\overline{b}(\xi(t))$. Тоді доречно ввести декартівські координати $z_1, \ldots, z_{N-1}, \zeta$ таким чином, що $z_1, \ldots, z_{N-1}$ є координатами в гіперплощині ортогональній $\mathcal{C}$ в $\xi(t)$. Ці координати можна вибрати таким чином щоб $(z,\zeta) = \mathcal{T}(t)z'$ з матрицею преxіду $\mathcal{T}(t)$ яка є C^2-гладкою від t. Згідно з (2.1.90), $\tilde{v}(t,z')$ можна представити як функцію $\tilde{V}(t,z)$ в координатах $z_1, \ldots, z_{N-1}$ і (2.1.89) переписується наступним чином

$$-\frac{\partial \tilde{V}}{\partial t} + Q^{ij}(t)\frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial z_i \partial z_j} + z_i B^{ji}(t)\frac{\partial \tilde{V}}{\partial z_j} + \Big(\overline{c}(\xi(t)) - \delta|z|^2\Big)\tilde{V} = \tilde{\lambda}\tilde{V}, \qquad z \in \mathbb{R}^{N-1}, \tag{2.1.91}$$

де

$$B^{ji}(t) = \mathcal{T}^{il}(t)\frac{\partial \overline{b}^k}{\partial x_l}(\xi(t))\,\mathcal{T}^{jk}(t) - \dot{\mathcal{T}}^{il}(t)\mathcal{T}^{jl}(t). \tag{2.1.92}$$

Всі коефіцієнти в (2.1.91) разом з функцією $\tilde{V}$ є P-періодичними відностно t, і Q^{ij} має симетрію $Q^{ij} = Q^{ji}$ і задовольняє умову рівномірної еліптичності.

Зауваження 2.1.23. Лінеаризація рівняння $\dot{x} = -\overline{b}(x)$ навколо $\mathcal{C}$ веде до рівняння $\dot{z}'_i = -\frac{\partial \overline{b}^i}{\partial x_j}(\xi(t))z'_j$. Якщо в останньому рівнянні застосувати перетворення $(z,\zeta) = \mathcal{T}(t)z'$, то в результаті отримуємо $\dot{z} = -B(t)z$.

Зазначимо тепер, що $\tilde{V} > 0$ і $\tilde{V} \leq C$. Остання оцінка випливає з рівномірної обмеженості власних функцій $\tilde{u}_\varepsilon$ задачі (2.1.82). Дійсно, якщо $\tilde{u}_\varepsilon$ досягає (глобальний) максимум в x_ε тоді $\rho(x_\varepsilon) \leq \varepsilon\big(-\tilde{\lambda}_\varepsilon + c\big(x_\varepsilon, \frac{x_\varepsilon}{\varepsilon}\big)\big)/\delta$ і користуючись рівномірною оцінкою для $\tilde{\lambda}_\varepsilon$ отримуємо, що $\mathrm{dist}(x_\varepsilon, \mathcal{C}) \leq C\sqrt{\varepsilon}$. З іншого боку, функції $\tilde{u}_\varepsilon(\xi + \sqrt{\varepsilon}z')$ є обмеженими на компактах, рівномірно відносно $\xi \in \mathcal{C}$ і ε, звідки $\tilde{v} \leq C$. Таким чином $\tilde{V}$ є обмеженим додатним розв'язком (2.1.91). Цей факт дозволяє однозначно ідентіфікувати $\tilde{\lambda}$ і $\tilde{V}$ (з точністю до нормалізації), що буде зроблено в Підрозділі 2.1.10.

Повернемось тепер до рівняння (2.1.77). Якщо нормалізувати власні функції u_ε рівністю $u_\varepsilon(\xi_0) = 1$, тоді викладені вище міркування показують, що, з точністю до підпослідовності, функції $w_\varepsilon(t, z, \zeta) := u_\varepsilon\big(\xi(t) + \sqrt{\varepsilon}(\mathcal{T}(t))^{-1}(z, \zeta)\big)$ збігаються (локально) рівномірно до додатного розв'язку $w(t, z)$ рівняння

$$-\frac{\partial w}{\partial t} + Q^{ij}(t)\frac{\partial^2 w}{\partial z_i \partial z_j} + z_i B^{ji}(t)\frac{\partial w}{\partial z_j} + \overline{c}(\xi(t))w = \lambda w, \qquad z \in \mathbb{R}^{N-1}. \quad (2.1.93)$$

Тут λ є частковою границею власних значень λ_ε. Проте $w(t, z)$ може бути необмеженим розв'язком. Для того щоб ідентіфікувати λ і w потрібно знати асимтотичну поведінку $w(t, z)$ при $|z| \to \infty$. Це питання буде вивчено в Підрозділі 2.1.11.

2.1.10 Параболічні задачі на власні значення, існування і єдність розв'язків

У цьому підрозділі вивчаються задачі на власні значення (2.1.91) і (2.1.93) в класі додатних P-періодичних відносно (часу) t функцій. Почнемо з побудови розвязків спеціального вигляду.

Будемо шукати розв'язок $\tilde{V}$ рівняння (2.1.91) у вигляді $\tilde{V}(t, z) = \exp\big(-\Gamma_\delta^{ij}(t)z_i z_j + \phi_\delta(t)\big)$. Це веде до матричного рівняння Ріккаті

$$-\dot{\Gamma}_\delta = 4\Gamma_\delta Q(t)\Gamma_\delta - \Gamma_\delta B - B^*\Gamma_\delta - \delta I, \quad (2.1.94)$$

і звичайного диференціального рівняння

$$-\dot{\varphi}_\delta - 2\mathrm{tr}\big(Q(t)\Gamma_\delta(t)\big) + \overline{c}(\xi(t)) = \tilde{\lambda}. \quad (2.1.95)$$

Шукаємо симетричний додатно визначений розв'язок Γ_δ, і як Γ_δ так і φ повинні бути P-періодичними.

Оскільки матриця $Q(t)$ є додатно визначеною, то відомо [1, Теорема 5.3.4], що існує максимальний симетричний P-періодичний розв'язок Γ_δ рівняння (2.1.94). Його максимальність розуміється у сенсі квадратичних форм, крім того $\Gamma_\delta \geq \Gamma$

для кожного симетричного P-періодичного розв'язку диференціальної нерівності $-\dot{\Gamma}-\mathcal{R}_\delta(\Gamma)\geq 0$, де $\mathcal{R}_\delta(\Gamma)$ позначає відображення Ріккаті визначене правою частиною (2.1.94) (для відповідності літературі треба в (2.1.94) обернути час). Для доведення нерівності $\Gamma_\delta > 0$ для $\delta > 0$ візьмемо $\Gamma = rI$ і помітимо, що $-\dot{\Gamma}-\mathcal{R}_\delta(\Gamma)\geq 0$ для достатньо малих $r>0$, отже $\Gamma_\delta \geq rI$. Після ідентифікації Γ_δ, неважко знайти, що

$$\tilde{\lambda} = -\frac{2}{P}\int_0^P \operatorname{tr}\bigl(Q(t)\Gamma_\delta(t)\bigr)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{P}\int_0^P \overline{c}(\xi(t))\,\mathrm{d}t \tag{2.1.96}$$

– єдине число, таке що (2.1.95) має P-періодичний розв'язок $\varphi_\delta(t)$.

Що стосується рівняння (2.1.93), воно має розв'язок $w(t,z)=\exp\bigl(-\Gamma_0^{ij}(t)z_iz_j+\phi_0(t)\bigr)$ з Γ_0 і ϕ_0, що задовольняють

$$-\dot{\Gamma}_0-\mathcal{R}_0(\Gamma_0)=0, \qquad -\dot{\varphi}_0-2\operatorname{tr}\bigl(Q(t)\Gamma_0(t)\bigr)+\overline{c}(\xi(t))=\lambda. \tag{2.1.97}$$

Як і раніше, виберемо максимальний симетричний P-періодичний розв'язок Γ_0 рівняння Ріккаті в (2.1.97), існування якого доведено в [1, Теорема 5.3.4]. Зазначимо, що матриця Γ_0 не обов'язково є позитивно визначеною але є невід'ємною.

Перейдемо тепер до питання єдиності розв'язків задач (2.1.91) і (2.1.93). Для того щоб задати клас функцій серед яких (2.1.93) має єдиний розв'язок введемо спеціальні P-періодичні розв'язки матричного рівняння Ляпунова

$$-\dot{A}_s+A_sB(t)+B^*(t)A_s=\Pi_s^*(t)\Pi_s(t),\ -\dot{A}_u+A_uB(t)+B^*(t)A_u=-\Pi_u^*(t)\Pi_u(t), \tag{2.1.98}$$

де B визначено в (2.1.92) і праві частини визначаються наступним чином. Розглянемо матричний фундаментальний розв'язок $F(t,\tau)$ задачі

$$\frac{\partial}{\partial t}F(t,\tau)=-B(t)F(t,\tau), \qquad F(\tau,\tau)=I. \tag{2.1.99}$$

Відомо, що матриця $F(t+P,t)$ є P-періодичною і її власні значення, відомі також як характеристичні множники, не залежать від t . Тоді оператори $\Pi_s(t)$ і $\Pi_u(t)$ визнпчимо як спектральні проектори на інваріантні підпростори

$F(t+P,t)$, що відповідають власним значенням за модулем меншим одиниці і більшим одиниці. Наважко перевірити, що A_s і A_u задані формулами

$$\begin{aligned} A_s(t) &= \int_t^{+\infty} F^*(\tau,t)\Pi_s^*(\tau)\Pi_s(\tau)F(\tau,t)\,\mathrm{d}\tau, \\ A_u(t) &= \int_{-\infty}^{t} F^*(\tau,t)\Pi_u^*(\tau)\Pi_u(\tau)F(\tau,t)\,\mathrm{d}\tau \end{aligned} \tag{2.1.100}$$

є P-періодичними розв'язками рівнянь (2.1.98).

Лема 2.1.24. *(i) Існує єдине $\tilde{\lambda}$, таке що (2.1.91) має додатній, обмежений P-періодичний відносно t розв'язок $\tilde{V}$, цей розв'язок є єдиним з точністю до помноження на додатну сталу.*

(ii) Задача на власні значення (2.1.93) є однозначно розв'язною в класі додатних функцій w, P-періодичних відносно t, і таких що

$$\begin{aligned} &\text{функція } |w(t,z)|\exp\Big(\mu A_s^{ij}(t)z_iz_j - \nu A_u^{ij}(t)z_iz_j\Big) \text{ є обмеженою} \\ &\qquad\qquad\text{для деякого } \mu>0 \text{ і всіх } \nu>0. \end{aligned} \tag{2.1.101}$$

Тобто власне значення λ є єдиним і власна функція w є єдиною з точністю до помноження на додатну сталу.

Доведення. Ідея полягає в зведенні (2.1.91) і (2.1.93) до рівняння вигляду

$$-\frac{\partial u}{\partial t}+Q^{ij}(t)\frac{\partial^2 u}{\partial z_i\partial z_j}+z_i\tilde{B}^{ji}(t)\frac{\partial u}{\partial z_j}+\tilde{C}(t,z)u=\sigma u, \qquad z\in\mathbb{R}^{N-1},\ t\in\mathbb{R} \tag{2.1.102}$$

для додатної P-періодичної відносно t функції $u(t,z)$, що спадає до нуля при $|z|\to\infty$. Якщо $\tilde{C}(t,z)\to-\infty$ при $|z|\to\infty$, остання задача має єдиний розв'язок згідно з Лемою H.1(див. Додаток H).

Для доведення (i) використаємо перетворення $u(t,z)=e^{-r|z|^2}w(t,z)$ з $r>0$, воно веде до рівняння вигляду (2.1.102) з $\tilde{C}(t,z)=4r^2Q^{ij}(t)z_iz_j+2r(B^{ij}(t)z_iz_j+\mathrm{tr}Q(t))+\overline{c}(\xi(t))-\delta|z|^2$ і $\sigma=\tilde{\lambda}$. Якщо вибрати достатньо мале $r>0$, тоді $\tilde{C}(t,z)\to-\infty$ при $|z|\to\infty$.

Для доведенн (ii) покладемо $\phi_r(t,z) = rA_s^{ij}(t)z_iz_j - rA_u^{ij}(t)z_iz_j$, де A_s і A_u задаються (2.1.100), $r > 0$, і скористаємось перетворенням $u(t,z) = e^{\phi_r(t,z)}w(t,z)$. Тоді u задовольняє (2.1.102) з

$$\tilde{C} = \bar{c}(\xi(t)) + 4r^2(A_u^{il} - A_s^{il})Q^{lm}(A_u^{mj} - A_s^{mj})z_iz_j \\ + r\Big(\big(-\dot{A}_u^{ij} + \dot{A}_s^{ij} + 2B^{li}(A_u^{lj} - A_s^{lj})\big)z_iz_j + 2\mathrm{tr}\big(Q(A_u - A_s)\big)\Big).$$

Оскільки $-\dot{A}_u^{ij} + \dot{A}_s^{ij} + 2B^{li}(A_u^{lj} - A_s^{lj})\big)z_iz_j = -|\Pi_u z|^2 - |\Pi_s z|^2$ (з огляду на (2.1.98)), маємо $\tilde{C}(t,z) \to -\infty$ при $|z| \to \infty$, за умовою, що $r > 0$ є достатньо малим. Також з (2.1.101) ясно, що $u(t,z) \to 0$ при $|z| \to \infty$, коли $0 < r < \mu$.

Для завершення доведення залишається показати, що побудовані вище розв'язки (2.1.91) і (2.1.93) задовольняють умови Леми. Для цього доведемо нерівності $\Gamma_\delta \geq 0$ і $\Gamma_0 \geq \mu A_s$ для деякого $\mu > 0$, де Γ_δ і Γ_0 – максімальні розв'язки рівнянь Ріккаті $-\dot{\Gamma}_\delta - \mathcal{R}_\delta(\Gamma_\delta) = 0$ і $-\dot{\Gamma}_0 - \mathcal{R}_0(\Gamma_0) = 0$. Першу нерівність (навіть строгу) встановлено на початку цього Підрозділа. Для доведення другої нерівності покажемо, що $-\mu\dot{A}_s - \mathcal{R}_0(\mu A_s) \geq 0$ для достатно малих $\mu > 0$. Оскільки A_s задовольняє першому рівнянню в (2.1.98), маємо нерівність $-\mu\dot{A}_s - \mathcal{R}_0(\mu A_s) = -\mu^2 A_s Q A_s + \mu\Pi_s^*\Pi_s$, чию праву частину можна зробити невід'ємною для достатньо малих $\mu > 0$, за умовою, що виконується нерівність $A_s(t) \leq C\Pi_s^*(t)\Pi_s(t)$ зі сталою C яка не залежить від t. З іншого боку маємо $F(\tau + P, \tau) = F(\tau, t)F(t + P, t)F^{-1}(\tau, t)$, звідки $\Pi_s(\tau)F(\tau, t) = F(\tau, t)\Pi_s(t)$. Таким чином A_s можна представити наступним чином

$$A_s(t) = \int_t^{+\infty} \Pi_s^*(t)F^*(\tau, t)F(\tau, t)\Pi_s(t)\,\mathrm{d}\tau, \tag{2.1.103}$$

отже нерівність $A_s(t) \leq C\Pi_s^*(t)\Pi_s(t)$ є вірною з деякою сталою C, що не залежить від t. □

Зауваження 2.1.25. Умову (2.1.101) можна еквівалентно переформулювати наступним чином

$$\text{функція } |w(t,z)| \exp\Big(\mu'\Pi_s^{ij}(t)z_iz_j - \nu'\Pi_u^{ij}(t)z_iz_j\Big) \text{ є обмеженою} \\ \text{для деякого } \mu' > 0 \text{ і всіх } \nu' > 0. \tag{2.1.104}$$

Це неважко бачити з представлення (2.1.103) для A_s і аналогічного представлення для A_u:

$$A_u(t) = \int_{-\infty}^{t} \Pi_u^*(t) F^*(\tau,t) F(\tau,t) \Pi_u(t) \, \mathrm{d}\tau. \tag{2.1.105}$$

2.1.11 Границя власних значень і селекція адитивної власної функції

З результатів Підрозділів 2.1.9 і 2.1.10 випливає наступна оцінка знизу для власних значень λ_ε:

$$\liminf \lambda_\varepsilon \geq -\frac{2}{P}\int_0^P \operatorname{tr}\bigl(Q\Gamma_\delta\bigr)\, \mathrm{d}t + \frac{1}{P}\int_0^P \overline{c}(\xi(t))\, \mathrm{d}t, \tag{2.1.106}$$

для кожного $\delta > 0$, де Γ_δ – максимальний P-періодичний розв'язок (2.1.94). Оскільки $-\dot{\Gamma}_{\delta'} - \mathcal{R}_\delta(\Gamma_{\delta'}) = -\dot{\Gamma}_{\delta'} - \mathcal{R}_{\delta'}(\Gamma_{\delta'}) + (\delta - \delta')I \geq 0$ для $\delta \geq \delta'$, маємо $\Gamma_\delta \geq \Gamma_{\delta'}$. Звідси випливає, що Γ_δ збігається до максимального P-періодичного розв'язку Γ_0 рівняння $-\dot{\Gamma}_0 - \mathcal{R}_0(\Gamma_0) = 0$ коли $\delta \to 0$, таким чином

$$\liminf \lambda_\varepsilon \geq -\frac{2}{P}\int_0^P \operatorname{tr}\bigl(Q\Gamma_0\bigr)\, \mathrm{d}t + \frac{1}{P}\int_0^P \overline{c}(\xi(t))\, \mathrm{d}t. \tag{2.1.107}$$

Оцінку знизу, що узгоджується з (2.1.107), буде виведено у випадку коли $\mathcal{C}$ є мінімальною компонентою множини Обрі $\mathcal{A}_{\overline{H}}$ відносно часткового відношення порядку $\preceq$, яке було визначено в Підрозділі 2.1.7. Нагадаємо, що функції $W_\varepsilon = -\varepsilon \log u_\varepsilon$ збігаються в $C_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, з точністю до підпослідовності, до (в'язкісного) розв'язку W задачі $\overline{H}(\nabla W(x), x) = 0$ в Ω, $\overline{H}(\nabla W(x), x) \geq 0$ на $\partial\Omega$. Згідно з умовою (2.1.73) множина $\mathcal{A}_{\overline{H}}$ складається зі скінченого числа звязних компонент (нерухомих точок і граничних циклів рівняння $\dot{x} = -\overline{b}(x)$), і $\mathcal{A}' \preceq \mathcal{A}$ якщо $d_{\overline{H}}(\mathcal{A}, \mathcal{A}') = W(\mathcal{A}) - W(\mathcal{A}')$, де функція відстані $d_{\overline{H}-\lambda_{\overline{H}}}(x,y)$ задається формулою (2.1.14) (або (2.1.16)) з $\lambda_{\overline{H}} = 0$. Для довільної мінімальної компоненти $\mathcal{A}$ множини $\mathcal{A}_{\overline{H}}$ маємо

$$W(x) = d_{\overline{H}}(x, \mathcal{A}) + W(\mathcal{A}) \qquad \text{в околі } \mathcal{A}.$$

Наступний результат завершує доведення Твердження (i) Теореми 2.1.19. В ньому йдеться про випадок, коли граничний цикл рівняння $\dot{x} = -\overline{b}(x)$ є мінімальною компонентою $\mathcal{A}_{\overline{H}}$, тоді як випадок нерухомої точки розглянуто в Підрозділі 2.1.7 за умови, що $c = 0$ в (2.1.71). Міркування, що наведено в Підрозділі 2.1.7 легко узагальнюються на випадок $c \neq 0$, в результаті маємо: якщо нерухома точка ξ рівняння $\dot{x} = -\overline{b}(x)$ є мінімальною компонентою $\mathcal{A}_{\overline{H}}$, тоді

$$\lim \lambda_\varepsilon = \sigma_1(\xi) + \sigma_2(\xi), \tag{2.1.108}$$

де $\sigma_1(\xi)$ і $\sigma_2(\xi)$ визначено в Теоремі 2.1.19.

Лема 2.1.26. *Нехай гіперболичний граничний цикл $\mathcal{C}$ рівняння $\dot{x} = -\overline{b}(x)$ є мінімальною компонентою $\mathcal{A}_{\overline{H}}$, тоді*

$$\lim \lambda_\varepsilon = -\frac{2}{P}\int_0^P \operatorname{tr}\big(Q\Gamma_0\big)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{P}\int_0^P \overline{c}(\xi(t))\,\mathrm{d}t, \tag{2.1.109}$$

де Γ_0 є максимальним P-періодичним розв'язком рівняння $-\dot{\Gamma}_0 - \mathcal{R}_0(\Gamma_0) = 0$.

Доведення. Почнемо з побудови локального суб-розв'язку $\Phi_\mu^\nu(x)$ нерівності

$$\overline{H}(\nabla\Phi_\mu^\nu(x), x) \leq -\delta\,\mathrm{dist}^2(x, \mathcal{C}) \qquad \text{в околі } \mathcal{C}, \tag{2.1.110}$$

де $\delta > 0$. Припустимо тимчасово, що функцію $\Phi_\mu^\nu(x)$ побудовано, тоді маємо наступний результат, доведення якого є аналогічним Лемі 2.1.18.

Лема 2.1.27. *Якщо Φ_μ^ν задовольняє (2.1.110) і $\Phi_\mu^\nu = W$ на $\mathcal{C}$ тоді виконується строга нерівність $W > \Phi_\mu^\nu$ в $\overline{U_{\mathcal{C}}} \setminus \mathcal{C}$, де $U_{\mathcal{C}}$ – деякий окіл $\mathcal{C}$.*

Для побудови функції Φ_μ^ν використовується той підхід що і в Підрозділі 2.1.9, переходом до рухомих координат $x' = x - \xi(t)$ нерівність (2.1.110) зводиться до насупної нерівності для функції $\tilde{\Phi}_\mu^\nu(t, x') := \Phi_\mu^\nu(x' + \xi(t))$,

$$\frac{\partial\tilde{\Phi}_\mu^\nu}{\partial t} + \overline{H}\big(\nabla_{x'}\tilde{\Phi}_\mu^\nu, x' + \xi(t)\big) + \overline{b}^j\big(\xi(t)\big)\frac{\partial\tilde{\Phi}_\mu^\nu}{\partial x'_j} \leq -\delta\,\mathrm{dist}^2(x' + \xi(t), \mathcal{C}). \tag{2.1.111}$$

Лінеарізуємо $\overline{H}(p, x' + \xi(t))$ послідовно відносно p і відносно x',

$$\overline{H}(p,x) = -\overline{b}^j\big(\xi(t)\big)p_j - x_i'\frac{\partial \overline{b}^j}{\partial x_i}(\xi(t))p_j + O(|p|^2 + |p||x'|^2),$$

перейдемо до координат $(z,\zeta) = \mathcal{T}(t)x'$ (де $z = (z_1, \dots, z_{N-1})$ – координати в гіперплощині ортоганальній до $\mathcal{C}$ в $\xi(t)$, і сконструюємо $\Psi_\mu^\nu(t,z,\zeta) = \tilde{\Phi}_\mu^\nu\big(t, \mathcal{T}^{-1}(z,\zeta)\big)$, що задовольняє

$$\frac{\partial \Psi_\mu^\nu}{\partial t} - z_i B^{ji}(t)\frac{\partial \Psi_\mu^\nu}{\partial z_j} \le -\delta'|z|^2 \quad (\delta' > 0), \qquad \frac{\partial \Psi_\mu^\nu}{\partial \zeta} = 0. \tag{2.1.112}$$

Крім того функція $\Psi_\mu^\nu(t,z,\zeta)$ повинна бути P-періодичною відносно t. Всім цим вимогам задовольняє

$$\Psi_\mu^\nu(t,z,\zeta) = \Psi_\mu^\nu(t,z) := \mu A_s^{ij}(t)z_i z_j - \nu A_u^{ij}(t) z_i z_j, \tag{2.1.113}$$

де A_s і A_u – розв'язки матричних рівнянь Ляпунова (2.1.98) задані формулою (2.1.100).

Лема 2.1.28. *Функція*

$$\Phi_\mu^\nu(x) = \Psi_\mu^\nu\Big(\xi^{-1}(X_{\mathcal{C}}(x)), \mathcal{T}\big(\xi^{-1}(X_{\mathcal{C}}(x))\big)(x - X_{\mathcal{C}}(x))\Big), \tag{2.1.114}$$

де Ψ_μ^ν задається формулою (2.1.113), задовольняє (2.1.110) для $0 < \nu \le \mu < r$, з достатньо малим $r > 0$ ($\delta > 0$ залежить від μ, ν). Тут $X_{\mathcal{C}}(x)$ позначає найближчу точку до x на $\mathcal{C}$, ξ^{-1} – функція обернена до $\xi : [0, P) \to \mathcal{C}$, $\xi(t)$ – розв'язок рівняння (2.1.80).

Доведення. Для того щоб перевірити (2.1.110) викладені вище міркування відтворюються з деталями, що зрештою веде до (2.1.112). Більш докладно, заміною змінних $(z,\zeta) = \mathcal{T}(t)x'$ і невідомих функцій $\Psi_\mu^\nu(t,z,\zeta) = \tilde{\Phi}_\mu^\nu\big(t, \mathcal{T}^{-1}(z,\zeta)\big)$ нерівність (2.1.110) трансформується на

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Psi_\mu^\nu}{\partial t} + z_i\dot{\mathcal{T}}^{jk}(t)\mathcal{T}^{ik}(t)\frac{\partial \Psi_\mu^\nu}{\partial z_j} &+ \overline{H}\Big(\mathcal{T}(t)\nabla_z\Psi_\mu^\nu, \xi(t) + \mathcal{T}^{-1}(t)(z,0)\Big) \\ &+ \overline{b}^k\big(\xi(t)\big)\mathcal{T}^{jk}(t)\frac{\partial \Psi_\mu^\nu}{\partial z_j} \le -\delta|z|^2.\end{aligned} \tag{2.1.115}$$

Зворотно, якщо ця нерівність є вірною для малих z рівномірно відносно t, тоді неважко переконатись, що функція $\Phi_\mu^\nu(x)$, реконструйована формулою (2.1.114), дійсно задовольняє (2.1.110). Позначимо через J ліву частину (2.1.115), і зазначимо, що її можна оцінити наступним чином,

$$J = \frac{\partial \Psi_\mu^\nu}{\partial t} + \Big(\Big(\bar{b}^k\big(\xi(t)\big) - \bar{b}^k\big(\xi(t) + \mathcal{T}^{-1}(t)(z,0)\big)\Big)\mathcal{T}^{jk}(t) + z_i \dot{\mathcal{T}}^{jk}(t)\mathcal{T}^{ik}(t)\Big)\frac{\partial \Psi_\mu^\nu}{\partial z_j} + I_1$$
$$\leq \frac{\partial \Psi_\mu^\nu}{\partial t} + z_i\Big(\dot{\mathcal{T}}^{jk}(t)\mathcal{T}^{ik}(t) - \mathcal{T}^{im}\frac{\partial \bar{b}^k}{\partial x_m}(\xi(t))\mathcal{T}^{jk}(t)\Big)\frac{\partial \Psi_\mu^\nu}{\partial z_j} + I_2, \quad (2.1.116)$$

де $I_1 \leq C|\nabla_z \Psi_\mu^\nu|^2$, $I_2 \leq I_1 + \bar{o}(|z|)\,|\nabla_z \Psi_\mu^\nu|$. Завдяки (2.1.103), (2.1.105) маємо

$$|\nabla_z \Psi_\mu^\nu|^2 \leq C(\mu^2|\Pi_s z|^2 + \nu^2|\Pi_u z|^2),$$

отже

$$I_2 \leq C'(\mu^2|\Pi_s z|^2 + \nu^2|\Pi_u z|^2) + \bar{o}(|z|^2).$$

З іншого боку, середній член в другому рядку (2.1.116) є нічим іншим як $-z_i B^{ji}(t)\frac{\partial \Psi_\mu^\nu}{\partial z_j}$ і, оскільки A_s, A_u – розв'язки рівнянь Ляпунова (2.1.98), сума всіх трьох членів дорівнює $I_2 - \mu|\Pi_s z|^2 - \nu|\Pi_u z|^2$. Таким чином твердження Леми є вірним якщо $\mu, \nu < 1/C'$, де C' – стала в оцінці для I_2. □

Зауваження 2.1.29. Оскільки $\Phi_\mu^\nu((\mathcal{T}(t))^{-1}(z,0)) = \Psi_\mu^\nu(t,z)$, де $(z,\eta) = \mathcal{T}(t)(x-\xi(t))$ і $\Psi_\mu^\nu(t,z)$ задається by (2.1.113), то

$$\Phi_\mu^\nu((\mathcal{T}(t))^{-1}(z,0)) \geq \gamma_1\mu|\Pi_s(t)z|^2 - \gamma_2\nu|\Pi_u(t)z|^2$$

для деяких $\gamma_1, \gamma_2 > 0$.

Наступним шагом виведемо оцінки на нескінченності для функції w, яку було введено в кінці Підрозділу 2.1.9. Для цього застосовуються міркування аналогічні тим, що наведено в Підрозділі 2.1.7. Покладемо $\overline{\Phi}_\varepsilon = \Phi_\mu^\nu(x) + \varepsilon\theta\big(\nabla\tilde{\Phi}_\varepsilon(x), x, x/\varepsilon\big)$, де $\theta = \log\vartheta$ і ϑ – розв'язок (2.1.9),

$$\tilde{\Phi}_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n}\int_{\mathbb{R}^N}\varphi((x-x')/\varepsilon)\Phi_\mu^\nu(x')\,\mathrm{d}x',$$

φ – гладка невід'ємна функція з компактним носієм і $\int_{\mathbb{R}^N}\varphi(x)\mathrm{d}x = 1$. Тоді за допомогою (2.1.110) і (2.1.9) знаходимо

$$-\varepsilon a^{ij}(x,x/\varepsilon)\frac{\partial^2\overline{\Phi}_\varepsilon}{\partial x_i\partial x_j} + H(\nabla\overline{\Phi}_\varepsilon(x),x,x/\varepsilon) \le -\delta\mathrm{dist}^2(x,\mathcal{C}) + C\varepsilon \qquad \text{в } U_{\mathcal{C}}. \tag{2.1.117}$$

Завдяки Лемі 2.1.27 виконується строга нерівність $W_\varepsilon > \overline{\Phi}_\varepsilon$ на $\partial U_{\mathcal{C}}$ для достатньо малих ε. Покажемо, що $W_\varepsilon \ge \overline{\Phi}_\varepsilon - \beta\varepsilon$ з β, що не залежить від ε.

Припустимо, що $W_\varepsilon - \overline{\Phi}_\varepsilon$ досягає від'ємний мінімум в точці x_ε, тоді $\nabla W_\varepsilon(x_\varepsilon) = \nabla\overline{\Phi}_\varepsilon(x_\varepsilon)$ і $a^{ij}(x_\varepsilon,x_\varepsilon/\varepsilon)\frac{\partial^2\overline{\Phi}_\varepsilon}{\partial x_i\partial x_j}(x_\varepsilon) \le a^{ij}(x_\varepsilon,x_\varepsilon/\varepsilon)\frac{\partial^2 W_\varepsilon}{\partial x_i\partial x_j}(x_\varepsilon)$. Користуючись цими нерівностями в (2.1.72) і (2.1.117) знаходимо

$$\begin{aligned}
\varepsilon\lambda_\varepsilon - \varepsilon c(x_\varepsilon,x_\varepsilon/\varepsilon) &= -\varepsilon a^{ij}(x_\varepsilon,x_\varepsilon/\varepsilon)\frac{\partial^2 W_\varepsilon}{\partial x_i\partial x_j}(x_\varepsilon) + H(\nabla\overline{\Phi}_\varepsilon(x_\varepsilon),x_\varepsilon,x_\varepsilon/\varepsilon)\\
&\le -\varepsilon a^{ij}(x_\varepsilon,x_\varepsilon/\varepsilon)\frac{\partial\overline{\Phi}_\varepsilon}{\partial x_i\partial x_j}(x_\varepsilon) + H(\nabla\overline{\Phi}_\varepsilon(x_\varepsilon),x_\varepsilon,x_\varepsilon/\varepsilon) \le -\delta\mathrm{dist}^2(x_\varepsilon,\mathcal{C}) + C\varepsilon.
\end{aligned}$$

Таким чином $\mathrm{dist}(x_\varepsilon,\mathcal{C}) \le C\sqrt{\varepsilon}$ і $W_\varepsilon \ge \overline{\Phi}_\varepsilon + W_\varepsilon(x_\varepsilon) - \overline{\Phi}_\varepsilon(x_\varepsilon)$. Оскільки $\mathrm{dist}(x_\varepsilon,\mathcal{C}) \le C\sqrt{\varepsilon}$, обидві функції $W_\varepsilon(x_\varepsilon)/\varepsilon$ і $\overline{\Phi}_\varepsilon(x_\varepsilon)/\varepsilon$ залишаються обмеженими в границі $\varepsilon \to 0$ (обмеженість $W_\varepsilon(x_\varepsilon)/\varepsilon$ випливає з результатів Підрозділу 2.1.9). Отже границя w функцій $w_\varepsilon(t,z,\zeta) = u_\varepsilon\big(\xi(t) + \sqrt{\varepsilon}(\mathcal{T}(t))^{-1}(z,\zeta)\big)$ задовольняє

$$|w(t,z)| \le Ce^{-\liminf\overline{\Phi}_\varepsilon(\sqrt{\varepsilon}z)/\varepsilon} \le Ce^{-\mu_1|\Pi_s(t)z|^2 + \mu_2|\Pi_u(t)z|^2}, \tag{2.1.118}$$

де μ_1, μ_2 – додатні сталі, причому μ_2 можна вибрати такою малою як потрібно (C в (2.1.118) залежить від μ_2). Крім того w задовольняє (2.1.93). Таким чином, згідно з Лемою 2.1.24, маємо

$$\lambda_\varepsilon \to -\frac{2}{P}\int_0^P \big(\mathrm{tr}\big(\Gamma_0(t)Q(t)\big)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{P}\int_0^P \overline{c}(\xi(t))\,\mathrm{d}t.$$

Лему 2.1.26 доведено. □

Тепер можна закінчити

Доведення Теореми 2.1.19. Аналогічно міркуванням Підрозділу 2.1.6 можна показати, що $\liminf \lambda_\varepsilon \geq \max\{\sigma_1(\xi) + \sigma_2(\xi)\}$, де максимум береться серед всіх нерухомих точок ξ рівняння $\dot{x} = -\bar{b}(x)$. В 2.1.12 буде доведено, що перший доданок в (2.1.107) співпадає з $\sigma_1(\xi)$, що задається формулою (2.1.76), у випадку коли ξ – точка на граничному циклі (Твердження 2.1.30 нижче). Отже $\liminf \lambda_\varepsilon \geq \overline{\sigma}$, де $\overline{\sigma}$ визначено в (2.1.75). Тоді внаслідок (2.1.108) і (2.1.109) одержуємо (2.1.75).

Нагадаємо тепер, що згідно з умовою в Твердженні (ii), максимум в (2.1.75) досягається на одній компоненті $\mathcal{M}$. Тоді внаслідок (2.1.109) (коли $\mathcal{M}$ є граничним циклем) або (2.1.108) (коли $\mathcal{M}$ – нерухома точка), $\mathcal{M}$ – єдина мінімальна компонента множини Обрі $\mathcal{A}_{\overline{H}}$. Таким чином $\mathcal{M}$ є найменшою компонентою $\mathcal{A}_{\overline{H}}$ (відносно часткового відношення порядку "$\preceq$"), тобто

$$W(\xi) = d_{\overline{H}}(\xi, \mathcal{M}) + W(\mathcal{M}) \qquad \forall \xi \in \mathcal{A}_{\overline{H}}.$$

Тоді користуючись (2.1.18) знаходимо $W(x) = d_{\overline{H}}(x, \mathcal{M}) + W(\mathcal{M})$. □

2.1.12 Інваріантна форма асимптотик власних значень

Власне значення λ рівняння (2.1.93) визначається формулою

$$-\frac{2}{P}\int_0^P \mathrm{tr}\big(\Gamma_0(t)Q(t)\big)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{P}\int_0^P \overline{c}(\xi(t))\mathrm{d}t,$$

де $\Gamma_0(t)$ – максимальний P-періодичний розв'язок рівняння Ріккаті

$$\dot{\Gamma}_0 + 4\Gamma_0 Q \Gamma_0 - \Gamma_0 B - B^* \Gamma_0 = 0. \tag{2.1.119}$$

Оскільки $Q(t)$ і $B(t)$ залежать від окремого вибору матриці переходу $\mathcal{T}(t)$, необхідно виразити власне значення у інваріантній формі.

Твердження 2.1.30. *Нехай Λ_k – власні значення $F(\tau + P, \tau)$, де $F(t, \tau)$ – фундаментальний матричний розв'язок (2.1.99). Припустимо, що ці власні значення Λ_k не лежать на одиничному колі. Тоді маємо*

$$-\frac{2}{P}\int_0^P \mathrm{tr}\big(\Gamma_0(t)Q(t)\big)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{P}\sum_{|\Lambda_k|<1} \log|\Lambda_k|,$$

де $\Gamma_0(t)$ *– максимальний* P*-періодичний розв'язок (2.1.119).*

Доведення. Помножимо (2.1.119) на $F^*(t,\tau)$ зліва і на $F(t,\tau)$ справа, і скористаємось (2.1.99). Тоді (2.1.119) записується у вигляді

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}\big(F^*(t,\tau)\Gamma_0(t)F(t,\tau)\big)\\&\qquad+\big(4F^*(t,\tau)\Gamma_0(t)Q(t)(F^*(t,\tau))^{-1}\big)F^*(t,\tau)\Gamma_0(t)F(t,\tau)=0,\end{aligned}\tag{2.1.120}$$

Покажемо спочатку, що

$$\Gamma_0(\tau)\Pi_u(\tau)=\Pi_u^*(\tau)\Gamma_0(\tau)=0 \quad \text{і} \quad \Gamma_0(\tau)\Pi_s(\tau)=\Pi_s^*(\tau)\Gamma_0(\tau)=\Gamma_0(\tau), \tag{2.1.121}$$

де $\Pi_u(\tau)$, $\Pi_s(\tau)$ – проектори на інваріантні пространства $F(\tau+P,\tau)$, що відповідають власним значенням з модулем строго більшим і строго меншим одного, відповідно. Для цього проінтегруємо (2.1.120) по $(\tau,\tau+P)$ і помножимо результат на $\Pi_u^*(\tau)$ зліва і на $\Pi_u(\tau)$ справа:

$$\Pi_u^*(\tau)F^*(\tau+P,\tau)\Gamma_0(\tau)F(\tau+P,\tau)\Pi_u(\tau)-\Pi_u^*(\tau)\Gamma_0(\tau)\Pi_u(\tau)\le 0.$$

Оскільки $\Pi_u(\tau)$ є проектором на інваріантний простір $F(\tau+P,\tau)$, що відповідає власним значенням з модулями строго більшими одного, заключаємо, що $\Gamma_0(\tau)\Pi_u(\tau)=0$. Таким чином рівності (2.1.121) є дійсно вірними. Крім того, оскільки $\Gamma_0(\tau)$ є максимальним розв'язком (2.1.119), маємо $\Gamma_0(\tau)\ge\gamma\Pi_s^*(\tau)\Pi_s(\tau)$ з $\gamma>0$ (див. доведення Леми 2.1.24).

Перейдемо до нового базису, що трансформує Γ_0 до блочно-діагональної форми. Зафіксуємо τ і розглянемо ортогональний базис $\{a_1,\dots,a_k,\dots a_{N-1}\}$ з пекшими k векторами вибраними так, що вони утворюють базис $\operatorname{Im}(\Pi_s^*(\tau))$. Перепишемо матриці з (2.1.120) у цьому базисі, $(\Gamma'(t))^{ij}=a_i\cdot F^*(t,\tau)\Gamma_0(t)F(t,\tau)a_j$ і $(M'(t))^{ij}=4a_i\cdot F^*(t,\tau)\Gamma_0(t)Q(t)\big(F^*(t,\tau)\big)^{-1}a_j$, тоді (2.1.120) набуває вигляд

$$\dot\Gamma'(t)+M'(t)\Gamma'(t)=0.$$

Зазначимо, що

$$\begin{aligned}(\Gamma'(t))^{ij}&=a_i\cdot F^*(t,\tau)\Pi_s^*(t)\Gamma_0(t)\Pi_s(t)F(t,\tau)a_j\\&=a_i\cdot\Pi_s^*(\tau)F^*(t,\tau)\Gamma_0(t)F(t,\tau)\Pi_s(\tau)a_j=0\end{aligned}$$

якщо $i > k$ або $j > k$, крім того $(M'(t))^{ij} = 0$ якщо $i > k$. Таким чином

$$4\mathrm{tr}\big(\Gamma_0(t)Q(t)\big) = 4\mathrm{tr}\big(F^*(t,\tau)\Gamma_0(t)Q(t)(F^*(t,\tau))^{-1}\big) = \sum_1^k (M'(t))^{ii}.$$

Розглянемо тепер матриці $\Gamma''(t)$ і $M''(t)$, що відповідають верхнім $k \times k$ діагональним блокам $\Gamma'(t)$ і $M'(t)$. Маємо $\dot{\Gamma}''(t) + M''(t)\Gamma''(t) = 0$, крім того $\mathrm{tr}\big(\Gamma_0(t)Q(t)\big) = \frac{1}{4}\mathrm{tr}M''(t)$ і $\det\Gamma''(\tau) \neq 0$ (з нерівності $\Gamma_0(\tau) \geq \gamma\Pi_s^*(\tau)\Pi_s(\tau)$, $\gamma > 0$, випливає, що $\Gamma''(\tau) > 0$). Скористаємось тепер формулою Ліувілля:

$$\det\Gamma''(\tau+P)/\det\Gamma''(\tau) = \exp\Big(-\int_\tau^{\tau+P} \mathrm{tr}M''(t)\,\mathrm{d}t\Big) = \exp\Big(-\int_0^P \mathrm{tr}M''(t)\,\mathrm{d}t\Big).$$

Таким чином

$$2\int_0^P \mathrm{tr}\big(\Gamma_0(t)Q(t)\big)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}(\log\det\Gamma''(\tau) - \log\det\Gamma''(\tau+P)). \qquad (2.1.122)$$

Залишається обчислити праву частину (2.1.122). Для цього помітимо, що $\Gamma''(\tau+P) = \tilde{D}^*\Gamma''(\tau)\tilde{D}$, де $\tilde{D} = \Big(a_i \cdot F(\tau+P,\tau)\Pi_s(\tau)a_j\Big)_{i,j=\overline{1,k}}$. Останнє співвідношення випливає з рівності $F^*(\tau+P,\tau)\Gamma_0(\tau+P)F(\tau+P,\tau) = \Pi_s^*(\tau)F^*(\tau+P,\tau)\Gamma_0(\tau)F(\tau+P,\tau)\Pi_s(\tau)$ з врахуванням того факту, що $(\Gamma'(t))^{ij} = 0$ для $i > k$ або $j > k$. Таким чином маємо

$$2\int_0^P \mathrm{tr}\big(\Gamma_0(t)Q(t)\big)\,\mathrm{d}t = -\log|\det\tilde{D}|.$$

З іншого боку, оскільки вектори $\Pi_s(\tau)a_1, \ldots, \Pi_s(\tau)a_k$ утворюють базис $\mathrm{Im}(\Pi_s(\tau))$ і $a_1, \ldots, a_k$ є біортогональними векторами, $\tilde{D}$ є нічим іншим, як матрицею звуження $F(\tau+P,\tau)$ на $\mathrm{Im}(\Pi_s(\tau))$. Отже $|\det\tilde{D}|$ дорівнює добутку абсолютних значень власних значень $F(\tau+P,\tau)$, які є меншими одного. $\square$

В заключення зазначимо, що згідно з Зауваженням 2.1.23 власні значення $F(\tau+P,\tau)$ співпадають з власними значеннями відображення Пуанкаре пов'язаного з граничним циклом $\mathcal{C}$.

2.2 Задача Неймана

У цьому підрозділі вивчається асимптотична поведінка першої власної функції і першого власного значення сингулярно збуреної спектральної задачі, що залежить від малого параметра $\varepsilon > 0$, для еліптичного рівняння

$$\varepsilon a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x_i \partial x_j} + b_i(x)\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i} + c(x)u_\varepsilon = \lambda_\varepsilon u \qquad (2.2.1)$$

в гладкій обмеженій області $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ з крайовою умовою

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu} = 0, \qquad (2.2.2)$$

на $\partial\Omega$, де $\frac{\partial}{\partial \nu}$ позначає похідну відносно зовнішньої нормалі. Згідно з теоремою Крейна-Рутмана перше власне значення λ_ε задачі (2.2.1)–(2.2.2) (власне значення з максимальною дійсною частиною) є простим і дійсним, відповідна власна функція u_ε не міняє знак, тобто можна вважати, що $u_\varepsilon(x) > 0$ в Ω. Не зважаючи на те, що у випадку сталого коефіцієнта $c(x)$ при молодшему члені в (2.2.1) пара λ_ε і u_ε (тривіально) знаходиться явно, її асимптотична поведінка є достатньо нетривіальною коли $c(x)$ не є сталою функцією, зокрема, власна функція може демонструвати експоненціальну локалізацію.

При аналізі задачі (2.2.1)–(2.2.2) використовуються методи теорії в'язкісних розв'язків для вивчення асимптотичної поведінки масштабованих логаріфмічних перетворень першої власної функції, що веде в границі до рівняння Гамільтона-Якобі. Проте це рівняння не є, взагалі кажучи, однозначно розв'язним не дає (напряму) інформації про асимптотичну поведінку λ_ε. Це призводить до необхідності розглядати наближення вищого порядку в (2.2.1)–(2.2.2). За достатньо загальними припущеннями відносно множини Обрі граничного гамільтоніану знаходиться границя λ_ε і ідентификується розв'язок граничного рівняння Гамільтона-Якобі який описує граничну поведінку власної функції. Зазначимо, що, методи [165] і [163], де застосовано локальний аналіз в масштабованих змінних, не працюють у випадку задачі Неймана за наявністі компонент множини Обрі на межі. У цьому випадку природне масштабування однаково веде до сингулярно збуреної задачі. Тому використано інший підхід, він полягає у детальному вивченні структури розв'язків граничного рівняння Гамільтона-Якобі в околі множини Обрі з подальшим застосуванням цієї інформації для побудови тестових функцій, що задовольняють збурене рівняння з високою точністю.

Також зазначимо, що з очевидними модіфікаціями результати цього підрозділу розповсюджуються на випадок загальної умови

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \beta} = 0,$$

де β – C^2-гладке нетангенціальне векторне поле на $\partial\Omega$, зокрема, важливий випадок задачі з похідною по конормалі ($\beta_i = a_{ij}\nu_j$) може бути розглянутий.

2.2.1 Основні результати

Задачу (2.2.1)–(2.2.2) буде вивчено за наступними припущеннями на коефіцієнти оператору і область Ω:

(**a1**) Ω – обмежена область в $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, з межею класу C^2;

(**a2**) коефіцієнти є функціями класу $C^2(\overline{\Omega})$;

(**a3**) матриця (a_{ij}) є симетричною і рівномірно еліптичною.

Нижче буде також сформульовано додаткові припущення відносно векторного поля b.

Осквльки $u_\varepsilon > 0$ в Ω, то можна представити u_ε в вигляді

$$u_\varepsilon = e^{-W_\varepsilon(x)/\varepsilon},$$

і подстановкою цього представлення в (2.2.1)–(2.2.2) отримуємо рівняння

$$-a_{ij}(x)\frac{\partial^2 W_\varepsilon}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{1}{\varepsilon}H(\nabla W_\varepsilon, x) + c(x) = \lambda_\varepsilon \qquad \text{в } \Omega \tag{2.2.3}$$

або

$$-\varepsilon a_{ij}(x)\frac{\partial^2 W_\varepsilon}{\partial x_i \partial x_j} + H(\nabla W_\varepsilon, x) + \varepsilon c(x) = \varepsilon\lambda_\varepsilon \qquad \text{в } \Omega \tag{2.2.4}$$

з крайовою умовою

$$\frac{\partial W_\varepsilon}{\partial \nu} = 0 \qquad \text{на } \partial\Omega, \tag{2.2.5}$$

де

$$H(p, x) = a_{ij}(x)p_i p_j - b_i(x)p_i. \tag{2.2.6}$$

За допомогою стандартних методів, що спираються на принцип максимуму, буде показано, що функції W_ε рівномірно збігаються при $\varepsilon \to 0$ (з точністю до підпослідовності) до в'язкісного розв'язку $W(x)$ рівняння

$$H(\nabla W(x), x) = 0 \qquad \text{в } \Omega \tag{2.2.7}$$

з крайовою умовою

$$\frac{\partial W}{\partial \nu} = 0 \qquad \text{на } \partial\Omega. \tag{2.2.8}$$

Нагадаємо, що функція $W \in C(\overline{\Omega})$ називається в'язкісним розв'язком рівняння (2.2.7) якщо для кожної тестової функції $\Phi \in C^\infty(\overline{\Omega})$ виконуються наступні умови

- якщо $W - \Phi$ досягає максимум в точці $\xi \in \Omega$, тоді $W(\nabla\Phi(\xi), \xi) \leq 0$;
- якщо $W - \Phi$ досягає мінімум в $\xi \in \Omega$, тоді $W(\nabla\Phi(\xi), \xi) \geq 0$.

Крайова умова (2.2.8)розуміється в наступному сенсі, $\forall \Phi \in C^\infty(\overline{\Omega})$

- if $W - \Phi$ досягає максимуму в $\xi \in \partial\Omega$, тоді $\min\Big\{H(\nabla\Phi(\xi), \xi), \frac{\partial\Phi}{\partial\nu}(\xi)\Big\} \leq 0$;
- if $W - \Phi$ досягає мінімум в $\xi \in \partial\Omega$, тоді $\max\Big\{H(\nabla\Phi(\xi), \xi), \frac{\partial\Phi}{\partial\nu}(\xi)\Big\} \geq 0$.

Відомо [104], що кожний розв'язок (2.2.7)–(2.2.8) має представлення

$$W(x) = \inf_{y \in \mathcal{A}_H}\Big\{d_H(x, y) + W(y)\Big\}, \tag{2.2.9}$$

де $\mathcal{A}_H$ – множина Обрі, $d_H(x,y)$ – функція відстані. Для визначення $\mathcal{A}_H$ і $d_H(x,y)$ розглянемо розв'язки задачі Скорохода:

$$\begin{cases} \eta(t) \in \overline{\Omega}, t \geq 0 \\ \dot{\eta}(t) + \alpha(t)\nu(\eta(t)) = v(t) \qquad \text{з } \alpha(t) \geq 0 \ \text{ і } \alpha(t) = 0 \text{ коли } \eta(t) \notin \partial\Omega \\ \eta(0) = x, \end{cases} \tag{2.2.10}$$

де $v \in L^1((0,\infty);\mathbb{R}^N)$ – задане векторне поле і $x \in \overline{\Omega}$ – задана початкова точка, а крива $\eta \in W^{1,1}_{loc}((0,\infty);\mathbb{R}^N)$ і функція $\alpha \in L^1((0,\infty);\mathbb{R}_+)$ є невідомими. За умовою (**a1**) ($\partial\Omega \in C^2$) задача Скорохода (2.2.10) має розв'язок, див. [104].

Розглянемо тепер перетворення Лежандра $L(v,x) = \sup\limits_{p\in\mathbb{R}^N}(v \cdot p - H(p,x))$ і визначимо функцію відстані

$$d_H(x,y) = \inf\Big\{\int_0^t L(-v(s),\eta(s))\,\mathrm{d}s, \quad \eta \text{ є розв'язком (2.2.10)}, \ \eta(0) = x, \\ \eta(t) = y, \ t > 0\Big\}. \tag{2.2.11}$$

Нагадаємо варіаційне визначення множини Обрі

$$x \in \mathcal{A}_H \Longleftrightarrow \forall\delta > 0 \quad \inf\Big\{\int_0^t L(-v(s),\eta(s))\,\mathrm{d}s, \ \ \eta \text{ є розв'язком (2.2.10)}, \\ \eta(0) = \eta(t) = x, \ t > \delta\Big\} = 0. \tag{2.2.12}$$

Асимптотичну поведінку першого власного значення і власної функції задачі (2.2.1)–(2.2.2) буде вивчено за наступним припущенням про структуру множини Обрі

$$\mathcal{A}_H = \bigcup_{\text{finite}} \mathcal{A}_k \text{ *і кожна компонента* } \mathcal{A}_k \text{ *є або ізольованою точкою*} \\ \text{*або замкненою кривою, що лежить повністю або в* } \Omega \text{ *або на* } \partial\Omega. \tag{2.2.13}$$

Крім того

$$\textit{якщо } \mathcal{A}_k \subset \Omega, \textit{ тоді } \mathcal{A}_k \textit{ є або гіперболічною нерухомою точкою}$$
$$\textit{або гіперболічним циклом рівняння } \dot{x} = b(x); \quad (2.2.14)$$

$$\textit{якщо } \mathcal{A}_k \subset \partial\Omega, \textit{ тоді нормальна компонента } b_\nu(x) \textit{ поля } b(x) \textit{ є строго}$$
$$\textit{додатною на } \mathcal{A}_k \textit{ і } \mathcal{A}_k \textit{ є або гіперболічною нерухомою точко або гіперболічним}$$
$$\textit{граничним циклом рівняння } \dot{x} = b_\tau(x) \textit{ на } \partial\Omega, \textit{ де } b_\tau(x) \textit{ позначає}$$
$$\textit{тангенціальну компоненту } b(x) \textit{ на } \partial\Omega. \quad (2.2.15)$$

Для формулювання основного результату пов'яжемо з кожною компонентою $\mathcal{A}_k$ множини $\mathcal{A}_H$ число $\sigma(\mathcal{A}_k)$ наступним чином. Якщо $\mathcal{A}_k$ є нерухомою точкою $\{\xi\}$ рівняння $\dot{x} = b(x)$ і $\xi \in \Omega$, тоді лінеарізацією біля ξ одержуємо рівняння $\dot{z} = B(\xi)z$ і визначаємо $\sigma(\mathcal{A}_k)$ формулою

$$\sigma(\mathcal{A}_k) = -\sum_{\theta_i > 0} \theta_i + c(\xi), \tag{2.2.16}$$

де θ_i – дійсні частини власних значень матриці $B(\xi)$. Зазначимо, що гіперболичність нерухомих точок означає, що власні значення $B(\xi)$ не мають нульових дійсних частин. Якщо $\mathcal{A}_k = \{\xi\}$ і $\xi \in \partial\Omega$, то розглянемо рівняння $\dot{x} = b_\tau(x)$ на $\partial\Omega$ в околі точки ξ. Перейдемо до лінеаризованного рівняння $\dot{z} = B_\tau(\xi)z$ в дотичній площині до $\partial\Omega$ в точці ξ, позначимо через $\tilde{\theta}_i$ дійсні частини власних значень $B_\tau(\xi)$ і покладемо

$$\sigma(\mathcal{A}_k) = -\sum_{\tilde{\theta}_i > 0} \tilde{\theta}_i + c(\xi), \tag{2.2.17}$$

Розглянемо тепер випадок коли $\{\mathcal{A}_k\} \subset \Omega$ є граничним циклом рівняння $\dot{x} = b(x)$. Нехай $P > 0$ – період цикла і нехай Θ_i – абсолютні значення лінеаризованого відображення Пуанкаре. Визначимо $\sigma(\mathcal{A}_k)$ формулою

$$\sigma(\mathcal{A}_k) = -\frac{1}{P} \sum_{\Theta_i > 1} \log \Theta_i + \frac{1}{P} \int_0^P c(\xi(t))\mathrm{d}t, \tag{2.2.18}$$

де $\xi(t) \in \mathcal{A}_k$ задовольняє $\dot{\xi} = b(\xi)$.

Нарешті, у випадку коли $b_\nu > 0$ на $\mathcal{A}_k$ і $\mathcal{A}_k$ є граничним циклем рівняння $\dot{x} = b_\tau(x)$ на $\partial\Omega$, покладемо

$$\sigma(\mathcal{A}_k) = -\frac{1}{P}\sum_{\widetilde{\Theta}_i>1}\log\widetilde{\Theta}_i + \frac{1}{P}\int_0^P c(\xi(t))\mathrm{d}t, \tag{2.2.19}$$

де $\dot{\xi} = b_\tau(\xi)$ і $\xi(t) \in \mathcal{A}_k$, P – період, і $\widetilde{\Theta}_i$ – абсолютні значення власних значень лінеаризованого відображення Пуанкаре.

Теорема 2.2.1. *Нехай виконуються умови (**a1**)–(**a3**), і припустимо, що множина Обрі $\mathcal{A}_H$ задовольняє (2.2.13), (2.2.14) і (2.2.15). Тоді перше власне значення λ_ε задачі (2.2.1)–(2.2.2) збігається при $\varepsilon \to 0$ до*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lambda_\varepsilon = \max\Big\{\sigma(\mathcal{A}_k); \mathcal{A}_k \subset \mathcal{A}_H\Big\}, \tag{2.2.20}$$

де $\sigma(\mathcal{A}_k)$ задається (2.2.16) або (2.2.17) якщо $\mathcal{A}_k$ є нерухомою точкою в Ω або на $\partial\Omega$, і $\sigma(\mathcal{A}_k)$ визначається (2.2.18) або (2.2.19) якщо $\mathcal{A}_k$ є граничним циклом в Ω або на $\partial\Omega$. Крім того, якщо максимум в (2.2.20) досягається точно на одній компоненті $\mathcal{M} := \mathcal{A}_{k_0}$, тоді масштабоване логарифмічне перетворення $W_\varepsilon = -\varepsilon\log u_\varepsilon$ першої власної функції u_ε (нормалізованої рівністю $\max u_\varepsilon = 1$) збігається рівномірно в $\overline{\Omega}$ до максимального в'язкісного розв'язку W задачі (2.2.7)-(2.2.8), який дорівнює нулю на $\mathcal{M}$, тобто $W(x) = d_H(x, \mathcal{M})$.

2.2.2 Гранична задача

В цьому підрозділі за допомогою техніки в'язкісних розв'язків виконується граничний перехід в рівнянні (2.2.4) і крайовій умові (2.2.5) при $\varepsilon \to 0$. Для цього встановлюються рівномірні оцінки для перших частинних похідних функцій W_ε і застосовуються стандартні міркування, що спираються на принцип максимуму.

На першому кроці, користуючись рівнянням (2.2.4) в точках максимуму і мініимуму функції $W_\varepsilon(x)$ встановлюються рівномірні оцінки для власних значень.

Лема 2.2.2. *Перше власне значення λ_ε задовольняє нерівності* $\min c(x) \leq \lambda_\varepsilon \leq \max c(x)$.

Наступним кроком застосовується метод С.Н. Бернштейна (що було запропоновано в [27], [28] і далі розвинуто в [123], [186] та інших роботах).

Лема 2.2.3. *Припустимо, що власна функція u_ε є нормалізованою рівністю* $\max u_\varepsilon = 1$ *(тобто* $\min W_\varepsilon = 0$*). Тоді* $\|W_\varepsilon\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} \leq C$ *зі сталою C, що не залежить від ε.*

Доведення. Слідуючи [130] помітимо, що з крайової умови $\frac{\partial W_\varepsilon}{\partial \nu} = 0$ випливає поточкова оцінка

$$\frac{\partial}{\partial \nu}|\nabla W_\varepsilon|^2 \leq C|\nabla W_\varepsilon|^2 \qquad \text{на } \partial\Omega.$$

Отже, можна підібрати функцію $\phi \in C^2(\overline{\Omega})$, таку що

$$\frac{\partial}{\partial \nu}\Big(\phi|\nabla W_\varepsilon|^2\Big) \leq -\Big(\phi|\nabla W_\varepsilon|^2\Big) \qquad \text{на } \partial\Omega. \tag{2.2.21}$$

Для того щоб вивести рівномірні оцінки для $\omega_\varepsilon(x) = \phi(x)|\nabla W_\varepsilon(x)|^2$ застосуємо міркування аналогічні [84, Лема 1.2]. З огляду на (2.2.21), або $|\nabla W_\varepsilon| \equiv 0$ (і Лему доведено), або $\max w_\varepsilon$ досягається в деякій внутрішній точці $\xi \in \Omega$. В останньому випадку маємо $\nabla \omega_\varepsilon(\xi) = 0$ і

$$a_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\Big(\phi|\nabla W_\varepsilon|^2\Big) \leq 0 \qquad \text{at } x = \xi,$$

тобто

$$\begin{aligned} 2\varepsilon\phi a_{ij}\frac{\partial^2 W_\varepsilon}{\partial x_i \partial x_k}\frac{\partial^2 W_\varepsilon}{\partial x_j \partial x_k} \leq -2\varepsilon\phi a_{ij}\frac{\partial^3 W_\varepsilon}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}\frac{\partial W_\varepsilon}{\partial x_k} - 4\varepsilon a_{ij}\frac{\partial \phi}{\partial x_j}\frac{\partial^2 W_\varepsilon}{\partial x_i \partial x_k}\frac{\partial W_\varepsilon}{\partial x_k} \\ - \varepsilon a_{ij}\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j}|\nabla W_\varepsilon|^2. \end{aligned} \tag{2.2.22}$$

Тоді, скориставшись (2.2.4) знаходимо

$$-\varepsilon\phi a_{ij}\frac{\partial^3 W_\varepsilon}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}\frac{\partial W_\varepsilon}{\partial x_k} \leq \varepsilon\phi\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}\frac{\partial^2 W_\varepsilon}{\partial x_i \partial x_j}\frac{\partial W_\varepsilon}{\partial x_k} + C\Big(\omega_\varepsilon^{3/2} + \omega_\varepsilon + \omega_\varepsilon^{1/2} + 1\Big), \text{ в } x = \xi, \tag{2.2.23}$$

де також використано той факт, що $\nabla \omega_\varepsilon(\xi) = 0$. Підставимо (2.2.23) в (2.2.22):

$$\varepsilon \frac{\partial^2 W_\varepsilon}{\partial x_i \partial x_k} \frac{\partial^2 W_\varepsilon}{\partial x_i \partial x_k} \leq C\Big(\omega_\varepsilon^{3/2} + 1\Big), \qquad \text{в } x = \xi. \tag{2.2.24}$$

З іншого боку, з (2.2.4) випливає

$$\omega_\varepsilon \leq C\left(\varepsilon \sum \left| \frac{\partial^2 W_\varepsilon}{\partial x_i \partial x_j} \right| + 1\right). \tag{2.2.25}$$

З (2.2.24) і (2.2.25) знаходимо $\omega_\varepsilon \leq C$, Лему доведено. □

Апріорні оцінки з Лем 2.2.2 і 2.2.3 дозволяють перейти до границі в (2.2.4) за допомогою стандартних міркувань. Дійсно, з точністю до підпослідовності, $W_\varepsilon \to W$ рівномірно в $\overline{\Omega}$. Розглянемо тестову функцію $\Phi \in C^\infty(\overline{\Omega})$ і припустимо, що $W - \Phi$ адосягає строгий максимум в точці ξ. Тоді існує точка локального максимуму ξ_ε функції $W_\varepsilon - \Phi$, така що $\xi_\varepsilon \to \xi$ при $\varepsilon \to 0$. Якщо $\xi_\varepsilon \in \Omega$, тоді $\nabla W_\varepsilon(\xi_\varepsilon) = \nabla \Phi(\xi_\varepsilon)$ і

$$a_{ij} \frac{\partial^2 W_\varepsilon}{\partial x_i \partial x_j}(\xi_\varepsilon) \leq a_{ij} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_j}(\xi_\varepsilon),$$

в противному випадку ($\xi_\varepsilon \in \partial\Omega$) маємо $\frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(\xi_\varepsilon) \leq 0$. Користуючись (2.2.4) і Лемою 2.2.2, у границі $\varepsilon \to 0$ знаходимо

$$H(\nabla \Phi(\xi), \xi) \leq 0 \text{ якщо } \xi \in \Omega, \quad \text{і } \min\left\{ H(\nabla \Phi(\xi), \xi), \frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(\xi) \right\} \leq 0 \text{ якщо } \xi \in \partial\Omega.$$

Застосуємо аналогічні міркування до випадку коли ξ є строгим мінімумом $W - \Phi$ і, таким чином, дістанемо висновку, що W є в'язкісним розв'язком (2.2.7)–(2.2.8).

2.2.3 Границя власних значень і селекція розв'язку задачі (2.2.7)–(2.2.8)

З огляду на результати Підрозділу 2.2.2 можна припускати, що, з точністю до підпослідовності, власні значення λ_ε збігаються до скінченої границі λ і функції

W_ε рівномірно збігаються в $\overline{\Omega}$ до розв'язку W задачі (2.2.7)–(2.2.8) при $\varepsilon \to 0$. Покажемо, що λ і $W(x)$ дійсно описуються Теоремою 2.2.1. Доведення розбито на чотири кроки.

Крок I (Вагомі компоненти $\mathcal{A}_H$). Нагадаємо визначення часткового відношення порядку $\preceq$ на $\mathcal{A}_H$, що було введено в Підрозділі 2.1.7:

$$\mathcal{A}' \preceq \mathcal{A}'' \iff W(\mathcal{A}'') = d_H(\mathcal{A}'', \mathcal{A}') + W(\mathcal{A}'). \tag{2.2.26}$$

Оскільки функція W є розв'язком (2.2.7)–(2.2.8), вона є постійною на кожній зв'язній компоненті $\mathcal{A}_\mathcal{H}$. Тому домовимося писати $W(\mathcal{A}) := W(\xi)$, $\xi \in \mathcal{A}$, для зв'язної компоненти $\mathcal{A}$ множини $\mathcal{A}_\mathcal{H}$.

Оскільки множина Обрі має скінчене число зв'язних компонент (умова (2.2.13)), існує щонайменше одна мінімальна компонента $\mathcal{M} := \mathcal{A}_{k_0}$ (така що $\forall \mathcal{A}_k \neq \mathcal{M}$, або $\mathcal{M} \preceq \mathcal{A}_k$ або $\mathcal{M}$ і $\mathcal{A}_k$ не порівнюються). Тоді (див. Підрозділ 2.1.7)

$$W(x) = d_H(x, \mathcal{M}) + W(\mathcal{M}) \text{ в } U \cap \overline{\Omega}, \quad \text{де } U \text{ – деякий окіл } \mathcal{M}. \tag{2.2.27}$$

Як і в Підрозділі 2.1.7 таку компоненту (для якої виконується (2.2.27)) будемо називати вагомою.

Крок II (Оцінка зверху для власних значень). Головним техничним результатом в доведенні Теореми 2.2.1 є наступна Лема, яку доведено в наступних чотирьох підрозділах присвяченим чотирьом якісно різним випадкам структури $\mathcal{M}$.

Лема 2.2.4. *Нехай $\mathcal{M}$ – вагома компонента множини Обрі $\mathcal{A}_H$, що задовольняє умову (2.2.14) або (2.2.15). Тоді, для достатньо малих $\delta > 0$, існують неперервні функціїї $W_\delta^\pm(x)$, $W_{\delta,\varepsilon}^\pm(x)$ і околи U_δ множини $\mathcal{M}$, такі що*

$$W_\delta^\pm(x) = 0 \quad \text{на} \quad \mathcal{M}, \text{ і } W_\delta^-(x) < W(x) - W(\mathcal{M}) < W_\delta^+(x) \quad \text{в } U_\delta \cap \overline{\Omega} \setminus \mathcal{M}, \tag{2.2.28}$$

$W^{\pm}_{\delta,\varepsilon} \in C^2(U_\delta \cap \overline{\Omega})$, $W^{\pm}_{\delta,\varepsilon} \to W^{\pm}_{\delta}$ *рівномірно в* $U_\delta \cap \overline{\Omega}$ *при* $\varepsilon \to 0$, *і*

$$\liminf_{\delta\to 0}\ \liminf_{\varepsilon\to 0,\,\xi_\varepsilon\to\mathcal{M}}\Big(-a_{ij}(\xi_\varepsilon)\frac{\partial^2 W^+_{\delta,\varepsilon}}{\partial x_i \partial x_j}(\xi_\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon}H(\nabla W^+_{\delta,\varepsilon}(\xi_\varepsilon),\xi_\varepsilon) + c(\xi_\varepsilon)\Big) \geq \sigma(\mathcal{M}). \tag{2.2.29}$$

$$\limsup_{\delta\to 0}\ \limsup_{\varepsilon\to 0,\,\xi_\varepsilon\to\mathcal{M}}\Big(-a_{ij}(\xi_\varepsilon)\frac{\partial^2 W^-_{\delta,\varepsilon}}{\partial x_i \partial x_j}(\xi_\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon}H(\nabla W^-_{\delta,\varepsilon}(\xi_\varepsilon),\xi_\varepsilon) + c(\xi_\varepsilon)\Big) \leq \sigma(\mathcal{M}). \tag{2.2.30}$$

Крім того, якщо $U_\delta \cap \partial\Omega \neq \emptyset$ *тоді функції* $W^{\pm}_{\delta,\varepsilon}$ *також задовольняють* $\frac{\partial W^+_{\delta,\varepsilon}}{\partial \nu} > 0$ *на* $U_\delta \cap \partial\Omega$, *і* $\frac{\partial W^-_{\delta,\varepsilon}}{\partial \nu} < 0$ *на* $U_\delta \cap \partial\Omega$.

Лема 2.2.4 дозволяє ідентифікувати границю λ якщо відомо вагому компоненту $\mathcal{M}$ множини $\mathcal{A}_H$. Розглянемо різницю $W_\varepsilon - W^-_{\delta,\varepsilon}$, де $W^-_{\delta,\varepsilon}$ – тестові функції описані в Лемі 2.2.4. Згідно з (2.2.28) функція $W - W^-_\delta - W(\mathcal{M})$ дорівнює нулю на $\mathcal{M}$, проте вона є строго додатною в виколотому околі $\mathcal{M}$. Тоді, оскільки $W_\varepsilon - W^-_{\delta,\varepsilon}$ збігаються рівномірно до $W - W^-_\delta$ при $\varepsilon \to 0$ в околі $\mathcal{M}$, існує послідовність локальних мінімумов ξ_ε функцій $W_\varepsilon - W^-_{\delta,\varepsilon}$, така що $\xi_\varepsilon \to \mathcal{M}$. Крім того, якщо $\mathcal{M} \cap \partial\Omega \neq \emptyset$ тоді $\frac{\partial W^-_{\delta,\varepsilon}}{\partial \nu} < \frac{\partial W_\varepsilon}{\partial \nu} = 0$ на $\partial\Omega$ (локально, біля $\mathcal{M}$) отже $\xi_\varepsilon \in \Omega$ для достатньо малих ε. Для таких ε маємо

$$\nabla W_\varepsilon = \nabla W^-_{\delta,\varepsilon} \ \ \text{і} \ \ -a_{ij}\frac{\partial^2 W_\varepsilon}{\partial x_i \partial x_j} \leq -a_{ij}\frac{\partial^2 W^-_{\delta,\varepsilon}}{\partial x_i \partial x_j} \ \ \text{в} \ \ x = \xi_\varepsilon.$$

Отже,

$$\begin{aligned}\lambda_\varepsilon &= -a_{ij}(\xi_\varepsilon)\frac{\partial^2 W_\varepsilon}{\partial x_i \partial x_j}(\xi_\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon}H(\nabla W_\varepsilon(\xi_\varepsilon),\xi_\varepsilon) + c(\xi_\varepsilon)\\ &\leq -a_{ij}(\xi_\varepsilon)\frac{\partial^2 W^-_{\delta,\varepsilon}}{\partial x_i \partial x_j}(\xi_\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon}H(\nabla W^-_{\delta,\varepsilon}(\xi_\varepsilon),\xi_\varepsilon) + c(\xi_\varepsilon).\end{aligned}$$

Таким чином, скориставшись (2.2.30) можна перейти до послідовно до $\limsup$ при $\varepsilon \to 0$ і потім при $\delta \to 0$, в результаті маємо $\limsup_{\varepsilon\to 0}\lambda_\varepsilon \leq \sigma(\mathcal{M})$. Так само можна знайти оцінку зверху, отже

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lambda_\varepsilon = \sigma(\mathcal{M}). \tag{2.2.31}$$

Проте, оскільки компонета $\mathcal{M}$ є невідомою (вона залежить від W і, таким чином, від вибору підпослідовності на початку підрозділу) рівність (2.2.31) дає тільки оцінку зверху

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \lambda_\varepsilon \le \max\Big\{\sigma(\mathcal{A}_k); \mathcal{A}_k \subset \mathcal{A}_H\Big\}, \tag{2.2.32}$$

де $\limsup_{\varepsilon\to 0}$ взято для всієї сім'ї $\{\lambda_\varepsilon,\ \varepsilon > 0\}$.

Крок III (Оцінка знизу для власних значень). Розглянемо компоненту $\mathcal{A}$ множини Обрі $\mathcal{A}_H$, таку що $\sigma(\mathcal{A}) = \max\{\sigma(\mathcal{A}_k);\ \mathcal{A}_k \subset \mathcal{A}_H\}$. Введемо гладку функцію $\rho(x)$, таку що

$$\rho(x) \ge 0 \text{ in } \overline{\Omega}, \quad \rho(x) = 0 \text{ в околі } \mathcal{A}, \text{ і } \rho(x) > 0, \text{ коли } x \in \mathcal{A}_H \setminus \mathcal{A},$$

і розглянемо наступну допоміжну задачу на власні значення:

$$\varepsilon a_{ij}(x)\frac{\partial^2 \overline{u}_\varepsilon}{\partial x_i \partial x_j} + b_i(x)\frac{\partial \overline{u}_\varepsilon}{\partial x_i} + \Big(c(x) - \frac{1}{\varepsilon}\rho(x)\Big)\overline{u}_\varepsilon = \overline{\lambda}_\varepsilon \overline{u}_\varepsilon \text{ в } \Omega, \tag{2.2.33}$$

з умовою Неймана $\frac{\partial \overline{u}_\varepsilon}{\partial \nu} = 0$ на $\partial\Omega$. Згідно з Теоремою Крейна-Рутмана перше власне значення $\overline{\lambda}_\varepsilon$ є дійсним і простим, і відповідна власна функція $\overline{u}_\varepsilon$, нормалізована рівністю $\max_\Omega \overline{u}_\varepsilon = 1$, задовольняє $\overline{u}_\varepsilon > 0$ в Ω. Зазначимо, що спряжена задача також має знакопостійну власну функцію. Тоді

$$\overline{\lambda}_\varepsilon \le \lambda_\varepsilon. \tag{2.2.34}$$

Дійсно, у противному випадку

$$\varepsilon a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x_i \partial x_j} + b_i(x)\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i} + \Big(c(x) - \frac{1}{\varepsilon}\rho(x)\Big)u_\varepsilon - \overline{\lambda}_\varepsilon u_\varepsilon = -\Big(\overline{\lambda}_\varepsilon - \lambda_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\rho(x)\Big)u_\varepsilon < 0 \text{ в } \Omega. \tag{2.2.35}$$

З іншого боку, згідно з Теоремою Фредгольма права частина (2.2.35) має бути ортогональною (в $L^2(\Omega)$) до кожної власної функції задачі спряженої до (2.2.33). Остання задача має знакопостійну власну функцію, знайдене протирічча доводить (2.2.34).

Покладемо $\overline{W}_\varepsilon := -\varepsilon \log \overline{u}_\varepsilon$, тобто $\overline{u}_\varepsilon = e^{-\overline{W}_\varepsilon/\varepsilon}$. Міркування аналогічні Підрозділу 2.2.2 показують, що, з точністю до підпослідовності, функції $\overline{W}_\varepsilon$ збігаються (рівномірно в $\overline{\Omega}$) до в'язкісного розв'язку $\overline{W}$ задачі

$$H(\nabla \overline{W}(x), x) - \rho(x) = \Lambda \quad \text{в } \Omega \tag{2.2.36}$$

з крайовою умовою $\frac{\partial \overline{W}}{\partial \nu}=0$, де $\Lambda=\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\overline{\lambda}_\varepsilon$. Зазначимо, що міркування аналогічні Лемі 2.2.2 дають оцінки вигляду $-\frac{C}{\varepsilon}\le\overline{\lambda}_\varepsilon\le C$ зі сталою $C>0$, що не залежить від ε. Тим не менш, цих оцінок достатньо для виводу рівняння (2.2.36) з умовою Неймана на межі. Крім того, оскільки $\rho=0$ в околі $\mathcal{A}$ можна показати, що $\Lambda=0$, користуючись тестовими кривими η з (2.2.12) в варіаційному визначенні Λ (див. [104]),

$$\Lambda=-\lim_{T\to\infty}\inf\Big\{\frac{1}{T}\int_0^T\big(L(-v,\eta)+\rho(\eta)\big)\,\mathrm{d}t;\qquad \eta\text{ є розв'язком (2.2.10) з }\eta(0)=x\in\overline{\Omega}\Big\}.$$

Зокрема, маємо

$$\overline{W}(x)=d_H(x,\mathcal{A})\text{ в околі }\mathcal{A},$$

де $d_H(x,y)$ – функція відстані задана (2.2.11). Тоді, за допомогою міркувань аналогічних тим, що використано у другому кроці, знаходимо

$$\overline{\lambda}_\varepsilon\to\sigma(\mathcal{A}).$$

З огляду на (2.2.34) це дає оцінку знизу $\liminf\lambda_\varepsilon\ge\max\big\{\sigma(\mathcal{A}_k);\ \mathcal{A}_k\in\mathcal{A}_H\big\}$, яка, в комбінації з (2.2.32), дає формулу (2.2.20).

Крок IV. Залишається вибрати розв'язок задачі (2.2.7)–(2.2.8), який відповідає границі функцій $W_\varepsilon(x)$. Але це робиться так само як в доведенні Теореми 2.1.4 (в кінці Підрозділу 2.1.7).

Теорему 2.2.1 доведено. □

2.2.4 Тестова функція: випадок нерухомої точки в Ω

Головною технічною частиною в доведенні Теореми 2.2.1 є побудова тестових функцій, що задовольняють умови Леми 2.2.4 для різних типів компонент множини Обрі $\mathcal{A}_H$. Спочатку розглянемо випадок коли нерухома точка $\xi\in\Omega$ рівняння $\dot{x}=b(x)$ є вагомою компонентою $\mathcal{A}_H$.

Можна вважати, що $W(\xi) = 0$ (віднявши сталу якщо необхідно), тоді

$$W(x) = d_H(x, \xi) \quad \text{в околі } U(\xi) \text{ точки } \xi. \tag{2.2.37}$$

Вивчимо локальну поведінку $W(x)$ біля ξ. Розглянемо, для достатньо малих z, анзац

$$W(z + \xi) = \Gamma_{ij} z_i z_j + o(|z|^2) \tag{2.2.38}$$

з симетричною $N \times N$ матрицею Γ. Підставимо (2.2.38) в (2.2.7) і зберемо квадратичні члени, це веде до квадратичного рівняння Ріккаті

$$4\Gamma Q \Gamma - \Gamma B - B^* \Gamma = 0, \tag{2.2.39}$$

де $Q = \Big(a_{ij}(\xi)\Big)_{i,j=\overline{1,N}}$, $B = \Big(\frac{\partial b_i}{\partial x_j}(\xi)\Big)_{i,j=\overline{1,N}}$.

Покажемо, що (2.2.38) є вірним якщо вибрати максимальний симетричний розв'язок Γ рівняння (2.2.39); результат про існування такого розв'язку доведено, наприклад, в [125] або [1] . Для цього розглянемо розв'язок D матричного рівняння Ляпунова

$$D(4\Gamma Q - B) + (4\Gamma Q - B)^* D = 2I, \tag{2.2.40}$$

який визначено формулою

$$D = 2\int_{-\infty}^{0} e^{(4\Gamma Q - B)^* t} e^{(4Q\Gamma - B)t} \mathrm{d}t. \tag{2.2.41}$$

З Теореми 9.1.3 в [125] випливає, що всі власні значення матриці $4Q\Gamma - B$ мають додатні дійсні частини, отже інтеграл в (2.2.41) збігається. Покладемо

$$\Gamma_\delta^\pm = \Gamma \pm \delta D.$$

Тоді Γ_δ^- задовольняє

$$4\Gamma_\delta^- Q \Gamma_\delta^- - \Gamma_\delta^- B - B^* \Gamma_\delta^- \le -\delta I \tag{2.2.42}$$

для достатньо малих $\delta > 0$.

Введемо квадратичну функцію $W_\delta^-(x) := \Gamma_\delta^-(x-\xi)\cdot(x-\xi)$. Завдяки (2.2.42) ця функція задовольняє

$$H(\nabla W_\delta^-(x), x) \le -\frac{\delta}{2}|x-\xi|^2 \quad \text{в околі } \xi. \tag{2.2.43}$$

Тоді маємо наступний результат, чиє доведення є тотожним доведенню Леми 2.1.18 Підрозділу 2.1.7 (див. також міркування в доведенні Леми 2.2.7, нижче).

Лема 2.2.5. *Строга поточкова нерівність $W_\delta^-(x) < W(x)$ є справедливою у виколотому околі ξ для достатньо малих $\delta > 0$.*

Розглянемо тепер функцію $W_\delta^+(x) := \Gamma_\delta^+(x-\xi)\cdot(x-\xi)$.

Лема 2.2.6. *Строга поточкова нерівність $W_\delta^+(x) > W(x)$ є справедливою у виколотому околі ξ для достатньо малих $\delta > 0$.*

Доведення. Згідно з (2.2.37) є справедливою наступна нерівність

$$W(x) \le \int_0^t L(-v(\tau), \xi + \eta(\tau))\mathrm{d}\tau$$

для кожного керування $v(\tau)$, такого що розв'язок рівняння

$$\dot{\eta}(\tau) = v(\tau), \quad \eta(0) = z := x - \xi$$

дорівнює нулю в момент t і залишається в малому околі 0 для всіх $0 \le \tau \le t$. Можна взяти $t = +\infty$ в якості кінцевого моменту і побудувати $v(\tau)$ за наступною формулою $v(\tau) = -(4Q\Gamma - B)\eta(\tau)$, де $\eta(\tau)$ є розв'язком рівняння

$$\dot{\eta} = -(4Q\Gamma - B)\eta, \quad \eta(0) = z.$$

Як вже було сказано, всі власні значення матриці $4Q\Gamma - B$ мають додатну дійсну частину (див. Теорему 9.1.3. в [125]), отже $|\eta(\tau)| \le C|z|$ і $\eta(\tau) \to 0$ при $\tau \to +\infty$. Більш того, збіжність є експоненціальною.

Таким чином, маємо

$$\begin{aligned} L(-v(\tau), \eta(\tau) + \xi) &= \frac{1}{4}a^{ij}(\xi+\eta)(-\dot{\eta}_i + b_i(\eta))(-\dot{\eta}_i + b_i(\eta)) = \\ &= \frac{1}{4}a^{ij}(\xi)(-\dot{\eta}_i + B_{ik}\eta_k)(-\dot{\eta}_j + B_{jl}\eta_l) + O(|\eta|^3), \end{aligned}$$

де $\big(a^{ij}(x)\big)_{i,j=\overline{1,N}}$ позначає матрицю обернену до $\big(a_{ij}(x)\big)_{i,j=\overline{1,N}}$. Нагадаємо тепер, що $Q_{ij} = a_{ij}(\xi)$ і Γ є розв'язком рівняння (2.2.39). З огляду на ці факти можна записати

$$\begin{aligned}\int_0^\infty L(\eta+\xi, -v(\tau)) &= \frac{1}{4}\int_0^\infty a^{ij}(\xi)(-\dot\eta_i + B_{ik}\eta_k)(-\dot\eta_j + B_{jl}\eta_l) + O(|z|^3) = \\ &= -2\int_0^\infty \Gamma\eta\cdot\dot\eta \mathrm{d}\tau + \int_0^\infty \Gamma\eta\cdot(\dot\eta + B\eta)\mathrm{d}\tau + O(|z|^3) = \\ &= \Gamma z\cdot z + \int_0^\infty \eta\cdot(-4\Gamma Q\Gamma + \Gamma B + B^*\Gamma)\eta \mathrm{d}\tau + O(|z|^3) = \\ &= \Gamma_{ij}z_iz_j + O(|z|^3).\end{aligned}$$

Нарешті, оскільки $\Gamma_\delta^+ = \Gamma + \delta D$ with $D > 0$, то для достатно малих $z \neq 0$ маємо

$$W(z+\xi) \leq \Gamma z\cdot z + O(|z|^3) < \Gamma_\delta^+ z\cdot z.$$

□

Леми 2.2.5 і 2.2.6 показують, що функції $W_\delta^\pm$ дійсно задовольняють умови Леми 2.2.4. Для завершення доведення Леми 2.2.4 у випадку коли вагома компонента $\mathcal{M}$ є нерухомою точкою в Ω, визначимо функції $W_{\delta,\varepsilon}^\pm$ рівностями $W_{\delta,\varepsilon}^\pm := W_\delta^\pm$. Завдяки (2.2.43) маємо

$$\limsup_{\varepsilon\to 0}\Big(a_{ij}(\xi_\varepsilon)\frac{\partial^2 W_{\delta,\varepsilon}^-}{\partial x_i\partial x_j}(\xi_\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon}H(\nabla W_{\delta,\varepsilon}^-(\xi_\varepsilon), \xi_\varepsilon) + c(\xi_\varepsilon)\Big) \leq -2a_{ij}(\xi)(\Gamma_{ij} - \delta D_{ij}) + c(\xi), \tag{2.2.44}$$

як тільки $\xi_\varepsilon \to \xi$ і $\varepsilon \to 0$. Згідно з Твердженням G.1 (Додаток G) $-2a_{ij}(\xi)\Gamma_{ij} + c(\xi) = \sigma(\{\xi\})$, тобто з (2.2.44) випливає (2.2.30). Аналогічно перевіряється, що $W_{\delta,\varepsilon}^+$ задовольняє (2.2.29).

2.2.5 Тестова функція: випадок нерухомої точки на $\partial\Omega$

Розглянемо тепер випадок, коли вагомою компонентою $\mathcal{A}_H$ є гіперболічна нерухома точка ξ рівняння $\dot x = b_\tau(x)$ на $\partial\Omega$, де $b_\tau(x)$ позначає тангенціальну компоненту векторного поля $b(x)$ на $\partial\Omega$. Як і раніше, без зменшення загальності, вважаємо, що $W(\xi) = 0$.

Зручно перейти до локальних координат $x = X(z_1, \ldots, z_N)$ в околі $\partial\Omega$ таким чином, що $z_N = z_N(x)$ є (евклідовою) відстанню від x до $\partial\Omega$ ($z_N(x) > 0$ якщо $x \in \Omega$) і $z' = (z_1, ..., z_{N-1})$ – координати на $\partial\Omega$ в околі точки ξ. Ці координати виберемо так щоб відображення $X(z', z_N)$ мало C^2-гладкість і $z'(\xi) = 0$, крім того матриця $\left(\frac{\partial X_i}{\partial z_j}\right)_{i,j=\overline{1,N}}$ в точці з $z' = 0$ і $z_N = 0$ (точка ξ) повинна бути ортогональною. В нових змінних рівняння (2.2.7) і (2.2.4) набувають вигляд

$$S(\nabla_z W, z) = 0 \tag{2.2.45}$$

і

$$-\varepsilon a_{ij}\left(X(z)\right)\mathcal{T}_{ki}^{-1}(z)\frac{\partial}{\partial z_k}\left(\mathcal{T}_{lj}^{-1}(z)\frac{\partial W_\varepsilon}{\partial z_l}\right)+S(\nabla_z W_\varepsilon, z) = \varepsilon\big(\lambda_\varepsilon - c(X(z))\big), \tag{2.2.46}$$

де

$$S(p, z) = a_{ij}(X(z))\mathcal{T}_{ki}^{-1}(z)\mathcal{T}_{lj}^{-1}(z)p_k p_l - b_i(X(z))\mathcal{T}_{ki}^{-1}(z)p_k$$

і $\left(\mathcal{T}_{ij}^{-1}(z)\right)_{i,j=\overline{1,N}}$ – обернена матриця до $\left(\frac{\partial X_i}{\partial z_j}(z)\right)_{i,j=\overline{1,N}}$. Зазначимо, що згідно з умовою (2.2.15)

$$b_i(X(z))\mathcal{T}_{Ni}^{-1}(z) < 0 \ \text{ для достатньо малих } |z|. \tag{2.2.47}$$

Як і в Підрозділі 2.2.4, головний член асимптотичного розкладення W в околі точки ξ будується в вигляді квадратичної функції. З огляду на крайову умову $\frac{\partial W}{\partial z_N} = 0$ (умова (2.2.8) в нових координатах) запишемо анзац

$$W(X(z', z_N)) = \tilde{\Gamma}_{ij} z_i' z_j' + o(|z|^2 + z_N^2).$$

з симметричною $(N-1)\times(N-1)$ матрицею $\widetilde{\Gamma}$, що задовольняє рівняння Ріккаті

$$4\tilde{\Gamma}\tilde{Q}\tilde{\Gamma} - \tilde{\Gamma}\tilde{B} - \tilde{B}^*\tilde{\Gamma} = 0, \tag{2.2.48}$$

де $\tilde{Q} = \left(a_{ij}(\xi)\mathcal{T}_{ki}^{-1}(0)\mathcal{T}_{lj}^{-1}(0)\right)_{k,l=\overline{1,N-1}}$ і $\tilde{B} = \left(\mathcal{T}_{ki}^{-1}(0)\frac{\partial b_i}{\partial x_j}(\xi)\frac{\partial X_j}{\partial z_l}(0)\right)_{k,l=\overline{1,N-1}}$. Зазначимо, що $\tilde{B}$ є нічим іншим як матрицею в рівнянні $\dot{z}' = \tilde{B}z'$ яке знайдено лінеарізацією рівняння $\dot{x} = b_\tau(x)$ біля ξ (при цьому мається на увазі останнє рівняння переписане в локальних координатах $z' = (z_1', \ldots, z_{N-1}')$ на $\partial\Omega$).

Виберемо в якості $\tilde{\Gamma}$ максимальний симетричний розв'язок (2.2.48), і нехай $\tilde{D}$ – розв'язок матричного рівняння Ляпунова

$$\tilde{D}(4\tilde{\Gamma}\tilde{Q} - \tilde{B}) + (4\tilde{\Gamma}\tilde{Q} - \tilde{B})^*\tilde{D} = 2I. \tag{2.2.49}$$

Згідно з Теоремою 9.1.3 в [125] всі власні значення матриці $4\tilde{\Gamma}\tilde{Q} - \tilde{B}$ мають додатні дійсні частини, отже (2.2.49) має єдиний розв'язок $\tilde{D}$, що визначається формулою

$$\tilde{D} = 2\int_{-\infty}^{0} e^{(4\tilde{\Gamma}\tilde{Q}-\tilde{B})^* t} e^{(4\tilde{\Gamma}\tilde{Q}-\tilde{B})t} \mathrm{d}t,$$

і $\tilde{D}$ є симетричною додатно визначеною матрицею. Введемо функції

$$W_\delta^\pm(z', z_N) = (\tilde{\Gamma} \pm \delta\tilde{D})_{ij} z_i' z_j' \pm \delta z_N^2, \tag{2.2.50}$$

які залежать від параметра $\delta > 0$.

Лема 2.2.7. *Нехай $\delta > 0$ є достатньо малим. Тоді, для малих $|z| \neq 0$, таких що $X(z) \in \overline{\Omega}$, маємо*

$$W_\delta^-(z) < W(X(z)) < W_\delta^+(z). \tag{2.2.51}$$

Доведення. З огляду на визначення $W_\delta^\pm$ достатньо довести (2.2.51) з нестрогими нерівностями і потім перейти до трошки більшого δ.

Доведення нерівності $W_\delta^- \leq W$ базується на наступних двох фактах. Перше, це представлення $W(x) = d_H(x, \xi)$ в околі ξ. Зазначимо крім того, що для заданого $\delta' > 0$ існує $\delta > 0$, таке що для $|x - \xi| < \delta$ мінімізацію в (2.2.11) можна звузити до тестових кривих $\eta(\tau)$ які не залишають множину $\{|\eta - \xi| < \delta'\}$ (у противному випадку, міркуючи як в Лемі 2.1.18 Підрозділу 2.1.7 можна показати, що ξ не є ізольованою точкою множини Обрі $\mathcal{A}_H$, всупереч (2.2.13)). Друге, розглядая функції $W_\delta^-(x) = W_\delta^-(X^{-1}(x))$ (з незначним зловживанням позначеннями) маємо для достатньо малих $\delta > 0$

$$H(\nabla W_\delta^-, x) \leq -\delta|x - \xi|^2 \text{ в } \Omega, \text{ і } \frac{\partial W_\delta^-}{\partial \nu} = 0 \text{ на } \partial\Omega, \tag{2.2.52}$$

коли $|x-\xi|<\delta'$ з $\delta'>0$, що не залежить від δ. Це випливає з конструкції (2.2.50) функцій $W_\delta^\pm$ і (2.2.48), (2.2.49), і також (2.2.47).

Припустимо, що $|x-\xi|<\delta$, і нехай $\eta(\tau)$ – розв'язок (2.2.10), що задовольняє $\eta(0)=x$, $\eta(t)=\xi$ з керуванням $v(\tau)$, таким що $|\eta(\tau)-\xi|<\delta'$ для всих $0\le\tau\le t$. Тоді

$$W_\delta^-(x)=-\int_0^t \nabla W_\delta^-(\eta)\cdot\dot\eta\,\mathrm{d}\tau=\int_0^t \nabla W_\delta^-(\eta)\cdot(-v(\tau))\,\mathrm{d}\tau,$$

де використано той факт, що $\frac{\partial W_\delta^-}{\partial\nu}=0$ на $\partial\Omega$. З нерівності Юнга-Фенхеля $p\cdot(-v)\le L(-v,\eta)+H(p,\eta)$ випливає, що

$$W_\delta^-(x)\le\int_0^t L(-v,\eta)\,\mathrm{d}\tau+\int_0^t H(\nabla W_\delta^-,\eta)\mathrm{d}\tau\le\int_0^t L(-v,\eta)\,\mathrm{d}\tau.$$

Отже з (2.2.11) знаходимо $W_\delta^-(x)\le W(x)$.

Для доведення другої нерівності в (2.2.51), для заданого $x=X(z',z_N)$ побудуємо тестову криву $\eta(\tau)$ спочатку на малому інтервалі $(0,\Delta t)$ формулою $\eta(\tau)=X(z',\zeta_N(\tau))$, де $\zeta_N(\tau)$ – розв'язок рівняння $\dot\zeta_N(\tau)=b_i(X(z',\zeta_N))\mathcal{T}_{Ni}^{-1}(z',\zeta_N)$ з початковою умовою $\zeta_N(0)=z_N$, і виберемо Δt з умов $\zeta_N(\Delta t)=0$, $\zeta_N(\tau)>0$ для $\tau<\Delta t$. Завдяки (2.2.47) маємо $\Delta t=O(z_N)$. Тоді, оскільки

$$\begin{aligned}\dot\eta_i=\frac{\partial X_i}{\partial z_N}(z',\zeta_N)b_k(\eta)\mathcal{T}_{Nk}^{-1}(z',\zeta_N)&=\frac{\partial X_i}{\partial z_j}(z',\zeta_N)b_k(\eta)\mathcal{T}_{jk}^{-1}(z',\zeta_N)\\&-\frac{\partial X_i}{\partial z_j'}(z',\zeta_N)b_k(\eta)\mathcal{T}_{jk}^{-1}(z',\zeta_N)=b_i(\eta)+O(|z|)\end{aligned}$$

(нагадаємо, що тангенціальна компонента b_τ на $\partial\Omega$ є нульовою в точці ξ) знаходимо

$$\int_0^{\Delta t} L(-\dot\eta,\eta)\mathrm{d}\tau=O(|z|^3). \tag{2.2.53}$$

Далі конструюється $\eta(\tau)$ для $\tau>\Delta t$, що з'єднує точку $X(z',0)$ і ξ. Слідуючи міркуіванням з Леми 2.2.6 введемо $\zeta'(\tau)$ – розв'язок рівняння $\dot\zeta'(\tau)=-(4\tilde Q\tilde\Gamma-\tilde B)\zeta'$ з початковою умовою $\zeta'(\Delta t)=z'$, і покладемо $\eta(\tau)=X(\zeta'(\tau),0)$. Тоді $\eta(\tau)$ задовольняє (2.2.10) для $\tau>\Delta t$ з

$$v(\tau):=\dot\eta(\tau)+\nu(\eta)b_\nu(\eta)-4\frac{\partial X}{\partial z_N}(\zeta',0)\mathcal{T}_{Ni}^{-1}(0)a_{ij}(\xi)\mathcal{T}_{lj}^{-1}(0)\tilde\Gamma_{lm}\zeta_m'$$

(зазначимо, що $\frac{\partial X}{\partial z_N}(\zeta', 0) = -\nu(\eta)$ і $b_\nu(\eta) + 4\mathcal{T}_{Ni}^{-1}(0)a_{ij}(\xi)\mathcal{T}_{lj}^{-1}(0)\Gamma_{lm}\zeta'_m > 0$ коли $|z'|$ є достатньо малим), і користуючись (2.2.48) одержуємо

$$\begin{aligned}\int_{\Delta t}^{\infty} L(-v(\tau), \eta(\tau))\,\mathrm{d}\tau &= \frac{1}{4}\int_{\Delta t}^{\infty} a^{ij}(\xi)(-v_i + b_i)(-v_j + b_j)\,\mathrm{d}\tau + O(|z|^3)\\ &= 4\int_{\Delta t}^{\infty} a^{ij}(\xi)\Big(\frac{\partial X_i}{\partial z'_k}(0)\tilde{Q}_{kl}\tilde{\Gamma}_{lm}\zeta'_m + \frac{\partial X_i}{\partial z_N}(0)\mathcal{T}_{Nk}^{-1}(0)a_{kl}(\xi)\mathcal{T}_{ml}^{-1}(0)\tilde{\Gamma}_{mn}\zeta'_n\Big)\\ &\qquad\times\Big(\frac{\partial X_j}{\partial z'_k}(0)\tilde{Q}_{kl}\tilde{\Gamma}_{lm}\zeta'_m + \frac{\partial X_j}{\partial z_N}(0)\mathcal{T}_{Nk}^{-1}(0)a_{kl}(\xi)\mathcal{T}_{ml}^{-1}(0)\tilde{\Gamma}_{mn}\zeta'_n\Big)\,\mathrm{d}\tau\\ &\qquad + O(|z|^3)\\ &= 4\int_{\Delta t}^{\infty}\tilde{\Gamma}\zeta'\cdot\tilde{Q}\tilde{\Gamma}\zeta'\,\mathrm{d}\tau + O(|z|^3)\\ &= -2\int_{\Delta t}^{\infty}\tilde{\Gamma}\zeta'\cdot\dot{\zeta}'\,\mathrm{d}\tau + \int_{\Delta t}^{\infty}\tilde{\Gamma}\zeta'\cdot\big(\dot{\zeta}' + \tilde{B}\zeta'\big)\,\mathrm{d}\tau + O(|z|^3)\\ &= \tilde{\Gamma}_{ij}z'_iz'_j + O(|z|^3).\end{aligned} \tag{2.2.54}$$

Шукана оцінка зверху $W \le W_\delta^+$ випливає з (2.2.53) і (2.2.54). □

Таким чином, функції $W_\delta^\pm$ задовольняють умови Леми 2.2.4, крім того з (2.2.50) в комбінації з (2.2.48), (2.2.49), і (2.2.47), випливає, що

$$S(\nabla_z W_\delta^+(z), z) \ge 0 \quad \text{і} \quad S(\nabla_z W_\delta^-(z), z) \le 0 \quad \text{коли } |z| \text{ є достатньо малим.}$$

Тоді покладемо

$$W_{\delta,\varepsilon}^\pm(z', z_N) = W_\delta^\pm(z', z_N) \mp \varepsilon^2 z_N.$$

Можна перевірити (аналогічно випадку внутрішньої нерухомої точки) що нерівності (2.2.29) і (2.2.30) є справедливими. Крім того, маємо $\mp\frac{\partial W_{\delta,\varepsilon}^\pm}{\partial z_N}(z', 0) > 0$, тобто $\pm\frac{\partial W_{\delta,\varepsilon}^\pm}{\partial \nu} > 0$ на $\partial\Omega$.

2.2.6 Тестова функція: випадок граничного циклу в Ω

У цьому підрозділі розглядається випадок коли вагома компонента множини Обрі $\mathcal{A}_H$ є граничним циклом і цей цикл повністю лежить в Ω. А саме, нехай $\xi(t)$ – періодичний розв'язок рівняння $\dot{\xi} = b(\xi)$ з періодом $P > 0$. Примускаємо, що $\mathcal{C} = \{\xi(t) : t \in [0, P)\} \subset \Omega$, $b(x) \neq 0$ на $\mathcal{C}$ і $\mathcal{C}$ – гіперболічний граничний цикл, тобто лінеарізоване відображення Пуанкаре пов'язане з цим циклом не має власних значень на одиничному колі. Для вивчення локальної поведінки W біля циклу $\mathcal{C}$, зробимо C^2-гладку заміну координат $x = X(z_1, \ldots, z_{N-1}, z_N)$ з z_N, що представляє довжину дуги уздовж циклу, і деякими фіксованими декартовими координатами $z' = (z_1, \ldots, z_{N-1})$ в гіперплощині ортогональній циклу. Також припускаємо, що $\mathcal{C}$ орієнтовано тангенціальним вектором, і $z' = 0$ на $\mathcal{C}$. Такою заміною координат рівняння (2.2.7) і (2.2.4) набувають вигляд аналогічний (2.2.45) і (2.2.46). Як раніше вважаємо, що $W(\mathcal{C}) = 0$, і в околі циклу (для достатньо малих $|z'|$) розглянемо наступний анзац для W:

$$W(X(z', z_N)) = \overline{\Gamma}_{ij}(t) z'_i z'_j + o(|z'|^2), \tag{2.2.55}$$

де t параметризує цикл згідно з рівнянням $\dot{\xi} = b(\xi)$, $t \in [0, P)$. Підставимо W в (2.2.45) і зберемо квадратичні члени, що призводить до рівняння

$$\dot{\overline{\Gamma}} = 4\overline{\Gamma}\,\overline{Q}\,\overline{\Gamma} - \overline{\Gamma}\,\overline{B} - \overline{B}^*\overline{\Gamma}, \tag{2.2.56}$$

де $\overline{Q}(t)$ і $\overline{B}(t)$ – P-періодичні $(N-1) \times (N-1)$ матриці чиї елементи задаються формулами

$$\overline{Q}_{kl}(t) = a_{ij}(\xi(t))\, \mathcal{T}_{ki}^{-1}\big(0, z_N(\xi(t))\big)\, \mathcal{T}_{lj}^{-1}\big(0, z_N(\xi(t))\big), \tag{2.2.57}$$

$$\begin{aligned} \overline{B}_{kl}(t) = {} & \mathcal{T}_{ki}^{-1}\big(0, z_N(\xi(t))\big) \frac{\partial b_i}{\partial x_j}\big(\xi(t)\big) \frac{\partial X_j}{\partial z_l}\big(0, z_N(\xi(t))\big) \\ & - \mathcal{T}_{kj}^{-1}\big(0, z_N(\xi(t))\big) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial X_j}{\partial z_l}\big(0, z_N(\xi(t))\big) \right). \end{aligned} \tag{2.2.58}$$

Нагадаємо, що $\mathcal{T}_{ij}^{-1}\big(z', z_N\big)$ позначають елементи матриці оберненої до $\big(\frac{\partial X_i}{\partial z_j}(z', z_N)\big)_{i,j=\overline{1,N}}$ і для стислості, трошки зловживаючи позначеннями, покладемо

$$\mathcal{T}_{ij}^{-1}(t) := \mathcal{T}_{ij}^{-1}(0, z_N(\xi(t)), \quad \mathcal{T}_{ij}(t) = \frac{\partial X_i}{\partial z_j}\big(0, z_N(\xi(t))\big). \tag{2.2.59}$$

Оскільки матриця $\overline{Q}(t)$ є додатно визначеною, відомо [1], що рівняння Ріккаті (2.2.56) має максимальний симетричний Р-періодичний розв'язок $\overline{\Gamma}(t)$. Покажемо, що представленяя (2.2.55) є дійсно вірним з максимальним розв'язком $\overline{\Gamma}(t)$, в припущенні гіперболічності $\mathcal{C}$. Зазначимо, що рівняння $\dot{z}' = \overline{B}z'$ відповідаїє лінеарізації рівняння $\dot{x} = b(x)$ в околі $\mathcal{C}$ (після переходу до локальних координат); таким чином припущення гіперболічності $\mathcal{C}$ означає, що фундаментальний розв'язок рівняння

$$\frac{\partial \overline{\Phi}}{\partial t}(t,\tau) = \overline{B}(t)\overline{\Phi}(t,\tau), \qquad \overline{\Phi}(\tau,\tau) = I,$$

обчислений в $t = \tau + P$, не має власних значень з абсолютною величиною 1.

Лема 2.2.8. *Наступна оцінка є справедливою рівномірно відносно $t \in [0, P)$ для достатньо малих $|z'|$,*

$$W(X(z', z_N(\xi(t))) \le \overline{\Gamma}_{ij}(t) z_i' z_j' + C|z'|^3 \log \frac{1}{|z'|}. \tag{2.2.60}$$

Доведення. Скористаємось варіаційним представленням (2.2.11). Природним припущенням про оптимальну форму кривої в (2.2.11) є наступне. У першому наближенні її перші $N-1$ локальні координати задаються задачею

$$\dot{\zeta}'(\tau) = (\overline{B} - 4\overline{Q}\,\overline{\Gamma})\zeta'(\tau), \quad \tau > t, \quad \zeta'(t) = z'. \tag{2.2.61}$$

Згідно з Теоремою 5.4.15 в [1] розв'язки (2.2.61) експоненціально прямують до нуля, $|\zeta'(\tau)| \le Ce^{-\delta\tau}|z'|$ з $\delta > 0$. Вибір останньої координати є складнішим. Покладемо $\eta(\tau) := X(\zeta'(\tau), z_N(\xi(\tau)) + \zeta_N(\tau))$ і виберемо $\zeta_N(\tau)$ таким чином щоб $|\zeta_N(\tau)| < C|z'|$, і

$$b_i(\eta(\tau)) - \dot{\eta}_i(\tau) = 4a_{ij}(\xi(\tau))\mathcal{T}_{lj}^{-1}\big(0, \xi(\tau)\big)\overline{\Gamma}_{lm}(\tau)\zeta_m'(\tau) + O(|z'|^2). \tag{2.2.62}$$

Існування такої функції ζ_N буде доведено пізніше.

З огляду на (2.2.62) знаходимо

$$\begin{aligned}\int_t^T L(-\dot{\eta}, \eta)\mathrm{d}\tau &= \frac{1}{4}\int_t^T a^{ij}(\eta(\tau))(-\dot{\eta}_i(\tau) + b_i(\eta(\tau)))(-\dot{\eta}_j(\tau) + b_j(\eta(\tau)))\mathrm{d}\tau \\ &\le 4\int_t^T (\overline{\Gamma}(\tau)\zeta'(\tau)) \cdot (\overline{Q}(\tau)\overline{\Gamma}(\tau)\zeta'(\tau))\mathrm{d}\tau + CT|z'|^3\end{aligned}$$

Тоді, внаслідок (2.2.61) і (2.2.56) маємо

$$\begin{aligned}\int_t^T L(-\dot\eta,\eta)\mathrm{d}\tau &\le \int_t^T (\overline{\Gamma}\zeta')\cdot(\overline{B}\zeta'-\dot\zeta')\mathrm{d}\tau + CT|z'|^3\\ &= -\int_t^T \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(\overline{\Gamma}\zeta'\cdot\zeta')\mathrm{d}\tau + \int_t^T (\overline{\Gamma}\zeta'\cdot(\overline{B}\zeta'+\dot\zeta') + \dot{\overline{\Gamma}}\zeta'\cdot\zeta')\mathrm{d}\tau + CT|z'|^3\\ &\le \overline{\Gamma}(t)z'\cdot z' + \int_t^T (\dot{\overline{\Gamma}} - 4\overline{\Gamma}\,\overline{Q}\,\overline{\Gamma} + \overline{\Gamma}\,\overline{B} + \overline{B}^*\,\overline{\Gamma})\zeta'\cdot\zeta')\mathrm{d}\tau + CT|z'|^3\\ &= \overline{\Gamma}(t)z'\cdot z' + CT|z'|^3.\end{aligned}$$

Якщо вибрати $T := \frac{1}{\delta}\log\frac{1}{|z'|}$, то $\mathrm{dist}(\eta(T),\mathcal{C}) = O(|z'|^2)$ і

$$\int_t^T L(-\dot\eta,\eta)\mathrm{d}\tau \le \overline{\Gamma}(t)z'\cdot z' + C|z'|^3\log\frac{1}{|z'|}. \tag{2.2.63}$$

Для побудови ζ_N встановимо наступні факти. Із визначення $\mathcal{T}_{ij}$ в (2.2.59) випливає, що $\mathcal{T}_{iN}(\tau) = \dot\xi_i(\tau)/|\dot\xi(\tau)|$. Тоді, оскільки $\ddot\xi_i(\tau) = \frac{\partial b_i}{\partial x_j}(\xi(\tau))\dot\xi_j(\tau)$, маємо

$$\frac{\partial b_i}{\partial x_j}(\xi(\tau))\mathcal{T}_{jN}(\tau) - \dot{\mathcal{T}}_{iN}(\tau) = \frac{\dot\xi_i(\tau)\dot\xi_j(\tau)\ddot\xi_j(\tau)}{|\dot\xi(\tau)|^3} = \mathcal{T}_{iN}(\tau)\frac{\dot\xi_j(\tau)\ddot\xi_j(\tau)}{|\dot\xi(\tau)|^2}\ \ \forall i=1,\dots,N.$$

Помножимо ці рівності на $\mathcal{T}^{-1}_{ki}(\tau)$ і підсумуємо за i:

$$\mathcal{T}^{-1}_{ki}(\tau)\Big(\frac{\partial b_i}{\partial x_j}(\xi(\tau))\mathcal{T}_{jN}(\tau) - \dot{\mathcal{T}}_{iN}(\tau)\Big) = \begin{cases}\dot\xi_j(\tau)\ddot\xi_j(\tau)/|\dot\xi(\tau)|^2, & \text{if } k=N,\\ 0 \quad \text{if } k<N.\end{cases} \tag{2.2.64}$$

Перейдемо тепер до побудови ζ_N. З визначення η маємо

$$\begin{aligned}\dot\eta_i(\tau)-b_i(\eta(\tau)) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\xi_i(\tau)+\mathcal{T}_{ik}(\tau)\zeta'_k(\tau)+\mathcal{T}_{iN}(\tau)\zeta_N(\tau)\Big)-b_i(\eta(\tau))+O(|z'|^2)\\
&=\Big(\dot{\mathcal{T}}_{ik}(\tau)-\frac{\partial b_i}{\partial x_j}(\xi(\tau))\mathcal{T}_{jk}(\tau)\Big)\zeta'_k(\tau)+\Big(\dot{\mathcal{T}}_{iN}(\tau)-\frac{\partial b_i}{\partial x_j}(\xi(\tau))\mathcal{T}_{jN}(\tau)\Big)\zeta_N(\tau)\\
&\quad+\mathcal{T}_{ik}(\tau)\dot\zeta'_k(\tau)+\mathcal{T}_{iN}(\tau)\dot\zeta_N(\tau)+O(|z'|^2)\\
&=\mathcal{T}_{ik}(\tau)\mathcal{T}^{-1}_{kr}(\tau)\Big\{\ \Big(\dot{\mathcal{T}}_{rk}(\tau)-\tfrac{\partial b_r}{\partial x_j}(\xi(\tau))\mathcal{T}_{jk}(\tau)\Big)\zeta'_k(\tau)\\
&\qquad+\Big(\dot{\mathcal{T}}_{rN}(\tau)-\tfrac{\partial b_r}{\partial x_j}(\xi(\tau))\mathcal{T}_{jN}(\tau)\Big)\zeta_N(\tau)\Big\}\\
&\quad+\mathcal{T}_{ik}(\tau)\dot\zeta'_k(\tau)+\mathcal{T}_{iN}(\tau)\dot\zeta_N(\tau)+O(|z'|^2).\end{aligned}\tag{2.2.65}$$

Підставимо замість $\dot\zeta'$ праві частину (2.2.61) і скористаємось (2.2.64):

$$\begin{aligned}b_i(\eta(\tau))-\dot\eta_i(\tau) &= 4a_{ij}(\xi(\tau))\mathcal{T}^{-1}_{lj}\big(0,\xi(\tau)\big)\overline{\Gamma}_{lm}(\tau)\zeta'_m(\tau)\\
&\quad-\mathcal{T}_{iN}(\tau)\dot\zeta_N(\tau)+\mathcal{T}_{iN}(\tau)R(\tau)+O(|z'|^2),\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}R(\tau) &= \mathcal{T}^{-1}_{Ni}(\tau)\frac{\partial b_i}{\partial x_j}(\xi(\tau))\Big(\mathcal{T}_{jN}(\tau)\zeta_N(\tau)+\mathcal{T}_{jl}(\tau)\zeta'_l(\tau)\Big)\\
&\quad-\mathcal{T}^{-1}_{Ni}(\tau)\Big(\dot{\mathcal{T}}_{iN}(\tau)\zeta_N(\tau)+\dot{\mathcal{T}}_{il}(\tau)\zeta'_l(\tau)\Big)\\
&\quad-4\mathcal{T}^{-1}_{Ni}(\tau)a_{ij}(\xi(\tau))\mathcal{T}^{-1}_{lj}(\tau)\overline{\Gamma}_{lm}(\tau).\zeta'_m(\tau)\end{aligned}$$

Таким чином, для того щоб задовольнити (2.2.62), виберемо $\zeta_N(\tau)$ розв'язком рівняння

$$\dot\zeta_N(\tau)=R(\tau)\tag{2.2.66}$$

з початковою умовою $\zeta_N(t)=0$.

З (2.2.64) випливає, що $|\dot\xi(\tau)|$ задовольняє

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\dot\xi(\tau)|=\big(\mathcal{T}^{-1}_{Ni}(\tau)\frac{\partial b_i}{\partial x_j}(\xi(\tau))\mathcal{T}_{jN}(\tau)-\mathcal{T}^{-1}_{Ni}(\tau)\dot{\mathcal{T}}_{iN}(\tau)\big)|\dot\xi(\tau)|,$$

і можна записати розв'язок $\zeta_N(\tau)$ рівняння (2.2.66) в вигляді

$$\zeta_N(\tau) = |\dot\xi(\tau)| \int\limits_0^\tau \left(\mathcal{T}^{-1}_{Ni}(s) \frac{\partial b_i}{\partial x_j}(\xi(s)) \mathcal{T}_{jl}(s) \zeta'_l(s) - \mathcal{T}^{-1}_{Ni}(s) \dot{\mathcal{T}}_{il}(s) \zeta'_l(s) \right) \frac{\mathrm{d}s}{|\dot\xi(s)|}$$
$$- 4|\dot\xi(\tau)| \int\limits_0^\tau \mathcal{T}^{-1}_{Ni}(s) a_{ij}(\xi(s)) \mathcal{T}^{-1}_{lj}(s) \overline{\Gamma}_{lm}(s) \zeta'_m(s) \frac{\mathrm{d}s}{|\dot\xi(s)|}. \tag{2.2.67}$$

З (2.2.67) випливає рівномірна оцінка $|\zeta_N(\tau)| \le C|z'|$.

Залишається продовжити $\eta(\cdot)$ для $\tau > T$ щоб крива досягла цикл за скінчений час. Покладемо

$$\eta(\tau) = X\big(\zeta'(T)(T+1-\tau), z_N(\xi(\tau)) + \zeta_N(T)|\dot\xi(\tau)|/|\dot\xi(T)|\big), \quad T \le \tau \le T+1. \tag{2.2.68}$$

Тоді для кожного $i = 1, \dots, N$

$$\begin{aligned} \dot\eta_i(\tau) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\big(\xi_i(\tau) + \mathcal{T}_{iN}(\tau)\zeta_N(T)|\dot\xi(\tau)|/|\dot\xi(T)|\big) + O(|z'|^2) \\ &= \dot\xi_i(\tau) + \ddot\xi_i(\tau)\zeta_N(T)/|\dot\xi(T)| + O(|z'|^2) \\ &= b_i(\xi(\tau)) + \frac{\partial b_i}{\partial x_j}(\xi(\tau))\dot\xi_j(\tau)\zeta_N(T)/|\dot\xi(T)| + O(|z'|^2) = b_i(\eta(\tau)) + O(|z'|^2). \end{aligned}$$

Отже, маємо наступну оцінку

$$\int\limits_T^{T+1} a^{ij}(\eta(\tau))(-\dot\eta_i + b_i(\eta))(-\dot\eta_j + b_j(\eta))\mathrm{d}\tau \le C|z'|^4. \tag{2.2.69}$$

Скомбінувавши останню нерівність з (2.2.63) отримуємо (2.2.60). □

Для побудови суб- і супер-розв'язків (2.2.45) розглянемо розв'язок $\overline{D}(t)$ матричного рівняння

$$\dot{\overline{D}} + \overline{D}(\overline{B} - 4\overline{Q}\,\overline{\Gamma}) + (\overline{B} - 4\overline{Q}\,\overline{\Gamma})^*\overline{D} = -2I, \tag{2.2.70}$$

що задається формулою

$$\overline{D}(t) = 2\int\limits_t^\infty \overline{\Psi}^*(\tau,t)\overline{\Psi}(\tau,t)\mathrm{d}\tau, \tag{2.2.71}$$

де $\overline{\Psi}(\tau,t)$ фундаментальний матричний розв'язок

$$\frac{\partial\overline{\Psi}}{\partial\tau}=(\overline{B}(\tau)-4\overline{Q}(\tau)\overline{\Gamma}(\tau))\overline{\Psi},\quad \overline{\Psi}(t,t)=I.$$

Як вже згадувалося в доведенні Леми 2.2.8, $\overline{\Psi}(\tau,t)$ експоненціально прямує до нуля при $\tau\to+\infty$, отже інтеграл в (2.2.71) збігається і визначає P-періодичний симетричний і додатний розв'язок (2.2.70). З 2.2.56) і (2.2.70) випливає, що $\overline{\Gamma}_\delta^{\pm}:=\overline{\Gamma}\pm\delta\overline{D}$ задовольняє для достатньо малих $\delta>0$

$$4\overline{\Gamma}_\delta^{+}\,\overline{Q}\,\overline{\Gamma}_\delta^{+}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\overline{\Gamma}_\delta^{+}-\overline{\Gamma}_\delta^{+}\,\overline{B}-\overline{B}^{*}\overline{\Gamma}_\delta^{+}\geq\delta I \text{ і } 4\overline{\Gamma}_\delta^{-}\,\overline{Q}\,\overline{\Gamma}_\delta^{-}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\overline{\Gamma}_\delta^{-}-\overline{\Gamma}_\delta^{+}\,\overline{B}-\overline{B}^{*}\overline{\Gamma}_\delta^{-}\leq-\delta I.$$

Введемо функції $W_\delta^{\pm}(z)$:

$$W_\delta^{\pm}(z)=(\overline{\Gamma}_\delta^{\pm}(t))_{ij}z_i'z_j'\quad \text{де } z_N=z_N(\xi(t)),$$

ці функції задоврльняють

$$S(\nabla_z W_\delta^{-}(z),z)\leq-\frac{\delta}{2}|z'|^2 \text{ і } S(\nabla_z W_\delta^{+}(z),z)\geq\frac{\delta}{2}|z'|^2 \text{ для достатньо малих } |z'|. \tag{2.2.72}$$

Останні нерівності напряму випливають з визначень $W_\delta^{-}(z)$ і $W_\delta^{+}(z)$.

Лема 2.2.9. *Для достатньо малих $\delta>0$ строгі поточкові нерівності $W_\delta^{-}(z)<W(X(z))<W_\delta^{+}(z)$ є справедливими для z' з виколотого околу нуля.*

Доведення. Першу нерівність $W_\delta^{-}(z)<W(X(z))$ можна довести аналогічно Лемі 2.1.27 Підрозділу 2.1.11 (див. також доведення Леми 2.2.7). Друга нерівність $W(X(z))<W_\delta^{+}(z)$ випливає безпосередньо з Леми 2.2.8. □

Таким чином, побудовано функції $W_\delta^{\pm}$, що задовольняють вмови Леми 2.2.4. Визначимо тепер тестові функції $W_{\delta,\varepsilon}^{\pm}$ формулою

$$W_{\delta,\varepsilon}^{\pm}:=W_\delta^{\pm}-\varepsilon\overline{\Phi}_\delta^{\pm}(t),$$

де z_N і t пов'язані рівністю $z_N=z_N(\xi(t))$, і $\overline{\Phi}_\delta^{\pm}(t)$ – періодичні розв'язки рівнянь

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\overline{\Phi}_\delta^{\pm}(t)=-2\mathrm{tr}(\overline{Q}(t)\overline{\Gamma}_\delta^{\pm}(t))+c(\xi(t))+\frac{2}{P}\int_0^P\mathrm{tr}(\overline{Q}(\tau)\overline{\Gamma}_\delta^{\pm}(\tau))\mathrm{d}\tau-\frac{1}{P}\int_0^P c(\xi(\tau))\mathrm{d}\tau. \tag{2.2.73}$$

Перші два члени зправа введено щоб компенсувати похибку порядку ε в рівнянні (2.2.46). Дійсно, тестові функції $W^{\pm}_{\delta,\varepsilon}$ побудовані у такий спосіб задовольняють для достатньо малих $|z'|$

$$\pm a_{ij}\left(X(z)\right)\alpha_{ki}(z)\frac{\partial}{\partial z_k}\left(\alpha_{lj}(z)\frac{\partial W^{\pm}_{\delta,\varepsilon}}{\partial z_l}\right)\mp\frac{1}{\varepsilon}S(\nabla_z W^{\pm}_{\delta,\varepsilon},z)\mp c(X(z))$$
$$\leq\frac{1}{P}\int\limits_0^P c(\xi(\tau))\mathrm{d}\tau-\frac{2}{P}\int\limits_0^P \mathrm{tr}(\overline{Q}(\tau)\overline{\Gamma}^{\pm}_{\delta}(\tau))\mathrm{d}\tau+O(\varepsilon+|z'|).$$

Для завершення доведення того факту, що $W^{\pm}_{\delta,\varepsilon}$ задовольняють (2.2.29) і (2.2.30), залишається помітити, що $\int_0^P \mathrm{tr}(\overline{Q}(\tau)\overline{\Gamma}^{\pm}_{\delta}(\tau))\mathrm{d}\tau \to \int_0^P \mathrm{tr}(\overline{Q}(\tau)\overline{\Gamma}(\tau))\mathrm{d}\tau$ при $\delta\to 0$ і скористатися тотожністю

$$2\int_0^P \mathrm{tr}(\overline{Q}(\tau)\overline{\Gamma}(\tau))\mathrm{d}\tau=\sum_{\Theta_i>1}\log\Theta_i$$

(див. Твердження 2.1.30 Підрозділу 2.1.12), де Θ_i – абсолютні значення власних значень лінеарізованого відображення Пуанкаре (що відповідає рівнянню $\dot{x}=b(x)$ біля $\mathcal{C}$).

2.2.7 Тестова функція: випадок граничного циклу на $\partial\Omega$

У випадку коли рівняння $\dot{x}=b_\tau(x)$ на $\partial\Omega$ має граничний цикл $\mathcal{C}$ який є вагомою компонентою множини Обрі, в побудові тестових функцій використовуються комбінація техніки Підрозділу 2.2.5 і Підрозділу 2.2.6. Перейдемо до локальних координат в околі $\mathcal{C}$ за допомогою відображення $x=X(z_1,\dots,z_{N-1},z_N)$, де $z_N=z_N(x)$ декартова відстань від x до $\partial\Omega$ і $(z_1,\dots,z_{N-1})$ – координати на $\partial\Omega$. Координата $z_{N-1}(x)$ є довжиною дуги на $\mathcal{C}$ а інші координати $z'=(z_1,\dots,z_{N-2})$ вибираються так щоб відображення $X(z',z_{N-1},z_N)$ було C^2-гладким, і $z'=0$ коли $x\in\mathcal{C}$, крім того матриця $\left(\frac{\partial X_i}{\partial z_j}(z)\right)_{i,j=\overline{1,N}}$ повинна бути ортогональною при $z_N=0$ і $z'=0$ (на циклі). Така заміна координат веде до рівнянь вигляду (2.2.45) і (2.2.46) для $W(X(z))$ і $W_\varepsilon(X(z))$.

Постулюємо натупний анзац для W,

$$W(X(z)) = \widehat{\Gamma}_{ij}(t) z'_i z'_j + o(|z'|^2), \tag{2.2.74}$$

де $\widehat{\Gamma}$ є $(N-2)\times(N-2)$ симетричною P-періодичною матрицею (P – період циклу $\mathcal{C}$), і змінна $t = t(z_{N-1}$ задається через параметрізацію $t \to \xi(t)$ циклу $\mathcal{C}$, що задається рівнянням $\dot{\xi}(t) = b_\tau(\xi(t)))$. В якості $\widehat{\Gamma}$ береться максимальний P-періодичний розв'язок матричного рівняння Ріккаті

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\widehat{\Gamma} = 4\widehat{\Gamma}\widehat{Q}\widehat{\Gamma} - \widehat{\Gamma}\widehat{B} - \widehat{B}^*\widehat{\Gamma},$$

з $(N-2)\times(N-2)$ матрицями $\widehat{Q}(t)$ і $\widehat{B}(t)$, елементи яких задаються такими саме формулами як (2.2.57) і (2.2.58).

Лема 2.2.10. *Для достатньо малих $|z'|$ і $|z_N|$ наступна оцінка є вірною рівномірно відносно $t \in [0,P)$,*

$$W(X(z', z_{N-1}(\xi(t)), z_N) \le \widehat{\Gamma}_{ij}(t) z'_i z'_j + C(|z'|^2 \log\frac{1}{|z'|} + |z_N||z'|^2 + |z_N|^3). \tag{2.2.75}$$

Доведення. Спочатку розглянемо випадок $z_N = 0$. Як в Лемі 2.2.8 скористаємось представленням (2.2.11) і розглянемо розв'язок $\zeta'(\tau)$ рівняння $\dot{\zeta}'(\tau) = (\widehat{B} - 4\widehat{Q}\widehat{\Gamma})\zeta(\tau)$ для $\tau > t$ з начальною умовою $\zeta'(t) = z'$. Він згасає експоненціально при $\tau \to \infty$, $|\zeta'| \le Ce^{-\delta\tau}|z'|$ з $\delta > 0$. Визначимо тепер ζ_{N-1} аналогічно ζ_N в Лемі 2.2.8:

$$\begin{aligned}\dot{\zeta}_{N-1}(\tau) = \mathcal{T}^{-1}_{(N-1)i}\big(0, z_{N-1}(\xi(\tau),0\big)\frac{\partial b_i}{\partial x_j}(\xi(\tau))\Big(\mathcal{T}_{j(N-1)}(\tau)\zeta_{N-1}(\tau) + \mathcal{T}_{jl}(\tau)\zeta'_l(\tau)\Big)\\ - \mathcal{T}^{-1}_{(N-1)i}\big(0, z_{N-1}(\xi(\tau)),0\big)\Big(\dot{\mathcal{T}}_{i(N-1)}(\tau)\zeta_{N-1}(\tau) + \dot{\mathcal{T}}_{il}(\tau)\zeta'_l(\tau)\Big)\\ - 4\mathcal{T}^{-1}_{(N-1)i}\big(0, z_{N-1}(\xi(\tau)),0\big)a_{ij}(\xi(\tau))\mathcal{T}^{-1}_{lj}\big(0, z_{N-1}(\xi(\tau)),0\big)\widehat{\Gamma}_{lm}(\tau)\zeta'_m(\tau),\end{aligned}$$

$\tau > t$, де $(\mathcal{T}^{-1}_{ij}(z))_{i,j=\overline{1,N}}$ – матриця обернена до $(\frac{\partial X_i}{\partial z_j}(z))_{i,j=\overline{1,N}}$ і $\mathcal{T}_{ij}(\tau) = \frac{\partial X_i}{\partial z_j}(0, z_{N-1}(\xi(\tau)),0)$. Нарешті, визначимо $\eta(\tau)$:

$$\eta(\tau) = \begin{cases} X(\zeta'(\tau), z_{N-1}(\xi(\tau)) + \zeta_{N-1}(\tau), 0),\ t \le \tau < T,\\ X(\zeta'(T)(T+1-\tau), z_{N-1}(\xi(\tau)) + \zeta_{N-1}(T)\frac{|\dot{\xi}(\tau)|}{|\dot{\xi}(T)|}, 0),\ T \le \tau < T+1,\end{cases}$$

з $T := \frac{1}{\delta}\log\frac{1}{|z'|}$; визначимо також керування $v(\tau)$:

$$v(\tau) = \begin{cases} \dot\eta + \nu(\eta)\big(b_\nu(\eta) + R_1(\tau)\big), & t \le \tau < T \\ \dot\eta + \nu(\eta) b_\nu(\eta), & T \le \tau \le T+1, \end{cases}$$

де

$$R_1(\tau) = -\mathcal{T}^{-1}_{(N-1)i}(0, z_{N-1}, 0)\Big(\dot{\mathcal{T}}_{i(N-1)}(\tau)\zeta_{N-1}(\tau) + \dot{\mathcal{T}}_{il}(\tau)\zeta'_l(\tau) \\ +4a_{ij}(\xi(\tau))\mathcal{T}^{-1}_{lj}(0, z_{N-1}, 0)\widehat{\Gamma}_{lm}\zeta'_m\Big).$$

Покладемо

$$\alpha(\tau) := \begin{cases} b_\nu(\eta) + R_1(\tau), & t \le \tau < T \\ b_\nu(\eta), & T \le \tau \le T+1, \end{cases}$$

і зазначимо, що для керування $v(\tau)$, визначеного вище, пара $(\eta(\tau), \alpha(\tau))$ є розв'язком (2.2.10) на $(t, T+1)$ з начальним значенням $\eta(t) = x(= X(z', \xi(t), 0))$, як тільки $\alpha(\tau) \ge 0$ для всіх $\tau \in (t, T+1)$. Оскільки $b_\nu(\xi(\tau)) > 0$, то дійсно $\alpha(\tau) \ge 0$ за умови що $|z'|$ є достатньо малим. З цього моменту доведення (2.2.75) здійснується аналогічно Лемі 2.2.8.

У випадку, коли $z_N(x) > 0$ побудуємо криву $\eta(\tau)$, що з'єднює x з деякою точкою y на $\partial\Omega$ наступним чином:

$$\eta(\tau) = X(z', z_{N-1}(\xi(t)), z_N + b_\nu(\xi(t))(t-\tau)) \text{ для всих } \tau \ge t, \\ \text{таких що } z_N + b_\nu(\xi(t))(t-\tau) \ge 0.$$

Нехай $t + \Delta t$ – момент часу, коли $\eta(\tau)$ досягає $\partial\Omega$ (у точці $y = \eta(t+\Delta t)$), тоді $\Delta t = O(z_N)$. З визначення $\eta(\tau)$ маємо

$$\int_t^{t+\Delta t} a^{ij}(\eta(\tau))(-\dot\eta_i + b_i(\tau))(-\dot\eta_j + b_j(\eta))\,\mathrm{d}\tau \le C(|z'|^2 + z_N^2)z_N.$$

Тоді, продовживши $\eta(\tau)$ уздовж $\partial\Omega$ так як описано вище, завершуємо доведення Леми. □

Визначимо тестові функції $W^\pm_\delta(z', z_{N-1}(\xi(t)), z_N) := (\widehat{\Gamma} \pm \delta\widehat{D})_{ij}(t)z'_i z'_j \pm \delta z_N^2$ для (достатньо малих) $\delta > 0$, дн P-періодична симетрична матриця $\hat{D}(t) > 0$

визначається аналогічно (2.2.71). Тоді є справедливою нерівність

$$S(\nabla_z W_\delta^-, z) \le -\delta(|z'|^2 + b_\nu(\xi(t))z_N)$$

для достатньо малих $|z'|$ і $z_N \ge 0$. Це, в свою чергу, веде до оцінки

$$W_\delta^- < W(X(z)) \text{ для достатньо малих } |z'| \text{ і } z_N \text{ (коли } |z'| + z_N > 0),$$

доведення якої є аналогічним оцінці знизу в Лемі 2.2.7. Таким чином функції $W_\delta^\pm$ задовольняють умови Леми 2.2.4. Насамкінець, визначимо функції $W_{\delta,\varepsilon}^\pm$:

$$W_{\delta,\varepsilon}^\pm := W_\delta^\pm \pm \varepsilon \widehat{\Phi}_\delta^\pm \mp \varepsilon^2 z_N, \text{ де } z_{N-1} = z_{N-1}(\xi(t)),$$

і $\widehat{\Phi}_\delta^\pm$ – розв'язки

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\widehat{\Phi}_\delta^\pm(t) = -2\mathrm{tr}(\widehat{Q}(t)\widehat{\Gamma}_\delta^\pm(t)) + c(\xi(t))& \\ + \frac{2}{P}\int_0^P \mathrm{tr}(\widehat{Q}(\tau)\widehat{\Gamma}_\delta^\pm(\tau))\mathrm{d}\tau - \frac{1}{P}\int_0^P c(\xi(\tau))\mathrm{d}\tau.&\end{aligned}$$

Побудовані функції $W_{\delta,\varepsilon}^\pm$ задовольняють умови Леми 2.2.4.

2.3 Задача в тонкому циліндрі з умовою Фур'є на основах

У цьому підрозділі досліджуються спектральні задачі для сингулярно збурених еліптичних операторів другого порядку визначених в тонкому циліндрі з крайовою умовою Неймана на бічній поверхні і Фур'є на основах. Вивчається випадок коли основи породжують межовий шар, який впливає на поведінку розвязків в цілому і тому потребує детального вивчення.

Добре відомо, що вивчення сингулярно збурених задач з осцилюючими коефіцієнтами і умовою Неймана або Фур'є на межі стикається з звичайною для задач усереднення трудністю пов'язаною з неузгодженістю періоду структури всередині області з межею, що веде до дуже нерегулярних примежових шарів (див., наприклад, [57]). Проте, у випадку тонкого циліндру, розглянутому нижче, примежові шари, що виникають біля основ, можуть бути достатньо детально вивчені. Для цього застосовується факторізаційний метод, який зводить вивчення згаданих примежових шарів до спектральних задач Стеклова в непівобмеженому циліндрі. Споріднені задачі в областях типу напівпростору (з періодичними умовами замість умови Неймана на бічній поверхні циліндру) було розглянуто в [16] і [57], у той час як головна новизна результатів, що будуть представлені нижче, полягає в повному аналізі спектральних задач типу Стеклова в напівобмеженому циліндрі, який містить результати про єдність/неєдність в термінах так-званого продольного знесення і вичерпні результати у випадку неєдності. Ці результати, що мають незалежний інтерес, дозволяють встановити ефективні крайові умови. Зазначимо, що асимптотичний аналіз задачі веде до зменшення вимірності, і ефективне рівняння Гамільтона-Якобі (характерне для сингулярно збурених задач) є одномірним. Завдяки цьому зменшенню вимірності вдається побудувати двочленні асимптотичні формули для власних значень. За певного структурного припущення на ефективну задачу, вихідні спектральні задачі зводяться до форми придатної до локального аналізу на проміжному масштабі. Це дозволяє довести збіжність (у нормі) резольвентних операторів до резольвентного оператору гармонічного осцилятора. Власні значення останньої задачі дають другий член в асимптотичних формулах згаданих вище.

Близькі задачі було розглянуто в роботах [8] і [10]. Проте перша з них має справу з одновимірним випадком, друга присвячена вивченню асимтотичної поведінки першої власної функції задачі спряженої до задачі конвекції-дифузії в тонкому циліндрі з умовою Неймана на всій межі.

2.3.1 Постановка задачі

У циліндрі $(0, L) \times \varepsilon\omega$, де задані $L > 0$, гладка обмежена область $\omega \in \mathbb{R}^{n-1}$, а $\varepsilon > 0$ - малий параметр, розглядається еліптичний оператор $\mathcal{L}_\varepsilon$ вигляду

$$\mathcal{L}_\varepsilon u = \varepsilon^2 a_{ij}(x_1, x/\varepsilon)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \varepsilon b_j(x_1, x/\varepsilon)\frac{\partial u}{\partial x_j} + c(x_1, x/\varepsilon)u. \tag{2.3.1}$$

Коефіцієнти a_{ij}, b_j і c – швидко осцилюючі локально періодичні функції: вони залежать від x_1 (повільна змінна) і $y = x/\varepsilon$ (швидка змінна), за змінною y_1 вони є 1-періодичними. Оскільки в (2.3.1) є множник ε^2 перед членом з частинними похідними другого порядку і ε перед членом з похідними першого порядку, $\mathcal{L}_\varepsilon$ є сингулярно збуреним оператором. На бічній поверхні циліндра накладається однорідна умова Неймана,

$$\frac{\partial u}{\partial \nu_a} = 0 \quad \text{на } (0, L) \times \varepsilon\partial\omega, \tag{2.3.2}$$

де $\frac{\partial u}{\partial \nu_a} = a_{ij}(x_1, x/\varepsilon)\frac{\partial u}{\partial x_j}\nu_i$ – похідна по конормалі, а $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ одиничний вектор нормалі (зовнішньо направленої). На основах розглядається умова Фур'є

$$\varepsilon\frac{\partial u}{\partial \nu_a} + g_\pm(x'/\varepsilon)u_\varepsilon = 0, \qquad \text{коли } x = (x_1, x'/\varepsilon) \in \left\{\frac{L \pm L}{2}\right\} \times \omega. \tag{2.3.3}$$

Досліджується спектральна задача

$$\mathcal{L}_\varepsilon u = \lambda u \quad \text{in } (0, L) \times \varepsilon\omega, \ u \text{ задовольняє (2.3.2) і (2.3.3).} \tag{2.3.4}$$

За деяких природних умов (рівномірна еліптичність члену з похідними другого порядку і гладкість коефіцієнтів) спектр цієї задачі є дискретним. Вивчається асимптотична поведінка власних значень і власних функцій при $\varepsilon \to 0$.

Припущення щодо коефіцієнтів оператора $\mathcal{L}_\varepsilon$ є такими:

$$\begin{aligned}&a_{ij}(x_1, y),\ b_j(x_1, y), c(x_1, y) \in C^3([0, L] \times \mathbb{R} \times \overline{\omega}) \text{ є 1-періодичними}\\ &\text{відносно } y_1 \text{ функціями, коефіцієнти } a_{ij} \text{ мають симетрію } a_{ij} = a_{ji}\\ &\text{і задовольняють умову рівномірної еліптичності } a_{ij}\xi_i\xi_j \geq \gamma|\xi|^2 > 0\\ &(\forall \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}).\end{aligned} \tag{2.3.5}$$

Відносно ω і $g_\pm$ будемо припускати, що

$$\omega \text{ – обмежена область класу } C^2, \text{ і } g_\pm \in C^1(\overline{\varpi}). \tag{2.3.6}$$

Для вивчення асимптотичної поведінки першого власного значення λ_ε і першої власної функції u_ε (згідно з Теоремою Крейна-Рутмана λ_ε є простим дійсним власним значенням а функцію u_ε можна вибрати додатною) застосовується представлення $u_\varepsilon = e^{-W_\varepsilon/\varepsilon}$, що веде до сингулярно збудженого рівняння Гамільтона-Якобі

$$-\varepsilon a_{ij}(x_1, x/\varepsilon)\frac{\partial^2 W_\varepsilon}{\partial x_i \partial x_j} + H(x_1, x/\varepsilon, \nabla W_\varepsilon) = \lambda_\varepsilon \quad \text{в } (0, L) \times \varepsilon\omega, \tag{2.3.7}$$

де $H(x_1, y, p) = a_{ij}(x_1, y)p_i p_j - b_j(x_1, y)p_j + c(x_1, y)$, з крайовими умовами

$$\frac{\partial W}{\partial \nu_a} = 0 \quad \text{на } (0, L) \times \varepsilon\partial\omega, \quad \frac{\partial W_\varepsilon}{\partial \nu_a} = g_\pm(x'/\varepsilon), \quad \text{коли } x_1 = \frac{L \pm L}{2}, \, x' \in \varepsilon\omega. \tag{2.3.8}$$

Неважко показати, що, з точністю до підпослідовності, λ_ε збігаються до границі λ і функції W_ε (нормалізовані рівністю $\min W_\varepsilon = 0$) рівномірно збігаються до неперервної функції $W(x_1)$. Крім того, за допомогогю стандартних міркувань можна довести, що

$$\overline{H}(x_1, W') = \lambda, \quad x_1 \in \, (0, L), \tag{2.3.9}$$

де ефективний гамільтоніан $\overline{H}(x_1, p_1)$ визначається (єдиним чином) через умову існування *додатного* 1-періодичного відносно y_1 розв'язку рівняння

$$\begin{aligned} a_{ij}(x_1, y)\frac{\partial^2 \theta}{\partial y_i \partial y_j} &+ (b^j(x_1, y) - 2a_{1j}(x_1, y)p_1)\frac{\partial \theta}{\partial y_j} \\ &+ H(x_1, y, p_1, 0, \ldots 0)\theta = \overline{H}(x_1, p_1)\theta \quad \text{в } \mathbb{R} \times \omega \end{aligned} \tag{2.3.10}$$

з крайовою умовою

$$\frac{\partial \theta}{\partial \nu_a} - \nu_i a_{i1} p_1 \theta = 0 \quad \text{на } \mathbb{R} \times \partial\omega. \tag{2.3.11}$$

Рівняння (2.3.9) знаходиться за допомогою метода збурених тестових функцій [81], користуючись тестовими функціями вигляду $\Phi_\varepsilon(x) = \Phi(x_1) - \varepsilon \log \theta(x/\varepsilon, x_1, p_1) + o(\varepsilon)$, $p_1 = \Phi'(x_1)$. Проте побудова тестових функцій біля основ циліндру є більш складною. Для простоти будемо припускати, що інтервал $(0, L)$ містить ціле число мікроперіодів, ε; тобто L/ε є цілим. Розглянемо тільки випадок основи $x_1 = 0$, тому що випадок $x_1 = L$ є аналогічним. Тестові функції будуються у вигляді

$$\Phi_\varepsilon = \Phi(x_1) - \varepsilon \log(v(x/\varepsilon)\theta(x/\varepsilon, x_1, p_1)) + o(\varepsilon), \quad p_1 = \Phi'(x_1) \tag{2.3.12}$$

з $v(y)$, що задовольняє рівняння

$$a_{ij}\frac{\partial^2 v}{\partial y_i \partial y_j} + \left(b_j + 2a_{ij}\frac{\partial \log\theta}{\partial y_i} - 2a_{1j}p_1\right)\frac{\partial v}{\partial y_j} = 0 \quad \text{в } (0, +\infty) \times \omega, \tag{2.3.13}$$

де зафіксовано $x_1 = 0$, і крайові умови

$$\frac{\partial v}{\partial \nu_a} = 0 \quad \text{на } (0, +\infty) \times \partial\omega \tag{2.3.14}$$

і

$$\frac{\partial v}{\partial \nu_a} + \left(g_-(y') + a_{11}p_1 + \frac{\partial \log\theta}{\partial \nu_a}\right) v = \overline{g}_-(p_1)v \quad \text{на } \{0\} \times \omega. \tag{2.3.15}$$

Невідомими у задачі (2.3.13)–(2.3.15) є число $\overline{g}_-(p_1)$ і функція v. Розв'язок $\overline{g}_-(p_1)$ визначає ефективну крайову умову в $x_1 = 0$ для задачі (2.3.9). Конкретніше, число $\overline{g}_-(p_1)$ визначається таким чином щоб задача (2.3.13)–(2.3.15) мала обмежений додатний розв'язок, що збігається до додатної сталої при $y_1 \to +\infty$. Це є різновидністю спектральної задачі Стеклова, її вивчено в деталях в Підрозділі 2.3.2. Найважливіші властивості цієї задачі описано в наступному результаті.

Теорема 2.3.1. *Існує строго зростаюча неперервна функція* $\overline{g}^*_-(h)$ *на* $[\min_{p_1} \overline{H}(0, p_1), +\infty)$ *(що зростає при* $h \to +\infty$ *не повільніше ніж лінійна функція), така що задача* (2.3.13)-(2.3.15) *має обмежений додатний розв'язок який збігається до додатної сталої при* $y_1 \to +\infty$ *тоді і тільки тоді коли викунуються одна з натупних двох умов: (i)* $\frac{\partial \overline{H}}{\partial p_1}(0, p_1) \geq 0$ *і* $\overline{g}_-(p_1) = \overline{g}^*_-(\overline{H}(0, p_1))$*, або (ii)* $\frac{\partial \overline{H}}{\partial p_1}(0, p_1) < 0$ *і* $\overline{g}_-(p_1) < \overline{g}^*_-(\overline{H}(0, p_1))$*.*

Аналогичний результат є справедливим для $x_1 = L$ з деякою функцією $\overline{g}^*_+(h)$.

Тепер, для заданої гладкої функції $\Phi(x_1)$ скористаємось тестовою функцією вигляду (2.3.12) і (як звичайно в теорії в'язкісних розв'язків) розглянемо точки локального максимуму і мінімуму $W_\varepsilon - \Phi_\varepsilon$. Міркуючи як в Підрозділі 2.1.5 перейдемо до границі $\varepsilon \to 0$, в результаті маємо

- якщо $W - \Phi$ досягає локального максимуму (на $[0, L]$) в $x_1 = 0$, тоді або $\overline{H}(0, \Phi'(0)) \leq \lambda$ або $\overline{g}^*_-(\overline{H}(0, \Phi'(0))) \geq 0$ і $-\frac{\partial \overline{H}}{\partial p_1}(0, \Phi'(0)) \leq 0$;
- якщо $W - \Phi$ досягає локального мінімуму в $x_1 = 0$, тоді або $\overline{H}(0, \Phi'(0)) \geq \lambda$ або $\overline{g}^*_-(\overline{H}(0, \Phi'(0))) \leq 0$.

Визначимо $\overline{h}_-$ як єдиний розв'язок рівняння $\overline{g}^*_-(\overline{h}_-) = 0$ якщо він існує і покладемо $\overline{h}_- = -\infty$ в противному випадку. Визначимо $\overline{h}_+$ аналогічно (за допомогою функції $\overline{g}^*_+(h)$). Тоді, користуючись формалізмом теорії в'язкісних розв'язків, запишемо ефективну задачу для λ і W як рівняння (2.3.9) з крайовими умовами у формі нерівностей (умов для суб- і супер-розв'язку)

$$-\overline{H}(x_1, W'(x_1)) + \overline{h}_\pm \leq 0 \text{ і } \mp \frac{\partial \overline{H}}{\partial p_1}(x_1, W'(x_1)) \leq 0 \text{ в } x_1 = (L \pm L)/2, \quad (2.3.16)$$

і

$$-\overline{H}(x_1, W'(x_1)) + \overline{h}_\pm \geq 0 \text{ в } x_1 = (L \pm L)/2. \quad (2.3.17)$$

Зазначимо, що обидві умови розуміються у в'язкісному сенсі.

Твердження 2.3.2. *Існує єдине число* $\lambda = \overline{\lambda}$ *(адитивне власне значення), таке що задача* (2.3.9), (2.3.16)–(2.3.17) *має неперервний в'язкісний розв'язок* W*. Більш того,* $\overline{\lambda}$ *визначається формулою*

$$\overline{\lambda} = \max\left\{\overline{h}_\pm, \max_{x_1 \in [0, L]} \min_{p_1} \overline{H}(x_1, p_1)\right\}. \quad (2.3.18)$$

Доведення. По-перше зазначимо, що кожний в'язкісний розв'язок (2.3.9) задовольняє рівняння поточково майже всюди, отже

$$\lambda \geq \max_{x_1 \in [0, L]} \min_{p_1} \overline{H}(x_1, p_1). \quad (2.3.19)$$

Більш того, функція W є неперервно диференційовною всюди за виключенням не більше ніж скінченного набору точок в $(0, L)$ де W є неперервною і існують однобічні границі похідної. Звідсіля випливає, зокрема, що $\overline{H}(x_1, W'(x_1)) = \lambda$ в кінцях $x_1 = (L \pm L)/2$. Покажемо, що $\lambda \geq \max\{\overline{h}_\pm\}$. Припустимо від супротивного, що $\lambda < \max\{\overline{h}_\pm\}$ і розглянемо, для визначеності, випадок коли $\max\{\overline{h}_\pm\} = \overline{h}_-$. Скористаємось тестовою функцією $\Phi(x_1) := (p_1 + \delta)x_1$, де p_1 – максимальний розв'язок рівняння $\overline{H}(0, p_1) = \lambda (= \overline{H}(0, W'(0)))$ і $\delta > 0$, для перевірки факту, що W є суб-розв'язком в $x_1 = 0$. Тоді маємо $\overline{H}(0, p_1 + \delta) \leq \lambda$ або $\overline{H}(0, p_1 + \delta) \geq \overline{h}_-$, але обидві ці нерівності не виконуються для достатньо малих δ. Таким чином, $\lambda \geq \overline{\lambda}$.

Припустимо тепер, що $\lambda > \overline{\lambda}$, зокрема $\lambda > \overline{h}_-$. Покладемо $p_1^- := W'(0)$. Якщо $\frac{\partial \overline{H}}{\partial p_1}(0, p_1^-) > 0$, тоді користуючись тестовою функцією $\Phi(x_1) := (p_1 - \delta)x_1$ з достатньо малими $\delta > 0$, знаходимо $\overline{H}(0, \Phi'(0)) < \lambda$, так що з огляду на (2.3.17) $\Phi'(0)$ задовольняє $\overline{H}(0, \Phi'(0)) \leq \overline{h}_-$. Таким чином $\lambda - O(\delta) \leq \overline{h}_-$, що протирічить припущенню $\lambda > \overline{\lambda}$, і маємо нерівність $\frac{\partial \overline{H}}{\partial p_1}(0, W'(0)) \leq 0$. Аналогічні міркування дають $\frac{\partial \overline{H}}{\partial p_1}(0, W'(L)) \geq 0$. Зазначимо, що отримані нерівності є насправді строгими, в противному випадку $\lambda = \overline{H}(x_1, W'(x_1)) = \min_{p_1} \overline{H}(x_1, p_1) \leq \overline{\lambda}$, де $x_1 = 0$ або $x_1 = L$. Звідси випливає, що $\lim_{x_1 \to \xi - 0} W'(x_1) < \lim_{x_1 \to \xi + 0} W'(x_1)$ в деякій точці $\xi \in (0, L)$. Але тоді $W(x_1)$ не може задовольняти рівняння $\overline{H}(x_1, W'(x_1)) = \lambda$ в ξ (у в'язкісному сенсі). $\square$

Нижче наведено основний результат про асимптотичну поведінку першого власного значення і власної функції.

Теорема 2.3.3. *Припустимо, що виконуються умови* (2.3.5)-(2.3.6). *Тоді перше власне значення λ_ε збігається при $\varepsilon \to 0$ до $\overline{\lambda}$, що задається* (2.3.18). *Масштабовані логарифмічні перетворення $W_\varepsilon = -\varepsilon \log u_\varepsilon$ перших власних функцій u_ε (нормалізованих рівністю $\max u_\varepsilon = 1$) збігаються рівномірно (з точністю до підпослідовності) до в'язкісного розв'язку $W(x_1)$ задачі* (2.3.9), (2.3.16)–(2.3.17).

2.3.2 Побудова примежових шарів біля основ циліндру

Розглянемо наступну задачу у напівобмеженому циліндрі: знайти число $\overline{g}$ і додатну обмежену функцію v, що задовольняють

$$a_{ij}\frac{\partial^2 v}{\partial y_i \partial y_j} + b_j \frac{\partial v}{\partial y_j} = 0 \quad \text{в } (0, +\infty) \times \omega, \tag{2.3.20}$$

$$\frac{\partial v}{\partial \nu_a} + g(y')v = \overline{g}v \quad \text{на } \{0\} \times \omega, \tag{2.3.21}$$

$$\frac{\partial v}{\partial \nu_a} = 0 \quad \text{на } (0, +\infty) \times \partial\omega. \tag{2.3.22}$$

Будемо припускати, що коефіцієнти $a_{ij}(y), b_j(y), c(y) \in C^3(\mathbb{R} \times \overline{\omega})$ є 1-періодичними відносно y_1, $a_{ij}(y)$ є симетричними $a_{ij} = a_{ji}$ і задовольняють умову рівномірної еліптичності, $g(y') \in C^2(\overline{\omega})$ є заданою функцією. Якісні властивості задачі (2.3.20)–(2.3.22) визначаються знаком так званого ефективного продольного знесення, яке задається наступним чином. Розглянемо задачу: знайти 1-періодичний відносно y_1 розв'язок рівняння

$$\frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j}(a_{ij}\theta^*) - \frac{\partial}{\partial y_j}\big(b_j\theta^*\big) = 0 \quad \text{в } (-\infty, +\infty) \times \omega \tag{2.3.23}$$

з крайовою умовою

$$\frac{\partial \theta^*}{\partial \nu_a} + \nu_j\left(\frac{\partial}{\partial y_i}a_{ij} - b_j\right)\theta^* = 0 \quad \text{на } (-\infty, +\infty) \times \partial\omega. \tag{2.3.24}$$

Оскільки спряжена задача до (2.3.23)–(2.3.24) має (виключно) постійні розв'язки, існує єдиний розв'язок (2.3.23)–(2.3.24) нормалізований рівністю

$$\frac{1}{|\omega|}\int_{(0,1)\times\omega} \theta^* dy_1 dy' = 1. \tag{2.3.25}$$

Тоді визначимо ефективне продольне знесення $\overline{b}_1$ рівністю

$$\overline{b}_1 := \int_{(0,1)\times\omega} b_1\theta^* dy_1 dy' - \int_{(0,1)\times\omega} \frac{\partial}{\partial y_j}\big(a_{1j}\theta^*\big) dy_1 dy'. \tag{2.3.26}$$

Теорема 2.3.4. *Існує число $\overline{g}^* \in \mathbb{R}$, таке що*

1. *для* $\overline{g} = \overline{g}^*$ *задача* (2.3.20)–(2.3.22) *має обмежений розв'язок* v, *що стабілізується експоненціально до сталої* v_∞,

2. *якщо* $\overline{b}_1 \leq 0$, *тоді* $v_\infty > 0$,

3. *якщо* $\overline{b}_1 > 0$, *тоді* $v_\infty = 0$.

У випадку $\overline{b}_1 \leq 0$ *обмежений додатний розв'язок* (2.3.20)– (2.3.22) *є единим з точністю до помноження на додатну сталу. Такого розв'язку не існує якщо* $\overline{g} \neq \overline{g}^*$.

У випадку $\overline{b}_1 > 0$, *для довільного* $\overline{g} < \overline{g}^*$ *існує обмежений додатний розв'язок* (2.3.20)–(2.3.22), *який стабілізується до деякої сталої* $v_\infty > 0$. *Не існує обмежених додатних розв'язків* (2.3.20)–(2.3.22) *для* $\overline{g} > \overline{g}^*$.

Доведення. Розглянемо допоміжну спектральну задачу: знайти перше власне значення $\Lambda = \Lambda(N)$ (що відповідає додатній власній функції) задачі Стеклова на власні значення

$$a_{ij}\frac{\partial^2 v_N}{\partial y_i \partial y_j} + b_j \frac{\partial v_N}{\partial y_j} = 0 \quad \text{в } (0, N) \times \omega, \tag{2.3.27}$$

зі спектральним параметром Λ в крайовій умові

$$\frac{\partial v_N}{\partial \nu_a} + g(y')v_N = \Lambda v_N \quad \text{на } \{0\} \times \omega. \tag{2.3.28}$$

Рівняння (2.3.27) доповнюється умовою Дирихле

$$v_N = 0 \quad \text{на } \{N\} \times \omega, \tag{2.3.29}$$

і умовою Неймана

$$\frac{\partial v_N}{\partial \nu_a} = 0 \tag{2.3.30}$$

на бічній поверхні $(0, N) \times \partial\omega$.

Згідно з Теоремою Крейна-Рутмана задача (2.3.27)–(2.3.30) має єдине власне значення $\Lambda = \Lambda(N)$, що відповідає додатній власній функції $v_N(y)$. Зазначимо, що v_N досгає свій максимум в точці на $\{0\} \times \omega$, тоді з умови (2.3.28) в цій точці знаходимо $\Lambda(N) \geq \min_{\overline{\omega}} g(y')$. Крім того, $\Lambda(N)$ є монотонною функцією від N: $\Lambda(N_1) \leq \Lambda(N_2)$ якщо $N_1 > N_2 > 0$. Дійсно, помітимо, що додатна функція $\tilde{v} := v_{N_2}/v_{N_1}$ задовольняє деяке рівняння конвекції-дифузії в $(0, N_2)\times\omega$ з умовою Неймана $\frac{\partial\tilde{v}}{\partial\nu_a} = 0$ на $(0, N_2) \times \partial\omega$, умовою Дирихле $\tilde{v} = 0$ на $\{L_2\} \times \omega$ і наступною умовою $\frac{\partial\tilde{v}}{\partial\nu_a} = (\Lambda(N_2) - \Lambda(N_1))\tilde{v}$ на $\{0\} \times \omega$. Оскільки $\tilde{v}$ досягає свій додатний максимум на $\{0\} \times \omega$, маємо $\Lambda(N_2) - \Lambda(N_1) \geq 0$. Таким чином,

$$\overline{g}^* = \lim_{N\to+\infty} \Lambda(N).$$

Нормалізуємо функцію v_N умовою $\min_{y\in\{0\}\times\overline{\omega}} v_N(y) = 1$ і перейдемо до границі при $N \to \infty$ користуючись еліптичними оцінками. В результаті одержуємо обмежений додатний розв'язок (2.3.20)–(2.3.22) для $\overline{g} = \overline{g}^*$.

Розглянемо тепер додатний розв'язок v задачі (2.3.20)–(2.3.22) у випадку коли $\overline{b}_1 \leq 0$. У цьому випадку, згідно з [154], рівняння(2.3.20) з умовою (2.3.22) і заданими значеннями на $\{0\} \times \omega$ має єдиний обмежений розв'язок і він стабілізується експоненціально до сталої при $y_1 \to +\infty$. Таким чином v стабілізується при $y_1 \to +\infty$ до додатної сталої. Якщо $\tilde{v}$ – інший додатний розв'язок тоді їх відношення $v/\tilde{v}$ задовольняє деяке рівняння конвекції-дифузії з крайовою умовою $\frac{\partial}{\partial\nu_a}(v/\tilde{v}) = 0$ на $\{0\} \times \omega$ і прямує до сталої коли $y_1 \to +\infty$. Отже функція $v/\tilde{v}$ обов'язково є сталою. Такі самі міркування, з застосуванням факторізації, показують що, якщо (2.3.20)–(2.3.22) має обмежений додатний розв'язок, тоді $\overline{g} = \overline{g}^*$.

У випадку коли $\overline{b}_1 > 0$, існує розв'язок рівняння (2.3.27), що задовольняє (2.3.22), прямує до нуля при $y_1 \to +\infty$, і має задані значення на $\{0\} \times \omega$ (див. [154]). Такий розв'язок можна вибрати більшим кожної з функцій v_N, тоді він є мажорантою і для їх границі v. Таким чином, для $\overline{g} = \overline{g}^*$, існує додатний розв'язок v^*, такий що $v^* \to 0$ коли $y_1 \to +\infty$. Розглянемо тепер $\overline{g} < \overline{g}^*$ і побудуємо розв'язок $\tilde{v}_N$ рівняння (2.3.27) в $(0, N) \times \omega$, який задовольняє також (2.3.22) на $(0, N)\times\partial\omega$. Шукаємо $\tilde{v}_N$ у вигляді $\tilde{v}_N = w_N(v^*+\delta)$, де v^* – розв'язок (2.3.20)–(2.3.22) для $\overline{g} = \overline{g}^*$ і δ – додатна константа, яку виберемо пізніше. Підставимо це представлення в (2.3.27) і (2.3.22), це веде до деякого рівняння конвекції-дифузії для w_N і крайової умови Неймана $\frac{\partial w_N}{\partial \nu_a} = 0$ на $(0, N) \times \partial\omega$. Покладемо $w_N = 1/(v^* + \delta)$ на $\{N\} \times \omega$. Насамкінець, для того, щоб добуток $w_N(v^* + \delta)$ задовольняв (2.3.21) на $\{0\} \times \omega$ маємо крайову умову

$$\frac{\partial w_N}{\partial \nu_a} + \left(\frac{\delta}{v^* + \delta}\Big(g(y') - \overline{g}^*\Big) + \overline{g}^* - \overline{g}\right) w_N = 0. \qquad (2.3.31)$$

Для достатньо малих $\delta > 0$ коефіцієнт при w_N в (2.3.31) стає додатним, $\frac{\delta}{v^*+\delta}\Big(g(y') - \overline{g}^*\Big) + \overline{g}^* - \overline{g} > 0$ на $\{0\} \times \omega$. Для таких δ існує єдиний додатний розв'язок w_N, тобто функція $\tilde{v}_N$ є коректно визначеною. Більш того, застосувавши принцип максимуму отримуємо $w_N \le \max_{\{N\}\times\omega} \frac{1}{v^*+\delta} \le \frac{1}{\delta}$ in $(0, N) \times \omega$, отже $\tilde{v}_N \le C$ зі сталою C, що не залежить від N. Згідно з [154], існує додатна функція u_0, що задовольняє (2.3.20) в $(0, +\infty) \times \omega$, крайову умову (2.3.22) на $(0, +\infty) \times \partial\omega$, і така що $u_0 = 0$ коли $y_1 = 0$, $u_0 \to 1$ при $y_1 \to +\infty$. Внаслідок принципу максимуму $\tilde{v}_N > u_0$. Таким чином, перехідом до границі $N \to +\infty$ (з точністю до підпослідовності) отримуємо обмежений додатний розв'язок $\tilde{v}$ задачі (2.3.20)– (2.3.22), який залишається відділеним від нуля коли $y_1 \to +\infty$. Більш того, $\tilde{v} \ge c > 0$ на $\{0\} \times \omega$, бо в противному випадку $\tilde{v} = 0$ в деякій точці $z \in \{0\} \times \omega$, отже, внаслідок Леми Хопфа про (ко)нормальну похідну, $\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \nu_a}(z) < 0$ але це протирічить (2.3.21).

Насамкінець, припустимо від супротивного, що у випадку $\overline{b}_1 > 0$ існує обмежений додатний розв'язок v для $\overline{g} > \overline{g}^*$. Тоді перепишемо розв'язок v^* (що відповідає $\overline{g}^*$ і прямує до нуля коли $y_1 \to +\infty$) у вигляді $v^* = \tilde{v}(v+\delta)$, з $\delta > 0$. Для $\tilde{v}$ отримуємо рівняння конвекції-дифузії в напівобмеженому циліндрі $(0, +\infty)$ з крайовою умовою Неймана на бічній поверхні і наступною умовою на $\{0\} \times \omega$:

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \nu_a} + \left(\frac{\delta}{v + \delta}\Big(g(y') - \overline{g}\Big) + \overline{g} - \overline{g}^*\right)\tilde{v} = 0.$$

З іншого боку функція $\tilde{v}$ досягає (додатний) максимум на $\{0\} \times \omega$ (вона прямує до нуля коли $y_1 \to \infty$), але це протирічить крайовій умові на $\{0\} \times \omega$, наведеній вище, для достатньо малих $\delta > 0$. $\square$

Разом з (2.3.20)–(2.3.22) розглянемо наступну формально спряжену задачу:

$$\frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j}\big(a_{ij}w\big) - \frac{\partial}{\partial y_j}\big(b_j w\big) = 0 \quad \text{в } (0,+\infty)\times\omega, \tag{2.3.32}$$

$$\frac{\partial w}{\partial \nu_a} + \left(b_1 - \frac{\partial}{\partial y_i}a_{i1} + g(y')\right)w = \overline{g}w \quad \text{на } \{0\}\times\omega, \tag{2.3.33}$$

$$\frac{\partial w}{\partial \nu_a} + \nu_j\left(\frac{\partial}{\partial y_i}a_{ij} - b_j\right)w = 0 \quad \text{на } (0,+\infty)\times\partial\omega. \tag{2.3.34}$$

Задачу (2.3.32)–(2.3.34) можна звести до вигляду (2.3.20)–(2.3.22) факторізацією з 1-періодичним відносно y_1 розвязком θ^* задачі (2.3.23)–(2.3.24), нормалізованим рівністю (2.3.25). Дійсно, представимо w як $w = \theta^*\tilde{w}$, в результаті отримуємо рівняння для $\tilde{w}$:

$$a_{ij}\frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j}\tilde{w} + \beta_j\frac{\partial}{\partial y_j}\tilde{w} = 0 \quad \text{в } (0,+\infty)\times\omega, \tag{2.3.35}$$

де $\beta_j = \frac{2}{\theta^*}\frac{\partial}{\partial y_i}(a_{ij}\theta^*) - b_j$, з крайовою умовою Неймана на бічній поверхні і Фур'є на основі:

$$\frac{\partial \tilde{w}}{\partial \nu_a} = 0 \text{ на } (0,+\infty)\times\partial\omega, \quad \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \nu_a} + \left(b_1 - \frac{\partial}{\theta^*\partial y_i}(a_{i1}\theta^*) + g(y')\right)\tilde{w} = \overline{g}\tilde{w} \text{ на } \{0\}\times\omega. \tag{2.3.36}$$

Таким чином, Теорему 2.3.4 можна застосувати до задачі (2.3.32)–(2.3.34). Зазначимо, що число $\overline{g}^*$ є таким самим як і в задачі (2.3.20)–(2.3.22) внаслідок того, що його отримано в границі $N \to +\infty$ в спектральних задачах спряжених до (2.3.27)–(2.3.30). Зазначимо також, що ефективне продольне знесення $\overline{\beta}_1$ для задачі (2.3.32)–(2.3.34) є $\overline{\beta}_1 = -\overline{b}_1$. Для цього помітимо, що θ^* задовольняє $\frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j}\big(a_{ij}\theta^*\big) - \frac{\partial}{\partial y_j}\big(\beta_j\theta^*\big) = 0$ в $(-\infty,+\infty)\times\omega$ і $\frac{\partial\theta^*}{\partial\nu_a} + \nu_j\left(\frac{\partial}{\partial y_i}a_{ij} - \beta_j\right)\theta^* = 0$ на $(-\infty,+\infty)\times\partial\omega$. Отже

$$\overline{\beta}_1 = \int_{(0,1)\times\omega}\left(2\frac{\partial}{\partial y_j}\big(a_{1j}\theta^*\big) - b_1\theta^* - \frac{\partial}{\partial y_j}\big(a_{1j}\theta^*\big)\right)dy_1 dy' = -\overline{b}_1.$$

Ці результати просумовано в наступній Теоремі.

Теорема 2.3.5. *Нехай* $\overline{b}_1$ *задається формулою* (2.3.26). *Задача* (2.3.32)–(2.3.34) *має єдиний (з точністю до помноження на додатну константу) обмежений розв'язок* $\overline{g} = \overline{g}^*$. *Крім того, для* $\overline{b} \geq 0$ *розв'язок є відділеним від нуля, а для* $\overline{b}_1 < 0$ *розв'язок з неохідністю (експоненціально) прямує до нуля коли* $y_1 \to \infty$. *У випадку* $\overline{b}_1 \geq 0$ *обмеженого нетривіального розв'язку* (2.3.32)–(2.3.34) *не існує для* $\overline{g} \neq \overline{g}^*$. *Якщо* $\overline{b}_1 < 0$ *тоді для кожного* $\overline{g} > \overline{g}^*$ *існує обмежений розв'язок який є відділеним від нуля; для* $\overline{g} > \overline{g}^*$ *не існує обмежених розв'язків.*

Зауваження 2.3.6. Згідно з результатами [126] розв'язки v в Теоремі 2.3.4 мають таку регулярність $v \in C^1([0,+\infty) \times \overline{\omega}) \cap C^2((0,+\infty) \times \omega)$. Хоча другі частинні похідні функції v є, взагалі кажучи, необмеженими біля $\{0\} \times \partial\omega$ (оскільки межа не є гладкою), проте за умови нормалізації $v \leq 1$ її другі частинні похідні задовольняють оцінки

$$\Big|\frac{\partial^2 v}{\partial y_i \partial y_j}\Big| \leq \frac{C}{\mathrm{dist}^\sigma(y, \{0\} \times \partial\omega)}$$

для деякого $0 \leq \sigma < 1$. Те саме має місце для розв'язків w спряженої задачі (2.3.32)–(2.3.34), які описані в Теоремі 2.3.5. Більш того, оскільки функції v і w/θ^* збігаються експоненціально до констант при $y_1 \to +\infty$, їх перші і другі частинні похідні (також експоненціально) збігаються до нуля (це випливає зі стандартних еліптичних оцінок [95]).

Представлений нижче результат містить важливе для подальшого аналізу (в Підрозділі 2.3.3) спостереження.

Твердження 2.3.7. *Нехай* v *і* w *– розв'язки задач* (2.3.20)–(2.3.22) *і* (2.3.32)–(2.3.34) *з* $\overline{g} = \overline{g}_v$ *і* $\overline{g} = \overline{g}_w$, *відповідно. Тоді векторне поле*

$$\Big(b_j + 2a_{ij}\frac{\partial \log v}{\partial y_i}\Big)vw - \frac{\partial}{\partial y_i}\big(a_{ij}vw\big)$$

є бездивергентним в $(0,+\infty) \times \omega$, *має нульову нормальну компоненту на бічній поверхні* $(0,+\infty) \times \partial\omega$, *і нормальна компонента цього поля на* $\{0\} \times \omega$ *доівнює* $(\overline{g}_v - \overline{g}_w)vw$.

Доведення. Всі описані властивості перевіряються за допомогою алгебраїчних маніпуляцій з рівняннями і крайовими умовами які задовольняють функції v і w. □

Неступна частина цього підрозділу присвячена завершенню доведення Теореми 2.3.1. Існування ефективної константи $\overline{g}^*_-(p_1)$ для (2.3.13)-(2.3.15) гарантовано Теоремою 2.3.4, а властивості $\overline{g}^*_-(p_1)$ як функції p_1 вивчаються нижче. Нагадаємо, що $\overline{g}^*_-(p_1)$ визначається формулою $\overline{g}^*_-(p_1) = \lim_{N\to+\infty} \Lambda(N, p_1)$, через власні значення $\Lambda(N, p_1)$ задачі Стеклова в скінчених циліндрах (див. задачу (2.3.27)–(2.3.30)). Нехай $v(y, N, p_1)$ – власна функція, що відповідає $\Lambda(N, p_1)$, тоді функція $\phi := e^{-p_1 y_1}\theta(y, p_1, 0)v(y, N, p_1))$ задовольняє

$$a_{ij}(0, y)\frac{\partial^2\phi}{\partial y_i \partial y_j} + b_j(0, y)\frac{\partial\phi}{\partial y_j} + c(0, y)\phi = \overline{H}(0, p_1)\phi \tag{2.3.37}$$

в $(0, N) \times \omega$, і

$$\frac{\partial\phi}{\partial\nu_a} = \begin{cases} 0 \quad \text{на}(0, N) \times \partial\omega \\ \Lambda(N, p_1)\phi - g_-(y')\phi \quad \text{на } \{0\} \times \omega, \end{cases} \qquad \text{і } \phi = 0 \quad \text{на } \{N\} \times \omega. \tag{2.3.38}$$

Розглянемо тепер довільне $\tilde{p}_1$, таке що $\overline{H}(0, \tilde{p}_1) = \overline{H}(0, p_1)$, і підставимо представлення $\phi = e^{-\tilde{p}_1 y_1}\theta(y, 0, \tilde{p}_1)\tilde{v}(y, N, \tilde{p}_1))$ з $\tilde{v} := e^{\tilde{p}_1 y_1}\phi/\theta(y, 0, \tilde{p}_1)$ в (2.3.37)–(2.3.38). Тоді легко бачити, що $\Lambda(N, \tilde{p}_1) = \Lambda(N, p_1)$ і $\tilde{v}$ є розвя'зком задачі Стеклова в скінченому циліндрі з $\tilde{p}_1$ замість p_1. Таким чином $\Lambda(N, p_1)$ є функцією $\overline{H}(0, p_1)$. Очевидно,що тесаме вірно для $\overline{g}^*_-(p_1)$ і будемо писати, трошки зловживаючи позначеннями,

$$\overline{g}^*_- = \overline{g}^*_-(h),\ h = \overline{H}(0, p_1).$$

Прямими обчисленнями перевіряється, що ефективне продольне знесення $\overline{b}_1$ для задачі (2.3.13)–(2.3.15) можна визначити формулою

$$\overline{b}_1(p_1) = -\frac{\partial\overline{H}}{\partial p_1}(0, p_1). \tag{2.3.39}$$

Неперервність $\overline{g}_{-}^{*}(h)$ встановлюється за допомогою розв'язання рівняння $h = \overline{H}(0,p_1)$ відносно p_1 (вибираємо корень з $\frac{\partial \overline{H}}{\partial p_1}(0,p_1) \geq 0$) і пезпосереднього дослідження задачі (2.3.13)–(2.3.15) на неперервну залежність від параметру.

Доведемо тепер монотонність $\overline{g}_{-}^{*}(h)$. Розглянемо h і $\tilde{h} > h$, такі що існують розв'язки p_1 і $\tilde{p}_1 > p_1$ рівнянь $\overline{H}(0,p_1) = h$, $\overline{H}(0,\tilde{p}_1) = \tilde{h}$. Виберемо p_1 таким чином, що $\frac{\partial \overline{H}}{\partial p_1}(0,p_1) \geq 0$. З Теореми 2.3.4 випливає, що існує обмежена додатна функція v, що задовольняє рівнянню (2.3.27) в $(0,+\infty)\times\omega$ разом з крайовими умовами (2.3.30) на $(0,+\infty)\times\partial\omega$ і (2.3.28) на $\{0\}\times\omega$, де $\overline{g}_{-}(p_1) = \overline{g}_{-}^{*}(\overline{H}(0,p_1))$. Тоді $\phi := e^{-p_1 y_1}\theta(y,0,p_1)v$ задовольняє (2.3.37) в $(0,+\infty)\times\omega$ разом з крайовими умовами $\frac{\partial\phi}{\partial\nu_a} = 0$ і $\frac{\partial\phi}{\partial\nu_a} + g_{-}(y')\phi = \overline{g}_{-}^{*}(h)\phi$ на бічній поверхні і основі, відповідно. Заміною p_1 на $\tilde{p}_1$ отримуємо іншу обмежену додатну функцію $\tilde{v}$ чиї властивості аналогічні v і визначимо $\tilde{v}$ by $\tilde{\phi} = e^{-\tilde{p}_1 y_1}\theta(y,0,\tilde{p}_1)\tilde{v}$. Тоді відношення $\psi = \tilde{\phi}/\phi$ задовольняє

$$a_{ij}(0,y)\frac{\partial^2\psi}{\partial y_i\partial y_j} + \left(b_j(0,y) + 2a_{ij}(0,y)\frac{\partial\log\phi}{\partial y_i}\right)\frac{\partial\psi}{\partial y_j} - (\tilde{h}-h)\psi = 0 \tag{2.3.40}$$

в $(0,+\infty)\times\omega$, і крайові умови $\frac{\partial\psi}{\partial\nu_a} = 0$ на $(0,+\infty)\times\partial\omega$,

$$\frac{\partial\psi}{\partial\nu_a} = (\overline{g}_{-}(\tilde{h}) - g_{-}(h))\psi \quad \text{на } \{0\}\times\omega. \tag{2.3.41}$$

Оскільки ψ (експоненціально) прямує до нуля при $y_1 \to +\infty$, максимум цієї функції з необхідністю досягається в точці $\{0\}\times\omega$. Тоді строга нерівність $\overline{g}_{-}(\tilde{h}) - g_{-}(h) > 0$ випливає з Леми Хопфа про (ко)нормальну похідну.

Для того щоб знайти оцінку знизу для $\overline{g}_{-}^{*}(h)$ при $h \to +\infty$, виберемо довільний розв'язок p_1 рівняння $\overline{H}(0,p_1) = h$ і розглянемо функцію $\phi = e^{-p_1 y_1}\theta(y,0,p_1)v(y,N,p_1)$. Помножимо (2.3.37) на ϕ і проінтегруємо по

$(0,N)\times\omega$, тоді , скориставшись інтегруванням частинами, знаходимо

$$\begin{aligned}\int_{\{0\}\times\omega}\frac{\partial\phi}{\partial\nu_a}\phi dy' = &\int_{(0,N)\times\omega} a_{ij}(0,y)\frac{\partial\phi}{\partial y_i}\frac{\partial\phi}{\partial y_j}dy\\ &+\int_{(0,N)\times\omega}\left(\frac{\partial a_{ij}(0,y)}{\partial y_i}-b_j(0,y)\right)\frac{\partial\phi}{\partial y_j}\phi dy\\ &+\int_{(0,N)\times\omega}(h-c(0,y))\phi^2 dy.\end{aligned} \tag{2.3.42}$$

Тепер, користуючись (2.3.38) в (2.3.42) знаходимо, за допомогою нерівності Коші-Шварца,

$$(\Lambda(N,p_1)+C_-)\int_{\{0\}\times\omega}\phi^2 dy' \geq \int_{(0,N)\times\omega}\left(\frac{\gamma}{2}|\nabla\phi|^2+(h-C_1)\phi^2\right)dy,$$

де $C_- = \max_\omega |g_-|$, γ – константа еліптичності для a_{ij}, і C_1 залежить від γ і L^∞-оцінок для $|\frac{\partial a_{ij}(0,y)}{\partial y_i}|$, $|b_j(0,y)|$ і $|c(0,y)|$. Таким чином,

$$\Lambda(N,p_1)+C_- \geq \inf\frac{1}{\varphi^2(0)}\int_0^N\left(\frac{\gamma}{2}|\varphi'(t)|^2+(h-C_1)\varphi^2(t)\right)dt,$$

де інфімум береться серед всіх $\varphi\in H^1(0,N)$, таких що $\varphi(N)=0$. Остання мінімізаційна задача має явний розв'язок, що веде до наступної оцінки, $\Lambda(N,p_1)\geq\sqrt{\gamma(h-C_1)/2}-C_-$. У границі $N\to+\infty$ отримуємо шукану оцінку знизу для $\overline{g}^*_-(h)$. Теорему 2.3.1 доведено. □

2.3.3 Двочленні асимптотичні формули для власних значень

У цьому підрозділі розглядається асимптотична поведінка розвязків спектральної задачі (2.3.4) за структурним припущенням відносно ефективної задачі (2.3.9), (2.3.16)–(2.3.17). А саме, будемо припускати, що

$$\begin{aligned}&\text{максимум в (2.3.18) є строгим,}\\ &\text{його досягається у внутрішній точці } \xi\in(0,L),\\ &-V := \left(\min\nolimits_{p_1}\overline{H}(x_1,p_1)\right)'' < 0 \text{ в } x_1=\xi.\end{aligned} \tag{2.3.43}$$

За цієї умови встановлюються перші два члени в асимптотичному розвиненні власних значень. Зазначимо, що техніка, яку розвинуто в цьому підрозділі, дозволяє вивчити як перше, так і наступні власні значення, на відміну від в'язкісних методів, що потребують представлення $u_\varepsilon = e^{-W_\varepsilon/\varepsilon}$ для власної функції і тому можуть бути застосовані тільки для першого власного значення і власної функції.

За умови (2.3.43) існує двічі неперервно диференційовна функція $p_1(x_1)$, така що

$$\begin{aligned}
&\overline{H}(x_1, p_1(x_1)) < \overline{H}(\xi, p_1(\xi))(= \overline{\lambda}) \quad \text{в } [0, L] \setminus \{\xi\}, \\
&\overline{H}(x_1^\pm, p_1(x_1^\pm)) > h_\pm, \ \mp\frac{\partial \overline{H}}{\partial p_1}(x_1^\pm, p_1(x_1^\pm)) > 0 \text{ на кінцях } x_1^\pm = \frac{L \pm L}{2}, \\
&\big(\overline{H}(x_1, p_1(x_1))\big)'' = -V < 0 \text{ в } x_1 = \xi.
\end{aligned} \tag{2.3.44}$$

Зазначимо, з першої нерівності у другому рядку (2.3.44) випливає, що

$$\overline{g}_-^*(p_1(0)) > 0, \ \overline{g}_+^*(p_1(L)) > 0. \tag{2.3.45}$$

Нехай $Q(x_1)$ – первісна функції $p_1(x_1)$, $Q'(x_1) = p_1(x_1)$. Представимо власні функції u_ε і відповідні власні значення λ_ε у вигляді

$$u_\varepsilon = e^{-Q(x_1)/\varepsilon}\theta(x/\varepsilon, x_1, p_1(x_1))\phi_\varepsilon, \quad \lambda_\varepsilon = \overline{\lambda} - \varepsilon\mu_\varepsilon, \tag{2.3.46}$$

де $\theta(y, x_1, p_1)$ є 1-періодичним відносно y_1 додатний розв'язок (2.3.10)–(2.3.11) нормалізований рівністю $\int_{(0,1)\times\omega} \theta(y, x_1, p_1)dy = 1$. Тоді рівняння $\mathcal{L}_\varepsilon u_\varepsilon = \lambda_\varepsilon u_\varepsilon$ переписується у вигляді

$$\mathcal{L}_\varepsilon^{(1)}\phi_\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon}U(x_1)\phi_\varepsilon = -\mu_\varepsilon\phi_\varepsilon + \mathcal{R}_\varepsilon^{(1)}\phi_\varepsilon, \tag{2.3.47}$$

де $U(x_1) = \overline{\lambda} - \overline{H}(p_1(x_1), x_1)$, $\mathcal{L}_\varepsilon^{(1)}\phi_\varepsilon = \varepsilon a_{ij}(x_1, x/\varepsilon)\frac{\partial^2\phi_\varepsilon}{\partial x_i \partial x_j} + \tilde{b}_j(x_1, x/\varepsilon)\frac{\partial \phi_\varepsilon}{\partial x_j}$,

$$\tilde{b}_j(x_1, y) = b_j(x_1, y) + 2a_{ij}(x_1, y)\frac{\partial \log\theta(y, x_1, p_1(x_1))}{\partial y_i} - 2a_{1j}(x_1, y)p_1(x_1),$$

$\mathcal{R}_\varepsilon^{(1)}\phi_\varepsilon = \zeta_\varepsilon^{(1)}\phi_\varepsilon + \varepsilon\eta_{j,\varepsilon}^{(1)}\frac{\partial\phi_\varepsilon}{\partial x_j}$ і $\zeta_\varepsilon^{(1)}$, $\eta_{j,\varepsilon}^{(1)}$ є рівномірно обмеженими функціями. Помножимо (2.3.47) на функцію $\theta^*(x/\varepsilon, x_1, p_1(x_1))$, де $\theta^*(y, x_1, p_1)$ – додатний

1−періодичний відносно y_1 розв'язок рівняння спряженого до (2.3.13),

$$\frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j}\big(a_{ij}\theta^*\big) - \frac{\partial}{\partial y_j}\big(\tilde b_j \theta^*\big) = 0 \quad \text{в } \mathbb{R}\times\omega \tag{2.3.48}$$

з крайовою умовою

$$\frac{\partial \theta^*}{\partial \nu_a} + \nu_j\bigg(\frac{\partial}{\partial y_i}a_{ij} - \tilde b_j\bigg)\theta^* = 0 \quad \text{on } \mathbb{R}\times\partial\omega, \tag{2.3.49}$$

нормалізований рівністю $\frac{1}{|\omega|}\int_{(0,1)\times\omega}\theta^*(y,x_1,p_1(x_1))dy = 1$. Після переранжування, знаходимо

$$\varepsilon\frac{\partial}{\partial x_i}\bigg(\theta^* a_{ij}\frac{\partial \phi_\varepsilon}{\partial x_j}\bigg) + B\cdot\nabla\phi_\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon}U(x_1)\theta^*\phi_\varepsilon = -\mu_\varepsilon\theta^*\phi_\varepsilon + \mathcal{R}^{(2)}_\varepsilon\phi_\varepsilon, \tag{2.3.50}$$

де $\mathcal{R}^{(2)}_\varepsilon\phi_\varepsilon = \zeta^{(2)}_\varepsilon\phi_\varepsilon - \varepsilon\eta^{(2)}_{j,\varepsilon}\frac{\partial\phi_\varepsilon}{\partial x_j}$ і $\zeta^{(2)}_\varepsilon$, $\tilde\eta^{(2)}_{j,\varepsilon}$ – рівномірно обмежені функції, $B = B(x_1,y)$ – векторне поле з компонентами

$$B_j(x_1,y) = \theta^*(x_1,y)\tilde b_j(x_1,y) - \frac{\partial}{\partial y_i}\big(a_{ij}(x_1,y)\theta^*(x_1,y)\big). \tag{2.3.51}$$

Зазначимо, що внаслідок (2.3.48)–(2.3.49) $\mathrm{div}_y B = 0$ і нормальна компонента векторного поля B є нулевою коли $y\in\mathbb{R}\times\partial\omega$.

Модіфікуємо представлення (2.3.46) у малому околі основи $\{0\}\times\varepsilon\omega$ за допомогою ще однієї факторізаації, яка спрощує крайову умову для ϕ_ε на $\{0\}\times\varepsilon\omega$. А саме, нехай $v_-(y)$ – розв'язок задачі (2.3.13)–(2.3.15) з $p_1 = p_1(0)$, $\overline{g}_-(p_1) = \overline{g}^*_-(p_1(0))$ (і $\theta = \theta(y,0,p_1(0))$), що (експоненціально) збігається до 1 при $y_1\to+\infty$. Покладемо $\psi_\varepsilon = \phi_\varepsilon/v_-(x/\varepsilon)$, і зазаначимо, що v_- задовольняє оцінку

$$\Big|\mathcal{L}^{(1)}_\varepsilon v_-(x/\varepsilon)\Big| \le C(x_1/\varepsilon)^{1-\sigma}e^{-cx_1/\varepsilon} \le C_2, \tag{2.3.52}$$

див. Зауваження 2.3.6. Тоді рівняння (2.3.47) в термінах нової невідомої функції ψ_ε можна записати як

$$\mathcal{L}^{(1)}_\varepsilon\psi_\varepsilon + 2a_{ij}(x_1,x/\varepsilon)\frac{\partial \log v_-}{\partial y_i}\frac{\partial\psi_\varepsilon}{\partial x_j} - \frac{1}{\varepsilon}U(x_1)\psi_\varepsilon = -\mu_\varepsilon\psi_\varepsilon + \mathcal{R}^{(3)}_\varepsilon\psi_\varepsilon \tag{2.3.53}$$

(структура і властивості $\mathcal{R}_\varepsilon^{(3)}$ є аналогічними $\mathcal{R}_\varepsilon^{(k)}$, $k = 1, 2$), а крайова умова на основі має вигляд

$$\frac{\partial \psi_\varepsilon}{\partial \nu_a} + \frac{\overline{g}_-^*(p_1(0))}{\varepsilon}\psi_\varepsilon = \tilde{g}_-(x'/\varepsilon)\psi_\varepsilon \quad \text{на } \{0\} \times \varepsilon\omega, \tag{2.3.54}$$

з деякою обмеженою функцією $\tilde{g}_-$. Насамкінець, рівняння (2.3.53) можна симетризувати подібно (2.3.50). Для цього введемо до розгдяду додатний розв'язок $w_-(y)$ задачі спряженої до (2.3.13)–(2.3.15) з $p_1 = p_1(0)$, $\overline{g}_-(p_1) = 0(< \overline{g}_-^*(p_1(0)))$, нормалізований так, що $w_-(y)/\theta^*(y, 0, p_1(0))$ (експоненціально) збігається до одиниці коли $y_1 \to +\infty$; існування такого розв'язку доведено в Підрозділі 2.3.2. Помножимо (2.3.53) на

$$\tilde{\theta}^*(x_1, x/\varepsilon) = \frac{v_-(x/\varepsilon)w_-(x/\varepsilon)}{\theta^*(x/\varepsilon, 0, p_1(0))}\theta^*(x/\varepsilon, x_1, p_1(x_1)) \tag{2.3.55}$$

і переранжуємо члени як в (2.3.50),

$$\varepsilon\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\tilde{\theta}^* a_{ij}\frac{\partial \psi_\varepsilon}{\partial x_j}\right) + \tilde{B}\cdot\nabla\psi_\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon}U(x_1)\tilde{\theta}^*\psi_\varepsilon = -\mu_\varepsilon\tilde{\theta}^*\psi_\varepsilon + \mathcal{R}_\varepsilon\psi_\varepsilon, \tag{2.3.56}$$

де $\tilde{B} = \tilde{B}(x_1, y)$ – векторне поле з компонентами

$$\tilde{B}_j = \tilde{\theta}^*(x_1, y)\Big(\tilde{b}_j(x_1, y) + 2a_{ij}(x_1, y)\frac{\partial \log v_-(y)}{\partial y_i}\Big) - \frac{\partial}{\partial y_i}\big(a_{ij}(x_1, y)\tilde{\theta}^*(x_1, y)\big),$$

або $\tilde{B}_j = \tilde{B}_j^{(1)} + B$, і $\tilde{B}^{(1)} = \tilde{B}^{(1)}(x_1, y)$ – поле з компонентами

$$\begin{aligned}\tilde{B}_j^{(1)} =& \Big(\frac{v_-(y)w_-(y)}{\theta^*(y, 0, p_1(0))} - 1\Big)\theta^*(y, x_1, p_1(x_1))\tilde{b}_j(x_1, y)\\ &+ 2a_{ij}(x_1, y)v_-(y)w_-(y)\frac{\partial \log v_-(y)}{\partial y_i}\frac{\theta^*(y, x_1, p_1(x_1))}{\theta^*(y, 0, p_1(0))}\\ &- \frac{\partial}{\partial y_i}\Big(a_{ij}(x_1, y)\Big(\frac{v_-(y)w_-(y)}{\theta^*(y, 0, p_1(0))} - 1\Big)\theta^*(y, x_1, p_1(x_1))\Big).\end{aligned}$$

Нагадаємо, що $\mathrm{div}_y B = 0$, також, з огляду на Твердження 2.3.7 маємо $\mathrm{div}_y\tilde{B}^{(1)} = 0$ at $x_1 = 0$ ($\tilde{B}_j^{(1)}(0, y) = -B_j(0, y) + v_-(y)w_-(y)\big(\tilde{b}_j(0, y) + 2a_{ij}(0, y)\frac{\partial \log v_-(y)}{\partial y_i}\big) - \frac{\partial}{\partial y_i}\big(a_{ij}(0, y)v_-(y)w_-(y)\big)$), отже $\mathrm{div}_y\tilde{B}(x_1, y) = \int_0^{x_1}\frac{\partial}{\partial x_1}\mathrm{div}_y\tilde{B}^{(1)}(s, y)ds$.

Поряд з цим, $|\frac{\partial}{\partial x_1}\mathrm{div}_y\tilde{B}^{(1)}(x_1,y)|\le Ce^{-cy_1}/y_1^\sigma$ з $c>0$ і $0\le\sigma<1$, див. Зауваження 2.3.6. Таким чином,

$$|\mathrm{div}\tilde{B}(x_1,x/\varepsilon)|\le C_1+\frac{1}{\varepsilon}|\mathrm{div}_y\tilde{B}^{(1)}(x_1,x/\varepsilon)|\le C_1+C\int_0^\infty \varepsilon^\sigma e^{-cx_1/\varepsilon}\frac{dx_1}{\varepsilon x_1^\sigma}\le C_2. \tag{2.3.57}$$

Аналогічні міркування ведуть до наступної оцінки для нормальної компоненти $\tilde{B}$,

$$|\tilde{B}_j(x_1,x/\varepsilon)\nu_j|\le\varepsilon C\quad \text{коли } x'\in\varepsilon\partial\omega. \tag{2.3.58}$$

Насамкінець, внаслідок Твердження 2.3.7

$$-\tilde{B}_1(x_1,x/\varepsilon)=\overline{g}_-^*(p_1(0))\tilde{\theta}^*(x_1,x/\varepsilon)\quad \text{коли } x_1=0. \tag{2.3.59}$$

Оскільки функції $v_-(y)$ і $w_-(y)/\theta^*(y,0,p_1(0))$ (експоненціально) збігаються до 1 коли $y_1\to\infty$, функціїї $\tilde{\theta}^*(x_1,y)$ і $\tilde{\theta}(x_1,y):=v_-(y)\theta(y,0,p_1(0))$, побудовані вище стабілізуються, експоненціально швидко, до періодичних функцій $\theta^*(y,x_1,p_1(x_1))$ і $\theta(y,x_1,p_1(x_1))$ коли $y_1\to+\infty$.

Повторюючи описану вище конструкцію біля основи $\{L\}\times\varepsilon\omega$, приходимо до модіфікованих $\tilde{\theta}^*$, $\tilde{\theta}$ і функції $\psi_\varepsilon=e^{Q(x_1)/\varepsilon}u_\varepsilon(x)/\tilde{\theta}(x_1,x/\varepsilon)$ яка задовольняє рівняння (2.3.56) у всьому циліндрі $(0,L)\times\varepsilon\omega$, де $\mathcal{R}_\varepsilon\psi_\varepsilon=\zeta_\varepsilon\psi_\varepsilon+\varepsilon\eta_{j,\varepsilon}\frac{\partial\psi_\varepsilon}{\partial x_j}$ і ζ_ε, $\eta_{j,\varepsilon}$ – рівномірно обмежені функції. Крім того ψ_ε задовольняє

$$\frac{\partial\psi_\varepsilon}{\partial\nu_a}=\tau_\varepsilon v_\varepsilon \tag{2.3.60}$$

на $(0,L)\times\varepsilon\partial\omega$, з $|\tau_\varepsilon|\le C$, крайову умову (2.3.54) на $\{0\}\times\varepsilon\omega$ і аналогічну умову на $\{L\}\times\varepsilon\omega$. Векторне поле $\tilde{B}(x_1,x/\varepsilon)$ має рівномірно обмежену дівергенцію і його нормальна компонента задовольняє (2.3.58) на бічній поверхні, (2.3.59) на $\{0\}\times\varepsilon\omega$ і $\tilde{B}_1(x_1,x/\varepsilon)=\overline{g}_+^*(p_1(0))\tilde{\theta}^*(x_1,x/\varepsilon)$ коли $x_1=L$.

Введемо тепер заміну змінних $z_1=(x_1-\xi)/\sqrt{\varepsilon}$, $z'=x'/\sqrt{\varepsilon}$ і розглянемо в циліндрі $\Omega_{\sqrt{\varepsilon}}=(-\xi/\sqrt{\varepsilon},(L-\xi)/\sqrt{\varepsilon})\times\sqrt{\varepsilon}\omega$ неоднорідне рівняння

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{L}}_\varepsilon\psi:=-\frac{\partial}{\partial z_i}\left(\tilde{\theta}^*a_{ij}\frac{\partial\psi}{\partial z_j}\right)-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\tilde{B}\cdot\nabla\psi+\frac{1}{\varepsilon}U(\xi+\sqrt{\varepsilon}z_1)\tilde{\theta}^*\psi\\ +(\Lambda\tilde{\theta}^*+\tilde{\mathcal{R}}_\varepsilon)\psi=\tilde{\theta}^*f,\end{aligned} \tag{2.3.61}$$

де $\tilde{\theta}^* = \tilde{\theta}^*(x_1, x/\varepsilon)$, $a_{ij} = a_{ij}(x_1, x/\varepsilon)$ і $\tilde{B} = \tilde{B}(x_1, x/\varepsilon)$ з $x_1 = \xi + \sqrt{\varepsilon} z_1$, $x' = \sqrt{\varepsilon} z'$, $\tilde{\mathcal{R}}_\varepsilon \psi = \zeta_\varepsilon \psi + \sqrt{\varepsilon} \eta_{j,\varepsilon} \frac{\partial \psi}{\partial z_j}$; $\Lambda > 0$ буде вибрано нижче. Доповнимо рівняння (2.3.61) масштабованими (відповідно до зазначеної вище заміни змінних) крайовою умовою (2.3.60) на бічній поверхні, умовою (2.3.54) на основі $\{-\xi/\sqrt{\varepsilon}\} \times \sqrt{\varepsilon}\omega$ і її аналогом на другій основі:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \nu_a} = \sqrt{\varepsilon} \tau_\varepsilon \psi \quad \text{на } (-\xi/\sqrt{\varepsilon}, (L-\xi)/\sqrt{\varepsilon}) \times \sqrt{\varepsilon}\partial\omega, \tag{2.3.62}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \nu_a} + \frac{\overline{g}^*_\pm(p_1(0))}{\sqrt{\varepsilon}} \psi = \sqrt{\varepsilon} \tilde{g}_\pm(x'/\varepsilon)\psi \quad \text{на } \{((L \pm L)/2 - \xi)/\sqrt{\varepsilon}\} \times \sqrt{\varepsilon}\omega, \tag{2.3.63}$$

так що $\psi_\varepsilon = e^{Q(x_1)/\varepsilon} u_\varepsilon(x)/\tilde{\theta}(x/\varepsilon, x_1)\big|_{x_1 = \xi + \sqrt{\varepsilon} z_1, x' = \sqrt{\varepsilon} z'}$ задовольняє (2.3.62)–(2.3.63) і (2.3.61) з $f = (\Lambda + \mu_\varepsilon)\psi_\varepsilon$.

Помножимо (2.3.61) на ψ і проінтергруємо по $\Omega_{\sqrt{\varepsilon}}$, в результаті, скориставшись інтегруванням частинами, отримуємо

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}} \int_{\Omega_{\sqrt{\varepsilon}}} \psi^2 \mathrm{div}_z \tilde{B} dz - \int_{\partial\Omega_{\sqrt{\varepsilon}}} \Big(\tilde{\theta}^* \frac{\partial \psi}{\partial \nu_a} \psi + \frac{\psi^2}{2\sqrt{\varepsilon}} \tilde{B} \cdot \nu) dS + \int_{\Omega_{\sqrt{\varepsilon}}} \tilde{\theta}^* a_{ij} \frac{\partial \psi}{\partial z_i} \frac{\partial \psi}{\partial z_j} dz \\ + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega_{\sqrt{\varepsilon}}} \big(U(\xi + \sqrt{\varepsilon} z_1) \tilde{\theta}^* + \varepsilon \Lambda \tilde{\theta}^* + \varepsilon \zeta_\varepsilon \big) \psi^2 dz \\ = \int_{\Omega_{\sqrt{\varepsilon}}} \Big(\tilde{\theta}^* f - \sqrt{\varepsilon} \eta_{j,\varepsilon} \frac{\partial \psi}{\partial z_j} \Big) \psi dz. \end{aligned} \tag{2.3.64}$$

Внаслідок (2.3.44) маємо $U(\xi + \sqrt{\varepsilon} z_1) \ge c\varepsilon z_1^2$, з $c > 0$. Тоді з тотожності (2.3.64) знаходимо, користуючись крайовими умовами (2.3.62)–(2.3.63), оцінкою (2.3.57) (з якої випливає $|\mathrm{div}_z \tilde{B}| \le C\sqrt{\varepsilon}$), оцінкою (2.3.58), рівністю (2.3.59) (і і її аналогом на основі $\{(L-\xi)/\sqrt{\varepsilon}\} \times \sqrt{\varepsilon}\omega$), що

$$\tilde{\gamma} \int_{\Omega_{\sqrt{\varepsilon}}} (|\nabla_z \psi|^2 + (\Lambda - C)\psi^2 + z_1^2 \psi^2) dz \le \int_{\Omega_{\sqrt{\varepsilon}}} f^2 dz + \sqrt{\varepsilon} \int_{\partial\Omega_{\sqrt{\varepsilon}}} \psi^2 dS, \tag{2.3.65}$$

де $\tilde{\gamma}$, C не залежать від ε.Отже існує $\Lambda > 0$, що не залежить від ε, таке що єдиний розв'язок ψ рівняння (2.3.61) з крайовими умрвами (2.3.62)–(2.3.63)) існує для довільної функції $f \in L^2(\Omega_{\sqrt{\varepsilon}})$ і задовольняє

$$\int_{\Omega_{\sqrt{\varepsilon}}} (|\nabla \psi|^2 + (1 + z_1^2)\psi^2) dz \le C \int_{\Omega_{\sqrt{\varepsilon}}} f^2 dz. \tag{2.3.66}$$

Аналогічні міркування ведуть до наступної оцінки для власної функції ψ_ε оператора $\frac{1}{\tilde\theta^*}\tilde{\mathcal{L}}_\varepsilon$, яка відповідає (взагалі кажучі комплексному) власному значенню $\Lambda+\mu_\varepsilon$,

$$\int_{\Omega_{\sqrt{\varepsilon}}}(|\nabla\psi_\varepsilon|^2+(1+z_1^2)|\psi_\varepsilon|^2)dz \le C(\Lambda+\mathrm{Re}(\mu_\varepsilon))\int_{\Omega_{\sqrt{\varepsilon}}}|\psi_\varepsilon|^2dz. \tag{2.3.67}$$

Лема 2.3.8. *Припустимо, що* $\mathrm{Re}(\mu_\varepsilon)\le C$, *тоді (i)* $|\mu_\varepsilon|$ *є рівномірно обмеженим і (ii) кожна часткова границя* μ_ε *при* $\varepsilon\to 0$ *є власним значенням* $\hat\mu$ *одномірної задачі*

$$-q\hat\psi''(z_1)+\frac{1}{2}Vz_1^2\hat\psi(z_1)+m\hat\psi(z_1)=\hat\mu\hat\psi(z_1),\quad z_1\in\mathbb{R}, \tag{2.3.68}$$

де $V=-\frac{\partial^2\overline{H}}{\partial x_1^2}(p_1(\xi),\xi)$, *константи* $q>0$ *і* m *задаються формулами* (2.3.76) *і* (2.3.78) *(див. нижче). Більш того, за умови нормалізації*

$$\frac{1}{|\sqrt{\varepsilon}\omega|}\int_{\Omega_{\sqrt{\varepsilon}}}|\psi_\varepsilon|^2dz=1, \tag{2.3.69}$$

власні функції ψ_ε *збігаються при* $\varepsilon\to 0$, *з точністю до підпослідовності, до власної функції* $\hat\psi$ *у наступному сенсі*

$$\frac{1}{|\sqrt{\varepsilon}\omega|}\int_{\Omega_{\sqrt{\varepsilon}}}|\psi_\varepsilon-\hat\psi|^2dz\to 0. \tag{2.3.70}$$

Доведення. З (2.3.67) і (2.3.69) випливає, що, з точністю до підпослідовності, функції ψ_ε збігаються до границі $\hat\psi=\hat\psi(z_1)$ (де збіжність розуміється у сенсі (2.3.70)), більш того

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(|\hat\psi'|^2+(1+z_1^2)|\hat\psi|^2dz_1<\infty \quad \text{і} \quad \int_{-\infty}^{\infty}|\hat\psi|^2dz_1=1. \tag{2.3.71}$$

Для визначення $\hat\psi$ помножимо рівняння $\tilde{\mathcal{L}}_\varepsilon\psi_\varepsilon=(\Lambda+\mu_\varepsilon)\tilde\theta^*\psi_\varepsilon$ на осцілюючу тестову функцію ρ_ε (яку буде вибрано нижче) і проінтегруємо по $\Omega_{\sqrt{\varepsilon}}$, в результаті, застосувавши інтегрування частинами і перегрупувавши члени, отримуємо

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega_{\sqrt{\varepsilon}}}\Big(\big\{\theta^* a_{ij}\big\}_\xi \frac{\partial\psi_\varepsilon}{\partial z_i}\frac{\partial\rho_\varepsilon}{\partial z_j} + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\psi_\varepsilon\big\{B\big\}_\xi\cdot\nabla\rho_\varepsilon\Big)dz + \int_{\Omega_{\sqrt{\varepsilon}}}\Big(\frac{V}{2}z_1^2+\zeta_\varepsilon\Big)\tilde\theta^*\psi_\varepsilon\rho_\varepsilon dz\\
&\qquad + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_{\Omega_{\sqrt{\varepsilon}}}\psi_\varepsilon\Big(\big(\tilde B-\big\{B\big\}_\xi\big)\cdot\nabla\rho_\varepsilon + \rho_\varepsilon \mathrm{div}_z\tilde B\Big)dz\\
&\qquad = \mu_\varepsilon\int_{\Omega_{\sqrt{\varepsilon}}}\tilde\theta^*\psi_\varepsilon\rho_\varepsilon dz + \int_{\partial\Omega_{\sqrt{\varepsilon}}}\Big(\tilde\theta^*\frac{\partial\psi_\varepsilon}{\partial\nu_a}\rho_\varepsilon + \frac{\tilde B\cdot\nu}{\sqrt{\varepsilon}}\psi_\varepsilon\rho_\varepsilon\Big)dS\\
&\qquad + \int_{\Omega_{\sqrt{\varepsilon}}}\Big(\big\{\theta^* a_{ij}\big\}_\xi - \tilde\theta^* a_{ij}\Big)\frac{\partial\psi_\varepsilon}{\partial z_i}\frac{\partial\rho_\varepsilon}{\partial z_j}dz\\
&\qquad + \int_{\Omega_{\sqrt{\varepsilon}}}\Big(\frac{\varepsilon V z_1^2/2 - U(\xi+\sqrt{\varepsilon}z_1)}{\varepsilon}\tilde\theta^*\psi_\varepsilon - \sqrt{\varepsilon}\eta_{j,\varepsilon}\frac{\partial\psi_\varepsilon}{\partial z_j}\Big)\rho_\varepsilon dz,
\end{aligned} \tag{2.3.72}$$

де $\big\{\theta^* a_{ij}\big\}_\xi = \theta^*(x_1,y)a_{ij}(x_1,y)$ і $\big\{B\big\}_\xi = B(x_1,y)$ з $x_1=\xi$, $y_1 = \xi/\varepsilon + z_1/\sqrt{\varepsilon}$, $y' = z'/\sqrt{\varepsilon}$. Нехай $\rho(z_1)$ – гладка функція з компактним носієм, $\mathrm{supp}\rho\subset[-R,R]$, розглянемо тестову функцію $\rho_\varepsilon(z)$ вигляду

$$\rho_\varepsilon(z) = \rho(z_1) + \sqrt{\varepsilon}\rho'(z_1)\chi(\xi/\varepsilon + z_1/\sqrt{\varepsilon}, z'/\sqrt{\varepsilon})$$

де $\chi(y)$ – 1-періодичний відносно y_1 розв'язок стандартної коміркової задачі

$$-\frac{\partial}{\partial y_i}\Big(\theta^*(\xi,y)a_{ij}(\xi,y)\frac{\partial}{\partial y_j}(\chi+y_1)\Big) + B(\xi,y)\cdot\nabla(\chi+y_1) = 0 \tag{2.3.73}$$

в $(-\infty,\infty)\times\omega$ з крайовою умовою

$$\frac{\partial(\chi+y_1)}{\partial\nu_a} = 0 \quad \text{на } (-\infty,\infty)\times\partial\omega. \tag{2.3.74}$$

Оскільки $\mathrm{div}_y B(\xi,y) = 0$, $B(\xi,y)\cdot\nu = 0$ коли $y'\in\partial\omega$ і $\int_{(0,1)\times\omega} B_1(\xi,y)dy = -\frac{\partial\overline{H}}{\partial p_1}(p_1(\xi),\xi) = 0$, існує єдиний розв'язок задачі (2.3.73)–(2.3.74). Тоді, за допомогою інтегрування частинами в першому члені $I_\varepsilon^{(1)}$ першого рядку (2.3.72) і заміни змінних $y_1 = \xi/\varepsilon + z_1/\sqrt{\varepsilon}$, $y' = z'/\sqrt{\varepsilon}$, знаходимо

$$
\begin{aligned}
I_\varepsilon^{(1)} &= \varepsilon^{n/2}\int dy_1\int_\omega dy'\psi_\varepsilon\Big(B_1\chi - \theta^* a_{11} - \theta^* a_{1j}\frac{\partial\chi}{\partial y_j} - \frac{\partial}{\partial y_i}(\theta^* a_{i1}\chi)\Big)\rho'' \\
&\quad + \varepsilon^{n/2}\int dy_1\int_{\partial\omega}\psi_\varepsilon\theta^*\nu_i a_{i1}\chi\rho'' dS + O(\varepsilon^{n/2}) \\
&= -\varepsilon^{n/2} q\int \hat\psi(\sqrt{\varepsilon}y_1 - \xi/\sqrt{\varepsilon})\rho''(\sqrt{\varepsilon}y_1 - \xi/\sqrt{\varepsilon})dy_1 + O(\varepsilon^{n/2}) \\
&= -\varepsilon^{(n-1)/2} q\int_{-R}^{R}\hat\psi(z_1)\rho''(z_1)dz_1 + O(\varepsilon^{n/2}),
\end{aligned}
\tag{2.3.75}
$$

де інеграли відносно y_1 у першому, другому і третьому рядках беруться по $(\xi/\varepsilon - R/\sqrt{\varepsilon}, \xi/\varepsilon + R/\sqrt{\varepsilon})$,

$$
q = \int_{(0,1)\times\omega}\big(\theta^* a_{11} + \theta^* a_{1j}\frac{\partial\chi}{\partial y_j} - B_1\chi\big)dy = \int_{(0,1)\times\omega}\theta^* a_{ij}\frac{\partial}{\partial y_i}(\chi + y_1)\frac{\partial}{\partial y_j}(\chi + y_1)dy.
\tag{2.3.76}
$$

Знайдемо тепер асимптотичні формули для інших членів в (2.3.72). Члени в останніх двох рядках мають порядок $O(\varepsilon^{n/2})$. Те саме є справедливим для інтеграла $I_\varepsilon^{(2)}$ у другому рядку, проте це є менш очевидним: спочатку встановлюється, що

$$
I_\varepsilon^{(2)} = \varepsilon^{(n-1)/2}\int_{-R}^{R}\hat\psi(z_1)\big(K_1 z_1\rho'(z_1) + K_2\rho(z_1)\big)dz_1 + O(\varepsilon^{n/2}),
$$

з $K_1 = \int_{(0,1)\times\omega}\big(\frac{\partial B_1}{\partial x_1}(\xi, y) + \nabla\chi\cdot\frac{\partial B}{\partial x_1}(\xi, y)\big)dy$, $K_2 = \int_{(0,1)\times\omega}\frac{\partial B_1}{\partial x_1}(\xi, y)dy$; далі, помітимо, що $\int_{(0,1)\times\omega} B_1(x_1, y)dy = -\frac{\partial\overline{H}}{\partial p_1}(p_1(x_1), x_1)$, отже $K_2 = -\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial\overline{H}}{\partial p_1}(x_1, p_1(x_1))\big|_{x_1=\xi} = 0$ завдяки умовам (2.3.43)–(2.3.44), також маємо $\mathrm{div}_y B(x_1, y) = 0$ і $B(x_1, y)\cdot\nu = 0$ коли $y' \in \partial\omega$, звідки $K_1 = 0$. Насамкінець, асимптотичні формули для суми $I_\varepsilon^{(3)}$ членів третього рядка (2.3.72) і другого члену $\tilde I_\varepsilon^{(1)}$ першого рядка мають вигляд

$$
\begin{aligned}
I_\varepsilon^{(3)} &= \varepsilon^{(n-1)/2}\mu_\varepsilon\int_{-R}^{R}\psi(z_1)\rho(z_1)dz_1 + (1 + |\mu_\varepsilon|)O(\varepsilon^{n/2}) \\
&\quad - \varepsilon^{(n-1)/2}\int_{-R}^{R}dz_1\psi(z_1)\rho(z_1)\int_{(0,1)\times\partial\omega}\theta^*\nu_i a_{i1}\frac{\partial\log\theta}{\partial x_1}\Big|_{x_1=\xi}dS,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\tilde{I}^{(1)}_{\varepsilon} &= \varepsilon^{(n-1)/2}\int_{-R}^{R}\frac{V}{2}z_1^2\hat{\psi}(z_1)\rho(z_1)dz_1 + O(\varepsilon^{n/2})\\
&\quad + \varepsilon^{(n-1)/2}\int_{-R}^{R}dz_1\hat{\psi}(z_1)\rho(z_1)\\
&\qquad\times\int_{(0,1)\times\omega}\frac{\theta^*}{\theta}\Big(a_{11}\Big(p_1'\theta + (2p_1 - b_1)\frac{\partial\theta}{\partial x_1}\Big) - 2a_{1j}\frac{\partial^2\theta}{\partial x_1\partial y_j}\Big)\Big|_{x_1=\xi}dy,
\end{aligned}
$$

де $\theta^* = \theta^*(x_1, y)$, $\theta = \theta(y, x_1, p_1(x_1))$, $p_1 = p_1(x_1)$, $a_{ij} = a_{ij}(x_1, y)$, $b_j = b_j(x_1, y)$. Підставимо знайдені вище асимптотичні формули в (2.3.72) і поділимо на $\varepsilon^{(n-1)/2}$, маємо

$$
\int_{\mathbb{R}}\hat{\psi}(z_1)(-q\rho''(z_1)+\frac{1}{2}Vz_1^2\rho(z_1)+m\rho(z_1)-\mu_\varepsilon\rho(z_1))dz_1 = (1+|\mu_\varepsilon|)O(\sqrt{\varepsilon}), \tag{2.3.77}
$$

де

$$
\begin{aligned}
m = \int_{(0,1)\times\omega}\frac{\theta^*}{\theta}\Big(a_{11}\Big(p_1'\theta + (2p_1 - b_1)\frac{\partial\theta}{\partial x_1}\Big)-2a_{1j}\frac{\partial^2\theta}{\partial x_1\partial y_j}\Big)\Big|_{x_1=\xi}dy&\\
+\int_{(0,1)\times\partial\omega}\theta^*\nu_i a_{i1}\frac{\partial\log\theta}{\partial x_1}\Big|_{x_1=\xi}dS.&
\end{aligned} \tag{2.3.78}
$$

Оскільки ρ є довільною (гладкою і з компактним носієм) функцією, тоді $|\mu_\varepsilon|$ є обмеженими, бо в противному випадку $\hat{\psi}$ є тотожним нулем, що протирічить (2.3.71). Прейдемо тепер до границі в (2.3.77), в результаті одержуємо слабку постановку (2.3.68). □

Зауваження 2.3.9. Функцію θ^* можна представити у вигляді добутку $\theta^* = \theta\vartheta$ власної функції θ задачі (2.3.10)–(2.3.11) і власної функції ϑ задачі спряженої до (2.3.10)–(2.3.11).

Зауваження 2.3.10. Визначення (2.3.78) константи m є незалежним від окремого вибору функції $p_1(x_1)$: $p_1(\xi)$ однозначно визначається як мінімізант $\overline{H}(p_1, \xi)$, і за умов (2.3.43)–(2.3.44)

$$
p'(\xi) = -\frac{\partial^2\overline{H}}{\partial p_1\partial x_1}(\xi, p_1(\xi))\Big/\frac{\partial^2\overline{H}}{\partial p_1^2}(\xi, p_1(\xi)).
$$

Розглянемо тепер допоміжну задачу

$$\hat{\mathcal{L}}_\varepsilon\psi := -q\Delta\psi + \frac{1}{2}Vz_1^2\psi + (m+\Lambda)\psi = \theta^* f \quad \text{in } \Omega_{\sqrt{\varepsilon}} \tag{2.3.79}$$

з умовою Немана $\frac{\partial\psi}{\partial\nu} = 0$ на $\partial\Omega_{\sqrt{\varepsilon}}$. В операторній формі вона має вигляд $\frac{1}{\theta^*}\hat{\mathcal{L}}_\varepsilon\psi = f$. Наділимо $L^2(\Omega_{\sqrt{\varepsilon}})$ нормою $\|\psi\|^2_{\varepsilon,\theta^*} = \frac{1}{|\sqrt{\varepsilon}\omega|}\int_{\Omega_{\sqrt{\varepsilon}}}\psi^2\theta^* dz$ і відповідним скалярним добутком, тоді $\frac{1}{\theta^*}\hat{\mathcal{L}}_\varepsilon$ є самоспряженим оператором. Він має дискретний спектр. Більш того, за допомогою принципу Куранта нескладно показати, що власні значення $\frac{1}{\theta^*}\hat{\mathcal{L}}_\varepsilon$ збігаються до чисел $\Lambda + \hat{\mu}^{(k)}$, де $\hat{\mu}^{(1)} < \hat{\mu}^{(2)} < \dots$ – власні значення (2.3.68).

Покажемо, що $\|\big(\frac{1}{\theta^*}\tilde{\mathcal{L}}_\varepsilon\big)^{-1} - \big(\frac{1}{\theta^*}\hat{\mathcal{L}}_\varepsilon\big)^{-1}\| \to 0$, де $\|\cdot\|$ позначає операторну норму (відносно $L^2(\Omega_{\sqrt{\varepsilon}})$). Для цього розглянемо для довільної функції $f_\varepsilon \in L^2(\Omega_{\sqrt{\varepsilon}})$ з $\frac{1}{|\sqrt{\varepsilon}\omega|}\int_{\Omega_{\sqrt{\varepsilon}}} f_\varepsilon^2 dz = 1$ розв'язки ψ_ε і $\hat{\psi}_\varepsilon$ рівнянь $\tilde{\mathcal{L}}_\varepsilon\psi_\varepsilon = \theta^* f_\varepsilon$ і $\hat{\mathcal{L}}_\varepsilon\hat{\psi}_\varepsilon = \theta^* f_\varepsilon$. Повертаючись до доведення Леми 2.3.8 неважко переконатись, що його можна використати (з мінімальними модифікаціями) для доведення наступного факту: з точністю до підпослідовності $\frac{1}{|\sqrt{\varepsilon}\omega|}\int_{\Omega_{\sqrt{\varepsilon}}}(\psi_\varepsilon^2 - \psi)^2 dz \to 0$ з функцією $\psi = \psi(z_1)$ яка є розв'язком рівняння $-q\psi''(z_1) + \frac{1}{2}Vz_1^2\psi(z_1) + (\Lambda + m)\psi(z_1) = f^*(z_1)$, де $f^*(z_1)$ – слабка границя функцій

$$\langle\theta^* f_\varepsilon\rangle(z_1) = \frac{1}{|\sqrt{\varepsilon}\omega|}\int_{\{z_1\}\times\sqrt{\varepsilon}\omega} f\tilde{\theta}^* dz'$$

(продовжених нульом на $\mathbb{R}\setminus[-\xi/\sqrt{\varepsilon}, (L-\xi)/\sqrt{\varepsilon}]$) в $L^2(\mathbb{R})$. Такий самий результат є вірним для $\hat{\psi}_\varepsilon$, таким чином $\|\big(\frac{1}{\theta^*}\tilde{\mathcal{L}}_\varepsilon - \lambda I\big)^{-1} - \big(\frac{1}{\theta^*}\hat{\mathcal{L}}_\varepsilon - \lambda I\big)^{-1}\| \to 0$ для $\lambda = 0$. Цей результат легко посилити до рівномірної відносно λ резольвентної збіжності в операторній нормі на довільній компактній підмножині $\mathbb{C}\setminus\{\hat{\mu}^{(1)}, \hat{\mu}^{(2)}, \dots\}$, з останнього результата, в свою чергу, випливає збіжність спектральних проекторів в операторній нормі. Таким чином доведено наступний результат.

Теорема 2.3.11. *Припустимо, що виконуєтьcя умова* (2.3.43) *а також припущення* (2.3.5)–(2.3.6). *Занумеруємо власні значення* $\lambda = \lambda_\varepsilon^{(k)}$ *задачі* (2.3.4) *за величиною дійсних частин (у спадаючому порядку), тоді*

$$\lambda_\varepsilon^{(k)} = \overline{\lambda} - \varepsilon\hat{\mu}^{(k)} + o(\varepsilon),$$

де $\hat{\mu}^{(k)}$ *– власні значення оператора* $-q\frac{d^2}{dz_1^2}+\frac{1}{2}Vz_1^2+m$ *на* $\mathbb{R}$, $\hat{\mu}^{(k)} = m+\sqrt{2qV}(k-1/2)$, $k = 1, 2, \dots$.

Висновки до Розділу 2

У Розділі 2 вивчено асимптотичну поведінку розв'язків спектральних задач для сингулярно збурених несиметричних еліптичних рівнянь другого порядку. Основними результатами розділу є

- Теорема 2.1.1, що описує асимтотичну поведінку основних станів сингулярно збуреної задачі Діріхле з осцилюючими локально періодичними коефіцієнтами, і Теорема 2.1.19, що надає уточнені асимптотики для основних станів у випадку коли молодші члени оператора мають один порядок.

- Теорема 2.2.1, що описує асимптотичну поведінку основних станів задачі Неймана для оператора з плавно змінними коефіцієнтами і малим параметром перед дифузійним членом.

- Теорема 2.3.3, що описує асимптотичну поведінку основних станів сингулярно збуреного еліптичного оператора з осцилюючими коефіцієнтами в тонкому циліндрі з умовою Неймана на бічній поверхні і Фур'є на основах, та Теорема 2.3.11 в якій наведені двочленні асимтотичні формули для першого і наступних власних значень.

Розділ 3

ДЕЯКІ ЗАДАЧІ УСЕРЕДНЕННЯ

Цей розділ складається з двох досліджень задач усереднення.

У Підрозділі 3.1 розглянуто модель захоплення (пінінгу) вихорів в надпровіднику з домішками, що моделюються маленькими дірками. Знайдено масштабні співвідношення між розмірами дірок, просторовим періодом і величиною зовнішнього магнітного поля, що призводять до появи вкладених областей з кратними вихорами і виведено усереднену задачу, що описує граничні роподіли вихорів. Раніше усереднене описання вихорових структур в надпровідниках з домішками було отримано в [3] для моделі, в якій домішки моделються осцилюючою неперервною функцією в нелінійному члені рівняння Гінзбурга-Ландау.

У Підрозділі 3.2 вивчається задача усереднення нелінійних рівнянь другого порядку в областях періодично перфорованих великим числом дірок на межі яких задано нелінійну умову Фур'є. Розглянуто випадок, коли просторовий період і розміри дірок є (малими) величинами одного порядку. Раніше лінійні еліптичні рівняння в областях перфорованих мілкими дірками (значно меншими ніж просторовий період) і умовою Фур'є на межі дірок було розглянуто, наприклад, в [69], [70], [9], [25], [151], [152], [155]. У випадку коли дірки мають розміри порядку просторового періода, в роботах [142], [143], [144], [145] побудовано асиптотичні розвинення розв'язків задач без осциляцій в крайових умовах на межі дірок; в [26], [156], [157] вивчено асимптотичну поведінку розв'язків у припущенні, що коефіцієнт в умові Фур'є має нульове середнє на межі дірок. Аналогічне припущення використано в [68], де нелінійну варіаційну задачу досліджено методами Г-збіжності. На відміну від згаданих робіт, у Підрозділі 3.2 вивчено нелінійну задачу, що не має варіаційної постановки, крім того на зовнішній межі розглянуто умову Неймана замість умови Діріхле. Остання обставина дозволила виявити досить неочикуваний ефект появи нового члена в усередненій крайовій умові на зовнішній межі.

Дослідження структури мінімізанта Г-граничної задачі з Підрозділу 3.1 наведено в Додатку I. Додатки J–K містять доведення теореми про усереднення для параболічного аналога стаціонарної задачі з Підрозділу 3.2 і доведення деяких допоміжних результатів.

3.1 Усереднене описання кратних вихорів Гінзбурга-Ландау захоплених отворами

У цьому підрозділі розглядається двовимірна математична модель захоплення (пінінгу) вихорів великим числом отворів (дірок) в відносно малих надпровідних зразках, розміру порівняного з лондонівською глибиною проникнення. На зразок діє рівномірне магнітне поле, яке є слабим для того щоб вихорі з'явилися в тілі зразка і вони можуть існувати тільки на дірках.

Вивчається задача про усереднене описання великого числа вихорів в періодично перфорованій області Ω_ε. Нагадаємо, що в присутності зовнішнього магнітного поля h^ε_{ext}, стаціонарні стани надпровідника відповідаєть мінімізантам функціоналу Гінзбурга-Ландау

$$GL(u,A)=\frac{1}{2}\int_{\Omega_\varepsilon}(|\nabla u-iAu|^2+\frac{\kappa^2}{2}(1-|u|^2)^2)\,dx+\frac{1}{2}\int_{\Omega}(\mathrm{curl}A-h^\varepsilon_{ext})\,dx. \quad (3.1.1)$$

Невідомими тут є параметр порядку u і векторний потенціал A магнітного поля, h^ε_{ext} – стале зовнішне магнітне поле яке, для визначеності, вважаєм додатним. Область Ω_ε в (3.1.1) задається перфорацією фіксованої однозв'язної обмеженої області $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ великим числом N_ε мілких дірок ω^ε_j. Будемо вважати, що всі дірки є однаковими дисками з радіусом ρ_ε і періодично, з малим періодом $\varepsilon>0$, розташованими центрами a_j^ε. Припускаємо також, що

$$|\log\kappa| \gg |\log\rho_\varepsilon| \text{ і } \rho_\varepsilon \ll \varepsilon \tag{3.1.2}$$

(радіус дірок є набагато більшим ніж ядро вихору і набагато меншим ніж просторовий період ε). Крім того, розглядається випадок натупних масштабних співвідношень між магнітним полем і діаметром дірок,

$$h_{ext}^\varepsilon = \sigma/\varepsilon^2,\ \operatorname{diam}(\omega_j^\varepsilon) = 2e^{-\gamma/\varepsilon^2}, \tag{3.1.3}$$

де σ і γ – фіксовані додатні константи. Таким чином, порядок зовнішнього магнітного поля є таким, що відповідає скінченому потоку через кожну комірку періодичності $\int_{cell} h_{ext}^\varepsilon dx = O(1)$. Зазначимо, що ефективне ядро вихоря захопленого діркою має порядок рідіусу дірки ρ_ε, отже його енергія має порядок $\log(1/\rho_\varepsilon)$. Тоді, за умови (3.1.3), енергії вихорів і енергія осторонь ядер вихорів маєть подібний порядок, і в цих припущеннях виникає неоднорідний розподіл вихорів з зонами спадаючої кратності. У випадку інших масштабних співвідношень усереднене описання вихорів (принаймні на формальному рівні) веде до рівномірних розподілів.

Нагадаємо, що у випадку однорідного надпровідника для полів $0 < h_{ext}^\varepsilon < H_{c1} := C_1 \log\kappa$ (менше першого критичного поля [180]) вихорів не виникає. Збільнення магнітного поля до $C_1\log\kappa < h_{ext}^\varepsilon < C_2\kappa^2$ веде до решітки простих (кратності один) вихорів. У випадку надпровідника з дірками інтервал $0 < h_{ext}^\varepsilon < H_{c1} := C_1\log\kappa$ розділюється на два підінтервали: коли вихорів не виникає зовсім і коли вони захоплюються дірками але їх немає в тілі надпровідника.

Зі сказаного вище випливає, що за умови (3.1.2) вихорів в Ω_ε немає і член $\frac{\kappa^2}{4}\int_{\Omega_\varepsilon}(1-|u|^2)^2$ можна ефективно замінити поточковою умовою $|u| = 1$. Цей перехід обгрунтовано в [32] у випадку фіксованого числа малих дірок (зі співвідношеннями між параметрами як в (3.1.2), (3.1.3), можна очикувати, що аналогічний результат є справедливим і у випадку великого числа дірок, проте доведення є складнішим (зазначимо, що випадок коли багатозв'язна область не залежить від параметрів задачі розглянуто в [5]). Таким чином надалі (замість (3.1.1)) будемо досліджувати асимптотичну поведінку розв'язків наступної задачі мінімізації

$$M_\varepsilon = \inf\{F_\varepsilon(u, A);\ u \in H^1(\Omega_\varepsilon; \mathbb{S}^1),\ A \in H^1(\Omega;\ \mathbb{R}^2)\} \tag{3.1.4}$$

для функціонала

$$F_\varepsilon(u, A) = \frac{1}{2}\int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u - iAu|^2 dx + \frac{1}{2}\int_\Omega (\mathrm{curl} A - h^\varepsilon_{ext})^2 dx,\ \varepsilon > 0. \tag{3.1.5}$$

Нехай d_j^ε – (цілі) степені відображення мінімізанта u^ε на $\partial\omega_j^\varepsilon$. Вивчаються слабкі границі узагальнених функцій $D(x) = w - \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \sum d_j^\varepsilon \delta_{a_j^\varepsilon}(x)$ при $\varepsilon \to 0$, які дають усереднене описання розподілів вихорів.

Для кожного фіксованого значення $\varepsilon > 0$ мінімізанти $(u^\varepsilon, A^\varepsilon)$ задачі (3.1.4)-(3.1.5) можна виразити через степені d_j^ε і розв'язки наступної задачі для магнітного поля $h^\varepsilon = \mathrm{curl} A^\varepsilon$ (див. [5])

$$\begin{cases} -\Delta h^\varepsilon + h^\varepsilon = 0 \text{ в } \Omega_\varepsilon, \\ h^\varepsilon(x) = h^\varepsilon_{ext} \text{ на } \partial\Omega, \\ h^\varepsilon(x) = H_j^\varepsilon \text{ на } \omega_\varepsilon^j,\ j = 1, 2, \ldots, N_\varepsilon, \\ -\int_{\partial\omega_j^\varepsilon} \frac{\partial h^\varepsilon}{\partial\nu}\, ds = 2\pi d_j^\varepsilon - \int_{\omega_j^\varepsilon} h^\varepsilon(x) dx, \end{cases} \tag{3.1.6}$$

де H_j^ε – невідомі константи які є частиною задачі. Зазначимо, що якщо відомо степіні d_j^ε, тоді мінімум (3.1.4) обчислюється формулою

$$E_\varepsilon(h^\varepsilon) = \frac{1}{2}\int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla h^\varepsilon|^2 dx + \frac{1}{2}\int_\Omega (h^\varepsilon - h^\varepsilon_{ext})^2 dx, \tag{3.1.7}$$

і навпаки, мінімум (3.1.5) можна знайти мінімізацією (3.1.7) відносно цілих d_j^ε, де $h^\varepsilon(x; \{d_j^\varepsilon\})$ – єдиний ров'язок (3.1.6). Таким чином, набір $\{d_j^\varepsilon\}$ можна знайти мінімізацією(3.1.7) серед наборів цілих чисел і (3.1.4) зводиться до наступної скінченовимірної задачі (вимірності N_ε) мінімізаційної задачі

$$M_\varepsilon = \inf\{E_\varepsilon(h^\varepsilon);\ h^\varepsilon = h^\varepsilon(x; \{d_j^\varepsilon\}) \text{ є розв'язком (3.1.6) для цілих } d_j^\varepsilon\} \tag{3.1.8}$$

Зауваження 3.1.1. В мінімізаційній задачі (3.1.4) $\{d_j^\varepsilon\}$ – невідомі цілі числа. Задачу (3.1.6) може бути розв'язана для довільних $d_j^\varepsilon,\ j=1,...,N_\varepsilon$, проте, щоб відновити мінімізант u_ε необхідно щоб числа d_j^ε були цілими.

3.1.1 Результати про усереднення і компактність

Введемо перемасштабовані величини

$$\tilde{h}^\varepsilon = \varepsilon^2 h^\varepsilon,\ \tilde{h}^\varepsilon_{ext} = \varepsilon^2 h^\varepsilon_{ext},\ \tilde{E}_\varepsilon(\tilde{h}_\varepsilon) = \varepsilon^4 E_\varepsilon(\tilde{h}_\varepsilon), \tilde{M}_\varepsilon = \varepsilon^4 M_\varepsilon. \tag{3.1.9}$$

Зазначимо, що h^ε (отже і $\tilde{h}_\varepsilon$) визначається єдиним способом через набір чисел d_j^ε. Таким чином, трішки зловживаючи позначеннями, можна записати $\tilde{E}_\varepsilon(\tilde{h}^\varepsilon) = \tilde{E}_\varepsilon(\{d_j^\varepsilon\})$. Розглянемо мінімізуючий набір степеней $\{d_j^\varepsilon\}$, так що відповідні розв'язки (3.1.6), перемасштабовані згідно (3.1.9), задовольняють $\tilde{E}_\varepsilon(\tilde{h}_\varepsilon) = \tilde{M}_\varepsilon$.

Спочатку знайдемо апріорні оцінки для степеней d_j^ε в наступній Лемі.

Лема 3.1.2. *Нехай d_j^ε – степені мінімізанта (3.1.4), тоді*

$$\sum (d_j^\varepsilon)^2 \le C/\varepsilon^2, \tag{3.1.10}$$

де C на залежить від ε.

Доведення. Нагадаємо слабке формулювання задачі для $\tilde{h}^\varepsilon$, знайти функцію $\tilde{h}^\varepsilon \in H^1(\Omega)$, таку що $\nabla \tilde{h}^\varepsilon = 0$ у всих ω_j^ε, $\tilde{h}^\varepsilon = \sigma$ на $\partial\Omega$, і

$$\int_\Omega (\nabla \tilde{h}^\varepsilon \cdot \nabla v + \tilde{h}^\varepsilon v)dx - 2\pi\varepsilon^2 \sum d_j^\varepsilon v|_{\omega_j^\varepsilon} = 0 \tag{3.1.11}$$

для довільної тестової функції $v \in H_0^1(\Omega)$, такої що $\nabla v = 0$ в усіх ω_j^ε. Зокрема, якщо вибрати всі $d_j^\varepsilon = 0$, і покласти $v = \tilde{h}^\varepsilon - \sigma$, отримуємо апріорну оцінку (для $\tilde{h}$, що відповідає цьому набору степеней d_j^ε)

$$\|\tilde{h}^\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} := \int_{\Omega_\varepsilon} (|\nabla \tilde{h}^\varepsilon|^2 + (\tilde{h}^\varepsilon)^2)dx \le C,$$

тобто $\tilde{M}_\varepsilon \leq C$, де C не залежить від ε. Отже для мінімізуючого набору $\{d_j^\varepsilon\}$ маємо $\tilde{E}_\varepsilon(\tilde{h}^\varepsilon) \leq C$, звідки $\|\tilde{h}^\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \leq C$, з (іншою) незалежною від ε константою C. Виберемо тепер тестову функцію $v = \sum d_j^\varepsilon L_j^\varepsilon(x)/\log(2\rho_\varepsilon/\varepsilon)$ в (3.1.11), де

$$L_j^\varepsilon(x) = \begin{cases} \log(2|x-a_j^\varepsilon|/\varepsilon) \text{ if } x \in B_{\varepsilon/2}(a_j^\varepsilon) \setminus B_{\rho_\varepsilon}(a_j^\varepsilon) \\ \log(2\rho_\varepsilon/\varepsilon) \text{ if } x \in B_{\rho_\varepsilon}(a_j^\varepsilon) \\ 0 \text{ if } x \notin B_{\varepsilon/2}(a_j^\varepsilon). \end{cases} \tag{3.1.12}$$

Нескладні обчислення ведуть тепер до шуканої оцінки:

$$2\pi\varepsilon^2 \sum (d_j^\varepsilon)^2 = \int_\Omega (\nabla\tilde{h}^\varepsilon \cdot \nabla v + \tilde{h}^\varepsilon v)dx \leq \sqrt{2\pi\varepsilon^2(1+o(\varepsilon))\sum(d_j^\varepsilon)^2/\gamma}\, \|\tilde{h}^\varepsilon\|_{H^1(\Omega)},$$

тобто $2\pi\varepsilon^2 \sum (d_j^\varepsilon)^2 \leq (1+o(\varepsilon))\|\tilde{h}^\varepsilon\|^2_{H^1(\Omega)}/\gamma \leq C$, де γ визначено в (3.1.3). $\square$

З Леми 3.1.2 випливає, що, з точністю до підпослідовності,

$$\zeta^\varepsilon = \varepsilon^2 \sum d_j^\varepsilon \delta_{a_j^\varepsilon}(x) \rightharpoonup D(x) \text{ як розподіли, і } D(x) \in L^2(\Omega). \tag{3.1.13}$$

З цього моменту $\{d_j^\varepsilon\}$ буде позначати довільний набір цілих, такий що виконуються (3.1.10) і (3.1.13), і $\tilde{h}^\varepsilon$ – функція побудована через набір $\{d_j^\varepsilon\}$, $\tilde{h}^\varepsilon = \varepsilon^2 h^\varepsilon$, де h^ε – розв'язок (3.1.6).

Неважко бачити, що за умовами згаданими вище можна перейти до границі в (3.1.11) і показати, що $\tilde{h}^\varepsilon$ збігаються слабко в H^1 до розв'язку $\bar{h}$ усередненої залачі

$$\begin{cases} -\Delta\bar{h} + \bar{h} = 2\pi D(x) \text{ в } \Omega \\ \bar{h} = \sigma \text{ на } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.1.14}$$

(деталі представлено в Лемі 3.1.5, нижче). Проте, цієї слабкої збіжності недостатньо для описання $D(x)$. Це буде зроблено шляхом обчислення Γ-границі функціоналів $\tilde{E}^\varepsilon$, що потребує збіжності енергій для оптимальної оцінки знизу. Тому потрібно знайти також коректор.

Розглянемо анзац,

$$\tilde{h}^\varepsilon(x) = \bar{h}^\varepsilon(x) - \varepsilon^2 \sum d_j^\varepsilon L_j^\varepsilon(x) = \bar{h}^\varepsilon(x) + R^\varepsilon, \tag{3.1.15}$$

де функції $L_j^\varepsilon(x)$ задаються (3.1.12). Задача для $\bar h^\varepsilon$ (в слабкому формулюванні) є наступною, знайти $\bar h^\varepsilon \in H^1(\Omega)$, таке що $\nabla \bar h^\varepsilon = 0$ у всіх ω_j^ε і $\bar h^\varepsilon = \sigma$ на $\partial\Omega$, і

$$\int_\Omega (\nabla \bar h^\varepsilon \cdot \nabla v + \bar h_\varepsilon v) dx + \sum \int_{B_{\varepsilon/2}(a_j^\varepsilon)} v R^\varepsilon(x) dx = 2\varepsilon \sum d_j^\varepsilon \int_{\partial B_{\varepsilon/2}(a_j^\varepsilon)} v\, ds \quad (3.1.16)$$

виконується для кожної тестової функції $v \in H_0^1(\Omega)$, такої що $\nabla v = 0$ у всіх ω_j^ε.

Лема 3.1.3. *За умов (3.1.10), (3.1.13) функції $\bar h^\varepsilon$ збігаються сильно в H^1 до единого розв'язку $\bar h$ задачі (3.1.14).*

Зауваження 3.1.4. Lemma 3.1.3 показує, що функція $R^\varepsilon(x) = -\varepsilon^2 \sum d_j^\varepsilon L_j^\varepsilon(x)$ є коректором, так що $\bar h^\varepsilon = \tilde h^\varepsilon - R^\varepsilon$ збігаються сильно в $H^1(\Omega)$.

Доведення. З (3.1.10) випливає, що R^ε збігається слабко в H^1 до нуля, отже, з точністю до підпослідовності, $\bar h^\varepsilon \rightharpoonup \bar h$. Для того щоб показати, що $\bar h$ є розв'язком (3.1.14) розглянемо тестову функцію $v^\varepsilon = v(x) + \sum \phi(x/\rho_\varepsilon)(v(a_j^\varepsilon) - v(x))$, де $v \in C_0^\infty(\Omega)$ – довільна функція, і $\phi(x)$ – гладка зрізаюча функція, така що $\phi = 1$ якщо $|x| \le 1$ і $\phi = 0$ якщо $|x| > 2$. Покладемо $v = v^\varepsilon$ в (3.1.16) і перейдемо до границі при $\varepsilon \to 0$:

$$\int_\Omega (\nabla \bar h \cdot \nabla v + \bar h v)\, dx = 2\pi \int_\Omega D(x) v\, dx.$$

Таким чином, $\bar h$ є розв'язком (3.1.14).

Покажемо тепер, що $\bar h^\varepsilon$ збігається сильно в H^1 до $\bar h$. Покладемо $v = \bar h^\varepsilon - \sigma$ в (3.1.16), тоді

$$\limsup \int_\Omega \nabla \bar h^\varepsilon \cdot \nabla \bar h^\varepsilon dx = 2 \limsup \varepsilon \sum d_j^\varepsilon \int_{\partial B_{\varepsilon/2}(a_j^\varepsilon)} (\bar h^\varepsilon - \sigma)\, ds + \int_\Omega (\sigma - \bar h) \bar h dx.$$

Скориставшись нерівностями Пуанкаре,

$$\int_{\Pi_j^\varepsilon} \left| \bar h^\varepsilon - \frac{1}{\pi\varepsilon} \int_{\partial B_{\varepsilon/2}(a_j^\varepsilon)} \bar h^\varepsilon\, ds \right|^2 dx \le C\varepsilon^2 \int_{\Pi_j^\varepsilon} |\nabla \bar h^\varepsilon|^2 dx$$

і

$$\int_{\Pi_j^\varepsilon} \left| \bar h^\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\Pi_j^\varepsilon} \bar h^\varepsilon dx \right|^2 dx \le C\varepsilon^2 \int_{\Pi_j^\varepsilon} |\nabla \bar h^\varepsilon|^2 dx,$$

отримуємо

$$\frac{1}{\pi\varepsilon}\int_{\partial B_{\varepsilon/2}(a_j^\varepsilon)}\bar{h}^\varepsilon\,ds = \frac{1}{\varepsilon^2}\int_{\Pi_j^\varepsilon}\bar{h}^\varepsilon dx + O(1)\Big(\int_{\Pi_j^\varepsilon}|\nabla\bar{h}^\varepsilon|^2dx\Big)^{1/2},$$

де Π_j^ε – комірка з центром в a_j^ε і стороною ε. Отже

$$2\lim\varepsilon\sum d_j^\varepsilon\int_{\partial B_{\varepsilon/2}(a_j^\varepsilon)}\bar{h}^\varepsilon\,ds = 2\pi\int_\Omega D(x)\bar{h}\,dx,$$

де використано (3.1.10), (3.1.13) і той факт, що $\bar{h}^\varepsilon\to\bar{h}$ сильно в $L^2(\Omega)$. Таким чином, приймаючи до уваги (3.1.14), одержуємо

$$\limsup\int_\Omega\nabla\bar{h}^\varepsilon\cdot\nabla\bar{h}^\varepsilon dx = 2\pi\int_\Omega D(x)(\bar{h}-\sigma)\,dx + \int_\Omega(\sigma-\bar{h})\bar{h}dx = \int_\Omega\nabla\bar{h}\cdot\nabla\bar{h}dx.$$

Звідси випливає, що $\bar{h}^\varepsilon\to\bar{h}$ сильно в $H^1(\Omega)$. □

Як наслідок Леми 3.1.3 маємо наступний результат.

Лема 3.1.5. *За умовами (3.1.10), (3.1.13) має місце наступне рощвинення енергії:*

$$\tilde{E}_\varepsilon(\tilde{h}^\varepsilon) = \bar{E}_1(\bar{h}) + \pi\gamma\varepsilon^2\sum(d_j^\varepsilon)^2 + o(1), \tag{3.1.17}$$

де

$$\bar{E}_1(\bar{h}) = \frac{1}{2}\int_\Omega|\nabla\bar{h}|^2dx + \frac{1}{2}\int_\Omega(\bar{h}-\sigma)^2dx \tag{3.1.18}$$

Доведення. Оскільки $\bar{h}^\varepsilon\to\bar{h}$ сильно в $H^1(\Omega)$ і $R^\varepsilon\to 0$ слабко in $H^1(\Omega)$, маємо

$$\tilde{E}_\varepsilon(\tilde{h}^\varepsilon) = \bar{E}_1(\bar{h}^\varepsilon) + \frac{1}{2}\int_\Omega|\nabla R^\varepsilon|^2\,dx + o(1) = \bar{E}_1(\bar{h}) + \frac{1}{2}\int_\Omega|\nabla R^\varepsilon|^2\,dx + o(1)$$

Пряме обчислення другого члену цього розвинення дає (3.1.17). □

3.1.2 Γ-границя енергій

Основний результат про збіжність вихоревих розподілів встановлюється шляхом доведення Γ-збіжності функціоналів $\tilde{E}_\varepsilon$ відносно слабкої збіжності (3.1.13) вихоревих розподілів,

$$\tilde{E}_\varepsilon(\{d_j^\varepsilon\})\ \text{Γ-збігається до}\ \bar{E}_0(D) = \bar{E}_1(\bar{h}) + \pi\gamma\int_\Omega\Phi(D(x))dx\ \text{при}\ \varepsilon\to 0, \tag{3.1.19}$$

де $\bar{h}$ – єдиний розв'язок (3.1.14). Більш точно, буде показано, що

(i) ($\Gamma - liminf$ нерівність) якщо виконуються умови (3.1.10) і (3.1.13), тоді

$$\liminf \tilde{E}_\varepsilon(\{d_j^\varepsilon\}) \geq \bar{E}_0(D); \tag{3.1.20}$$

(ii) ($\Gamma - limsup$ нерівність) $\forall D(x) \in L^2(\Omega)$ існує послідовність наборів $\{d_j^\varepsilon\}$, які задовольняють умови (3.1.10) і (3.1.13), і є такими що

$$\limsup \tilde{E}_\varepsilon(\{d_j^\varepsilon\}) \leq \bar{E}_0(D). \tag{3.1.21}$$

Зауваження 3.1.6. Зазначимо, що з умови (3.1.13) випливає, що границя $D(x)$ існує у сенсі розподілів. Більш того $D(x)$ є функцією з $L^2(\Omega)$ якщо справджується умова (3.1.10).

Буде показано, що функція Φ в граничному функціоналі (3.1.19) є неперервною кусково лінійною інтерполяцією параболи в цілих точках, $\Phi(d) = d^2$ для $d \in \mathbb{Z}$. Вона описує усереднені щільності енергій індивідуальних вихорів, у той час як $\bar{E}_1$ відповідає взаємодії вихоря з магнітним полем спричиненим іншими вихорами і зовнішним полем.

Завдяки розвиненню енергії (3.1.17), для "$\liminf$"нерівності потрібно тільки показати оцінку

$$\liminf \varepsilon^2 \sum (d_j^\varepsilon)^2 \geq \int_\Omega \Phi(D(x))\, dx. \tag{3.1.22}$$

Для цього, оскільки (3.1.22) є нелінійною (квадратичною) функцією від d_j^ε, буде використано аналог міри Юнга.

Крок I (Оцінка знизу). З мірами ζ^ε (визначеними в (3.1.13)), які є сумами точкових мас, пов'яжемо кусково постійні функції D^ε задані рівностями $D^\varepsilon = d_j^\varepsilon$ на комірках Π_j^ε (Π_j^ε – комірка з центром a_j^ε і розмірами ε). Представимо тепер D^ε як

$$D^\varepsilon(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} k\mu_k^\varepsilon(x), \text{ де } \mu_k^\varepsilon(x) = \begin{cases} 1 \text{ в } \Pi_j^\varepsilon, \text{ якщо } k = d_j^\varepsilon \\ 0, \text{ в противному випадку.} \end{cases} \tag{3.1.23}$$

Продовжимо D^ε і μ_k^ε, $k \neq 0$, на Ω рівністю $D^\varepsilon = \mu_k^\varepsilon = 0$ в $\Omega \setminus \cup\Pi_j^\varepsilon$, також покладемо $\mu_0 = 1$ в $\Omega \setminus \cup\Pi_j^\varepsilon$. Функції $\mu_k^\varepsilon(x)$ задоволняють $\mu_k^\varepsilon \geq 0$ і $\sum \mu_k^\varepsilon = 1$, і, таким чином, вони утворюють розбиття одиниці. Ясно, що можна виділити підпослідовність, таку що

$$\mu_k^\varepsilon \rightharpoonup \mu_k \text{ слабко в } L^2(\Omega)\ \forall k \in \mathbb{Z}. \tag{3.1.24}$$

Завдяки оцінці (3.1.10) маємо

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} k^2 \int_\Omega \mu_k^\varepsilon dx = \varepsilon^2 \sum (d_j^\varepsilon)^2 \le C. \tag{3.1.25}$$

Отже граничні функції μ_k також утворюють розбиття одиниці,

$$\mu_k \ge 0 \text{ і } \sum \mu_k = 1. \tag{3.1.26}$$

Дійсно, їх слабкі границі є невід'ємними. З аналогічної причини $\sum \mu_k \le 1$, у той час як згідно (B.3) маємо

$$\sum_{|k|\le K} \int_\Omega \mu_k dx \ge |\Omega| - \limsup_{\varepsilon\to 0} \sum_{|k|>K} \int_\Omega \mu_k^\varepsilon dx \ge |\Omega| - C/K^2,\ \forall K > 0,$$

це дає $\sum \mu_k = 1$. Крім того, функція $D(x)$, задана в (3.1.13), допускає представлення

$$D(x) = \sum k\mu_k(x) \tag{3.1.27}$$

і з рівності в (B.3) випливає, що

$$\liminf \varepsilon^2 \sum (d_j^\varepsilon)^2 \ge \sum_{k\in\mathbb{Z}} k^2 \int_\Omega \mu_k(x). \tag{3.1.28}$$

Для того щоб знати оцінку зверху в термінах $D(x)$, розглянемо функцію

$$\Phi(D) := \min_{\{\mu_k\}_{k\in\mathbb{Z}}} \left\{ \sum_{k\in\mathbb{Z}} k^2\mu_k;\ \mu_k \ge 0,\ \sum \mu_k = 1,\ \sum k\mu_k = D \right\}. \tag{3.1.29}$$

для дійсних значень D. Тоді з (3.1.28) випливає оцінка знизу

$$\liminf \varepsilon^2 \sum (d_j^\varepsilon)^2 \ge \int_\Omega \Phi(D(x))dx \tag{3.1.30}$$

Функцію $\Phi(D)$ обчислено у наступній Лемі.

Лема 3.1.7. $\Phi(D) = (2k+1)|D| - k - k^2$ *для* $k \le |D| < k+1$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. *Крім того, якщо* $D = d$ *є цілим, тоді єдиною мінімізуючою послідовністю в* (3.1.29) *є* $\mu_d = 1$, $\mu_k = 0 \ \ \forall k \neq d$. *У випадку коли* D *не є цілим представимо* D *як опуклу комбінацію найближчих цілих* d *і* $d+1$, $D = \alpha d + (1-\alpha)(d+1)$, *тоді єдиною мінімізуючою послідовністю є* $\mu_d = \alpha$, $\mu_{d+1} = 1 - \alpha$, $\mu_k = 0$ $\forall k \notin \{d, d+1\}$.

Доведення. Доведення Якщо $D = d$, тоді $\Phi(D) \le d^2$, і, скориставшись нерівністю Коші-Шварца, знаходимо

$$d^2 = (\sum k\mu_k)^2 = (\sum k\sqrt{\mu_k}\sqrt{\mu_k})^2 \le \sum k^2\mu_k = \Phi(D). \tag{3.1.31}$$

Таким чином $\Phi(D) = d^2$ і мінімізуюча послідовність є $m_d = 1$, $m_k = 0 \ \forall k \neq d$.

Нехай тепер D не є цілим, $D = \alpha d + (1-\alpha)(d+1)$, і нехай $\{\mu_k\}$ – мінімізуюча послідовність. Якщо $\mu_k > 0$ для деякого $k < d$, тоді існує $\mu_l > 0$ для деякого $l \ge d+1$. Збільшимо μ_k і μ_l на достатньо мале $\delta > 0$ і зменшимо μ_{k+1} і μ_{l-1} на δ. Ця модифікація залишає в силі (3.1.26) і (3.1.27), але зменшує значення функціоналу $\sum k^2\mu_k$. Отже $\mu_k = 0 \ \forall k \notin \{d,\, d+1\}$. Випадок коли $\mu_k > 0$ для деякого $k > d+1$ є аналогічним. Тоді з (3.1.26) і (3.1.27) знаходимо $\mu_d = \alpha$, $\mu_{d+1} = 1 - \alpha$. □

Крок II (Оцінка зверху). Для завершення доведення Γ-збіжності (3.1.19), необхідно перівірити $\limsup$-нерівність, тобто, для заданого $D \in L^2(\Omega)$, необхідно побудувати послідовність наборів $\{d_j^\varepsilon\}$, які задовольняють умову (3.1.10), збігаються до $D(x)$ у сенсі (3.1.13), і задовольняють нерівність (3.1.21).

Оскільки функціонал $\bar{E}_0(D)$ є неперервним відносно сильної збіжності в $L^2(\Omega)$, достатньо перевірити $\limsup$-нерівність для $D \in C_0^\infty(\Omega)$ і скористатися щільністю $C_0^\infty(\Omega)$ в $L^2(\Omega)$. Крім того, згідно з Лемою 3.1.5, для того щоб встановити (3.1.21), достатньо побудувати послідовність наборів $\{d_j^\varepsilon\}$, що задовольняє

$$\varepsilon^2 \sum (d_j^\varepsilon)^2 \le \int_\Omega \Phi(D(x))\, dx. \tag{3.1.32}$$

Для фіксованого $x \in \Omega$ представимо $D(x)$ випуклою комбінацією найближчих цілих чисел d і $d+1$, $D(x) = \alpha d + (1-\alpha)(d+1)$, тоді, згідно з Лемою 3.1.7, в малому околі x повинні бути тільки дірки зі степенями d і $d+1$, і в пропорції $\alpha/(1-\alpha)$. Для цього зафіксуємо достатньо велике ціле число M і розглянемо квадрати K_k зі стороною $(2M+1)\varepsilon$ і центрами в точках a_k^ε, які утворюють $(2M+1)\varepsilon$-періодичну решітку. Розглянемо квадрат K_k, що повністю міститься в Ω (в ньому $(2M+1)^2$ дірок). Нехай D_k – середнє значення $D(x)$ в K_k,

$$D_k := \frac{1}{(2M+1)^2\varepsilon^2}\int_{K_k} D(x)dx,$$

і нехай d_k – ціле число, таке що $d_k \leq D_k < d_k + 1$. Представимо $D_k = \alpha_k d_k + (1-\alpha_k)(d_k+1)$ $(0 \leq \alpha_k < 1)$, і виберемо найбільше ціле число $R > 0$, що задовольняє нерівність $R/(2M+1)^2 \leq \alpha_k$. Покладемо $d_j^\varepsilon := d_k$ для R дірок ω_j^ε в K_k і $d_j^\varepsilon := d_k + 1$ для залишившихся дірок в K_k. Повторимо цю процедуру для всіх квадраті K_k, які містяться в Ω і припишемо залишившимся дірка нульові степіні. Вибраний набір степеней визначає μ_k^ε (формулою (3.1.23)), причому

$$\varepsilon^2\sum(d_j^\varepsilon)^2 = \sum_{l\in Z} l^2\int_\Omega \mu_l^\varepsilon(x)\,dx.$$

Покажемо, що для достатньо малих $\varepsilon > 0$

$$\tilde{E}_\varepsilon(\tilde{h}^\varepsilon)) \leq \bar{E}_0(D) + \delta_M, \tag{3.1.33}$$

де $\delta_M \to 0$ при $M \to \infty$. Дійсно, завдяки обмеженості, маємо, з точністю до підпослідовності, $\mu_l^\varepsilon \to \mu_l(x)$ слабко в $L^2(\Omega)$ для всіх $l \in \mathbb{Z}$. Відповідна гранична функція $\tilde{D}(x)$ (що залежить від M) задається формулою $\tilde{D}(x) = \sum l\mu_l(x)$. Можливі два випадки. Перший, коли $D(x)$ не є близьким до цілих значень, $\mathrm{dist}(D(x),\mathbb{Z}) \geq 1/(2M)^2$, тоді маємо $|\mu_d(x)-\alpha| \leq 1/(2M)^2$ і $|\mu_{d+1}(x)-(1-\alpha)| \leq 1/(2M)^2$, де $\alpha d + (1-\alpha)(d+1) = D(x)$ – представлення $D(x)$ у вигляді опуклої комбінації найближчих цілих чисел. Другий випадок, коли $|D(x)-d| \leq 1/(2M)^2$ для деякого цілого d, у цьому випадку маємо $|\mu_d(x) - 1| \leq 2/(2M)^2$. Таким чином,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^2\sum(d_j^\varepsilon)^2 = \sum l^2\int_\Omega \mu_l(x) \leq \int_\Omega \Phi(\tilde{D}(x))\,dx + C/M^2. \tag{3.1.34}$$

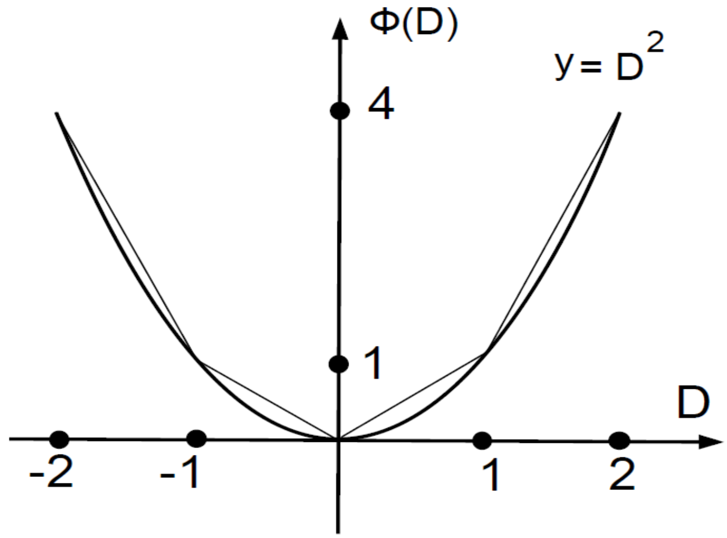

Рис. 3.1: Функція $\Phi(D)$

Аналогічно можна показати, що $|\tilde{D}(x) - D(x)| \leq C/M^2$ in Ω. Тепер, користуючись Лемою 3.1.5, знаходимо (3.1.33) у у границі $\varepsilon \to 0$ для фіксованого M. Насамкінець, перехід до границі $M \to \infty$ в (3.1.34) дає шукану оцінку зверху.

Таким чином доведено наступний результат.

Теорема 3.1.8. *Функціонали $\tilde{E}_\varepsilon$ Γ-збігаються до $\bar{E}_0(D)$ при $\varepsilon \to 0$, і граничний функціонал $E_0(D)$ задається формулою*

$$E_0(D) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|\nabla \bar{h}|^2 + (\bar{h} - \sigma)^2\right) dx + \pi\gamma \int_\Omega \Phi(D(x))dx, \tag{3.1.35}$$

де $\bar{h} = \bar{h}(D)$ – єдиний розв'язок задачі (3.1.14) і $\Phi(D) = (2k+1)|D| - k - k^2$ якщо $k \leq |D| < k+1$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, див. Рис. 3.1.

Як наслідок Теореми 3.1.8 маємо наступний результат про асимтотичні розподіли степеней вихорів.

Теорема 3.1.9. *Нехай $\{d_j^\varepsilon\}$ – набір цілих степеней розв'язку мінімізаційної задачі (3.1.4), (3.1.5), тоді*

$$\varepsilon^2 \sum d_j^\varepsilon \delta_{a_j^\varepsilon}(x) \rightharpoonup D(x), \text{ у сенсі розподілів,} \tag{3.1.36}$$

де D – єдиний мінімізант функціонала $E_0(D)$ в $L^2(\Omega)$, $E_0(D)$ задається (3.1.35).

Доведення. Зазначимо, що Γ-граничний функціонал $E_0(D)$ є строго опуклим, неперервним і коерцитивним, отже він має єдиний мінімізант. З іншого боку, з Леми 3.1.2 випливає, що слабка границя $\varepsilon^2 \sum d_j^\varepsilon \delta_{a_j^\varepsilon}(x) \rightharpoonup D(x)$ існує (з точністю до підпослідовності) і $D \in L^2(\Omega)$. Таким чином, з огляду на класичні властивості Γ-збіжності, D є єдиним мінімізантом $E_0(D)$. □

Зауваження 3.1.10. Зазначимо, що за допомогою Теореми 3.1.9 можна знайти слабкі границі розподілів $\mu_k(x)$, що описують ймовірність виникнення вихоря степеня k в околі точки x . Хоча розподіли $\mu_k(x)$ не визначаються єдиним чином через $D(x)$ (формула (3.1.27)), проте умова оптимальності (3.1.29) визначає $\mu_k(x)$ єдиним чином, перетворюючи (3.1.30) на рівність. Алгоритм відноновлення $\mu_k(x)$ надається Лемою 3.1.7.

3.2 Усереднення мнотонних операторів сингулярно збурених крайовою умовою Фур'є на межі

У цьому підрозділі вивчається асимтотична поведінка розв'язків крайових задач

$$\begin{cases} -\operatorname{div} a(\nabla u_\varepsilon, x/\varepsilon) + \lambda u_\varepsilon = f \text{ в } \Omega_\varepsilon \\ a(\nabla u_\varepsilon, x/\varepsilon) \cdot \nu = 0 \text{ на } \partial\Omega \\ a(\nabla u_\varepsilon, x/\varepsilon) \cdot \nu = g(u_\varepsilon, x/\varepsilon) \text{ на } S_\varepsilon, \end{cases} \tag{3.2.1}$$

де Ω_ε – обмежена періодично перфорована область в $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 2$), $\varepsilon > 0$ – малий параметр (період). Межа Ω_ε складається з двох частин: фіксованої зовнішньої межи $\partial\Omega$, і межі отворів (перфорацій) S_ε. Будемо припускати, що область не є перфорованою в малому (порядку ε) околі $\partial\Omega$, так що S_ε і $\partial\Omega$ не перетинаються. Коефіцієнти $a = (a_1, \ldots, a_N)$ в рівнянні і функція g в крайовій умові на S_ε є заданими осцилюючими з періодом ε (відносно просторової змінної) функції.

Зазначимо, що в окремому випадку, коли g не залежить від u_ε, крайова умова на S_ε стає неоднорідною умовою Неймана $a(Du_\varepsilon, x/\varepsilon)\cdot\nu = \alpha(x/\varepsilon)$. Разом зі стаціонарною задачею (3.2.1) розглядається також параболічна задача

$$\begin{cases} \partial_t u_\varepsilon - \operatorname{div} a(\nabla u_\varepsilon, x/\varepsilon) = f \text{ в } \Omega_\varepsilon \times \{t>0\} \\ a(\nabla u_\varepsilon, x/\varepsilon)\cdot\nu = 0 \text{ на } \partial\Omega \\ a(\nabla u_\varepsilon, x/\varepsilon)\cdot\nu = g(u_\varepsilon, x/\varepsilon) \text{ на } S_\varepsilon \\ u_\varepsilon = \tilde{u} \text{ коли } t=0. \end{cases} \tag{3.2.2}$$

Зазначимо, що задача є сингулярно збуреною крайовою умовою на S_ε бо площа поверхні $|S_\varepsilon|$ прямує до нескінченності при $\varepsilon\to 0$. Для того щоб компенсувати такий ріст $|S_\varepsilon|$ припускається, що середнє функції $g(u, x/\varepsilon)$ (у крайовій умові на S_ε) на межі кожної дірки (звуження S_ε на період) є нульовим для всіх $u\in\mathbb{R}$. Крім того, робиться припущення про монотонність $a(\xi, y)$, що дозволяє застосувати метод двохмасштабної збіжності (див., наприклад, [150], [6], [136]). Ключовою проблемою в застосуванні техніки двохмасштабної збіжності до (3.2.1) і (3.2.2) є наявність інтегралу по поверхні з великою площею в слабких формулюваннях цих задач, це потребувало виявлення нових властивостей слідів функцій в рамках підходу двохмасштабної збіжності (див. Твердження 3.2.7).

Основним результатом щодо асимптотичної поведінки розв'язків u_ε при $\varepsilon\to 0$ задачі (3.2.1) є теорема про їх збіжність до розв'язку U_0 усередненої задачі

$$\begin{cases} \operatorname{div} a^*(\nabla U_0, U_0) + b^*(\nabla U_0, U_0) + |Y^*|(f-\lambda U_0) = 0 \ \text{ в } \Omega \\ a^*(\nabla U_0, U_0)\cdot\nu = g^*(U_0)\cdot\nu \ \text{ на } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.2.3}$$

Коефіцієнти a^*, b^* визначаються через розв'язок коміркової задач (див. задачу (3.2.17)) і залежать як від функцій $a=(a_1,\dots,a_N)$ у рівнянні (3.2.1) так і функціїї g у крайовій умові на S_ε. Несподіваним є той факт, що усереднення (3.2.1) веде до заміни однорідної умови Неймана на $\partial\Omega$ на нелінійну умову Фур'є.

Що стосується параболічної задачі (3.2.2), основним результатом є доведення збіжності розв'язків u_ε задачі (3.2.2) до розв'язку U_0 усередненої задачі

$$\begin{cases} |Y^*|\partial_t U_0 - \operatorname{div} a^*(\nabla U_0, U_0) - b^*(\nabla U_0, U_0) = |Y^*| f \ \text{ в } \Omega \times \{t > 0\} \\ a^*(\nabla U_0, U_0)\cdot \nu = g^*(U_0)\cdot \nu \ \text{ на } \partial\Omega \\ U_0 = \tilde{u} \ \text{ коли } t = 0. \end{cases} \tag{3.2.4}$$

3.2.1 Припущення і результати

Нехай Y – одинична комірка, $Y = [-1/2, 1/2)^N$ $(N \geq 2)$, і нехай G – довільна відкрита підмножина Y, така що $\overline{G} \subset (-1/2, 1/2)^N$, з ліпшицевою межею. Покладемо $Y^* = Y \setminus G$ і $S = \bigcup_{m\in\mathbb{Z}}(\partial G + m)$.

Для заданої відкритої області $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ з ліпшицевою межею $\partial\Omega$ розглядається перфорована область Ω_ε, що задається наступним чином,

$$\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \bigcup_{m\in I_\varepsilon}(\varepsilon G + m\varepsilon),\ I_\varepsilon = \{m \in \mathbb{Z}^N; Y_\varepsilon^{(m)} \subset \Omega\},$$

де $Y_\varepsilon^{(m)} = (Y + m)\varepsilon$. Маємо $\partial\Omega_\varepsilon = \partial\Omega \cup S_\varepsilon$, де S_ε – межа сукупності дірок.

Будемо припускати, що функції $a : \mathbb{R}^N \times Y \to \mathbb{R}^N$ і $g : \mathbb{R} \times S \to \mathbb{R}$ задовольняють

(i) функція $a(\xi, y)$ (відповідно $g(u, y)$) є неперервною відносно ξ (відносно u), для майже всіх y, $a \in C(\mathbb{R}^N; L^\infty(Y))$, $g \in C(\mathbb{R}; L^\infty(S))$, і є Y-періодичною відносно y;

(ii) існує стала $\kappa > 0$, така що

$$(a(\xi, y) - a(\zeta, y))\cdot(\xi - \zeta) \geq \kappa|\xi - \zeta|^2\ \forall \xi, \zeta \in \mathbb{R}^N; \tag{3.2.5}$$

(iii) існують сталі $C_1, \ldots, C_8 > 0$, такі що

$$-C_1 + C_2|\xi|^2 \leq a(\xi, y)\cdot\xi, \quad |a(\xi, y)| \leq C_3|\xi| + C_4, \tag{3.2.6}$$

$$|g(u, y)| \leq C_5|u| + C_6, \tag{3.2.7}$$

$$|g(u,y) - g(v,y)| \leq C_7|u-v|, \tag{3.2.8}$$

$$|g'_u(u,y) - g'_u(v,y)| \leq C_8|u-v|(1+|u|+|v|)^{-1}; \tag{3.2.9}$$

(iv)

$$\int_{S\cap Y} g(u,y)\,\mathrm{d}\sigma_y = 0,\ \forall u \in \mathbb{R}. \tag{3.2.10}$$

Запишемо (3.2.1) в абстрактному вигляді. Для цього введемо простори $X_\varepsilon = W^{1,2}(\Omega_\varepsilon)$ і дуальний X_ε^* відносно парування $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle_\varepsilon$ яке визначимо стандартним скалярним добутком в $L^2(\Omega_\varepsilon)$. Визначимо тепер оператори $\mathcal{A}_\varepsilon, \mathcal{G}_\varepsilon : X_\varepsilon \to X_\varepsilon^*$ рівностями

$$\langle \mathcal{A}_\varepsilon(u), v\rangle_\varepsilon = \int_{\Omega_\varepsilon} a(\nabla u, x/\varepsilon)\cdot\nabla v\mathrm{d}x,\ \langle \mathcal{G}_\varepsilon(u), v\rangle_\varepsilon = \int_{S_\varepsilon} g(u, x/\varepsilon)v\mathrm{d}\sigma,$$
$$\forall v \in X^\varepsilon (= W^{1,2}(\Omega_\varepsilon)). \tag{3.2.11}$$

В термінах цих операторів (3.2.1) записується як рівняння

$$\mathcal{A}_\varepsilon(u_\varepsilon) + \lambda u_\varepsilon - \mathcal{G}_\varepsilon(u_\varepsilon) = f.$$

Згідно з припущеннями (i)-(iii) оператор $\mathcal{A}_\varepsilon$ є неперервним і монотонним, тоді як $\mathcal{G}_\varepsilon$ є компактним оператором. Звідси випливає, що $\mathcal{F}_\varepsilon(u) = \mathcal{A}_\varepsilon(u)+\lambda u-\mathcal{G}_\varepsilon(u)$ $(\lambda > 0)$ є нерервним і псевдомонотонним оператором (нагадаємо, що $\mathcal{F}_\varepsilon : X_\varepsilon \to X_\varepsilon^*$ є псевдомонотонним якщо зі слабкої збіжності $u^{(i)} \to u$ в X_ε і нерівності $\limsup_{i\to\infty}\langle \mathcal{F}_\varepsilon(u^{(i)}), u^{(i)} - u\rangle_\varepsilon \leq 0$ випливає нерівність $\langle \mathcal{F}_\varepsilon(u), u - v\rangle_\varepsilon \leq \liminf_{i\to\infty}\langle \mathcal{F}_\varepsilon(u^{(i)}), u^{(i)} - v\rangle_\varepsilon$ для всіх $v \in X_\varepsilon$). Тоді, згідно з Теоремою Брезіса (див., наприклад, [190], Розділ II), для довільної функції $f \in L^2(\Omega)$ задача (3.2.1) має (можливо не єдиний) розв'язок $u_\varepsilon \in X_\varepsilon$ для $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, $\lambda \geq \lambda_0$ (де $\lambda_0, \varepsilon_0 > 0$ визначено в Теоремі 3.2.1 нижче) завдяки наступному результату.

Теорема 3.2.1. *Якщо виконуються умови* (i)-(iv)*, тоді існують* $\lambda_0, \varepsilon_0 > 0$*, такі що*

$$\langle \mathcal{A}_\varepsilon u + \lambda u - \mathcal{G}_\varepsilon(u), u\rangle_\varepsilon \geq \kappa_1\|u\|^2_{X_\varepsilon} - \kappa_2, \tag{3.2.12}$$

коли $\|u\|_{X_\varepsilon} \geq R$*, де* $\kappa_1 > 0$*,* $\kappa_2 > 0$ *і* $R > 0$ *не залежать від* $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ *і* $\lambda \geq \lambda_0$*.*

Структура перфорованої області Ω_ε є такою, що існує обмежений оператор продовження $P_\varepsilon : W^{1,2}(\Omega_\varepsilon) \to W^{1,2}(\Omega)$ ($P_\varepsilon v = v$ в Ω_ε для всіх $v \in W^{1,2}(\Omega_\varepsilon)$) і $\|P_\varepsilon v\|_{W^{1,2}(\Omega)} \leq C\|v\|_{W^{1,2}(\Omega_\varepsilon)}$, $\|P_\varepsilon v\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|v\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}$ зі сталою C, що не залежить від ε (див. , наприклад, [2]). Надалі будемо вважати, що розв'язок (3.2.1) є продовженим на Ω_ε ($u_\varepsilon = P_\varepsilon u_\varepsilon$).

Асимптотичну поведінку розв'язків u_ε (задачі (3.2.1)) при $\varepsilon \to 0$ описує наступний результат.

Теорема 3.2.2. *Припустимо, що виконуються умови* (i)-(iv) *і права частина f в (3.2.1) належить до $L^2(\Omega)$. Нехай $\lambda_0 > 0$ справджує умови Теореми 3.2.1. Тоді для довільного числа $\lambda \geq \lambda_0$ розв'язоки u_ε задачі (3.2.1) і їх градієнти ∇u_ε двохмасштабно збігаються при $\varepsilon \to 0$ (з точнісю до підпослідовності) до $U_0(x)$ і $\nabla U_0(x) + \nabla_y U_1(x, y)$, відповідно, де пара $U_0(x)$, $U_1(x, y)$ є розв'язком двохмасштабної усередненої задачі: знайти $U_0(x) \in W^{1,2}(\Omega)$, $U_1(x, y) \in L^2(\Omega; W^{1,2}_{per}(Y))$, такі що*

$$\begin{aligned}\int_\Omega \int_{Y^*} (a(\nabla U_0 + \nabla_y U_1, y) \cdot (\nabla \Phi_0 + \nabla_y \Phi_1)\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\ - \int_\Omega \int_{S\cap Y} (g(U_0, y)\Phi_1(x, y) + g'_u(U_0, y)\Phi_0 U_1(x, y))\mathrm{d}\sigma_y \mathrm{d}x \\ - \int_\Omega \int_{S\cap Y} \nabla_x (g(U_0, y)\Phi_0) \cdot y\mathrm{d}\sigma_y \mathrm{d}x - \int_\Omega |Y^*|(f - \lambda U_0)\Phi_0 \mathrm{d}x = 0,\end{aligned} \quad (3.2.13)$$

для довільних $\Phi_0(x) \in W^{1,2}(\Omega)$, $\Phi_1(x, y) \in L^2(\Omega; W^{1,2}_{per}(Y))$. Зокрема, u_ε збігаються слабко в $W^{1,2}(\Omega)$ до розв'язку U_0 усередненої задачі (3.2.3), де $a^*(\xi, u)$, $b^*(\xi, u)$, $g^*(u)$ визначаються формулами

$$a^*(\xi, u) = \int_{Y^*} a(\xi + \nabla_y w, y)\mathrm{d}y, \quad (3.2.14)$$

$$b^*(\xi, u) = \int_{S\cap Y} g'_u(u, y)w\mathrm{d}\sigma_y, \quad (3.2.15)$$

$$g^*(u) = \int_{Y^*} g(u, y)y\mathrm{d}\sigma_y, \quad (3.2.16)$$

і $w = w(y;\xi,u)$ *– єдиний (з точністю до адитивної константи) розв'язок коміркової задачі*

$$\begin{cases} \operatorname{div} a(\xi + \nabla_y w, y) = 0 \ \textit{в}\ Y^* \\ a(\xi + \nabla_y w, y)\cdot\nu = g(u,y) \ \textit{на}\ S\cap Y \\ w \ \textit{є}\ Y\textit{-періодичною функцією.} \end{cases} \tag{3.2.17}$$

Зауваження 3.2.3. Зазначимо, що (3.2.13) визначає $U_1(x,y)$ з точністю до довільної функції $\tilde{U}_1(x,y) \in L^2(\Omega, W^{1,2}_{per}(Y))$, такої що $U_1(x,y) = 0$ для $y \in Y^*$. Це є наслідком свободи вибору оператора продовження P_ε.

Зауваження 3.2.4. Третій член в (3.2.13) можна звести інтегруванням частинами до інтегралу по межі

$$\int_\Omega\int_{S\cap Y} \nabla_x(g(U_0,y)\Phi_0)\cdot y \mathrm{d}\sigma_y \mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \Phi_0 g^*(U_0)\cdot\nu \mathrm{d}\sigma_x,$$

що веде до крайової умови в (3.2.3).

Зауваження 3.2.5. У лінійному випадку, коли a і g задаються формулами $a(\xi,y) = A(y)\xi$, $g(u,y) = \alpha(y) + u\beta(y)$, коміркова задача (3.2.17) для w розбивається у три коміркові задачи: для $w^{(1)}$,

$$\begin{cases} \operatorname{div}\left(A(y)(\xi + \nabla_y w^{(1)})\right) = 0 \ \text{в}\ Y^* \\ A(y)\nabla_y w^{(1)}\cdot\nu = -A(y)\xi\cdot\nu \ \text{на}\ S\cap Y \\ w^{(1)} \ \text{є}\ Y\text{-періодичною функцією,} \end{cases} \tag{3.2.18}$$

і для $w^{(k)}$ $(k = 2,3)$,

$$\begin{cases} \operatorname{div}\left(A(y)\nabla_y w^{(k)}\right) = 0 \ \text{в}\ Y^* \\ A(y)\nabla_y w^{(k)}\cdot\nu = \delta_{2k}\beta(y) + \delta_{3k}\alpha(y) \ \text{на}\ S\cap Y \\ w^{(2)} \ \text{є}\ Y\text{-періодичною функцією,} \end{cases} \tag{3.2.19}$$

(δ_{ij} – дельта Кронекера), так що $w = w^{(1)} + uw^{(2)} + w^{(3)}$. Тоді усереднене рівняння записується у вигляді

$$\mathrm{div} A^{\mathrm{hom}}\nabla U_0 + B^{\mathrm{hom}}\cdot\nabla U_0 + C^{\mathrm{hom}} U_0 + D^{\mathrm{hom}} + |Y^*|(f - \lambda U_0) = 0,$$

де усереднена матриця A^{hom} співпадає зі стандартною ефективною матрицею задачі Неймана в перфорованій області,

$$A^{\mathrm{hom}}\xi = \int_{Y^*} A(y)(\xi + \nabla_y w^{(1)})\mathrm{d}y,$$

і

$$B^{\mathrm{hom}} \cdot \xi = \int_{Y^*} A(y)\nabla_y w^{(2)} \cdot (\xi + \nabla_y w^{(1)})\mathrm{d}y,$$

$$C^{\mathrm{hom}} = \int_{Y^*} A(y)\nabla_y w^{(2)} \cdot \nabla_y w^{(2)}\mathrm{d}y, \;\; D^{\mathrm{hom}} = \int_{Y^*} A(y)\nabla_y w^{(2)} \cdot \nabla_y w^{(3)}\mathrm{d}y.$$

Зазначимо, що $B^{\mathrm{hom}} = 0$ у симетричному випадку (коли $A = A^T$).

Основний результат для параболічної задачі (3.2.2) полягає в тому, що асимптотична поведінка її розв'язків u_ε описується усереднеою задачею (3.2.4). Зазначимо, що, як і раніше, вважаємо розв'язки u_ε продовженими на всю область Ω за допомогою оператора P_ε.

Теорема 3.2.6. *Припустимо, що виконуються умови* (i) - (iv). *Тоді, для довільних $f \in L^2((0,T) \times \Omega)$ і $\tilde{u} \in L^2(\Omega)$, існує єдиний розв'язок задачі (3.2.2) і він збігається слабко в $L^2(0,T; W^{1,2}(\Omega))$ при $\varepsilon \to 0$ (з точністю до підпослідовності) до розв'язку U_0 усередненої задачі (3.2.4), де a^*, b^*, g^* визначаються в (3.2.14)–(3.2.17).*

Доведення Теореми 3.2.6 наведено в Додатку J.

3.2.2 Доведення теореми про усереднення для стаціонарної задачі

З Теореми 3.2.1 випливає, що $\|u_\varepsilon\|_{W^{1,2}(\Omega)} \leq C$, де C не залежить ε. Отже, з точністю до підпослідовності,

$$u_\varepsilon \to U_0(x) \;\; \text{двохмасштабно}, \tag{3.2.20}$$

$$\nabla u_\varepsilon \to \nabla U_0(x) + \nabla_y U_1(x,y) \;\; \text{двохмасштабно}. \tag{3.2.21}$$

Покажемо, що пара $(U_0,\ U_1)$ задовольняє (3.2.13). Для цього виберемо довільні функції $V_0(x) \in C^\infty(\overline{\Omega})$, $V_1(x,y) \in C^\infty(\overline{\Omega}\times\overline{Y})$, де $V_1(x,y)$ є Y-періодичною відносно y, покладемо $v_\varepsilon = V_0(x) + \varepsilon V_1(x, x/\varepsilon)$, і підставимо тестову функцію $w_\varepsilon = u_\varepsilon - v_\varepsilon$ у слабке формулювання (3.2.1),

$$\int_{\Omega_\varepsilon} (a(Du_\varepsilon, x/\varepsilon)\cdot Dw_\varepsilon + \lambda u_\varepsilon w_\varepsilon)\mathrm{d}x - \int_{S_\varepsilon} g(u_\varepsilon, x/\varepsilon) w_\varepsilon \mathrm{d}\sigma = \int_{\Omega_\varepsilon} f w_\varepsilon \mathrm{d}x. \quad (3.2.22)$$

Тоді, з огляду на припущення про монотонність (3.2.5) маємо,

$$\int_{\Omega_\varepsilon} (a(\nabla v_\varepsilon, x/\varepsilon)\cdot \nabla(u_\varepsilon - v_\varepsilon) + \lambda v_\varepsilon(u_\varepsilon - v_\varepsilon))\mathrm{d}x - \int_{S_\varepsilon} g(u_\varepsilon, x/\varepsilon)(u_\varepsilon - v_\varepsilon)\mathrm{d}\sigma$$
$$- \int_{\Omega_\varepsilon} f(u_\varepsilon - v_\varepsilon)\mathrm{d}x \le 0. \quad (3.2.23)$$

Оскільки $\nabla v_\varepsilon = \nabla V_0(x) + \nabla_y V_1(x, x/\varepsilon) + \varepsilon \nabla_x V_1(x, x/\varepsilon)$, користуючись (i) і (3.2.6) неважко показати, що $\chi_\varepsilon a(\nabla v_\varepsilon, x/\varepsilon) \to \chi(y) a(\nabla V_0(x) + \nabla_y V_1(x,y), y)$ у сенсі сильної двохмасштабної збіжності, де χ_ε, χ – характеристичні функції Ω_ε і Y^*, відповідно. Це дозволяє перейти до границі у першому доданку лівої частини (3.2.23):

$$\int_{\Omega_\varepsilon} (a(\nabla v_\varepsilon, x/\varepsilon)\cdot \nabla(u_\varepsilon - v_\varepsilon) + \lambda v_\varepsilon(u_\varepsilon - v_\varepsilon))\mathrm{d}x \to$$
$$\int_{\Omega} \left(\int_{Y^*} (a(DV_0 + D_y V_1, y)\cdot(\nabla U_0 + \nabla_y U_1 - \nabla V_0 - \nabla_y V_1) + \lambda V_0(U_0 - V_0))\mathrm{d}y \right)\mathrm{d}x; \quad (3.2.24)$$

перехід до границі в останньому члені в лівій частині (3.2.23) дає

$$\int_{\Omega_\varepsilon} f(u_\varepsilon - v_\varepsilon)\mathrm{d}x \to \int_{\Omega}\left(\int_{Y^*} f(U_0 - V_0)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x. \quad (3.2.25)$$

Насамкінець, для середнього члена маємо,

$$\int_{S_\varepsilon} g(u_\varepsilon, x/\varepsilon)(u_\varepsilon - v_\varepsilon)\mathrm{d}\sigma \to$$
$$\int_{\Omega}\left(\int_{S\cap Y} g(U_0, y)(\nabla(U_0 - V_0)\cdot y + U_1(x,y) - V_1(x,y))\mathrm{d}\sigma_y\right)\mathrm{d}x$$
$$+ \int_{\Omega}\left(\int_{S\cap Y} g'_u(U_0, y)(U_0 - V_0)(\nabla U_0 \cdot y + U_1(x,y))\mathrm{d}\sigma_y\right)\mathrm{d}x. \quad (3.2.26)$$

Найбільш нетривіальним є перехід до межі саме в цьому члені, доведення (3.2.26) базується на наступному результаті, який представляє інтерес сам по собі.

Твердження 3.2.7. *Припустимо, що* $q(x,y) \in C(\Omega; L^\infty(S))$ *задовольняє наступні умови:*

(a) $|q(x,y) - q(x',y)| \leq C|x - x'|$ *з* $C > 0$*, що не залежить від* $x, x' \in \Omega$ *і* $y \in S$*;*

(b) $q(x,y)$ *є* Y*-періодичною відносно* $y \in S$ *функцією;*

(c) $\int_{Y\cap S} q(x,y)\mathrm{d}\sigma_y = 0$ *для всіх* $x \in \Omega$*,*

тоді для довільної послідовності $w_\varepsilon \in W^{1,2}(\Omega)$*, такої що*

$$w_\varepsilon(x) \to W_0(x),\ \nabla w_\varepsilon(x) \to \nabla W_0(x) + \nabla_y W_1(x,y) \text{ двохмасштабно при } \varepsilon \to 0, \tag{3.2.27}$$

маємо

$$\int_{S_\varepsilon} q(x, x/\varepsilon)(w_\varepsilon - \bar{w}_\varepsilon)\mathrm{d}\sigma \to \int_\Omega \int_{Y\cap S} q(x,y)(DW_0 \cdot y + W_1(x,y))\mathrm{d}\sigma_y \mathrm{d}x. \tag{3.2.28}$$

Тут і надалі позначення $\bar{w}_\varepsilon$ *використано для кусково постійної функції знайденої усередненням по коміркам* $Y_\varepsilon^{(m)}$*,*

$$\bar{w}_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^N}\int_{Y_\varepsilon^{(m)}} w_\varepsilon(y)\mathrm{d}y,\ \text{для } x \in Y_\varepsilon^{(m)}. \tag{3.2.29}$$

Таким чином, внаслідок (3.2.23)–(3.2.26) маємо

$$\begin{aligned}\int_\Omega \int_{Y^*} &(a(\nabla V_0 + \nabla_y V_1, y)\cdot(\nabla U_0 + \nabla_y U_1 - \nabla V_0 - \nabla_y V_1) + \lambda V_0(U_0 - V_0))\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\ &- \int_\Omega \left(\int_{S\cap Y} g(U_0,y)(\nabla(U_0 - V_0)\cdot y + U_1(x,y) - V_1(x,y))\mathrm{d}\sigma_y\right)\mathrm{d}x \\ &- \int_\Omega \left(\int_{S\cap Y} g'_u(U_0,y)(U_0 - V_0)(\nabla U_0 \cdot y + U_1(x,y))\mathrm{d}\sigma_y\right)\mathrm{d}x \\ &- \int_\Omega \left(\int_{Y^*} f(U_0 - V_0)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \leq 0,\end{aligned} \tag{3.2.30}$$

З міркувань щільності (гладких функцій у відповідних просторах), користуючись (i)-(iv) приходимо до висновку, що (3.2.30) є вірним для всіх $V_0 \in W^{1,2}(\Omega)$ і $V_1 \in L^2(\Omega; W^{1,2}_{per}(Y))$. Виберемо тепер $V_0 = U_0 \pm \tau\Phi_0$, $V_1 = U_1 \pm \tau\Phi_1$, $(\tau > 0)$, поділимо (3.2.30) на τ і перейдемо до границі $\tau \to 0$, в результаті отримуємо двохмасштабну усереднену задачу (3.2.13). $\square$

Приведемо деталі обгрунтування переходу від гладких V_0 і V_1 до довільних функцій $V_0 \in W^{1,2}(\Omega)$ і $V_1 \in L^2(\Omega; W^{1,2}_{per}(Y))$ в (3.2.30) в фінільній частині наведеного вище доведення. Для першого члену у лівій частині цей перехід можна обгрунтувати за допомогою Теореми Немицького (див., наприклад, [186], Розділ II); для останнього члену це є очивидним. Другий і третій члени, що відповідають граничному функціоналу $M(U_0, U_1, V_0, V_1)$ in (3.2.26) потребують більше уваги. Перепишемо $M(U_0, U_1, V_0, V_1)$ як

$$\begin{aligned} M(U_0, U_1, V_0, V_1) = \int_\Omega (g^*(U_0) \cdot \nabla(U_0 - V_0) + (U_0 - V_0)(g^*)'(U_0) \cdot \nabla U_0)\mathrm{d}x \\ + \int_\Omega \int_{Y^*} \nabla_y \Theta(y; U_0) \cdot \nabla_y (U_1(x,y) - V_1(x,y))\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\ + \int_\Omega \int_{Y^*} (U_0 - V_0) \nabla_y \Theta'_u(y; U_0) \cdot \nabla_y U_1(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x, \end{aligned} \tag{3.2.31}$$

де $(g^*)'$ позначає похідну g^*, і $\Theta(y; u)$ – розв'язок задачі

$$\begin{cases} \Delta_y \Theta = 0 \text{ in } Y^* \\ \frac{\partial \Theta}{\partial \nu} = g(u, y) \text{ на } S \cap Y \\ \Theta \text{ є } Y\text{-періодичною.} \end{cases} \tag{3.2.32}$$

З припущень (iii), (iv) випливає, що (3.2.32) має єдиний (з точністю до адитивної сталої) розв'язок $\Theta(y; u)$ і

$$\|\nabla_y \Theta(\,\cdot\,; u)\|_{L^2(Y^*)} \le C(|u| + 1), \tag{3.2.33}$$

$$\|\nabla_y \Theta(\,\cdot\,; u) - \nabla_y \Theta(\,\cdot\,; v)\|_{L^2(Y^*)} \le C|u - v|, \tag{3.2.34}$$

$$\|\nabla_y \Theta'_u(\,\cdot\,; u) - \nabla_y \Theta'_u(\,\cdot\,; v)\|_{L^2(Y^*)} \le C|u - v|(1 + |u| + |v|)^{-1}, \tag{3.2.35}$$

де C не залежить від u і v. Доведення всіх цих властивостей є подібним, наприклад, (3.2.33) можна показати користуючись (I), (3.2.10) і нерівністю Пуанкаре (К.6) в $W^{1,2}_{per}(Y^*)$ (див. нижче),

$$\Big|\int_{Y^*}\nabla_y\Theta\cdot\nabla_y\Theta \mathrm{d}y\Big| = \Big|\int_{S\cap Y} g(u,y)\Big(\Theta - \frac{1}{|Y^*|}\int_{Y^*}\Theta\,\mathrm{d}y\Big)\,\mathrm{d}y\Big| \leq C(|u|+1)\|\nabla_y\Theta\|_{L^2(Y^*)}.$$

З оцінок (3.2.33)–(3.2.35) у композиції з припущеннями (I)–(3.2.9) отримуємо наступний результат.

Твердження 3.2.8. *Функціонал $M(U_0,U_1,V_0,V_1)$ визначений формулою (3.2.31) (або правою частиною (3.2.26)) є неперервним в $W^{1,2}(\Omega)\times L^2(\Omega;W^{1,2}_{per}(Y^*))\times W^{1,2}(\Omega)\times L^2(\Omega;W^{1,2}_{per}(Y^*))$.*

3.2.3 Допоміжні результати і доведення Теореми 3.2.1

1(*Деякі нерівності*). Нагадаємо класичні нерівності у просторах Соболєва,

$$\int_{S\cap Y}\Big|v-\int_Y v\mathrm{d}x\Big|^2\mathrm{d}\sigma \leq C\int_Y|\nabla v|^2\mathrm{d}x,\ \forall\, v\in W^{1,2}(Y)\ \text{(нерівність Пуанкаре)}, \tag{3.2.36}$$

$$\int_{S\cap Y}|v|^2\mathrm{d}\sigma \leq C\int_Y(|v|^2+|\nabla v|^2)\mathrm{d}x,\ \forall\, v\in W^{1,2}(Y). \tag{3.2.37}$$

З (3.2.36), (3.2.37) випливають наступні нерівності

$$\int_{S_\varepsilon}|v_\varepsilon-\bar v_\varepsilon|^2\mathrm{d}\sigma \leq C\varepsilon\int_\Omega|\nabla v_\varepsilon|^2\mathrm{d}x, \tag{3.2.38}$$

$$\int_{S_\varepsilon}|v_\varepsilon|^2\mathrm{d}\sigma \leq C\varepsilon^{-1}\Big(\int_\Omega|v_\varepsilon|^2\mathrm{d}x+\varepsilon^2\int_\Omega|\nabla v_\varepsilon|^2\mathrm{d}x\Big), \tag{3.2.39}$$

для довільної функції $v_\varepsilon\in W^{1,2}(\Omega)$, де $\bar v_\varepsilon$ позначає кусково сталу функцію знайдену усередненням по коміркам $Y^{(m)}_\varepsilon$ (див. (3.2.29)), і C не залежить тільки від ε. Будемо користатись також наступною нерівністю, яка є наслідком нерівності Йенсена, для довільного $r\geq 1$,

$$\int_{S_\varepsilon}|\bar v_\varepsilon|^r\mathrm{d}\sigma \leq C\varepsilon^{-1}\int_\Omega|v_\varepsilon|^r\mathrm{d}x, \tag{3.2.40}$$

де $C > 0$ не залежить від r і v_ε.

2(*Асимптотичне представлення для поверхневого інтегралу в* (3.2.23). Для того, щоб перейти до границі при $\varepsilon \to 0$ у поверхневому інтегралі в (3.2.23) будем користатися наступним результатом.

Лема 3.2.9. *Нехай* $u_\varepsilon, w_\varepsilon \in W^{1,2}(\Omega)$, *тоді*

$$\int_{S_\varepsilon} g(u_\varepsilon, x/\varepsilon) w_\varepsilon \mathrm{d}x = \int_{S_\varepsilon} g(\bar{u}_\varepsilon, x/\varepsilon)(w_\varepsilon - \bar{w}_\varepsilon)\mathrm{d}\sigma + \int_{S_\varepsilon} g'_u(\bar{u}_\varepsilon, x/\varepsilon)\bar{w}_\varepsilon(u_\varepsilon - \bar{u}_\varepsilon)\mathrm{d}\sigma + \varrho_\varepsilon, \quad (3.2.41)$$

з

$$|\varrho_\varepsilon| \leq C\big(\varepsilon + (\varepsilon\|w_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)})^{2/(N+2)}\big)(\|w_\varepsilon\|^2_{W^{1,2}(\Omega)} + \|u_\varepsilon\|^2_{W^{1,2}(\Omega)}). \quad (3.2.42)$$

Доведення. Маємо,

$$g(u_\varepsilon, x/\varepsilon)w_\varepsilon = g(\bar{u}_\varepsilon, x/\varepsilon)(w_\varepsilon - \bar{w}_\varepsilon) + (g(u_\varepsilon, x/\varepsilon) - (g(\bar{u}_\varepsilon, x/\varepsilon))(w_\varepsilon - \bar{w}_\varepsilon) + (g(u_\varepsilon, x/\varepsilon) - g(\bar{u}_\varepsilon, x/\varepsilon))\bar{w}_\varepsilon + g(\bar{u}_\varepsilon, x/\varepsilon)\bar{w}_\varepsilon,$$

отже (з огляду на (3.2.10))

$$\int_{S_\varepsilon} g(u_\varepsilon, x/\varepsilon)w_\varepsilon \mathrm{d}\sigma = \int_{S_\varepsilon} g(\bar{u}_\varepsilon, x/\varepsilon)(w_\varepsilon - \bar{w}_\varepsilon)\mathrm{d}\sigma + \int_{S_\varepsilon} (g(u_\varepsilon, x/\varepsilon) - (g(\bar{u}_\varepsilon, x/\varepsilon))(w_\varepsilon - \bar{w}_\varepsilon)\mathrm{d}\sigma + \int_{S_\varepsilon} (g(u_\varepsilon, x/\varepsilon) - g(\bar{u}_\varepsilon, x/\varepsilon))\bar{w}_\varepsilon \mathrm{d}\sigma = I_1 + I_2 + I_3.$$

Доданок I_2 прямує до нуля при $\varepsilon \to 0$. Дійсно, з (3.2.8) і (3.2.38) випливає, що

$$|I_2| \leq C\int_{S_\varepsilon} |u_\varepsilon - \bar{u}_\varepsilon||w_\varepsilon - \bar{w}_\varepsilon|\mathrm{d}\sigma \leq C\varepsilon\|Du_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}\|Dw_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}. \quad (3.2.43)$$

Доданок I_3 запишемо наступним чином

$$I_3 = \int_0^1 \mathrm{d}t\int_{S_\varepsilon} (g'_u(\bar{u}_\varepsilon + t(u_\varepsilon - \bar{u}_\varepsilon), x/\varepsilon) - g'_u(\bar{u}_\varepsilon, x/\varepsilon))\bar{w}_\varepsilon(u_\varepsilon - \bar{u}_\varepsilon)\mathrm{d}\sigma + \int_{S_\varepsilon} g'_u(\bar{u}_\varepsilon, x/\varepsilon)\bar{w}_\varepsilon(u_\varepsilon - \bar{u}_\varepsilon)\mathrm{d}\sigma = \tilde{I}_3 + \int_{S_\varepsilon} g'_u(\bar{u}_\varepsilon, x/\varepsilon)\bar{w}_\varepsilon(u_\varepsilon - \bar{u}_\varepsilon)\mathrm{d}\sigma$$

Скориставшись (3.2.9) отримуємо

$$|\tilde{I}_3| \leq C \sup_{0\leq t\leq 1} \int_{S_\varepsilon} \frac{t|u_\varepsilon - \bar{u}_\varepsilon|^2 |\bar{w}_\varepsilon|}{1 + |\bar{u}_\varepsilon| + |\bar{u}_\varepsilon + t(u_\varepsilon - \bar{u}_\varepsilon)|} \mathrm{d}\sigma,$$

що, в свою чергу, дає, за допомогою нерівності Гельдера,

$$|\tilde{I}_3| \leq C \sup_{0\leq t\leq 1} \int_{S_\varepsilon} \frac{t|u_\varepsilon - \bar{u}_\varepsilon|^2 |\bar{w}_\varepsilon|}{1 + t|u_\varepsilon - \bar{u}_\varepsilon|} \mathrm{d}\sigma \leq C \left(\int_{S_\varepsilon} |\bar{w}_\varepsilon|^q \mathrm{d}\sigma \right)^{1/q}$$
$$\times \sup_{0\leq t\leq 1} \left(\int_{S_\varepsilon} |u_\varepsilon - \bar{u}_\varepsilon|^2 \frac{t^{q'} |u_\varepsilon - \bar{u}_\varepsilon|^{2q'-2}}{(1 + t|u_\varepsilon - \bar{u}_\varepsilon|)^{q'}} \mathrm{d}\sigma \right)^{1/q'},$$

де $q' = q/(q-1)$ і $q = 2(N+2)/N$. Зазначимо, що вкладення $W^{1,2}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ є компактним, крім того (див., наприклад, [130])

$$\text{існує стала } C > 0, \text{ така що } \|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C \|u\|^{2/q}_{W^{1,2}(\Omega)} \|u\|^{4/(Nq)}_{L^2(\Omega)} \ \forall u \in W^{1,2}(\Omega). \tag{3.2.44}$$

Оскільки $1 < q' < 2$, маємо

$$\frac{t^{q'} |u_\varepsilon - \bar{u}_\varepsilon|^{2q'-2}}{(1 + t|u_\varepsilon - \bar{u}_\varepsilon|)^{q'}} \leq \frac{t^{2q'-2} |u_\varepsilon - \bar{u}_\varepsilon|^{2q'-2}}{(1 + t|u_\varepsilon - \bar{u}_\varepsilon|)^{2q'-2}} \frac{t^{2-q'}}{(1 + t|u_\varepsilon - \bar{u}_\varepsilon|)^{2-q'}} \leq 1$$

для всіх $0 \leq t \leq 1$. Отже, скориставшись (3.2.38), (3.2.40) і (3.2.44) отримуємо

$$\begin{aligned}
|\tilde{I}_3| &\leq C\varepsilon^{-1/q - 1/q' + 2/q'} \|w_\varepsilon\|_{L^q(\Omega)} \|\nabla u_\varepsilon\|^{2/q'}_{L^2(\Omega)} \\
&\leq C\varepsilon^{2/(N+2)} \|w_\varepsilon\|^{2/q}_{W^{1,2}(\Omega)} \|w_\varepsilon\|^{4/(Nq)}_{L^2(\Omega)} \|\nabla u_\varepsilon\|^{2/q'}_{L^2(\Omega)} \\
&\leq C(\varepsilon \|w_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)})^{2/(N+2)} (\|w_\varepsilon\|^2_{W^{1,2}(\Omega)} + \|\nabla u_\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega)}),
\end{aligned} \tag{3.2.45}$$

де використано також нерівність Юнга. З оцінок (3.2.45) і (3.2.45) випливає (3.2.42) (оскільки $|\varrho_\varepsilon| \leq |I_2| + |\tilde{I}_3|$). Лему доведено. □

Доведення наступного технічного результата є аналогічним Лемі 3.2.9.

Лема 3.2.10. *Якщо u_ε, $u_\varepsilon^{(1)} \in W^{1,2}(\Omega)$, $v_\varepsilon \in L^\infty(\Omega) \cap W^{1,2}(\Omega)$, тоді для $w_\varepsilon = u_\varepsilon - u_\varepsilon^{(1)}$ маємо*

$$\left| \int_{S_\varepsilon} (g(\bar{u}_\varepsilon, x/\varepsilon) - g(\bar{u}_\varepsilon^{(1)}, x/\varepsilon))(u_\varepsilon - v_\varepsilon - \bar{u}_\varepsilon + \bar{v}_\varepsilon) \mathrm{d}\sigma \right| \leq C \|w_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla(u_\varepsilon - v_\varepsilon)\|_{L^2(\Omega)},$$

$$\left|\int_{S_\varepsilon}(g'_u(\bar u_\varepsilon,x/\varepsilon)\bar u_\varepsilon-g'_u(\bar u_\varepsilon^{(1)},x/\varepsilon)\bar u_\varepsilon^{(1)})(u_\varepsilon-\bar u_\varepsilon)\mathrm{d}\sigma\right|\le C\|w_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)},$$

$$\left|\int_{S_\varepsilon}(g'_u(\bar u_\varepsilon,x/\varepsilon)-g'_u(\bar u_\varepsilon^{(1)},x/\varepsilon))\bar v_\varepsilon(u_\varepsilon-\bar u_\varepsilon)\mathrm{d}\sigma\right|\le C\|w_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^\infty(\Omega)}\|\nabla u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}.$$

3(*Доведення Теореми* 3.2.1). Припустимо від супротивного, що існують послідовності $\varepsilon_k\to 0$, $\lambda_k\to+\infty$ і $u_k\in W^{1,2}(\Omega_{\varepsilon_k})$, такі що $\|u_k\|_{X_{\varepsilon_k}}\to\infty$,

$$\langle\mathcal{A}_{\varepsilon_k}(u_k),u_k\rangle_{\varepsilon_k}+\lambda_k\langle u_k,u_k\rangle_{\varepsilon_k}-\langle\mathcal{G}_{\varepsilon_k}(u_k),u_k\rangle_{\varepsilon_k}\le\delta_k\|u_k\|^2_{X_{\varepsilon_k}}$$

з $\delta_k\to 0$. Тоді, з огляду на визначення $\mathcal{A}_\varepsilon$ і $\mathcal{G}_\varepsilon$, маємо

$$\int_{\Omega_{\varepsilon_k}}(a(\nabla v_k,x/\varepsilon_k)\cdot\nabla v_k+\lambda_k|v_k|^2)\mathrm{d}x\le\int_{S_{\varepsilon_k}}g(v_k,x/\varepsilon_k)v_k\mathrm{d}\sigma+\delta_k\|v_k\|^2_{W^{1,2}(\Omega)}\mathrm{d}x,$$

де $v_k=P_{\varepsilon_k}u_k$ – продовження u_k на Ω. Скориставшись (3.2.6) і властивостямі оператора продовження P_ε, отримуємо наступну оцінку для нормованих функцій $w_k=v_k/\|v_k\|_{W^{1,2}(\Omega)}$,

$$\gamma\int_\Omega|\nabla w_k|^2\mathrm{d}x+\lambda_k\int_{\Omega_{\varepsilon_k}}|w_k|^2\mathrm{d}x\le\frac{1}{\|v_k\|_{W^{1,2}(\Omega)}}\int_{S_{\varepsilon_k}}g(v_k,x/\varepsilon)w_k\mathrm{d}\sigma+\tilde\delta_k,\quad(3.2.46)$$

з деяким $\gamma>0$, where $\tilde\delta_k=\delta_k+C/\|v_k\|^2_{W^{1,2}(\Omega)}\to 0$. Запишемо тепер,

$$\int_{S_{\varepsilon_k}}g(v_k,x/\varepsilon_k)w_k\mathrm{d}\sigma=\int_{S_{\varepsilon_k}}(g(v_k,x/\varepsilon_k)-g(\bar v_k,x/\varepsilon_k))w_k\mathrm{d}\sigma$$
$$+\int_{S_{\varepsilon_k}}g(\bar v_k,x/\varepsilon_k)(w-\bar w_k)\mathrm{d}\sigma=I_1+I_2,\quad(3.2.47)$$

де було використано (3.2.10). Тоді маємо, з огляду на (3.2.8) і (3.2.38),

$$|I_1|\le C\int_{S_{\varepsilon_k}}|v_k-\bar v_k||w_k|\mathrm{d}\sigma\le C{\varepsilon_k}^{1/2}\Big(\int_\Omega|\nabla v_k|^2\mathrm{d}x\Big)^{1/2}\Big(\int_{S_{\varepsilon_k}}|w_k|^2\mathrm{d}x\Big)^{1/2}$$
$$\le C\|\nabla v_k\|_{L^2(\Omega)}(\|w_k\|_{L^2(\Omega)}+\varepsilon_k\|\nabla w_k\|_{L^2(\Omega)})\quad(3.2.48)$$

Аналогічно, внаслідок (I) і (3.2.40),

$$|I_2|\le C\int_{S_{\varepsilon_k}}|w_k-\bar w_k|(|\bar v_k|+1)\mathrm{d}\sigma\le C\|\nabla w_k\|_{L^2(\Omega)}(\|v_k\|_{L^2(\Omega)}+1).\qquad(3.2.49)$$

Таким чином

$$\gamma\|\nabla w_k\|^2_{L^2(\Omega)} + \lambda_k\|w_k\|^2_{L^2(\Omega_{\varepsilon_k})} \leq C(\|w_k\|_{L^2(\Omega)} + \varepsilon_k) + \tilde{\delta}_k, \tag{3.2.50}$$

де використано той факт, що $\|w_k\|_{W^{1,2}(\Omega)} = 1$. Отже $\|w_k\|^2_{L^2(\Omega_{\varepsilon_k})} \to 0$.

Внаслідок компактності вкладення $W^{1,2}(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ $w_k \to w$ сильно в $L^2(\Omega)$, з точністю до підпослідовності. З іншого боку, згідно зі структурою перфорованих областей Ω_ε,

$$\int_{\Omega_{\varepsilon_k}} w_k v \mathrm{d}x \to |Y^*| \int_\Omega wv\mathrm{d}x \text{ для довільної функції } v \in L^2(\Omega).$$

Вибираючи $v = w$ отримуємо $w = 0$ (оскільки $\|w_k\|_{L^2(\Omega_{\varepsilon_k})} \to 0$), тобто $\|w_k\|_{L^2(\Omega)} \to 0$. Тоді з (3.2.50) випливає, що $\gamma\|\nabla w_k\|_{L^2(\Omega)} \to 0$, отже $\|w_k\|_{W^{1,2}(\Omega)} \to 0$, що є протиріччам. □

Зазначимо, що внаслідок (3.2.47)–(3.2.49) маємо, для довільних $u, v \in W^{1,2}(\Omega)$

$$|\langle \mathcal{G}_\varepsilon(u), v\rangle_\varepsilon| \leq C(\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)} + \|v\|_{W^{1,2}(\Omega)}(\|u\|_{L^2(\Omega)} + 1) + \varepsilon\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)}\|v\|_{W^{1,2}(\Omega)}), \tag{3.2.51}$$

де C не залежить від ε. Зокрема,

$$\|\mathcal{G}_\varepsilon(u)\|_{X^*_\varepsilon} \leq C(\|u\|_{X_\varepsilon} + 1), \forall u \in X_\varepsilon. \tag{3.2.52}$$

Таким чином,

$$(3.2.12) \text{ виконується для всіх } u_\varepsilon \in X_\varepsilon, \tag{3.2.53}$$

коли $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, $\lambda \geq \lambda_0$.

4(*Доведення Твердження* 3.2.7). Нехай Ω' – підобласть Ω, така що $\overline{\Omega'} \subset \Omega$, визначимо лінійний функціонал b_ε в $W^{1,2}(\Omega)$ формулою

$$b_\varepsilon w_\varepsilon = \int_{S'_\varepsilon} q(x, x/\varepsilon)(w_\varepsilon - \bar{w}_\varepsilon)\, \mathrm{d}\sigma. \tag{3.2.54}$$

де $S'_\varepsilon = \bigcup_{m:\, Y^{(m)}_\varepsilon \cap \Omega' \neq \emptyset} S_\varepsilon \cap Y^{(m)}_\varepsilon$. Ясно, що $S'_\varepsilon \subset S_\varepsilon$.

Крок I (Слабка збіжність b_ε). Покажемо, що

$$\|b_\varepsilon\| \le C \text{ з константою } C, \text{ що не залежить від } \varepsilon, \tag{3.2.55}$$

$$b_\varepsilon w \to \int_{\Omega'}\int_{Y\cap S} q(x,y)\nabla w(x)\cdot y\,\mathrm{d}\sigma_y\mathrm{d}x \text{ слабко, при } \varepsilon\to 0. \tag{3.2.56}$$

Згідно з (3.2.38) маємо

$$|b_\varepsilon w_\varepsilon| \;\le\; C\int_{S'_\varepsilon}|w_\varepsilon-\bar{w}_\varepsilon|\mathrm{d}\sigma \;\le\; C\varepsilon^{-1/2}\Big(\int_{S'_\varepsilon}|w_\varepsilon-\bar{w}_\varepsilon|^2\mathrm{d}\sigma\Big)^{1/2} \;\le\; C\|w_\varepsilon\|_{W^{1,2}(\Omega)}.$$

Візьмемо тепер довільну w із щільної (в $W^{1,2}(\Omega)$) множини $C^2(\overline{\Omega})$, тоді

$$\begin{aligned} b_\varepsilon w &= \sum_m \int_{S'_\varepsilon\cap Y_\varepsilon^{(m)}} q(x,x/\varepsilon)(\nabla w(x_\varepsilon^{(m)})\cdot(x-x_\varepsilon^{(m)})+O(\varepsilon^2))\,\mathrm{d}\sigma \\ &= \sum_m \int_{S'_\varepsilon\cap Y_\varepsilon^{(m)}} q(x_\varepsilon^{(m)},x/\varepsilon)\nabla w(x_\varepsilon^{(m)})\cdot(x-x_\varepsilon^{(m)})\,\mathrm{d}\sigma + O(\varepsilon) \\ &= \int_{\Omega'}\int_{Y\cap S} q(x,y)\nabla w(x)\cdot y\,\mathrm{d}\sigma_y\mathrm{d}x + o(1), \end{aligned}$$

де $x_\varepsilon^{(m)}$ – центр комірки $Y_\varepsilon^{(m)}$. Таким чином (3.2.55) і (J.23) доведено.

Крок II (Доведення (3.2.28) для w_ε з $\mathrm{supp}(w_\varepsilon)\subset\overline{\Omega'}$). Припустимо, що

$$w_\varepsilon = 0 \text{ в } \Omega\setminus\Omega' \text{ (зокрема } w_\varepsilon = 0 \text{ на } \partial\Omega'). \tag{3.2.57}$$

Для заданого $\delta>0$, нехай $\{Q_\delta^{(\alpha)}\}$ – відкрите покриття Ω, $\mathrm{diam}Q_\delta^{(\alpha)}\le\delta$, і нехай $\{\varphi_\delta^{(\alpha)}\in C^\infty(\mathbb{R}^N)\}$ – розбиття одиниці, таке що

$$\mathrm{supp}\varphi_\delta^{(\alpha)}\subset Q_\delta^{(\alpha)},\; 0\le\varphi_\delta^{(\alpha)}\le 1,\; \sum_\alpha\varphi_\delta^{(\alpha)}=1.$$

Тоді маємо

$$\begin{aligned} b_\varepsilon w_\varepsilon &= \sum_\alpha\int_{S'_\varepsilon} q(\hat{x}_\delta^{(\alpha)},x/\varepsilon)(w_\varepsilon-\bar{w}_\varepsilon)\varphi_\delta^{(\alpha)}\mathrm{d}\sigma \\ &\quad+\sum_\alpha\int_{S'_\varepsilon}(q(x,x/\varepsilon)-q(\hat{x}_\delta^{(\alpha)},x/\varepsilon))(w_\varepsilon-\bar{w}_\varepsilon)\varphi_\delta^{(\alpha)}\mathrm{d}\sigma = I_1+I_2, \end{aligned} \tag{3.2.58}$$

де $\hat{x}_\delta^{(\alpha)} \in Q_\delta^{(\alpha)}$. Завдяки ліпшицевості $q(x,y)$ відносно x,

$$|I_2| \le C\delta \sum_\alpha \int_{S'_\varepsilon} |w - \bar{w}_\varepsilon| \varphi_\delta^{(\alpha)} \mathrm{d}\sigma = C\delta \int_{S'_\varepsilon} |w - \bar{w}_\varepsilon| \mathrm{d}\sigma \le C\delta \|\nabla w_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}. \quad (3.2.59)$$

Запишемо перший член I_1 як

$$I_1 = \sum_\alpha \Big(\int_{S'_\varepsilon} q(\hat{x}_\delta^{(\alpha)}, x/\varepsilon) w_\varepsilon \varphi_\delta^{(\alpha)} \mathrm{d}\sigma - \int_{S'_\varepsilon} q(\hat{x}_\delta^{(\alpha)}, x/\varepsilon) \bar{w}_\varepsilon \varphi_\delta^{(\alpha)} \mathrm{d}\sigma \Big) = \sum_\alpha (\tilde{I}_1^{(\alpha)} + \hat{I}_1^{(\alpha)}). \quad (3.2.60)$$

Зазначимо, що

$$\int_{S'_\varepsilon \cap Y_\varepsilon^{(m)}} q(\hat{x}_\delta^{(\alpha)}, x/\varepsilon) \varphi_\delta^{(\alpha)} \mathrm{d}\sigma = \varepsilon^N \Big(\int_{S \cap Y} q(\hat{x}_\delta^{(\alpha)}, y) \nabla \varphi_\delta^{(\alpha)}(x_\varepsilon^{(m)}) \cdot y \mathrm{d}\sigma_y + O(\varepsilon) \Big)$$

(як і раніше $x_\varepsilon^{(m)}$ позначає центр комірки $Y_\varepsilon^{(m)}$). Оскільки $\bar{w}_\varepsilon \to W_0(x)$ сильно в $L^2(\Omega)$, знаходимо

$$\begin{aligned} \hat{I}_1^{(\alpha)} \to -\int_{\Omega'} \Big(W_0(x) \int_{S \cap Y} q(\hat{x}_\delta^{(\alpha)}, y) \nabla \varphi_\delta^{(\alpha)}(x) \cdot y \mathrm{d}\sigma_y \Big) \mathrm{d}x \\ = \int_{\Omega'} \Big(\varphi_\delta^{(\alpha)}(x) \int_{S \cap Y} q(x_\delta^{(\alpha)}, y) \nabla W_0(x) \cdot y \mathrm{d}\sigma_y \Big) \mathrm{d}x, \end{aligned}$$

де використано той факт, що $W_0 = 0$ в $\Omega \setminus \Omega'$. Таким чином,

$$\sum_\alpha \hat{I}_1^{(\alpha)} \to \int_{S \cap Y} \Big(\sum_\alpha \int_{\Omega'} \varphi_\delta^{(\alpha)}(x) q(\hat{x}_\delta^{(\alpha)}, y) \nabla W_0(x) \cdot y \mathrm{d}x \Big) \mathrm{d}\sigma_y,$$

отже

$$\lim_{\delta \to 0} \lim_{\varepsilon \to 0} \sum_\alpha \hat{I}_1^{(\alpha)} = \int_{\Omega'} \int_{S \cap Y} q(x,y) \nabla W_0(x) \cdot y \mathrm{d}\sigma_y \mathrm{d}x. \quad (3.2.61)$$

Для того щоб перейти до границі в $\tilde{I}_1^{(\alpha)}$ при $\varepsilon \to 0$, розглянемо розв'язок θ допоміжної задачі

$$\begin{cases} \Delta\theta(y) = 0, \text{ в } Y^*; \\ \frac{\partial\theta}{\partial\nu} = q(\hat{x}_\delta^{(\alpha)}, y) \text{ на } S \cap Y; \\ \theta \text{ є } Y^* - \text{періодичною функцією.} \end{cases} \quad (3.2.62)$$

Завдяки властивості (c) функції $q(x,y)$ існує єдиний (з точністю до адитивної константи) розв'язок θ задачі (3.2.62) і $\theta \in W^{1,2}(Y^*)$. Покладемо $\zeta_\varepsilon(x) = \theta(x/\varepsilon)$, тоді маємо $\Delta\zeta_\varepsilon = 0$ в Ω_ε і $\varepsilon\frac{\partial\zeta_\varepsilon}{\partial\nu} = q(\hat{x}_\delta^{(\alpha)}, x/\varepsilon)$ на S'_ε, так що

$$\begin{aligned}\int_{S'_\varepsilon} q(\hat{x}_\delta^{(\alpha)}, x/\varepsilon) w_\varepsilon \varphi_\delta^{(\alpha)} \mathrm{d}\sigma &= \varepsilon \int_{S'_\varepsilon} w_\varepsilon \varphi_\delta^{(\alpha)} \frac{\partial\zeta_\varepsilon}{\partial\nu} \mathrm{d}\sigma \\ &= \varepsilon \int_{\Omega_\varepsilon\cap\Omega'} \nabla(w_\varepsilon\varphi_\delta^{(\alpha)}) \cdot \nabla\zeta_\varepsilon \,\mathrm{d}x = \int_{\Omega_\varepsilon\cap\Omega'} \nabla(w_\varepsilon\varphi_\delta^{(\alpha)}) \cdot (\nabla\theta)(x/\varepsilon)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

(тут прийнято також до уваги той факт, що $w_\varepsilon = 0$ на $\partial\Omega'$). Легко перевірити, що $\nabla(w_\varepsilon\varphi_\delta^{(\alpha)})(x) \to \nabla(W_0\varphi_\delta^{(\alpha)})(x) + \varphi_\delta^{(\alpha)}\nabla_y W_1(x,y)$ двохмасштабно, отже

$$\begin{aligned}\tilde{I}_1^{(\alpha)} \to \int_{\Omega'} \Big(\int_{Y^*} (\nabla(W_0\varphi_\delta^{(\alpha)}) + \varphi_\delta^{(\alpha)}\nabla_y W_1(x,y)) \cdot (\nabla\theta)(y)\,\mathrm{d}y \Big)\,\mathrm{d}x \\ = \int_{\Omega'} \varphi_\delta^{(\alpha)} \Big(\int_{S\cap Y} W_1(x,y) q(\hat{x}_\delta^{(\alpha)}, y)\,\mathrm{d}\sigma_y \Big)\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

де використано (3.2.62). Таким чином, з огляду на ліпшицевість $q(x,y)$ відносно x, у границі $\delta \to 0$ отримуємо

$$\begin{aligned}\lim_{\delta\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0} \sum_\alpha \tilde{I}_1^{(\alpha)} = \sum_\alpha \int_{\Omega'} \varphi_\delta^{(\alpha)} \Big(\int_{S\cap Y} W_1(x,y) q(x,y)\,\mathrm{d}\sigma_y \Big)\,\mathrm{d}x \\ = \int_{\Omega'} \int_{S\cap Y} W_1(x,y) q(x,y)\,\mathrm{d}\sigma_y \mathrm{d}x, \quad (3.2.63)\end{aligned}$$

і, з (3.2.58)–(3.2.61), (3.2.63), остаточно маємо

$$\int_{S'_\varepsilon} q(x, x/\varepsilon)(w_\varepsilon - \bar{w}_\varepsilon)\mathrm{d}\sigma \to \int_{\Omega'} \int_{Y\cap S} q(x,y)(\nabla W_0 \cdot y + W_1(x,y))\mathrm{d}\sigma_y \mathrm{d}x. \quad (3.2.64)$$

Крок III (Загальний випадок). Нехай (w_ε) – довільна послідовність, така що $w_\varepsilon \to W_0$ слабко в $W^{1,2}(\Omega)$, і $\nabla w_\varepsilon \to \nabla W_0(x) + \nabla_y W_1(x,y)$ двохмасштабно. Запишемо $w_\varepsilon = (w_\varepsilon - (W_0 + w_\varepsilon^{(1)})) + w_\varepsilon^{(1)} + W_0$, де $w_\varepsilon^{(1)}$ – єдиний розв'язок задачі

$$\begin{cases} \Delta w_\varepsilon^{(1)} = 0 \text{ в } \Omega' \\ w_\varepsilon^{(1)} = w_\varepsilon - W_0 \text{ на } \partial\Omega', \end{cases}$$

продовжений в $\Omega\setminus\Omega'$ рівністю $w_\varepsilon^{(1)}=w_\varepsilon-W_0$. Оскільки $w_\varepsilon-W_0\to 0$ слабко в $H^{1/2}(\partial\Omega')$, маємо

$$w_\varepsilon^{(1)}\to 0 \text{ сильно в } W^{1,2}(K) \text{ для довільного компакту } K\subset\Omega', \tag{3.2.65}$$

як випливає зі стандартних еліптичних оцінок. Звідсіля, зокрема, маємо $w_\varepsilon^{(1)}\to 0$, $\nabla w_\varepsilon^{(1)}\to 0$ двохмасштабно. Більш того, з огляду на (3.2.38), для довільної компактної підмножини K області Ω',

$$\begin{aligned}|b_\varepsilon w_\varepsilon^{(1)}|&\le C\sum_{m:Y_\varepsilon^{(m)}\cap K\neq\emptyset}\int_{Y_\varepsilon^{(m)}}|w_\varepsilon^{(1)}-\bar w_\varepsilon^{(1)}|\mathrm{d}\sigma+C\sum_{m:Y_\varepsilon^{(m)}\cap K=\emptyset}\int_{Y_\varepsilon^{(m)}\cap\Omega'}|w_\varepsilon^{(1)}-\bar w_\varepsilon^{(1)}|\mathrm{d}\sigma\\&\le C\Big(\int_{K_\delta}|\nabla w_\varepsilon^{(1)}|^2\mathrm{d}x\Big)^{1/2}+C|\Omega'_\delta\setminus K|^{1/2}\Big(\int_\Omega|\nabla w_\varepsilon^{(1)}|^2\mathrm{d}x\Big)^{1/2},\end{aligned} \tag{3.2.66}$$

коли $\varepsilon\le\delta/N$, де C не залежить від ε і δ, K_δ, Ω'_δ – δ-околи K і Ω', відповідно, і число $\delta>0$ є довільним. (Підсумовування в (3.2.66) розповсюджується на всі m, такі що $Y_\varepsilon^{(m)}\cap\Omega'\neq\emptyset$.) З (B.2), (3.2.66) випливає, що $b_\varepsilon w_\varepsilon^{(1)}\to 0$ при $\varepsilon\to 0$, разом з цим, згідно з першим і другим кроками,

$$b_\varepsilon W_0\to\int_{\Omega'}\int_{Y\cap S}q(x,y)DW_0\cdot y\,\mathrm{d}\sigma_y\mathrm{d}x,$$

і

$$b_\varepsilon(w_\varepsilon-(W_0+w_\varepsilon^{(1)}))\to\int_{\Omega'}\int_{Y\cap S}q(x,y)W_1(x,y)\mathrm{d}\sigma_y\mathrm{d}x.$$

Таким чином (3.2.64) доведено для довільної послідовності (w_ε), такої що має місце (3.2.27).

Крок IV (Завершення доведення). Покладемо $\Omega'=\{x\in\Omega;\mathrm{dist}(x,\partial\Omega)>\delta\}$, де $\delta>0$. Скориставшись (3.2.38) маємо,

$$\int_{S_\varepsilon\setminus S'_\varepsilon}|w_\varepsilon-\bar w_\varepsilon|\mathrm{d}\sigma\le C\frac{\delta^{1/2}}{\varepsilon^{1/2}}\Big(\int_{S_\varepsilon\setminus S'_\varepsilon}|w_\varepsilon-\bar w_\varepsilon|^2\mathrm{d}\sigma\Big)^{1/2}\le C\delta^{1/2}\|w_\varepsilon\|_{W^{1,2}(\Omega)}, \tag{3.2.67}$$

для достатньо малих ε, де C не залежить від δ і ε. Таким чином, комбінуючи оцінку (3.2.67) з (3.2.64) отримуємо (3.2.28) для довільної послідовності (w_ε), такої що має місце (3.2.27). $\square$

2(*Доведення* (3.2.26)). Наблизимо U_0 функціями $u_\delta^{(1)} \in C^1(\overline{\Omega})$ $(\delta > 0)$ в (сильній) топології $L^2(\Omega)$, $\|U_0 - u_\delta^{(1)}\|_{L^2(\Omega)} \le \delta$. Тоді внаслідок Леми 3.2.9, сильної-L^2 збіжності u_ε до U_0 і Леми 3.2.10, маємо

$$\limsup_{\varepsilon\to 0}\left|\int_{S_\varepsilon} g(u_\varepsilon, x/\varepsilon)(u_\varepsilon - v_\varepsilon)\mathrm{d}\sigma - \int_{S_\varepsilon} g(\bar{u}_\delta^{(1)}, x/\varepsilon)(u_\varepsilon - v_\varepsilon - \bar{u}_\varepsilon + \bar{v}_\varepsilon)\mathrm{d}\sigma \right.$$
$$\left. - \int_{S_\varepsilon} g'_u(\bar{u}_\delta^{(1)}, x/\varepsilon)(\bar{u}_\delta^{(1)} - \bar{v}_\varepsilon)(u_\varepsilon - \bar{u}_\varepsilon)\mathrm{d}\sigma\right| \le C\delta. \quad (3.2.68)$$

З іншого боку, з умов (I), (3.2.8), (3.2.9) випливають поточкові оцінки

$$|g(\bar{u}_\delta^{(1)}, x/\varepsilon) - g(u_\delta^{(1)}, x/\varepsilon)| \le C\varepsilon \text{ на } S_\varepsilon,$$

$$|g'_u(\bar{u}_\delta^{(1)}, x/\varepsilon)(\bar{u}_\delta^{(1)} - \bar{v}_\varepsilon) - g'_u(u_\delta^{(1)}, x/\varepsilon)(u_\delta^{(1)} - V_0)| \le C\varepsilon \text{ на } S_\varepsilon$$

(нагадаємо, що $v_\varepsilon = V_0(x) + \varepsilon V_1(x, x/\varepsilon)$, і V_0, V_1 – гладкі функції), що, з використанням (3.2.38), веде до

$$\limsup_{\varepsilon\to 0}\left|\int_{S_\varepsilon} (g(\bar{u}_\delta^{(1)}, x/\varepsilon) - g(u_\delta^{(1)}, x/\varepsilon))(u_\varepsilon - v_\varepsilon - \bar{u}_\varepsilon + \bar{v}_\varepsilon)\mathrm{d}\sigma \right.$$
$$\left. + \int_{S_\varepsilon} (g'_u(\bar{u}_\delta^{(1)}, x/\varepsilon)(\bar{u}_\delta^{(1)} - \bar{v}_\varepsilon) - g'_u(u_\delta^{(1)}, x/\varepsilon)(u_\delta^{(1)} - V_0))(u_\varepsilon - \bar{u}_\varepsilon)\mathrm{d}\sigma\right| = 0. \quad (3.2.69)$$

Застосуємо тепер Твердження 3.2.7 спочатку з $q(x,y) = g(u_\delta^{(1)}(x), y)$, $w_\varepsilon = u_\varepsilon - v_\varepsilon$, потім з $q(x,y) = g(u_\delta^{(1)}(x), y)u_\delta^{(1)}(x)$, $w_\varepsilon = u_\varepsilon$, і насамкінець з $q(x,y) = g(u_\delta^{(1)}(x), y)V_0(x)$, $w_\varepsilon = u_\varepsilon$, в результаті отримуємо

$$\int_{S_\varepsilon} \big(g(u_\delta^{(1)}, x/\varepsilon)(u_\varepsilon - v_\varepsilon - \bar{u}_\varepsilon + \bar{v}_\varepsilon) + g'_u(u_\delta^{(1)}, x/\varepsilon)(u_\delta^{(1)} - V_0)(u_\varepsilon - \bar{u}_\varepsilon)\big)\mathrm{d}\sigma$$
$$\to \int_\Omega \int_{S\cap Y} g(u_\delta^{(1)}, y)(\nabla(U_0 - V_0)\cdot y + U_1(x,y) - V_1(x,y))\mathrm{d}\sigma_y \mathrm{d}x$$
$$+ \int_\Omega \int_{S\cap Y} g'_u(u_\delta^{(1)}, y)(u_\delta^{(1)} - V_0)(\nabla U_0 \cdot y + U_1(x,y))\mathrm{d}\sigma_y \mathrm{d}x. \quad (3.2.70)$$

Граничний перехід коли $\delta \to 0$ в (3.2.68)– (3.2.70) дає (3.2.26). $\square$

Висновки до Розділу 3

У Розділі 3 досліджено дві задачі усереднення: описано вихорові структури в надпровідниках з великим числом малих отворів, і вивчено асимптотичну поведінку розв'язків нелінійних еліптичних задач (а також їх параболічних аналогів) в перфорованих областях з умовою Фур'є на межі дірок. Основними результатами розділу є

- Теорема 3.1.9 про Γ-границю для функціонала енергії в моделі надпровідника з отворами.
- Теореми 3.2.2 і 3.2.6 про усереднення нелінійних рівнянь в перфорованих областях з умовою Фур'є на межі дірок.

Розділ 4

РОЗВ'ЯЗКИ ТИПУ БІЖНИХ ХВИЛЬ У ЗАДАЧІ З ВІЛЬНОЮ МЕЖЕЮ, ЩО МОДЕЛЮЄ РУХ ЖИВИХ КЛІТИН НА СУБСТРАТІ

Від початку симетрична клітина на субстраті може зазнати спонтанне порушення симетрії і перейти в рухливий стан, в якому вона зазвичай мігрує прямолінійно зі збереженням своєї форми на відстань багатьох своїх розмірів [117], [24]. Розуміння ініціації рухливого стану живих клітин і механізму порушення симетрії є фундаментальним питанням біології клітин.

В чисельних експериментальних і теоретичних дослідження руху клітин використовують кератоцити. Клітини такого типу присутні, наприклад, в роговиці ока і вони відіграють важливу роль в загоюванні ран після пошкоджень. Кератоцити є ідеальними для експериментальних досліджень завдяки їх значній рухливості, крім того, через свою плоску побудову, вони є зручними для моделювання і для їх дослідження використовують двовимірні моделі. Типовими для них є нерухомий стан і стійкий рух з незмінною формою, швидкістю і напрямком. Тому в біофізичних моделях важливо описати перш за все стаціонарні розв'язки і розв'язки типу біжної хвилі.

Для моделей рухливості живих клітин розв'язки типу біжної хвилі в одновимірних задачах з вільною межею було досліджено в [171], [172], [13]. Чисельний аналіз двовимірних задач з вільною межею поведено, наприклад, в [23], [198]. Фазові моделі рухливості клітин введено і чисельно досліджено, наприклад, в

[189], [206], [188]. Роботу [41] присвячено переходу до границі контрастної фазової функції, результати цієї роботи представлено в Додатку M.

Розглянуту нижче двовимірну модель з вільною межею можна розглядати як узагальнення одновимірної моделі [171], [172], або як спрощену двовимірну модель з [23]. Запропонована в [171, 172] мінімальна модель описує потік актоміозину в цитоскелеті клітини спричинений скоротливою дією міозину. Ця модель складається з системи еліптичного і параболічного рівнянь (модель Келлера-Сегеля) в області з вільною межею. В [171] винайдено біфуркацію сім'ї тривіальних нерухомих станів до біжних хвиль. Зазначимо, що систему Келлера-Сегеля у фіксованій області було запропоновано і вивчено вперше в роботах [114], [115], [116], ця система є предметом багатьох досліджень (див., наприклад, [159], [64],[202], [203], і огляд [101]) через її фундаментальну в моделюванні хемотаксису.

Двовимірна модель, яку запропоновано в [23], складається з системи рівнянь для потока актоміозину і щільності міозину, а також з рівняння реакції-дифузії яку описує зчеплення клітини з субстратом. Чисельні розрахунки для цієї моделі показали існування розв'язків типу біжної хвилі, які було порівняно з експериментальними спостереженнями руху кератоцитів на рівній поверхні. Для таких розв'язків характерними є просторово майже однорідні сили зчеплення. Тому нижче розглядаються рівняння з постійним коефіцієнтом зчеплення, як і в одновимірній моделі з [171], [172]. Крім того, в [23] розглянуто рівняння для поля швидкостей актоміозину з двома в'язкостями (об'ємній і зсувній). В чисельному моделюванні використано контрастні значення цих в'язкостей: об'ємна в'язкість є набагато більшою ніж зсувна. З цієї причини розглядається редукована реологія цитоскелету з нульовою зсувною в'язкістю і об'ємною в'язкістю масштабованою до 1.

Перейдемо тепер безпосередньо до формулювання задачі. В області $\Omega(t) \subset \mathbb{R}^2$ з вільною межею розглядається система рівнянь

$$\nabla \operatorname{div} u + \alpha \nabla m = u \quad \text{в } \Omega(t), \tag{4.0.1}$$

$$\partial_t m = \Delta m - \operatorname{div}(u\,m) \quad \text{в } \Omega(t), \tag{4.0.2}$$

де u – поле швидкостей потоку актоміозину, m – щільність міозину. Перше рівняння є балансом сил між напруженнями, представленими в лівій частині рівняння, і силами зчеплення з субстратом (в правій частині рівняння), які є пропорційними швидкостям (з одиничним коефіцієнтом пропорційності, чого завжди можна досягти після обезрозмірення). Тензор напруги є скалярним, він складається з гідродінамічної (пасивної) частини $\operatorname{div} u$ і активної компоненти αm, що створюється скоротливою дією міозину, де $\alpha > 0$ – стала (силова характеристика міозину). Друге рівняння (4.0.2) є рівнянням конвекції-дифузії для щільності m в потоці u.

Еволюція вільної межі $\partial\Omega(t)$ описується кінематичною крайовою умовою для нормальної швидкості V_ν,

$$V_\nu = (u \cdot \nu) - \beta\kappa + \lambda \quad \text{на } \partial\Omega(t), \tag{4.0.3}$$

де ν – одинична зовнішня нормаль, κ – кривизна $\partial\Omega(t)$, і λ – стала визначена рівністю $\lambda := \left(2\pi\beta - \int_{\partial\Omega(t)}(u \cdot \nu)d\sigma\right)/|\partial\Omega(t)|$ (вона обумовлює збереження площі).

Рівняння (4.0.1) доповнюється умовою нульового напруження на межі:

$$\operatorname{div}\ u + \alpha m = 0 \quad \text{на } \partial\Omega(t), \tag{4.0.4}$$

а рівняння (4.0.2) розглядається з умовою

$$\frac{\partial m}{\partial \nu} = ((u \cdot \nu) - V_\nu)m \qquad \text{на } \partial\Omega(t), \tag{4.0.5}$$

що вимагає нульовий потік на межі (з урахуванням конвективного поля u і руху межі).

Близькі за постановкою параболічно-еліптичні крайові задачі з вільною межею виникають в моделях росту пухлин, наприклад, [91], [89], [99], [102] (див. також огляди [90], [135]). Проте диференціальні рівняння в цих моделях є лінійними, і площа області не зберігається. Для цих моделей вивчено структуру стаціонарних розв'язків, зокрема біфуркакції до нерадіальних розв'язків, також досліджено стійкість розв'язків і умови розширення або зменшення області з вільною межею.

Для дослідження біфуркації розв'язків типу біжної хвилі в задачі (4.0.1) - (4.0.3) застосовано підхід, що вперше було запропоновано в роботі [91] і згодом розвинено в [92], [99], [102] для моделей росту пухлин. А саме, нерадіальні розв'язки знаходяться шляхом біфуркаційного аналізу для сім'ї радіально симетричних стаціонарних розв'язків. Проте технічна реалізація цього підходу значно відрізняється від згаданих робіт через нелінійний характер системи рівнянь (4.0.1)–(4.0.2). Зокрема в доведенні теореми про біфуркацію розв'язків типу біжних хвиль застосовано техніку, що базується на понятті степеня Лере-Шаудера, замість Теореми Крендалла-Рабіновіча [75], яку використано (наприклад, в [92], [99], [102]) в дослідженні моделей росту пухлин.

Під розв'язками типу біжної хвилі розуміються розв'язки (4.0.1) - (4.0.3) вигляду $\Omega(t) = \Omega + Vt$, $u = u(x - V_x t, y - V_y t)$, $m = m(x - V_x t, y - V_y t)$. Для них, після переходу до рухомої системи координат система (4.0.1)–(4.0.5) переписується наступним чином в термінах скалярної напруги $S := \mathrm{div} u + \alpha m$:

$$-\Delta S + S = \alpha m \quad \text{в } \Omega, \text{ і} \quad S = 0 \quad \text{на } \partial\Omega, \tag{4.0.6}$$

$$-\Delta m + \mathrm{div}((\nabla S - V)m) = 0 \quad \text{в } \Omega, \text{ і} \quad \frac{\partial m}{\partial \nu} = ((\nabla S - V)\cdot \nu)m \quad \text{на } \partial\Omega, \tag{4.0.7}$$

$$V_\nu = \frac{\partial S}{\partial \nu} - \beta\kappa + \lambda \quad \text{на } \partial\Omega. \tag{4.0.8}$$

Без зменшення загальності можна припускати, що рух відбувається у x-напрямку зі швидкістю V (що надалі позначає скалярну величину). Зазначимо, що для заданого S всі невід'ємні розв'язки (4.0.7) (функція m позначає щильність міозину і тому не може бути від'ємною) визначаються формулою $m(x, y) = m_0 e^{S(x,y) - xV}$ з постійною $m_0 \geq 0$. Дійсно, прямо перевіряється той факт, що $m = e^{S(x,y) - xV}$ – розв'язок (4.0.7). Його єдиність із точністю до мультиплікативної константи випливає з Теореми Крейна-Рутмана [122]. Таким чином можна виключити m з (4.0.6)–(4.0.7) і переписати задачу у наступній формі:

$$-\Delta S + S = \Lambda e^{S-xV} \quad \text{в } \Omega, \tag{4.0.9}$$

з крайовими умовами

$$S = 0 \quad \text{на } \partial\Omega \tag{4.0.10}$$

і

$$V\nu_x = \frac{\partial S}{\partial \nu} - \beta\kappa + \lambda \quad \text{на } \partial\Omega. \tag{4.0.11}$$

В задачі (4.0.9)-(4.0.11) S, V, і $\Lambda = m_0\alpha \geq 0$ є невідомими. Зазначимо, що (4.0.9)–(4.0.11) є задачею з вільною межею, тобто, область Ω також є невідомою. Для радіально симетричних розв'язків (4.0.9)–(4.0.10) з $V = 0$ і областю $\Omega = B_R$ (диск), сталу λ завжди можна підібрати тик, щоб виконувалась крайова умова (4.0.11). Це дозволяє побудувати однопараметричну сім'ю стаціонарних розв'язків шляхом дослідження нелінійної задачі на власні значення (4.0.9)–(4.0.10). Подальший біфуркаційний аналіз радіальних стаціонарних розв'язків веде до наступного результату (див. Підрозділ 4.1.5 для більш детальної інформації).

Теорема 4.1.1. *Існує сім'я розв'язків* (4.0.6)–(4.0.8) *типу біжної хвилі з ненульовими скоростями V. Цей результат має місце для всіх значень параметрів $\alpha > 0$ і $\beta > 0$, за виключенням, можливо, зліченного набору значень β (див. Теорему 4.1.18), і для довільної площі області $|\Omega| > 0$.*

4.1.1 Сім'я радіально симетричних стаціонарних розв'язків

Задача (4.0.9)-(4.0.11) має сім'ю стаціонарних розв'язків, з $V = 0$, які мають радіально симетричну форму. Більш докладно, нехай Ω – диск B_R радіусу $R > 0$, розглядаються радіально симетричні розв'язки $S = \Phi(r)$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ рівняння

$$-\frac{1}{r}(r\Phi'(r))' + \Phi = \Lambda e^{\Phi}, \quad 0 < r < R, \tag{4.1.12}$$

з крайовими умовами

$$\Phi'(0) = \Phi(R) = 0. \tag{4.1.13}$$

Зазначимо, що (4.1.12)–(4.1.13) є нелінійною задачею на власні значення, тобто стала Λ і функція $\Phi(r)$ є невідомими в цій задачі. Кожний розв'язок (4.1.12)–(4.1.13) також задовольняє (4.0.9)–(4.0.11) з $V = 0$ і деякою сталою λ, тобто завжди можна підібрати λ в цій радіально симетричній задачі так щоб виконувалася умова (4.0.11). Рівняння (4.1.12) є класичним рівнянням Ліувілля [134] з додатковим членом нульового порядку (другий член в лівій частині (4.1.12)).

Зауваження 4.1.2. Природно очікувати, що сім'я розв'язків (4.1.12)-(4.1.13) має таку саму структуру, що явні розв'язки рівняння Ліувілля [194] у диску. Проте, додатковий член S в (4.1.12) ускладнює аналіз навіть в радіально симетричному випадку, наприклад, стандартний метод, що базується на нерівності Похожаєва, не дозволяє встановити невиродженість (див. умову (4.1.19)).

Теорема 4.1.3. *Зафіксуємо $R > 0$, тоді*

(i) *Існує континуум (замкнена зв'язна множина) $\mathcal{K} \subset \mathbb{R} \times C([0, R])$ невід'ємних розв'язків $\Lambda \geq 0$, $\Phi \geq 0$ задачі* (4.1.12)–(4.1.13)*, що містить тривіальний розв'язок* $(\Lambda, \Phi) = (0, 0)$. *Існує додатне скінченне число*

$$\Lambda_0 = \max\{\Lambda \,|\, (4.1.12)\text{-}(4.1.13) \text{ має розв'язок } (\Lambda, \Phi)\},$$

зокрема, $\Lambda \leq \Lambda_0$ для всіх $(\Lambda, \Phi) \in \mathcal{K}$. З іншого боку норма $\|\Phi\|_{C([0,R])}$ не є обмеженою на $\mathcal{K}$, більш того

$$\sup\left\{\int_0^R e^{\Phi}\, r dr \,\Big|\, (\Lambda, \Phi) \in \mathcal{K}\right\} = \infty. \tag{4.1.14}$$

(ii) *Для кожного $0 \leq \Lambda < \Lambda_0$ існує поточково мінімальний розв'язок Φ задачі* (4.1.12)–(4.1.13)*, і ці мінімальні розв'язки є поточково зростаючими за Λ. Вони утворюють аналітичну криву $\mathcal{A}_0$ в $\mathbb{R} \times C([0; R])$, яку можно продовжити до аналитичної кривої $\mathcal{A}_1$. Крива $\mathcal{A}_1$ є зв'язною компонентою $\mathcal{A}$, що містить $\mathcal{A}_0$, де*

$$\mathcal{A} := \{(\Lambda, \Phi) \in \mathcal{K} \mid \sigma_2(\Lambda, \Phi) > 0\}, \tag{4.1.15}$$

і $\sigma_2(\Lambda,\Phi)$ *позначає друге власне значення лінеарізованної задачі*

$$-\Delta w + w - \Lambda e^{\Phi} w = \sigma w \quad \text{в } B_R, \quad w = 0 \quad \text{на } \partial B_R. \tag{4.1.16}$$

Зауваження 4.1.4. Підсумовуючи частину (ii) Теореми, маємо наступні включення

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{K} & \supseteq & \mathcal{A} & \supseteq & \mathcal{A}_1 & \supseteq & \mathcal{A}_0 \\ \text{контин. р-в} & & \text{2-ге вл.зн.} > 0 & & \text{компонента, що містить } \mathcal{A}_0, & & \text{мін. р-ки} \end{array}$$

де тільки множина $\mathcal{A}$ може бути незв'язною.

Доведення. (i) Згідно з принципом максимуму кожний розв'язок (4.1.12)–(4.1.13) з $\Lambda \geq 0$ є додатним для $r < R$. Нехай $\mu_D > 0$ позначає перше власне значення оператору $-\Delta$ в B_R з однорідною умовою Діріхле, і нехай $U > 0$ – відповідна власна функція. Помножимо (4.1.12) на rU і проінтегруємо:

$$(1+\mu_D)\int_0^R U\Phi\, rdr = \Lambda \int_0^R e^{\Phi} U\, rdr \geq \Lambda \int_0^R \Phi U\, rdr,$$

отже $\Lambda \leq 1 + \mu_D$.

Для доведення існування континнума $\mathcal{K}$, запишемо (4.1.12) у вигляді

$$-\Delta\Phi + \Phi = \tilde{\Lambda}\left(\frac{e^{2\Phi}}{\int_{B_R} e^{2\Phi} dxdy}\right)^{1/2} \quad \text{in } B_R, \tag{4.1.17}$$

з $\Phi = \Phi(r)$, $r = \sqrt{x^2+y^2}$, і новим невідомим параметром $\tilde{\Lambda}$ замість Λ. Розв'яжемо (4.1.17) з умовою Діріхле $\Phi = 0$ на ∂B_R, розглядаючи праву частину (4.1.17) як задану функцію. Це веде до еквівалентногог переформулювання (4.1.12)–(4.1.13) як задачі про нерухому точку

$$\Phi = \tilde{\Lambda}\mathcal{R}(\Phi). \tag{4.1.18}$$

Зі стандартних еліптичних оцінок випливає, що $\mathcal{R}$ є компактним відображенням в $C([0,R])$, крім того $\mathcal{R}(C([0,R]))$ є обмеженою підмножиною $C([0,R])$. Тому можна застосувати Теорему Лере-Шаудера про продовження за параметром, див., наприклад, [138], для доведення існування континууму розв'язків

$(\tilde{\Lambda}, \Phi)$ задачі (4.1.18), що виникає з розв'язку $(0,0)$, де $\tilde{\Lambda}$ приймає всі невід'ємні значення. З огляду на обмеженність $\Lambda = \tilde{\Lambda}\big(2\pi\int_0^R e^{2\Phi} r dr\big)^{-1/2}$ можна заключити, що $\sup\{\|\Phi\|_{C([0,R])} \mid (\Lambda,\Phi) \in \mathcal{K}\} = \infty$. Звідси, застосувавши Наслідок 6 з [55], отримуємо (4.1.14).

(ii) Згідно з [112], існує мінімальний розв'язок Φ задачі (4.1.12)-(4.1.13) для кожного $\Lambda \in [0, \Lambda_0)$, причому функція Φ монотонно залежить від Λ. Розглянемо тепер довільний, не обов'язково мінімальний, розв'язок (Λ, Φ), такий що друге власне значення $\sigma_2(\Lambda, \Phi)$ лінеаризованої задачі (4.1.16) є додатним. За допомогою добре відомих методів, що спираються на Теорему про неявну функцію, див., наприклад [120], знаходимо, що всі розв'язки (4.1.12)–(4.1.13) в околі (Λ, Φ) належать до гладкої кривої, що проходить через (Λ, Φ), за умови, що або лінеаризована задача (4.1.16) не має нульового власного значення, або воно є простим і відповідна власна функція w задовольняє умову невиродженності

$$\int_0^R e^{\Phi(r)} w(r)\, r dr \neq 0. \tag{4.1.19}$$

Оскільки за припущенням $\sigma_2(\Lambda, \Phi) > 0$, нульове власне значення, якщо існує, є першим власним значенням (4.1.16), отже функція w є знакопостійною і задовольняє умову (4.1.19). Таким чином $\mathcal{A}_1$ дійсно є гладкою кривою, вона містить мінімальні розв'язоки (для яких перше власне значення $\sigma_1(\Lambda, \Phi)$ лінеарізованої задачі (4.1.16) є невід'ємним) але не тільки їх. Насамкінець, оскільки нелінійність e^{Φ} в (4.1.12) є аналітичною, крива $\mathcal{K}_1$ також є аналітичною, див. доведення Твердження (4.1.10) (нижче). $\square$

Лема 4.1.5. *Кожний розв'язок* (4.1.12)-(4.1.13) *з* $\Lambda \geq 0$ *задовольняє*

$$\Phi'(r) < 0 \quad \textit{для } 0 < r \leq R, \tag{4.1.20}$$

і наступну нерівність Похожаєва

$$\frac{1}{2}(R\Phi'(R))^2 + \int_0^R \Phi^2\, r dr = -\Lambda \int_0^R e^{\Phi} \Phi'\, r^2 dr = 2\Lambda \int_0^R e^{\Phi} r \mathrm{d}r - \Lambda R^2. \tag{4.1.21}$$

Доведення. Щоб довести (4.1.20) покажемо спочатку, що функція $\Phi(r)$ є спадною. Припустимо від супротивного, що Φ має локальний мінімум в r_0 і існує $r_1 \in (r_0, R]$, таке що $\Phi(r_0) = \Phi(r_1)$. Помножимо (4.1.12) на $\Phi'(r)$ і проінтегруємо від r_0 до r_1:

$$\int_{r_0}^{r_1} \left(\Phi'' + \frac{1}{r}\Phi'\right) \Phi' \, dr = \frac{1}{2}\Phi^2(r_1) - \Lambda e^{\Phi(r_1)} - \frac{1}{2}\Phi^2(r_0) + \Lambda e^{\Phi(r_0)} = 0. \quad (4.1.22)$$

З іншого боку, ліва частина (4.1.22) дорівнює

$$\frac{1}{2}(\Phi'(r_1))^2 + \int_{r_0}^{r_1} \frac{1}{r}(\Phi')^2 \, dr.$$

Отже функція Φ є постійною на (r_0, r_1), відсіля випливає, що Φ є постійною на $(0, R)$, протиріччя. Таким чином $\Phi'(r) \leq 0$ для $0 < r < R$. Припустимо тепер, що $\Phi'(r_0) = 0$ в точці $0 < r_0 < R$, тоді $\Phi''(r_0) = 0$, і знову знаходимо, що Φ є константою на $(0, R)$. Насамкінець, $\Phi'(R) < 0$ згідно з Лемою Хопфа.

Рівності (4.1.21) знаходяться стандартним чином: треба помножити (4.1.12) на множник Похожаєва $r^2\Phi'(r)$, проітегрувати від 0 до R і застосувати інтегрування частинами. □

4.1.2 Необхідна умова біфуркації біжних хвиль

Біжні хвилі з малими швидкостями, тобто розв'язки (4.0.9)–(4.0.11) для малих $V =: \varepsilon$, будемо шукати шляхом збурень радіально симетричних стаціонарних розв'язків представлених парами $(\Lambda, \Phi(r))$, що задовольняють (4.1.12)–(4.1.13). Для цього підставимо анзац

$$S = \Phi + \varepsilon\phi + \ldots, \; \Omega = \{(x, y) = r(\cos\varphi, \sin\varphi) \mid \varphi \in [-\pi, \pi), r < R + \varepsilon\rho(\varphi) + \ldots\} \quad (4.1.23)$$

в (4.0.9)-(4.0.11). Функція ρ описує відхилення Ω від диску B_R, а ϕ описує відхилення напруги S від Φ. Зазначимо, що в наближенні першого порядку стала Λ не збурюється (див. Додаток L, де показано, що $\varepsilon\Lambda_1 = 0$). Згрупуємо члени з однаковими степенями ε, тоді члени порядку ε в рівнянні (4.0.9) ведуть до наступного рівняння для ϕ:

$$-\Delta\phi + \phi = \Lambda e^{\Phi}(\phi - x) \quad \text{в } B_R. \tag{4.1.24}$$

Члени порядку ε в крайових умовах (4.0.10), (4.0.11) ведуть до умов

$$\phi + \Phi'(R)\rho = 0, \tag{4.1.25}$$

і

$$\cos\varphi = \frac{\partial\phi}{\partial\nu} + \Phi''(R)\rho + \frac{\beta}{R^2}(\rho + \rho''), \tag{4.1.26}$$

де сталу λ_1, що з'являється в розвиненні λ, $\lambda = \lambda_0 + \varepsilon\lambda_1 + \dots$, опущено через те, що розглядаються тільки збурення області, які не змінюють площі (див. деталі в Додатку L). Щоб позбавитись розв'язків породжених інфінітезимальними зсувами диску B_R, будемо накладати на ρ наступну умову ортогональності

$$\int_{-\pi}^{\pi} \rho(\varphi)\cos\varphi d\varphi = 0. \tag{4.1.27}$$

Розв'язок (4.1.24)–(4.1.25) шукаємо у вигляді Фур'є компоненти $\phi = \tilde{\phi}(r)\cos\varphi$. Тоді функція $\tilde{\phi}(r)$ повинна задовольняти

$$-\frac{1}{r}(r\tilde{\phi}')' + \left(1 + 1/r^2\right)\tilde{\phi} = \Lambda e^{\Phi}(\tilde{\phi} - r), \quad 0 < r < R, \quad \tilde{\phi}(0) = 0, \tag{4.1.28}$$

і, внаслідок (4.1.25) і (4.1.27), крайову умову

$$\tilde{\phi}(R) = 0. \tag{4.1.29}$$

Помножимо тепер (4.1.28) на $\Phi'(r)r$ в проінтегруємо від 0 до R. Проінтегруємо частинами і скористаємось тим фактом, що $-\frac{1}{r}(r\Phi'')' + \left(1 + 1/r^2\right)\Phi' = \Lambda e^{\Phi}\Phi'$ (останню рівність отримано диференціюванням (4.1.12)):

$$R\Phi'(R) = \Lambda \int_0^R e^{\Phi(r)}\Phi'(r) r^2 dr, \tag{4.1.30}$$

де також було використано (4.1.26) і (4.1.29). Це є необхідною умовою біфуркації біжучих хвиль з кривої стаціонарних розв'язків $\mathcal{A}_1$ в точці (Λ, Φ), і цю умову можна еквівалентно переписати, користуючись (4.1.12)–(4.1.13), як

$$\int_0^R \Phi(r) r dr = \Lambda R^2 - \Lambda \int_0^R e^{\Phi} r dr, \tag{4.1.31}$$

або, з огляду на (4.1.21), як

$$R\Phi'(R) + \frac{1}{2}\left(R\Phi'(R)\right)^2 + \int_0^R \Phi^2(r) r dr = 0. \tag{4.1.32}$$

В наступній Лемі 4.1.6 показано, що існує пара $(\Lambda, \Phi) \in \mathcal{A}_1$, яка задовольняє (4.1.30), а Наслідок 4.1.7 уточнює, яку саме пару буде використано в доведенні Теореми 4.1.1.

Лема 4.1.6. *Існують розв'язки* (Λ_-, Φ_-) *і* (Λ_+, Φ_+) *задачі* (4.1.12)–(4.1.13), *які належать до кривої* $\mathcal{A}_1$ *(див. твердження (ii) Теореми 4.1.3) і задовольняють нерівності*

$$\int_0^R \Phi_-(r) r dr < \Lambda_- R^2 - \Lambda_- \int_0^R e^{\Phi_-(r)}\, r dr, \tag{4.1.33}$$

$$\int_0^R \Phi_+(r) r dr > \Lambda_+ R^2 - \Lambda_+ \int_0^R e^{\Phi_+(r)}\, r dr. \tag{4.1.34}$$

Доведення. Розглянемо мінімальні розв'язки $(\Lambda, \Phi) \in \mathcal{A}_1$, які відповідають малим $\Lambda > 0$, і малим $\|\Phi\|_{C(B_R)}$. Буде показано, що для таких розв'язків ліва частина (4.1.31) є строго меншою ніж права, шляхом асимптотичного розвинення в границі $\Lambda \to 0$.

Лінеарізуємо (4.1.12)–(4.1.13) в околі $(0, 0)$:

$$\Phi = \Lambda g + O(\Lambda^2), \text{ де } g \text{ є розв'язком } -\frac{1}{r}(rg')' + g = 1,\ r < R, \quad g'(0) = g(R) = 0. \tag{4.1.35}$$

За допомогою принципу максимуму знаходимо $0 < g(r) < 1$ для $r < R$, отже в лівій частині (4.1.31) маємо

$$\int_0^R \Phi(r)\, r dr = \Lambda \int_0^R g\, r dr + O(\Lambda^2) \leq \Lambda(R^2/2 - \delta) + O(\Lambda^2),$$

для деякого $\delta > 0$, що не залежить Λ; між тим для правої частини (4.1.31) отримуємо

$$\Lambda R^2 - \Lambda \int_0^R e^{\Phi} r dr = \Lambda R^2 - \Lambda \int_0^R (1 + \Lambda g) r dr + O(\Lambda^2) = \Lambda R^2/2 + O(\Lambda^2).$$

Наступним кроком буде доведено існування пари $(\Lambda_+, \Phi_+) \in \mathcal{A}_1$, що задовольняє (4.1.34).

Випадок 1: $R \leq 4$. Згідно з твердженнями (i) і (ii) Теореми 4.1.3, крива $\mathcal{A}_1$ задовольняє

$$\sup\left\{\int_0^R e^{\Phi}\, rdr \,\Big|\, (\Lambda, \Phi) \in \mathcal{A}_1\right\} = \infty, \tag{4.1.36}$$

або, у найгіршому разі,

$$\inf\left\{\sigma_2(\Lambda, \Phi) \,|\, (\Lambda, \Phi) \in \mathcal{A}_1\right\} = 0. \tag{4.1.37}$$

У випадку коли виконується (4.1.36) права частина (4.1.31) стає від'ємною, проте ліва частина є додатною, тобто нерівність (4.1.34) дійсно виконується для деякої пари $(\Lambda_+, \Phi_+) \in \mathcal{A}_1$.

Розглянемо тепер випадок (4.1.37). Внаслідок неперервності $\sigma_2(\Lambda, \Phi)$ існує пара $(\Lambda, \Phi) \in \mathcal{K}_1$, така що друге власне значення (4.1.16) є меншим 1. Іншими словами, друге власне значення задачі

$$-\Delta v - \Lambda e^{\Phi} v = \sigma v \quad \text{в } B_R, \quad v = 0 \quad \text{на } \partial B_R \tag{4.1.38}$$

є від'ємним. Тоді, згідно з Твердженням 2 в [194], маємо

$$\Lambda \int_0^R e^{\Phi} rdr \geq 4.$$

Припустимо від супротивного, що првава частина (4.1.31) є більшою або рівною лівій частині, тоді з огляду на еквівалентне формулювання (4.1.32) умови (4.1.31), знаходимо

$$R\Phi'(R) + \frac{1}{2}\left(R\Phi'(R)\right)^2 + \int_0^R \Phi^2(r) rdr < 0, \tag{4.1.39}$$

звідки

$$R\Phi'(R) > -2 \quad \text{і} \quad \int_0^R \Phi^2(r) rdr \leq 1/2. \tag{4.1.40}$$

Помножимо (4.1.12) на r і проінтегруємо:

$$\Lambda \int_0^R e^{\Phi} rdr = \int_0^R \Phi\, rdr - R\Phi'(R). \tag{4.1.41}$$

Тепер скомбінуємо (4.1.41) з (4.1.39) і першою нерівністю з (4.1.40), в результаті отримуємо

$$\int_0^R \Phi\, r dr > 2. \tag{4.1.42}$$

Скористуємось нерівністю Коші-Шварца, тоді, з огляду на другу нерівність в (4.1.40), знаходимо

$$\int_0^R \Phi\, r dr \leq \frac{R}{\sqrt{2}} \left(\int_0^R \Phi\, r dr \right)^{1/2} \leq \frac{R}{2}. \tag{4.1.43}$$

Таким чином, (4.1.42) і (4.1.43) дають оцінку знизу на радіус, $R > 4$, і Лему доведено для $R \leq 4$.

Випадок 2: $R \geq 4$. Зазначимо, що для максимального значення Λ, Λ_0, має місце оцінка $\Lambda_0 \geq 1/e$. Дійсно, розглянемо задачу Коші

$$-q'' - \frac{1}{r} q' + q = e^{q-1}, \quad r > 0, \qquad q(0) = A, q'(0) = 0. \tag{4.1.44}$$

Значення $q(R)$ нерерервно міняється від 1 до $-\infty$ коли A зростає від 1 до $+\infty$. Отже існує $A > 1$, таке що $\Phi = q$ є розв'язком (4.1.12)–(4.1.13). Розглянемо тепер мінімальний розв'язок Φ задачі (4.1.12)–(4.1.13) з $\Lambda = 1/e$ і введемо функцію w яка є розв'язком допоміжної задачі

$$-w'' - \frac{1}{r} w' + w = (w+1)/e, \quad r > 0, \qquad w'(0) = w(R) = 0. \tag{4.1.45}$$

Оскільки w є додатнім розв'язком задачі (4.1.12)–(4.1.13), маємо

$$\Phi \geq w \quad \text{для} \ \ r < R.$$

Таким чином, для доведення нерівності

$$R\Phi'(R) + \frac{1}{2} \left(R\Phi'(R) \right)^2 + \int_0^R \Phi^2(r) r dr \geq 0, \tag{4.1.46}$$

достатньо показати, що

$$\int_0^R w^2(r)\, r dr \geq 1/2. \tag{4.1.47}$$

Для розв'язку w задачі (4.1.45) маємо явну формулу

$$w(r) = \frac{1}{e-1}\left(1 - \frac{I_0(\theta r)}{I_0(\theta R)}\right),$$

де $\theta = \sqrt{1 - 1/e}$, і I_0 – модифікована функція Бесселя першого роду. Оскільки

$$\begin{aligned} J(R) : &= \int_0^R w^2\, r dr \\ &= \frac{1}{(e-1)^2}\left\{\frac{R^2}{2} - 2R\frac{I_1(\theta R)}{\theta I_0(\theta R)} + \frac{R^2}{2I_0(\theta R)^2}\left(I_0(\theta R)^2 - I_1(\theta R)^2\right),\right\} \end{aligned}$$

зростає по R і

$$J(4) = 0.78... > 1/2,$$

нерівність (4.1.47) є вірною для $R \geq 4$, що доводить (4.1.46). Це завершує доведення Леми 4.1.6. □

Наслідок 4.1.7. *Існує пара* $(\Lambda_0, \Phi_0) \in \mathcal{A}_1$, *яка задовольняє необхідну умову біфуркації біжучих волн* (4.1.30) *і така що в довільному околі* (Λ_0, Φ_0) *існують* $(\Lambda_\pm, \Phi_\pm) \in \mathcal{A}_1$, *такі що*

$$R\Phi_-'(R) < \Lambda_- \int_0^R e^{\Phi_-(r)}\Phi_-'(r) r^2 dr, \quad R\Phi_+'(R) > \Lambda_+ \int_0^R e^{\Phi_+(r)}\Phi_+'(r) r^2 dr \tag{4.1.48}$$

Доведення. Результат випливає з Леми 4.1.6 завдяки аналітичності і звя'зності кривої $\mathcal{A}_1$. □

4.1.3 Спектральний аналіз лінеарізованого оператора

Для побудови розвя'зків задачі (4.0.9)–(4.0.10) необхідно вивчити властивості лінеарізованого оператора для радіально симетричнох розвя'зків. Розглянемо спектральні задачі

$$-\Delta w + w - \Lambda e^{\Phi} w = \sigma w \quad \text{в } B_R, \qquad w = 0 \quad \text{на } \partial B_R, \tag{4.1.49}$$

де (Λ, Φ) – пара, що задовольняє (4.1.12)–(4.1.13).

Твердження 4.1.8. *Для всих* $n, l = 1, 2, \ldots$, l*-те власне значення* σ_{nl} *для Фур'е мод* $w_{nl}(r)\cos n\varphi$ *і* $w_{nl}(r)\sin n\varphi$,

$$-\frac{1}{r}(rw'_{nl})' + \frac{n^2}{r^2}w_{nl} + w_{nl} - \Lambda e^{\Phi}w_{nl} = \sigma_{nl}w_{nl},\ 0 < r < R,\ w_{nl}(0) = w_{nl}(R) = 0, \tag{4.1.50}$$

є додатним, $\sigma_{nl} > 0$.

Доведення. Для кожного $\delta > 0$ і кожного розв'язку (Λ, Φ) задачі (4.1.12)-(4.1.13), функція $\Theta_\delta : r \mapsto \delta - \Phi'(r)$ є строго додатною і вона задовольняє (by differentiating (4.1.12))

$$-\frac{1}{r}\left(r\Theta'_\delta\right)' + \left(1 + \frac{1}{r^2} - \Lambda e^{\Phi}\right)\Theta_\delta = \left(1 + \frac{1}{r^2} - \Lambda e^{\Phi}\right)\delta, \quad 0 < r < R \tag{4.1.51}$$

або, для кожного заданого n,

$$-\frac{1}{r}\left(r\Theta'_\delta\right)' + \left(1 + \frac{n^2}{r^2} - \Lambda e^{\Phi}\right)\Theta_\delta = \left(1 + \frac{n^2}{r^2} - \Lambda e^{\Phi}\right)\delta - \frac{n^2-1}{r^2}\Phi', \quad 0 < r < R. \tag{4.1.52}$$

Помножимо (4.1.50) на rw_{nl} і проінтегруємо від 0 до R:

$$\int_0^R (w'_{nl})^2 r\,dr + \int_0^R \Upsilon_n w_{nl}^2 r\,dr = \sigma_{nl}\int_0^R w_{nl}^2 r\,dr \tag{4.1.53}$$

де

$$\Upsilon_n = 1 + \frac{n^2}{r^2} - \Lambda e^{\Phi}.$$

Пердставимо w_{nl} як $\Theta_\delta \tilde{w}_{nl,\delta}$, потім помножимо (4.1.52) на $\Theta_\delta^2 \tilde{w}_{nl,\delta}^2 r$, і проінтегруємо від 0 до R. Скористаємось інтегруванням частинами в першому члені, тоді маємо

$$\int_0^R r\Theta'_\delta(\Theta_\delta \tilde{w}_{nl,\delta}^2)'\,dr + \int_0^R \Upsilon_n(w_{nl,\delta}^2 - \delta\Theta_\delta \tilde{w}_{nl,\delta}^2) r\,dr = -\int_0^R \frac{n^2-1}{r}\Phi'\Theta_\delta \tilde{w}_{nl,\delta}^2\,dr. \tag{4.1.54}$$

Віднімемо (4.1.54) від (4.1.53), в результаті отримуємо

$$\sigma_{nl}\int_0^R w_{nl}^2 r\,dr = \int_0^R (\Theta_\delta \tilde{w}'_{nl,\delta})^2\,rdr + \int_0^R \left(\Upsilon_n\delta - \frac{n^2-1}{r^2}\Phi'\right)\Theta_\delta \tilde{w}_{nl,\delta}^2\,rdr. \tag{4.1.55}$$

Перейдемо тепер до граиці $\delta \to +0$ в останньому рівнянні. Помітимо, що $\liminf$ при $\delta \to +0$ для останнього члена в (4.1.55) є невід'ємним, звідки $\sigma_{nl} \geq 0$ якщо $\sigma_{ln} = 0$, тоді $w_{nl} = -\gamma\Phi'(r)$ де γ – деяка постійна. В останньому випадку $w_{nl}(R) \neq 0$, протиріччя. Таким чином $\sigma_{nl} > 0$. □

Наслідок 4.1.9. *Для кожної функції $f \in H^{1/2}(\partial B_R)$, що задовольняє*

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(R,\varphi)\,d\varphi = 0,$$

задача

$$-\Delta g + g - \Lambda e^{\Phi} g = 0 \quad \textit{in } B_R, \qquad g = f \quad \textit{на } \partial B_R \tag{4.1.56}$$

має хоча б один розв'язок. Більш того, рівно один розв'язок є ортогональним в $L^2(B_R)$ всим радіально симетричним функціям $w(r)$.

Доведення. Введемо до розгляду розв'язок $\tilde{g}$ задачі

$$-\Delta\tilde{g} = 0 \quad \text{в } B_R, \quad \tilde{g} = f \quad \text{на } \partial B_R, \tag{4.1.57}$$

і помітимо, що $\tilde{g} = \sum_{n=1}^{\infty} r^n(a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi)$. Тоді розв'язок задачі

$$-\Delta(g-\tilde{g}) + (g-\tilde{g}) - \Lambda e^{\Phi}(g-\tilde{g}) = \Lambda e^{\Phi}\tilde{g} - \tilde{g} \quad \text{в } B_R, \quad g-\tilde{g} = 0 \quad \text{на } \partial B_R$$

можна знайти розділенням змінних, з використанням Твердження 4.1.8. □

4.1.4 Існування розв'язків задачі (4.0.9)–(4.0.10)

Зафіксуємо $R > 0$ і стаціонарний розв'язок $(\Lambda_0, \Phi_0) \in \mathcal{A}$. У цьму Підрозділі, користуючись методами, що базуються на Теоремі про неявну функцію, див., наприклад, Розділ I в [120], конструюються розв'язки (4.0.9)–(4.0.10) в областях $\Omega = \Omega_\eta$:

$$\Omega_\eta = \{(x,y) = r(\cos\varphi, \sin\varphi) \,|\, 0 \leq r < R + \eta(\varphi),\ -\pi \leq \varphi < \pi\} \tag{4.1.58}$$

для достатньо малих $\eta \in C^{2,\gamma}(\mathbb{S}^1)$, $0 < \gamma < 1$, і малих, але не обов'язково швидкостей V. В подальшому, трошки зловживаючи позначення, будемо ототожнювати кут $\varphi \in [-\pi, \pi)$ з відповідною точкою $(\cos\varphi, \sin\varphi)$ на одиничному колі $\mathbb{S}^1$.

Для того щоб звести аналіз до фіксованої області введемо відображення $Q_\eta : \Omega_\eta \to B_R$, яке в полярних координатах має вигляд

$$(r, \varphi) \mapsto Q_\eta(r, \varphi) := (r - \chi(r)\eta(\varphi), \varphi), \tag{4.1.59}$$

де $\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$ – зрізаюча функція, така що $\chi(r) = 0$ коли $r < R/3$ і $\chi(r) = 1$ коли $r > R/2$. Очевидно, (4.1.59) задає C^2-дифеоморфізм якщо функція η і її перша і друга похідні є достатньо малими.

Серед збурень Ω_η виділимо ті, що зберігають площу,

$$\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (R + \eta)^2 \, d\varphi = \pi R^2, \tag{4.1.60}$$

або в лініаризованому наближенні

$$\int_{-\pi}^{\pi} \eta(\varphi) \, d\varphi = 0.$$

У наступному результаті встановлюється існування розв'язків задачі (4.0.9)–(4.0.10).

Твердження 4.1.10. *Інує $\varepsilon > 0$, таке що для всих $(V, \eta, z) \in \mathbb{R} \times C^{2,\gamma}(\mathbb{S}^1) \times \mathbb{R}$ в ε-околі U_ε нуля, задача* (4.0.9)–(4.0.10) *має розв'язок $\Lambda = \Lambda(V, \eta, z)$, $S = S(x, y, V, \eta, z)$ в області $\Omega = \Omega_\eta$ (given by* (4.1.58)*). Тут z – допоміжний дійсний параметр (який буде введено в доведенні), такий що*

$$z \mapsto (\Lambda(0, 0, z), S(\,\cdot\,, \,\cdot\,, 0, 0, z)) \in \mathcal{A}_1 \quad \textit{для } |z| < \varepsilon \tag{4.1.61}$$

визначає аналітичну параметрізацію кривої $\mathcal{A}_1$ в околі (Λ_0, Φ_0). Причому, відображення

$$(V, \eta, z) \mapsto \Lambda(V, \eta, z), \quad (V, \eta, z) \mapsto P(\,\cdot\,, V, \eta, z) := \frac{\partial S}{\partial \nu}(Q_\eta^{-1}(R\,\cdot\,), V, \eta, z)\big|_{\partial B_R}$$

належать до класів $C^1(U_\varepsilon;\mathbb{R})$ *і* $C^1(U_\varepsilon;C^{1,\gamma}(\mathbb{S}^1))$*, відповідно. Похідні* $\partial_V\Lambda$ *і* $\partial_V P$ *в* $(0,0,z)=0$ *мають вигляд*

$$\partial_V\Lambda = 0, \quad \partial_V P = \frac{\partial\phi_1}{\partial\nu}, \tag{4.1.62}$$

де ϕ_1 *– єдиний, як описано в Наслідку 4.1.9, розв'язок задачі*

$$-\Delta\phi_1 + \phi_1 = \Lambda(z)e^{\Phi(r,z)}(\phi_1 - r\cos\varphi) \quad \text{в } B_R, \quad \phi_1 = 0 \quad \text{на } \partial B_R, \tag{4.1.63}$$

з $\Lambda(z) := \Lambda(0,0,z)$ *і* $\Phi(r,z) := S(x,y,0,0,z)$*. Похідні* $\partial_\eta\Lambda$ *і* $\partial_\eta P$ *at* $(0,0,z)$ *задовольняють*

$$\langle\partial_\eta\Lambda,\rho\rangle = 0, \qquad \langle\partial_\eta P,\rho\rangle = \partial^2_{rr}\Phi(R,z)\rho + \frac{\partial\phi_2}{\partial\nu} \tag{4.1.64}$$

для ρ*, таких що* $\int_{-\pi}^{\pi}\rho(\varphi)\,d\varphi = 0$*, де* ϕ_2 *– єдиний, як описано в Наслідку 4.1.9, розв'язок задачі*

$$-\Delta\phi_2 + \phi_2 = \Lambda(z)e^{\Phi(r,z)}\phi_2 \quad \text{в } B_R, \quad \phi_2 = -\Phi_0'(R)\rho \quad \text{на } \partial B_R. \tag{4.1.65}$$

Доведення. Скористаємось дифеоморфизмом Q_η (що визначено формулою(4.1.59)), тоді рівняння (4.0.9) перписується у вигляді наступного рівняння для функції $\tilde S = S\circ Q_\eta^{-1}$:

$$\begin{aligned} 0 \;=\; F(\Lambda,\tilde S,V,\rho,z) \;:=& -\Delta\tilde S + \tilde S - \Lambda e^{\tilde S - V\tilde r\cos\varphi} + \left((\chi'\eta)^2 - 2\chi'\eta + (\chi\eta')^2/\tilde r^2\right)\tilde S_{rr} \\ &+ \left(1/r - 1/\tilde r + \chi'\eta/\tilde r + \chi''\eta + \chi\eta''/\tilde r^2\right)\tilde S_r \\ &+ \chi\eta'\tilde S_{r\varphi}/\tilde r^2 + \tilde S_{\varphi\varphi}(1/r^2 - 1/\tilde r^2), \qquad 0\le r<R, \end{aligned} \tag{4.1.66}$$

де $\tilde r = |Q_\eta^{-1}(r\cos\varphi, r\sin\varphi)|$. Оператор

$$\begin{aligned} F:\,\mathbb{R}\times C^{2,\gamma}(B_R)\cap C_0(\overline{B}_R)\times\mathbb{R}\times C^{2,\gamma}(\mathbb{S}^1)\times\mathbb{R} \to\;& C^{0,\gamma}(B_R) \\ (\Lambda,\,\tilde S,\,V,\,\eta,z) \mapsto\;& F(\Lambda,\tilde S,V,\eta,z) \end{aligned}$$

є неперервно диференційовним за Фреше відносно $\tilde S$ у деякому околі $(\Lambda_0,\Phi_0,0,0,0)$, і часткова похідна $\partial_{\tilde S}F$ в $(\Lambda_0,\Phi_0,0,0,0)$ має вигляд

$$\langle\partial_{\tilde S}F(\Lambda_0,\Phi_0,0,0),w\rangle = -\Delta w + w - \Lambda_0 e^{\Phi_0}w.$$

Це означає, що якщо задача

$$-\Delta w + w - \Lambda_0 e^{\Phi_0} w = 0 \quad \text{в } B_R, \qquad w = 0 \quad \text{на } \partial B_R \tag{4.1.67}$$

має тільки тривіальний розв'язок $w = 0$, тоді $F_{\tilde{S}}(\Lambda_0, \Phi_0, 0, 0) : C^{2,\gamma}(B_R) \cap C_0(\overline{B}_R) \to C^{0,\gamma}(B_R)$ є ізоморфізмом згідно з Теоремою про неявну функцію, і рівняння (4.1.66) можна розв'язати відносно $\tilde{S}$ за допомогою неперервного відображення $(V, \rho, z) \mapsto \tilde{S}(\,\cdot\,, \,\cdot\,, V, \rho, z)$ в околі $(\Lambda_0, 0, 0)$, де параметр z визначається формулою $z := \Lambda - \Lambda_0$ (або $\Lambda(z) = \Lambda_0 + z$).

У випадку коли (4.1.67) має ненульовий розв'язок w, з доведення Теореми 4.1.3 випливає, що не існує інших лінійно незалежних розв'язків і w задовольняє умову невиродженості

$$\int_{B_R} e^{\Phi_0} w dxdy \neq 0. \tag{4.1.68}$$

Тоді шукаємо $\tilde{S}$ у вигляді $\tilde{S} = \Phi_0 + zw + \phi$ з новою невідомою функцією ϕ ортогональною (в $L^2(B_R)$) до w, тобто

$$\phi \in Y = \left\{ \phi \in C^{2,\gamma}(B_R) \cap C_0(\overline{B}_R) \;\Big|\; \int_{B_R} \phi w \, dxdy = 0 \right\}.$$

Задачу (4.1.66) можна записати як $G(\Lambda, \phi, V, \eta, z) := F(\Lambda, \Phi_0 + zw + \phi, V, \eta, z) = 0$. Будемо розгладати z а також V і ρ як параметри, і помітимо, що оператор

$$G : \mathbb{R} \times Y \ni (\Lambda, \phi) \;\mapsto\; G(\Lambda, \phi, V, \eta, z) \in C^{0,\gamma}(B_R).$$

має неперервну похідну Фреше $\partial_{(\Lambda,\phi)} G$ чиє значення в $(\Lambda_0, 0, 0, 0, 0) =: p_0$ визначається формулою

$$\langle \partial_{(\Lambda,\phi)} G(p_0), (\zeta, w) \rangle = -\Delta w + w - \Lambda_0 e^{\Phi_0} w - \zeta e^{\Phi_0},$$

причому $\partial_{(\Lambda,\phi)} G(p_0)$ є бієктивне відображенням $\mathbb{R} \times Y$ на $C^{0,\gamma}(B_R)$. Дійсно, для довільної функції $f \in C^{0,\gamma}(B_R)$, існує єдиний розв'язок $w \in Y$ задачі

$$-\Delta w + w - \Lambda_0 e^{\Phi_0} w - \zeta e^{\Phi_0} = f \quad \text{в } B_R, \qquad w = 0 \quad \text{на } \partial B_R \tag{4.1.69}$$

тоді і тільки тоді коли $\zeta = -\int_{B_R} fw\,dxdy/\int_{B_R} e^{\Phi_0}w\,dxdy$, тобто $\forall f \in C^{0,\gamma}(B_R)$ існує єдина пара $(\zeta, v) \in \mathbb{R}\times Y$, така що виконується (4.1.69). Крім того, оба оператори $\partial_{(\Lambda,\phi)}G(p_0)$ і обернений $(\partial_{(\Lambda,\phi)}G(p_0))^{-1}$ є неперервними: для $\partial_{(\Lambda,\phi)}G(p_0)$ це є очевидним а непервність $(\partial_{(\Lambda,\phi)}G(p_0))^{-1}$ випливає з еліптичних оцінок (див., наприклад, [95]). Таким чином існування $\Lambda(z, V, \eta)$ і $\tilde{S}(\,\cdot\,,\,\cdot\,, z, V, \eta)$ випливає з Теореми про неявну функцію.

Для доведення (4.1.61) комплексифікуємо конструкцію дозволяючи z приймати комплексні значення $z \in \mathbb{C}$. Візьмемо похідну $\partial/\partial\overline{z}$ в рівнянні (4.1.66): $h := \partial_{\overline{z}}\tilde{S}\big|_{(V,\eta)=0}$ є розв'язком

$$-\Delta h + h - \Lambda e^{\Phi(r,z)}h = \partial_{\overline{z}}\Lambda\, e^{\Phi(r,z)} \quad \text{в } B_R, \qquad h = 0 \quad \text{на } \partial B_R, \tag{4.1.70}$$

де $\Lambda = \Lambda(0, 0, z)$ і $\Phi(r, z) = \tilde{S}(x, y, 0, 0, z)$. Нагадаємо, що якщо (4.1.67) не має нетривіальних розв'язків, тоді $\Lambda = \Lambda_0 + z$. Отже $\partial_{\overline{z}}\Lambda = 0$, відкіля випливає, що $h = 0$ для достатньо малих $|z|$.

Припустимо тепер, що існує нетривіальний розв'язок w задачі (4.1.67), який задовольняє (4.1.68), і припкустимо, що або $h \neq 0$ або $\zeta := \partial_{\overline{z}}\Lambda \neq 0$. Тоді можна номалізувати пару (ζ, h) таким чином , що або $\zeta = 1$ або $\zeta = 0$ і $\|h\|_{C^{2,\gamma}(B_R)} = 1$. У випадку коли $\zeta = 1$ для функції h має місце апріорна оцінка $\|h\|_{C^{2,\gamma}(B_R)} \le C$ (якщо $|z|$ є достатньо малим) завдяки тому факт, що $h \in Y$. Це дозволя перейти до границі $|z| \to 0$ (для деякої підпослідовності), в результаті маємо пару $(\zeta, h) \in \mathbb{C} \times Y$, що задовольняє

$$-\Delta h + h - \Lambda e^{\Phi_0}h = \zeta e^{\Phi_0} \quad \text{в } B_R, \qquad h = 0 \quad \text{на } \partial B_R.$$

Це протиріччя завершує доведення аналітичності.

Для обчислення похідних $\partial_V\Lambda$ і $\partial_V P$ в $(0, 0, z)$ лінерізуємо (4.1.66) відносно V, в результаті одержуємо, що $H_1 := \partial_V\tilde{S}$ задовольняє

$$-\Delta H_1 + H_1 - \Lambda e^{\Phi(r,z)}(H_1 - r\cos\varphi) = \partial_V\Lambda\, e^{\Phi(r,z)} \quad \text{в } B_R, \qquad H_1 = 0 \quad \text{на } \partial B_R. \tag{4.1.71}$$

Віднімемо від H_1 розв'язок ϕ_1 задачі (4.1.63), в результаті маємо наступну задачу для $\partial_V\Lambda$ і $\tilde{H}_1 := H_1 - \phi_1$:

$$-\Delta\tilde{H}_1 + \tilde{H}_1 - \Lambda e^{\Phi(r,z)}\tilde{H}_1 = \partial_V\Lambda\, e^{\Phi(r,z)} \quad \text{in } B_R, \qquad H_1 = 0 \quad \text{on } \partial B_R. \quad (4.1.72)$$

Такі самі міркування як для (4.1.70) показують, що задача (4.1.72) має тільки нульовий розв'язок для достатньо малих $|z|$ (нагадаємо, що функція ϕ_1 є ортогональною в $L^2(B_R)$ до всих радіально симетричних функцій $w(r)$).

Насамкінець, обчислимо $\langle\partial_\eta\Lambda, \rho\rangle$ і $H_2 := \langle\partial_\eta\tilde{S}, \eta\rangle$ at $(0, 0, z)$. Лінеарізуємо (4.1.66) відносно η і знайдемо, що H_2 задовольняє

$$-\Delta H_2 + H_2 - \Lambda e^\Phi H_2 + 2\chi'\rho\,\partial^2_{rr}\Phi + \left(\chi\rho/r^2 + \chi'\rho/r + \chi''\rho + \chi\rho''/r^2\right)\partial_r\Phi = \langle\partial_\eta\Lambda, \rho\rangle e^\Phi \quad (4.1.73)$$

в B_R з крайовою умовою $H_2 = 0$ на ∂B_R. Зазначимо, що допоміжна функція

$$H_3(r, \varphi) := \chi(r)\rho(\varphi)\partial_r\Phi(r, z) + \phi_2(r, \varphi)$$

задовольняє

$$-\Delta H_3 + H_3 - \Lambda e^\Phi H_3 + 2\chi'\rho\,\partial^2_{rr}\Phi + \left(\chi\rho/r^2 + \chi'\rho/r + \chi''\rho + \chi\rho''/r^2\right)\partial_r\Phi = 0 \quad (4.1.74)$$

в B_R. Віднімемо (4.1.74) від (4.1.73), маємо

$$-\Delta(H_2 - H_3) + (H_2 - H_3) - \Lambda e^\Phi(H_2 - H_3) = \langle\partial_\eta\Lambda, \rho\rangle e^\Phi \quad \text{в } B_R, \quad H_2 = H_3 \quad \text{на } \partial B_R. \quad (4.1.75)$$

Ця задача має тільки тривіальні розв'язки для достатньо малих $|z|$, тобто $\langle\partial_\eta\Lambda, \rho\rangle = 0$ і $\frac{\partial}{\partial\nu}H_2 = \rho\partial^2_{rr}\Phi(R, z) + \partial_r\phi_2(R, \varphi)$. $\square$

4.1.5 Біфуркація розв'язків типу біжних хвиль

Розглянемо пару $(\Lambda_0, \Phi_0) \in \mathcal{A}_1$ яку описано в Наслідку 4.1.7. Згідно з Твердженням 4.1.10 існує сім'я розв'язків $\Lambda = \Lambda(V, \eta, z)$, $S = S(x, y, V, \eta, z)$ задачі (4.0.9)–(4.0.10) в областях $\Omega = \Omega_\eta$ (визначених в (4.1.58)). Ці розв'язки визначені в ε-околі ($\varepsilon > 0$) точки $(V, \eta, z) = (0, 0, 0)$ простру параметрів $\mathbb{R} \times C^{2,\gamma}(\mathbb{S}^1) \times \mathbb{R}$

і вони гладко залежать від параметрів. Таким чином для $V \neq 0$, задача (4.0.9)–(4.0.11) зводиться до знаходження ρ, таких що $S|_{\eta=\rho}$ задовольняє (4.0.11) на $\partial\Omega = \partial\Omega_\rho$. Параметр z відіграє роль біфуркаційного параметру.

Зведемо тепер задачу до знаходження нерухомої точки компактного оператора. Обчислимо кривизну κ межі $\partial\Omega_\rho$ і нормальний вектор в полярних координатах, в результаті (4.0.11) переписується у вигляді

$$V\frac{(R+\rho)cos\varphi + \rho' sin\varphi}{\sqrt{(\rho')^2 + (R+\rho)^2}} = P - \beta\frac{(R+\rho)^2 + 2(\rho')^2 - (R+\rho)\rho''}{((\rho')^2 + (R+\rho)^2)^{3/2}} + \lambda, \qquad (4.1.76)$$

де $P = P(\varphi, V, \rho, z) = \frac{\partial S}{\partial \nu}(Q_\rho^{-1}(R,\varphi), V, \rho, z)$ визначено у Твердженні 4.1.10. Введемо позначення $H := \sqrt{(\rho')^2 + (R+\rho)^2}$, тоді (4.1.76) набуває вигляд

$$\frac{(R+\rho)\rho'' - (\rho')^2}{(\rho')^2 + (R+\rho)^2} = \frac{1}{\beta}\Big(V(R+\rho)cos\varphi + V\rho' sin\varphi - H\Big(P+\lambda\Big)\Big) + 1,$$

або

$$\frac{d}{d\varphi}\left(\arctan\frac{\rho'}{R+\rho}\right) = \frac{1}{\beta}\Big(V(R+\rho)cos\varphi + V\rho' sin\varphi - H\Big(P+\lambda\Big)\Big) + 1. \quad (4.1.77)$$

Відсіля випливає, що сталу λ можна визначити формулою

$$\lambda = \frac{1}{\int_{-\pi}^{\pi} H\,\mathrm{d}\varphi}\Big(\int_{-\pi}^{\pi}(V(R+\rho)cos\varphi + V\rho' sin\varphi - H\,P)\,d\varphi + 2\pi\beta\Big). \qquad (4.1.78)$$

На невідому область Ω_ρ накладемо три додаткових умови. Перше, будемо розглядати тільки області Ω_ρ симетричні відносно x-вісі (це підказує симетрія задачі, рух відбуваєтья у напрямку x-вісі), тобто будемо вимагати щоб ρ була парною функцією φ. Друге, щоб позбавитись зсунених (в x-напрямку) копій розв'язків, зафіксуємо центр мас Ω_ρ в началі координат:

$$\int_{\Omega_\rho} x\,dxdy = 0, \quad \text{або в полярних координатах} \quad \frac{1}{3}\int_{-\pi}^{\pi}(R+\rho)^3\cos\varphi\,d\varphi = 0. \qquad (4.1.79)$$

Третє, будемо накладати лінеарізовану умову збереження площи (4.1.60),

$$\int_{-\pi}^{\pi}\rho(\varphi)\,d\varphi = 0. \qquad (4.1.80)$$

З (4.1.77), приймаючи до уваги той факт, що $\rho'(0) = 0$ (ρ є парною) і (4.1.80), отримуємо

$$\rho = K(\rho, V; z) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K(\rho, V; z)\, d\varphi, \tag{4.1.81}$$

де

$$K(\rho,V;z) := \int_0^{\varphi}(R+\rho) \times \tan\left(\psi_1 + \frac{1}{\beta}\int_0^{\psi_1}\Big(V(R+\rho)cos\psi_2 + V\rho' sin\psi_2 - H\Big(P+\lambda\Big)\Big)d\psi_2\right)d\psi_1$$

зі сталою λ визначеною формулою (4.1.78). Таким чином задачу (4.0.9)–(4.0.11) зведено до задачі знаходження нерухомої точки (4.1.81) в просторі

$$\rho \in \mathcal{H} = \left\{\rho \in C^{2,\gamma}(\mathbb{S}^1) \,\Big|\, \text{функція } \rho \text{ є парною і задовольняє (4.1.80)}\right\}. \tag{4.1.82}$$

В наступній Лемі показано, що оператор в правій частині (4.1.81) діє з простіру $\mathcal{H}$ в себе.

Лема 4.1.11. *Маємо,*

$$\left(K(\rho, V; z) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K(\rho, V; z)\, d\varphi\right) \in \mathcal{H} \quad \text{якщо } \rho \in \mathcal{H}. \tag{4.1.83}$$

Доведення. Єдиним неочевидним фактом є твердження про те, що оператор визначений в правій частині (4.1.83) відображує парні функції в парні. Цей факт є наслідком симетрії розв'язків (4.0.9)–(4.0.10) відносно x-вісі в областях $\Omega = \Omega_\rho$ з такою симетрією. Остання властивість випливає з єдиності розв'язків Λ і S, що побудовано в Твердженні 4.1.10, також вона є наслідком загального результата [94] про симетрію розв'язків напівлінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними. $\square$

Будемо також розглядати швидкість V як невідому, доповнюючи (4.1.81) рівнянням

$$V = V + \frac{1}{3}\int_{-\pi}^{\pi}(R+\rho)^3 \cos\varphi\, d\varphi, \tag{4.1.84}$$

яке знайдено додаванням (4.1.79) до тавтологічної рівності $V = V$. Таким чином маємо задачу на нерухому точку:

$$(\rho, V) = (\overline{K}_\rho(\rho, V; z), \overline{K}_V(\rho, V; z)) \quad \text{in } \mathcal{H} \times \mathbb{R}, \tag{4.1.85}$$

де

$$\begin{aligned} \overline{K}_\rho(\rho, V; z) \ &= \ K(\rho, V; z) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K(\rho, V; z)\, d\varphi, \\ \overline{K}_V(\rho, V; z) \ &= \ V + \frac{1}{3} \int_{-\pi}^{\pi} (R + \rho)^3 \cos\varphi \, d\varphi. \end{aligned}$$

Зазначимо, що $\overline{K}$ є компактнмим оператором класу C^1. Це дозволяє застосувати теорію Лере-Шаудера про степінь відображення. Конкретніше, розв'язки типу біжної хвилі буде знайдено як нову вітку розв'язків, що виникає при $z = 0$, де локальний індекс Лере-Шаудера зазнає стрибок.

Нагадаємо, що локальний індекс Лере-Шаудера $I - \overline{K}(\,\cdot\,; z)$ (де I позначає тотожний оператор) в нулі визначається за допомогою лінеарізованого оператора $\overline{L}(\,\cdot\,)$ для $\overline{K}(\,\cdot\,; z)$ формулою

$$\mathrm{ind}_{LS}(I - \overline{K}(\,\cdot\,; z), 0) = (-1)^{N(z)},$$

де $N(z)$ – число власних значень $\overline{L}(\,\cdot\,; z)$ в $(1, +\infty)$, з (алгебраїчними) кратностями. Лінеарізований оператор $\overline{L}(\,\cdot\,; z) = (L_\rho(\,\cdot\,; z), L_V(\,\cdot\,; z))$ визначається формулою

$$\begin{aligned} &L_\rho(\rho, V; z) + C \qquad (4.1.86) \\ &= \frac{R^2}{\beta} \int_0^{\varphi} \int_0^{\psi_1} \Big(V \cos\psi_2 - V \partial_V P(\psi_2, 0, 0, z) - \langle \partial_\eta P(\psi_2, 0, 0, z), \rho \rangle - \frac{\beta\rho}{R^2} \Big)\, \mathrm{d}\psi_2\, \mathrm{d}\psi_1, \\ &L_V(\rho, V; z) = V + R^2 \int_{-\pi}^{\pi} \rho \cos\varphi \, d\varphi, \qquad (4.1.87) \end{aligned}$$

де C – середнє значення правої частини (4.1.86).

Лема 4.1.12. *Власні значення лінеаризованого оператору $\overline{L}(\,\cdot\,; z)$ – пара чисел $E = E_{0,1}(z)$ що розв'язує рівняння*

$$\frac{\pi}{R\Phi'(R; z)} \int_0^R \Phi'(r; z)\, r^2 dr - \pi = \frac{\beta(E-1)^2}{R^4} \tag{4.1.88}$$

і числа $E_l(z)$, $l = 2, 3, \dots$, *задані рівністю*

$$E_l(z) = \frac{1}{l^2} + \frac{R^2 h_l'(R;z)}{\beta l^2} + \frac{R^2 \Phi''(R;z)}{\beta l^2}, \tag{4.1.89}$$

де $h_l(r;z)$ *– розв'язки задач* (4.1.91).

Доведення. Розглянемо власне значення E, що відповідає власному вектору (V, ρ) з $V = 1$. Тоді маємо

$$\int_{-\pi}^{\pi} \rho \cos\varphi \, \mathrm{d}\varphi = (E-1)/R^2, \tag{4.1.90}$$

Продиференціюємо рівняння $L_\rho(\rho, 1; z) = E\rho$ два рази відносно φ:

$$\cos\varphi - \partial_V P(\varphi, 0, 0, z) - \langle \partial_\eta P(\varphi, 0, 0, z), \rho \rangle - \frac{\beta\rho}{R^2} = \frac{\beta E}{R^2}\rho'',$$

помножимо на $\cos\varphi$ і проінтегруємо від $-\pi$ до π:

$$\pi - \int_{-\pi}^{\pi} (\partial_V P(\varphi, 0, 0, z) + \langle \partial_\eta P(\varphi, 0, 0, z), \rho \rangle) \cos\varphi d\varphi = -\frac{\beta(E-1)^2}{R^4}.$$

Похідні $\partial_V P(\varphi, 0, 0, z)$ і $\langle \partial_\eta P(\varphi, 0, 0, z), \rho \rangle$ визначено в Твердженні 4.1.10 через розв'язки задач (4.1.63) і (4.1.65). Інтеграл в прівій частині можна обчислити помноживши (4.1.63) і (4.1.65) на $\Phi'(r) r \cos\varphi$, і проінтегрувавши результати по B_R:

$$\int_{-\pi}^{\pi} (\partial_V P(\varphi, 0, 0, z) + \langle \partial_\eta P(\varphi, 0, 0, z), \rho \rangle) \cos\varphi d\varphi = \frac{\pi}{R\Phi'(R;z)} \int_0^R \Phi'(r;z)\, r^2 dr.$$

Тким чином розв'язки (4.1.88) є власними значеннями, що відповідають власним векторам $(1, \rho_{0,1})$ з $\rho_{0,1} = (E_{0,1} - 1)\cos\varphi/(\pi R^2)$ (див. (4.1.90)) якщо $E_{0,1} \neq 1$. У спеціальному випадку $E_{0,1} = 1$, існує іильки один власний вектор $(1, 0)$ і відповідний узагальнений власний вектор $(0, \cos\varphi/(\pi R^2))$.

Інші власні вектори мають вигляд $(0, \rho)$ з $\rho = \cos l\varphi$, $l = 2, 3, \dots$. Для обчислення відповідних власних значень будемо шукати розв'язки задач (4.1.65) у вигляді $h_l(r)\cos l\varphi$, в результаті мажємо

$$\begin{gathered} -\frac{1}{r}(r h_l'(r))' + \left(\frac{l^2}{r^2} + 1\right) h_l(r) \ = \ \Lambda(z) e^{\Phi(r;z)} h_l(r) \quad 0 < r < R, \\ h_l(0) = 0 \quad h_l(R) = -\Phi'(R;z). \end{gathered} \tag{4.1.91}$$

Користуючись Твердженням 4.1.10 визначимо $\langle \partial_\eta P(\varphi,0,0,z),\rho\rangle = h_l'(r)\cos l\varphi$. Підстановка цих рівностей в рівняння $L_\rho(\rho,0;z) = E\rho$ веде до формули (4.1.89) для власних значень $E = E_l$. □

Припустимо тепер, що ні одне з власних значень (4.1.89) не дорівнює 1 для $z = 0$ ($E_l \neq 1$, $l = 2,3,\dots$), тобто

$$\beta \neq \beta_l \;\equiv\; \frac{R^2}{l^2-1}(h_l'(R;0) + \Phi_0''(R)), \quad l = 2,3,\dots. \tag{4.1.92}$$

Неважко показати, що виняткові значення β_l утворюють послідовність, що збігається до нуля. Більш того, маємо наступний результат.

Лема 4.1.13. *Для власних значень* (4.1.89) *є вірною наступна рівномірна відносно* $-\varepsilon < z < \varepsilon$ *і* $\beta > 0$ *оцінка*

$$E_l \leq C\left(\frac{1}{\beta l} + \frac{1}{l^2}\right), \quad l = 2,3,\dots. \tag{4.1.93}$$

Доведення. Розглянемо функції $\tilde h_{l+l_0} = (r/R)^{l+l_0}$, які задовольняють

$$-\frac{1}{r}(r\tilde h_{l+l_0}'(r))' + \left(\frac{l+l_0}{r}\right)^2 \tilde h_{l+l_0}(r) = 0 \quad 0<r<R, \quad \tilde h_{l+l_0}'(0) = 0,\ \tilde h_{l+l_0}(R) = 1. \tag{4.1.94}$$

Для достатньо великих l_0 функції $h_l(r;z)$, як розв'язки (4.1.91), є суперрозв'язками (4.1.94), отже $h_l(r) \geq -\Phi'(R;z)\tilde h_{l+l_0}(r)$. Це веде до рівномірної оцінки (4.1.93). □

З цієї Леми випливає, що за умови (4.1.92) жодне з власних значень (4.1.89) не дорівнює 1 коли $-\varepsilon_0 \leq z \leq \varepsilon_0$, для деякого $0 < \varepsilon_0 < \varepsilon$. З іншого боку, згідно з Лемою 4.1.6 у довільному околі $z = 0$ існує z, таке що $E_{0,1}(z)$ має ненульову уявну частину і існують інші z, такі що оба числа $E_{0,1}(z)$ є дійсними і найменше з них, скажемо $E_0(z)$, задовольняє $E_0(z) < 1$, проте $E_1(z) > 1$. Це показує , що локальний індекс Лере-Шаудера зазнє стрибок при переході через $z = 0$, звідки випливає наступна Теорема.

Теорема 4.1.14. *Нехай* $(\Lambda_0, \Phi_0) \in \mathcal{A}_1$ *– пара, яку описано в Наслідку 4.1.7. Припустимо, що параметр* β *з* (4.0.8) *задовольняє* $\beta \neq \beta_l$*, де* β_l *визначено в* (4.1.92)*, і нехай* $h_l(r)$ *– розв'язок* (4.1.91) *з* $\Lambda = \Lambda_0$*,* $\Phi = \Phi_0$*. Тоді існує сім'я розв'язків* (4.1.85) *(біжучих хвиль) з* $V \neq 0$*, що виникає (біфуркує) з гілки радіально симетричних стаціонарних розв'язків в* $z = 0$*.*

Зауваження 4.1.15. Оскільки задача (4.1.84)–(4.1.85) є еквівалентною вихідній задачі (4.0.9)-(4.0.11), з Теорема 4.1.14 і Леми 4.1.13 випливає Теорема 4.1.1.

Зауваження 4.1.16. Виняткові значення $\beta = \beta_l$, $l = 2, 3, \dots$ відповідають біфуркаціям нерадіальних стаціонарних розв'язків, див. Підрозділ 4.1.6.

Доведення. Зробимо міркування, що наведено вище, більш точними і детальними. Виберемо додатне число ε_0, таке що ні одне з власних значень (4.1.89) не дорівнює 1 для $-\varepsilon_0 \leq z \leq \varepsilon_0$. З огляду на Наслідок 4.1.7 існують $z_\pm \in [-\varepsilon_0, ve_0]$, такі що лева частина (4.1.88) є від'ємною в z_- і додатною в z_+. Оскільки лінеаризовані оператори $\overline{L}(\,\cdot\,; z_\pm)$ не мають одиничного власного значення, степінь Лере-Шаудера $\deg_{LS}(I - \overline{K}(\,\cdot\,; z_\pm), \overline{U}_\delta, 0)$ є коректно визначеною для кожного δ-околу

$$\overline{U}_\delta = \{(V, \rho) \,|\, |V| < \delta,\, \|\rho\|_{C^{2,\gamma}(\mathbb{S}^1)} < \delta\}$$

нуля в $\mathbb{R} \times C^{2,\gamma}(\mathbb{S}^1)$, $0 < \delta < \varepsilon_1$, для деякого $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon_0/2)$. Більш того,

$$\deg_{LS}(I - \overline{K}(\,\cdot\,; z_\pm), \overline{U}_\delta, 0) = \mathrm{ind}_{LS}(I - \overline{K}(\,\cdot\,; z_\pm), 0) = (-1)^{N(z_\pm)},$$

де $N(z_\pm)$ – число власних значень $\overline{L}(\,\cdot\,; z_\pm)$ в $(1, +\infty)$. Оскільки число власних значень (4.1.89) в $(1, +\infty)$ є однаковим в z_- і z_+, проте для $E_{0,1}$ воно відрізняється на один, маємо

$$\deg_{LS}(I - \overline{K}(\,\cdot\,; z_-), \overline{U}_\delta, 0) \neq \deg_{LS}(I - \overline{K}(\,\cdot\,; z_+), \overline{U}_\delta, 0).$$

Відсіля випливає, що для деякого $z_*(\delta) \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$ відображення $K(\,\cdot\,; z_*)$ має нерухому точку (V_δ, ρ_δ) на $\partial\overline{U}_\delta$. Залишається показати, що серед цих розв'язків є біжучі хвилі. Покажемо, що $V_\delta = \pm\delta$ для достатньо малих $\delta > 0$, міркуючи від супротивного. Припустимо, що $\|\rho_\delta\|_{C^{2,\gamma}(\mathbb{S}^1)} = \delta$ і $|V_\delta| < \delta$ для підпослідовності $\delta = \delta_n \to 0$. Підставимо $V = V_\delta$ і $\rho = \rho_\delta$ в (4.1.85):

$$(V_\delta, \rho_\delta) = \overline{K}(V_\delta, \rho_\delta; z_*(\delta)) = \overline{L}(V_\delta, \rho_\delta; z_*(\delta)) + O(\delta^2), \tag{4.1.95}$$

поділимо результат на δ і перейдемо до границі $\delta \to 0$. Виділивши підпослідовність (якщо необхідно), знаходимо

$$V_\delta/\delta \to V, \quad \text{і} \quad \rho_\delta/\delta \to \rho \quad \text{в } C^{2,\gamma}(\mathbb{S}^1),$$

і

$$(V, \rho) = \overline{L}(V, \rho; z_*),$$

для деякого $-\varepsilon_0 \leq z_* \leq \varepsilon_0$. Таким чином $\overline{L}(\,\cdot\,; z_*)$ має власне значення 1 і відповідний власний вектор (V, ρ) з $\|\rho\|_{C^{2,\gamma}(\mathbb{S}^1)} = 1$. Але це протирічить доведенню Леми 4.1.12 (нагадаємо, що ε_0 вибрано так, що ні одне власне значення (4.1.89) не дорівнює 1). Теорему доведено. $\square$

У окремому випадку, коли біфуркація має місце для мінімальних розв'язків, що, наприклад, справді має місце для $R \geq 4$ згідно з доведенням Леми 4.1.6, Випадок 2, можна обчислити декілька членів асимптотичного розвинення біжучих хвиль за степенями V. Нижче наведено три члени розвинення ρ, що визначають форму області,

$$\rho = -V^2 \frac{\tilde{S}_2(R)}{\Phi_0'(R)} \cos 2\varphi - V^3 \frac{\tilde{S}_3(R)}{\Phi_0'(R)} \cos 3\varphi + \ldots \tag{4.1.96}$$

де $\tilde{S}_2$ є розв'язком (L.13)–(L.14), $\tilde{S}_3$ є розв'язком (L.19)–(L.20) і $\tilde{\phi}$ є розв'язком (4.1.28)–(4.1.29) з $\Lambda = \Lambda_0$ і $\Phi = \Phi_0$. Рис. 4.1 ілюструє зміни у формі при біфуркації радіально симетричних розв'язків до розв'язків типу біжних хвиль. Деталі наведено в Додатку L.

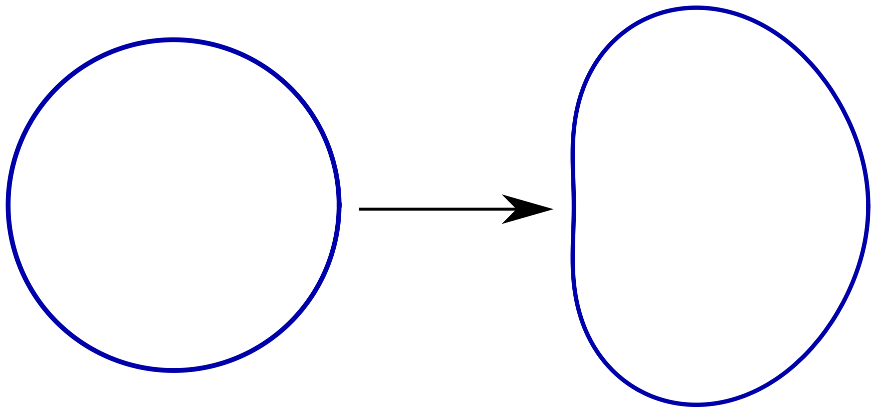

Рис. 4.1: Приблизна форма розв'язку типу біжної хвилі з швидкістю $V = 0.22$. Розв'язок знайдено збуренням стаціонарного радіально симмметричного розв'язку (точки біфуркації) з $R = 4$, $\beta = 5/8$. Форма області враховує члени до третього порядку відносно V, що побудовано у Додатку L.

4.1.6 Нерадіальні стаціонарні розв'язки

Крім розв'язків типу біжної хвилі існують також стаціонарні розв'язки які не мають радіальної симетрії. Ці розв'язки також знаходяться шляхом біфуркаційного аналізу сім'ї радіально симетричних стаціонарних розв'язків. Аналіз, що представлено нижче, обмежується випадком біфуркації з мінімальних розв'язків (4.1.12)–(4.1.13), існування яких встановлено в твердженні (ii) Теореми 4.1.3.

Як раніше, зафіксуємо $R > 0$ і проведемо локальний аналіз в околі радіально симетричного стаціонарного розв'язку (Λ_0, Φ_0). Будемо припускати, що $(\Lambda_0, \Phi_0) \in \mathcal{A}_1$, більш того, що Φ_0 є мінімальним розв'язком (4.1.12)–(4.1.13) для $\Lambda = \Lambda_0$. Тоді, згідно з Твердженням 4.1.10 існує сім'я розв'язків $\Lambda = \Lambda(V, \eta, z)$, $S = S(x, y, V, \eta, z)$ задачі (4.0.9)–(4.0.10) в областях Ω_η. Задачу (4.0.9)-(4.0.11) з $V = 0$ можна переписати як задачу про нерухомі точки (4.1.85). Причому, в термінах лінеаризованого оператора $L_\rho(\,\cdot\,; z)$, заданого (4.1.86), необхідною умовою біфуркації в (Λ_0, Φ_0) є рівність одиниці одного з власних значень $L_\rho(\,\cdot\,; z)$, крім того відповідний власний вектор (V, ρ) повинен мати нульову компоненту швидкості $V = 0$ і функція ρ sповинна задовольняти умові ортогональності

$\int_{-\pi}^{\pi} \rho(\varphi)\cos\varphi\, d\varphi = 0$. З огляду на Лему 4.1.12, цю необхідну умову можна переформулювати як $E_l(0) = 1$ для деякого $l = 2, 3, \ldots$, де $E_l(z)$ – власні значення визначені формулою (4.1.89).

Лема 4.1.17. *Нехай* Φ_0 *– поточково мінімальний розв'язок* (4.1.12)–(4.1.13) *з* $\Lambda = \Lambda_0 \geq 0$, *і нехай* $L_\rho(\,\cdot\,; z)$ *– лінеаризовані оператори, що задаються формулою* (4.1.86), *причому* $z = 0$ *відповідає лінеарізації відносно* (Λ_0, Φ_0). *Тоді, власні значення* $E_l(z)$, $l = 2, 3, \ldots$ *оператора* $L_\rho(\,\cdot\,; z)$, *що визначено в* (4.1.89), *є строго зростаючими відносно* z *для достатньо малих* z, *і якщо* $E_{l_1}(0) = E_{l_2}(0) = 1$ *для* $l_1, l_2 \geq 2$, *тоді* $l_1 = l_2$.

Доведення. Перепишемо задачу (4.1.91), яка визначає $h_l(r; z)$, в термінах нової невідомої функції $\psi_l(r; z) := h_l(r; z) + \Phi'(r; z)$:

$$-\frac{1}{r}(r\psi_l'(r))' + \left(\frac{l^2}{r^2} + 1 - \Lambda(z)e^{\Phi(r;z)}\right)\psi_l(r) \;=\; \frac{l^2-1}{r^2}\Phi'(r; z) \quad 0 < r < R,$$
$$\psi_l(0) = \psi_l(R) = 0. \tag{4.1.97}$$

Оскільки $\Phi(r; z)$ є мінімальним розв'язком (4.1.12)–(4.1.13) для малих z, можна застосувати поточечне порівняння і показати, що $\psi_l(r; z_1) < \psi_l(r; z_2)$, $0 < r < R$, коли $z_1 > z_2$. Дійсно, маємо

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{r}\big(r(\psi_l'(r; z_2) - \psi_l'(r; z_1))\big)' + \left(\frac{l^2}{r^2} + 1 - \Lambda(z_2)e^{\Phi(r;z_2)}\right)(\psi_l(r; z_2) - \psi_l(r; z_1)) \\ &= \frac{l^2-1}{r^2}(\Phi'(r; z_2) - \Phi'(r; z_1)) + (\Lambda(z_2)e^{\Phi(r;z_2)} - \Lambda(z_1)e^{\Phi(r;z_1)})\psi_l(r; z_1). \end{aligned} \tag{4.1.98}$$

Користуючись такою саме технікою факторизації як і в Лемі 4.1.8 можна показати, що кожний розв'язок (4.1.97) є від'ємним в $(0, R)$, отже останній член в (4.1.98) є додатним. Такий же самий факторізаційний прийом можна застосувати до рівняння

$$\begin{aligned} -\frac{1}{r}\big(r(\Phi'(r; z_2) - \Phi'(r; z_1))'\big)' + \left(\frac{1}{r^2} + 1 - \Lambda(z_2)e^{\Phi(r;z_2)}\right)(\Phi'(r; z_2) - \Phi'(r; z_1)) \\ = (\Lambda(z_2)e^{\Phi(r;z_2)} - \Lambda(z_1)e^{\Phi(r;z_1)})\Phi'(r; z_1), \end{aligned}$$

в результаті знаходимо, що $\Phi'(r;z_2) - \Phi'(r;z_1) > 0$ якщо $\Phi(r;z_1) > \Phi(r;z_2)$ на $(0,R)$ і $\Lambda(z_1) > \Lambda(z_2)$. Таким чином права частина (4.1.98) є додатною, звідки випливає нерівність $\psi_l(r;z_1) < \psi_l(r;z_2)$. Крім того, за допомогою факторізації (знову як в Лемі 4.1.8) і Леми Хопфа можна показати, що $\psi_l'(R;z_1) < \psi_l'(R;z_2)$. Відсіля випливає монотонність $E_l(z)$.

Для завершення доведення припустимо від супротивного, що $E_{l_1}(0) = E_{l_2}(0)$ для різних $l_1, l_2 \geq 2$, скажемо $l_1 > l_2$. Тоді внаслідок (4.1.89) маємо

$$\psi_{l_1}'(R;0)/(l_1^2-1) = \psi_{l_2}'(R;0)/(l_2^2-1) = \beta/R^2. \tag{4.1.99}$$

З іншого боку, функції $\psi_{l_i}'(r;0)/(l_i^2-1)$, $i=1,2$ задовольняють

$$-\frac{1}{r}(r\psi_{l_i}'/(l_i^2-1))' + \left(\frac{l_i^2}{r^2} + 1 - \Lambda_0 e^{\Phi_0}\right)\psi_{l_i}/(l_i^2-1) = \frac{1}{r^2}\Phi_0', \quad 0<r<R. \tag{4.1.100}$$

Тоді маємо поточкові нерівності $0 > \psi_{l_1} > \psi_{l_2}$ на $(0,R)$, і $\psi_{l_1}'(R;0)/(l_1^2-1) < \psi_{l_2}'(R;0)/(l_2^2-1)$, протиріччя. $\square$

В наступній Теоремі встановлюється біфуркація стаціонарних розв'язків якщо параметр β є достатньо малим.

Теорема 4.1.18. *Нехай задані $R>0$, $l=2,3,\ldots,$ і достатньо мале $\beta>0$, існує сім'я стаціонарних розв'язків* (4.0.6)-(4.0.8) *з областями $\Omega = \Omega_{\rho_\delta}$, чия межа задаєтьcя формулою*

$$\partial\Omega_{\rho_\delta} = \{(x,y) = (R+\rho_\delta(\varphi))(\cos\varphi, \sin\varphi)\,|\, -\pi \leq \varphi < \pi\} \quad з \quad \rho_\delta = \delta\cos l\varphi + o(\delta), \tag{4.1.101}$$

де $\delta > 0$ – малий параметр.

Доведення. Загальна схема аналізу є тією самою, що і в задачі про біжні волни. Необхідна умова біфуркації (4.1.30) замінюється тепер наступною:

$$\frac{\psi_l'(R;0)}{l^2-1} = \beta/R^2, \tag{4.1.102}$$

де $\psi_l(r;0)$ є розв'язком (4.1.97) для $z=0$, і цій умові завжди задовольняє деяка пара $(\Lambda_0, \Phi_0) \in \mathcal{A}_0$, якщо параметр $\beta > 0$ є достатньо малим. Зазначимо, що на відміну від (4.1.30) умова (4.1.102) залежить від β. Розглянемо такі малі значення $\beta > 0$, що власні значення $E_{0,1}(z)$ (оператора $\overline{L}(\,\cdot\,; z)$), які задаються (4.1.88), є відділеними від 1, і користуючись Лемою 4.1.17 знаходимо, що для достатньо малих z рівно одне власне значення $E_l(z)$ є близьким до 1 і знак $E_l(z) - 1$ змінюється при $z = 0$. Це дозволяє встановити біфуркацію нерадіальних стаціонарних розв'язків аналогічно Теоремі 4.1.14. $\square$

Висновки до Розділу 4

У Розділі 4 вивчено задачу з вільною межею, що моделює рух живих клітин на субстраті. За допомогою біфуркаційного аналізу сім'ї радіальних стаціонарних розв'язків встановлено основні результатати розділу: Теорему 4.1.1 (див. деталі в Теоремі 4.1.14) про існування розв'язків типу біжних хвиль, і Теорему 4.1.18 про існування нерадіальних стаціонарних розв'язків.

ВИСНОВКИ

У дисиртаційній роботі розглянуто некомпактні варіаційні задачі для функціонала Гінзбурга-Ландау з заданими степенями відображення на межі області і побудовано нову теорію таких задач; розвинено методи дослідження спектральних задач для сингулярно збурених несиметричних еліптичних операторів; також досліджено деякі задачі усереднення і вивчено біфуркацію розв'язків типу біжних хвиль для задачі з вільною межею, що моделює рух живих клітин на субстраті.

У першому розділі вивчено варіаційні задачі для функціонала Гінзбурга-Ландау у класі комплекснозначних функцій з одиничними абсолютними значеннями на межі і заданими степенями відображення на її зв'язних компонентах. доведено гіпотезу про неіснування мінімізантів в двозв'язних областях з ємністю меншою π, яку було висунуто в роботі Л. Берлянда і П. Міронеску [35]: доведено існування скінченного порогового значення параметра Гінзбурга-Ландау κ, такого що інфімум функціонала в класі функцій з одиничними степенями на обох компонентах межі завжди досягається якщо κ є меншим порогового значення і ніколи не досягається якщо κ є більшим цього значення. Зазначимо, що у всіх відомих випадках існування глобальних мінімізантів, вони не мають нулів (вихорів). На відміну від глобальних мінімізантів, показано, що існують інші критичні точки функціонала, які мають вихорі. Зокрема, у Підрозділі 1.1 розвинено варіаційні методи встановлення локальних мінімізантів з вихорами для достаньо великих κ та вивчено асимтотичну поведінку цих мінімізантів у границі Лондонів $\kappa \to \infty$. Доведено, що вихори знаходяться біля межі і в їх околах акумулюються скінчені квантовані єнергії, на відміну від внутрішніх вихорів, які виникають в задачі Дирихле. Ці результати у Підрозділі 1.2 розповсюджено на випадок повного функціонала Гінзбурга-Ландау, що враховує магнітні ефекти. У Підрозділі 1.5 для повного функціонала Гінзбурга-Ландау в однозв'язних областях доведно теорему, що повністю описує існування/неіснування глобальних мінімізантів з заданим степенем на межі. Показано, що, на відміну від спрощеного функціонала, мінімізанти існують для $0 < \kappa \leq 1/\sqrt{2}$ і не існують для $\kappa > 1/\sqrt{2}$. Поргове значення $\kappa = 1/\sqrt{2}$ відоме в фізичній літературі як межа розділу між надпровідниками I-го і II-го роду. У Підрозділі 1.4 розглянуто задачу мінімізації повного функціонала Гінзбурга-Ландау в двозв'язній області з заданими одиничним і нульовим степенями на компонентах межі. Доведено, що як і в однозв'язній області мінімізанти існують для $0 < \kappa < 1/\sqrt{2}$, але для $\kappa = 1/\sqrt{2}$ (і більших) інфімум не досягається. Це призводить до сингулярної асимптотичної поведінки мінімізантів при $\kappa \to 1/\sqrt{2} - 0$, що проявляється в δ-подібному струмі на межі. У роботі розвинено варіаційну техніку дослідження поведінки мінімізантів при $\kappa \to 1/\sqrt{2} - 0$, яка, зокрема, дозволяє встановити граничні положення вихорів. Насамкінець, у Підрозділі 1.6 вивчено структуру послідовностей Пале-Смейла (майже критичних точок), описано механізм втрати компактності цих послідовностей і квантування відповідних енергій. За допомогою цих результатів встановлено існування критичних точок немінімізаційного характеру (типу перевала).

У другому розділі досліджено спектральні задачі для сингулярно збурених несиметричних еліптичних операторів (з малим параметром збурення $\varepsilon > 0$) в обмежених областях з різними крайовими умовами на межі. Результати розділу стосуються, перш за все, асимтотичної поведінки першого власного значення λ_ε і першої власної функції. Останню можна представити у вигляді $u_\varepsilon = e^{-W_\varepsilon(x)/\varepsilon}$ (це є, так званий, ВКБ анзац), тоді диференціальне рівняння для u_ε переписується як сингулярно збурене рівняння Гамільтона-Якобі для функції W_ε і власного значення λ_ε. Для дослідження асимптотичної поведінки пари λ_ε і W_ε застосовано техніку в'язкісних розв'язків. У Підрозділі 2.1 розглянуто задачу

Діріхле з осцилюючими локально періодичними коефіцієнтами і виведено ефективне рівняння Гамільтона-Якобі для границь λ_ε і функцій W_ε при $\varepsilon \to 0$, та доведено, що крайова умова $W_\varepsilon(x) = +\infty$ на межі у границі релаксується до крайової умови у вигляді фазового обмеження (state constraint boundary condition). Знайдена гранична (ефективна) задача є адитивною задачею на власні значення для рівняння Гамільтона-Якобі. Вона має рівно одне власне значення, що описує головний член асимптотики λ_ε, проте власних функцій може багато у залежності від структури множини Обрі пов'язаної з ефективною задачею. У Підрозділі 2.1 розглянуто також питання про уточнені асимптотики власних значень і селекцію власної функції ефективної задачі у випадку коли молодші члени оператора мають однаковий порядок, та множина Обрі складається з гіперболічних нерухомих точок і граничних циклів ефективного знесення. Для цього розвинено техніку асимтотичного аналізу, що складається з таких елементів як локалізація і усереднення на проміжному масштабі. У Підрозділі 2.2 вивчено сингулярно збурену задачу з умовою Неймана на межі, у припущенні, що коефіцієнти рівняння не залежать від ε, а малий множник ε присутній тільки в старшому члені рівняння. За умови, що множина Обрі відповідної задачі для рівняння рівняння Гамільтона-Якобі складається з гіперболічних нерухомих точок і граничних циклів ефективного знесення задачі Скорохода породженої конвективним членом, знайдено границі власних значень і функцій W_ε $(= -\varepsilon \log u_\varepsilon)$. Для дослідження локалізації власних функцій на компонентах множини Обрі розташованих на межі розвинуто метод, що базуються на побудові спеціальних суб- і суперрозв'язків. У Підрозділі 2.3 вивчено спектр сингулярно збуреної задачі з осцилюючими коефіцієнтами у тонкому циліндрі з умовою Неймана на бічній поверхні і Фур'є на основах. Описано асимтотичну поведінку першого власного значення і власної функції, для границі власних значень і функцій W_ε $(= -\varepsilon \log u_\varepsilon)$ виведено одновимірну адитивну задачу на власні значення з ефективними граничним умовами. Ці граничні умови отримано в результаті дослідження примежових шарів біля основ. Для побудови останніх вивчено спектральні задачі в напівобмеженому циліндрі з умовою Стеклова на основі, ці результати мають незалежний інтерес. Крім того, у структурному припущенні щодо ефективної задачі (яке веде до локалізації, в певному сенсі, власних функцій всередині циліндру) знайдено двочленні асимтотичні формули для першого і наступних власних значень.

У третьому розділі вивчено дві задачі усереднення з нетрівіальними колективними ефектами спричиненими неоднорідностями. У Підрозділі 3.1 описано вихорові структури в надпровідниках з періодично розташованими отворами, що моделюють чужорідні домішки. Знайдено масштабні співвідношеня між просторовим періодом, розміром отворів і величиною зовнішнього магнитного поля для яких виникають структури у вигляді вложених областей з кратними вихорями. Для дослідження цієї моделі застосовано техніку Г-збіжності, конструкції подібні мірам Янга і елементи методів опуклого аналізу. У Підрозділі 3.2 вивчено стаціонарні еліптичні крайові задачі (і їх параболічні аналоги) для монотонних операторів в перфорованих областях з умовою Фур'є на межі дірок і Неймана на зовнішній межі. У припущенні про нульові середні в крайовій умові на межі дірок, для дослідження асимптотичної поведінки розв'язків застосовано техніку двохмасштабної збіжності і виведено ефективну (усереднену) задачу. Винайдено нетрівіальний колективний ефект спричинений крайовими умовами на межі дірок, який полягає у виникненні нового члену в ефективній крайовій умові на зовнішній межі.

У четвертому розділі розглянуто задачу з вільною межею, що моделює рух живих клітин на субстраті. Досліджено сім'ю радіально симетричних стаціонарних розв'язків задачі і зроблено її біфуркаційний аналіз, що дозволило довести існування розв'язків типу біжної хвилі і стаціонарних розв'язків без радіальної симетрії. Для доведення існування розв'язків типу біжної хвилі використано топологічні міркування з застосуванням поняття степеня Лере-Шаудера.

Усі основні результати дисертації наведено з повними доведеннями. Дисертаційна робота має теоретичний характер. Результати і методи дисертаційної роботи можуть бути використані для дослідження інших задач математичної фізики.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

[1] Abou-Kandil, H., Freiling, G., Ionescu, V., Jank, G.: Matrix Riccati equations in control and systems theory. Systems and Control: Foundations and Applications. Birkhäuser Verlag, Basel (2003)

[2] Acerbi, E., Chiado Piat, V., Dal Maso, G., Percivale, D.: An extension theorem from connected sets, and homogenization in general periodic domains. Nonlinear Anal. **18**(5), 481–496 (1992)

[3] Aftalion, A., Sandier, E., Serfaty, S.: Pinning phenomena in the Ginzburg-Landau model of superconductivity. J. Math. Pures Appl. **80**(3), 339–372 (2001)

[4] Ahlfors, L.: Complex Analysis, McGraw-Hill (1966)

[5] Alama, S., Bronsard, L.: Vortices and pinning effects for the Ginzburg-Landau model in multiply connected domains. Comm. Pure Appl. Math. **59**, 36–70 (2006)

[6] Allaire, G.: Homogenization and two-scale convergence. SIAM J. Math. Anal. **23**(6), 1482–1518 (1992)

[7] Allaire, G., Capdeboscq, Y.: Homogenization of a spectral problem in neutronic multigroup diffusion. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. **187**, 91–117 (2000)

[8] Allaire, G., Capdeboscq, Y., Puel, M.: Homogenization of a one-dimensional spectral problem for a singularly perturbed elliptic operator with Neumann boundary conditions. Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B **17**(1), 1–31 (2012)

[9] Allaire, G., Damlamian, A., Hornung, U.: Two-scale convergence on periodic surfaces and applications. In: Proceedings of the International Conference on Mathematical Modelling of Flow Through Porous Media, World Scientific Publications, Singapore, pp. 15-25 (1995)

[10] Allaire, G., Piatnitski, A.: On the asymptotic behaviour of the kernel of an adjoint convection-diffusion operator in a long cylinder. Rev. Mat. Iberoam. **33**(4), 1123–1148 (2017)

[11] Almeida, L.: Topological sectors for Ginzburg-Landau energies. Rev. Mat. Iberoamericana **15**(3), 487–545 (1999)

[12] Almeida, L., Bethuel, F.: Topological methods for the Ginzburg-Landau equations. J.Math.Pures Appl. **77**, 1–49 (1998)

[13] Alt, W., Dembo, M.: Cytoplasm dynamics and cell motion: two-phase flow models. Math. Biosci. **156**(1-2), 207–228 (1999)

[14] Amaziane, B., Pankratov, L., Rybalko, V.: On the homogenization of some double porosity models with periodic thin structures. Applicable Analysis **88**(10-11), 1469–1492 (2009)

[15] Ambrosetti, A., Rabinowitz, P.H.: Dual variational methods in critical point theory and applications. J. Funct. Anal. **14**, 349–381 (1973)

[16] Arisawa, M.: Long time averaged reflection force and homogenization of oscillating Neumann boundary conditions. Ann. Inst. H. Poincaré (C) Anal. Non Linéaire, **20**(2), 293–332 (2003)

[17] Armstrong, S.N., Souganidis, P.E.: Stochastic homogenization of Hamilton-Jacobi and degenerate Bellman equations in unbounded envieronments. J. Math. Pure Appl. **97**(5), 460–504 (2012)

[18] Armstrong, S.N., Souganidis, P.E.: Concentration for neutronic multigroup diffusion in random environments. Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **30**(3), 419–439 (2013)

[19] Aronson, D.G.: Non-negative solutions of linear parabolic equations. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa **22**(3), 607–694 (1968)

[20] Aubin, T., Équations différentielles non linéaires et problème de Yamabe concernant la courbure scalaire, J. Math. Pures Appl. **55**(3), 269–296 (1976)

[21] Barles, G.: Solutions de viscosité des équations de Hamilton-Jacobi. Springer-Verlag, Berlin (1994)

[22] Barles, G., Perthame, B.: Comparison principle for Dirichlet-type Hamilton-Jacobi equations and singular perturbations of degenerated elliptic equations. Appl. Math. Optim. **21**(1), 21–44 (1990)

[23] Barnhart, E., Lee, K., Allen, G.M., Theriot, J.A., Mogilner, A.: Balance between cell-substrate adhesion and myosin contraction determines the frequency of motility initiation in fish keratocytes. Proc Natl Acad Sci U.S.A. **112**(16), 5045–5050 (2015)

[24] Barnhart, E., Lee, K., Keren, K., Mogilner, A., Theriot, J. A.: An adhesion-dependent switch between mechanisms that determine motile cell shape. PLoS Biology **9**(5), e1001059 (2011)

[25] Беляев, А.Г., Пятницкий, А.Л., Чечкин, Г. А.: Асимптотическое поведение решения краевой задачи в перфорированной области с осциллирующей границей. Сиб. матем. журн. **39**(4), 730–754 (1998)

[26] Беляев, А.Г., Пятницкий, А.Л., Чечкин, Г.А.: Усреднение в перфорированной области с осциллирующим третьим краевым условием. Матем. сб. **192**(7), 3–20 (2001)

[27] Bernstein, S.N.: Sur la généralisation du problème de Dirichlet (première partie). Math. Ann. **62**(2), 253–271 (1906)

[28] Bernstein, S.N.: Sur la généralisation du problème de Dirichlet (deuxième partie). Math. Ann. **69**(1), 82–136 (1910)

[29] Bethuel, F., Ghidaglia, J.-M.: Improved regularity of solutions to elliptic equations involving Jacobians and applications. J. Math. Pures Appl. **72**(5), 441–474 (1993)

[30] Bethuel, F., Rivière, T.: Vortices for a variational problem related to superconductivity. Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **12**, 243–303 (1995)

[31] Berlyand, L., Fuhrmann, J., Rybalko, V.: Bifurcation of traveling waves in a Keller-Segel type free boundary model of cell motility. Commun. Math. Sci. **16**(3), 735–762 (2018)

[32] Berlyand, L., Golovaty, D., Iaroshenko, O., Rybalko, V.: On approximation of Ginzburg–Landau minimizers by S^1-valued maps in domains with vanishingly small holes. J. Differ. Equations **264**(2), 1317–1347 (2018)

[33] Berlyand, L., Golovaty, D., Rybalko, V.: Nonexistence of Ginzburg-Landau minimizers with prescribed degree on a boundary of a doubly connected domain. C.R. Math. **343**(1), 63–68 (2006)

[34] L. Berlyand and P. Mironescu, Ginzburg-Landau minimizers with prescribed degrees. Capacity of the domain and emergence of vortices, preprint, available at http://desargues.univ-lyon1.fr.

[35] Berlyand, L., Mironescu, P., Ginzburg-Landau minimizers with prescribed degrees. Capacity of the domain and emergence of vortices. J.Funct. Anal. **239**, 76–99 (2006)

[36] Berlyand, L., Mironescu, P., Rybalko, V., Sandier, E.: Minimax critical points in Ginzburg-Landau problems with semi-stiff boundary conditions: existence and bubbling. Commun. Part. Diff. Eq. **39**(5), 946–1005 (2014)

[37] Berlyand, L., Misiats, O., Rybalko, V.: Near boundary vortices in a magnetic Ginzburg-Landau model: Their locations via tight energy bounds. J. Funct. Anal. **258**(5), 1728–1762 (2010)

[38] Berlyand, L.V., Rybalko, V.O., Misiats, O.O.: Minimizers of Ginzburg-Landau functional with "semi-stiff" boundary conditions: existence and vorticity. In: International Conference dedicated to the 110-th Anniversary of I. G. Petrovskii (XXIII joint session of Moscow Mathematical Society and I. G. Petrovskii Seminar). Book of Abstracts, p. 16, Moscow, Russia, May 30-June 4, 2011

[39] Berlyand, L., Misiats, O., Rybalko, V.: Minimizers of the magnetic Ginzburg-Landau functional in simply connected domain with prescribed degree on the boundary. Commun. Contemp. Math. **13**(1), 53–66 (2011)

[40] Berlyand, L., Mizuhara, M., Rybalko, V., Zhang, L.: On an evolution equation in a cell motility model. Physica D: Nonlinear Phenomena **318**, 12–25 (2016)

[41] Berlyand, L., Potomkin, M., Rybalko, V.: Phase-field model of cell motility: Traveling waves and sharp interface. C.R. Math. **354**(10), 986–992 (2016)

[42] Berlyand, L., Potomkin, M., Rybalko, V.: Sharp interface limit in a phase field model of cell motility. Netw. Heterog. Media **12**(4), 551–590 (2017)

[43] Berlyand, L., Rybalko, V.: Solutions with vortices of a semi-stiff boundary value problem for the Ginzburg-Landau equation. J. Eur. Math. Soc. **12**(6), 1497–1531 (2010)

[44] Berlyand, L., Rybalko, V.: Homogenized description of multiple Ginzburg-Landau vortices pinned by small holes. Netw. Heterog. Media **8**(1), 115–130 (2013)

[45] Berlyand, L., Yip, N.K., Rybalko, V., Renormalized Ginzburg-Landau energy and location of near boundary vortices. Netw. Heterog. Media **7**(1), 179–196 (2012)

[46] Berlyand, L., Voss, K.: Symmetry breaking in annular domains for a Ginzburg-Landau superconductivity model. In: Proceedings of IUTAM 99/4 Symposium (Sydney, Australia), Kluwer Academic Piblishers, 1999

[47] Bethuel, F., Brezis, H., Helein, F.: Ginzburg-Landau vortices. Birkhauser (1994)

[48] Bethuel, F., Ghidaglia, J.-M.: Régularité des solutions de certaines équations elliptiques en dimension deux et formule de la co-aire. In: Journées "Équations aux Dérivées Partielles"(Saint-Jean-de-Monts, 1993), exp. 1, 36 pp.École Polytechnique, Palaiseau (1993)

[49] Bogomol'nyi, E.B.: The stability of classical solutions. Soviet J. Nuclear Phys. **24**, 449–454 (1976)

[50] Boutet de Monvel-Berthier, A., Georgescu, V., Purice, R.: A boundary value problem related to the Ginzburg-Landau model. Comm. Math. Phys. **142**, 1–23 (1991)

[51] Bourdaud, G., Kateb, D.: Fonctions qui opérent sur les espaces de Besov. Proc. Amer. Math. Soc. **112** (4), 1067–1076 (1991)

[52] Brezis, H., Coron, J.-M.: Convergence of solutions of H-systems or how to blow bubbles. Arch. Rational Mech. Anal. **89**(1), 21–56 (1985)

[53] Brezis, H., Coron, J.-M., Nirenberg, L.: Free vibrations for a nonlinear wave equation and a theorem of P. Rabinowitz. Comm. Pure Appl. Math. **33**(5), 667–684 (1980)

[54] Brezis, H., Li, T.: Ginzburg-Landau vortices. Series in contemporary applied mathematics. Singapore : World Scientific Publishing (2005)

[55] Brezis, H., Merle, F.: Uniform estimates and blow-up behavior for solutions of $-\Delta u = v(x)e^u$ in two dimensions. Comm. Partial Differential Equations **16**(8-9), 1223–1253 (1991)

[56] Brezis, H., Nirenberg, L.: Degree Theory and BMO, Part II: Compact manifolds with boundaries. Selecta Math. **2**, 309–368 (1996)

[57] Barles, G., Da Lio, F., Lions, P.-L., Souganidis, P.E.: Ergodic problems and periodic homogenization for fully nonlinear equations in half-space type domains with Neumann boundary conditions. Indiana Univ. Math. J. **57**(5), 2355–2375 (2008)

[58] Caffarelli, L.A., Souganidis, P.E.: Rates of convergence for the homogenization of fully nonlinear uniformly elliptic PDE in random media. Invent. Math. **180**(2), 301–360 (2010)

[59] Capdeboscq, Y.: Homogenization of a diffusion equation with drift. C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math. **327**(9), 807–812 (1998)

[60] Capdeboscq, Y.: Homogenization of a neutronic critical diffusion problem with drift. Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **132**, 567–594 (2002)

[61] Capuzzo-Dolcetta, I., Lions, P.-L.: Hamilton-Jacobi equations with state constraints. Trans. Amer. Math. Soc. **318**(2), 643–683 (1990)

[62] Camilli, F., Cesaroni, A.: A note on singular perturbation problems via Aubry-Mather theory. Discrete Contin. Dyn. Syst. **17**(4), 807–819 (2007)

[63] Camilli, F., Cesaroni, A., Siconolfi, A.: Randomly perturbed dynamical systems and Aubry-Mather theory. Int. J. Dyn. Syst. Differ. Equ. **2**(3-4), 139–169 (2009)

[64] Cerreti, F., Perthame, B., Schmeiser, C., Tang, M., Vauchelet, N.: Waves for a hyperbolic keller-segel model and branching instabilities. Math. Models and Meth. in Appl. Sci. **21**, 825–842 (2011)

[65] Chechkin, G. A., Mel'nyk, T. A.: Spatial-skin effect for eigenvibrations of a thick cascade junction with 'heavy' concentrated masses. Math. Methods Appl. Sci. **37**(1), 56-74 (2014)

[66] Chen, X.: Spectrums for the Allen-Cahn, Cahn-Hilliard, and phase field equations for generic interface. Comm. Partial Differential Equations, **19**, 1371–1395 (1994)

[67] Chen, X., Hilhorst, D., Logak, E.: Mass conserving Allen-Cahn equation and volume preserving mean curvature flow. Interfaces Free Bound. **12**(4), 527–549 (2010)

[68] Chiado Piat, V., Piatniski, A.: *Gamma*-convergence approach to variational problems in perforated domains with Fourier boundary conditions. ESAIM: COCV **16** (1), 148–175 (2010)

[69] Cioranescu, D., Donato, P.: On a Robin problem in perforated domains. In: Homogenization and applications to material sciences (Nice, 1995), 123–135, GAKUTO Internat. Ser. Math. Sci. Appl., 9, Gakkotosho, Tokyo, 1995

[70] Cioranescu, D., Saint Jean Paulin, J.: Truss structures: Fourier conditions and eigenvalue problem. In: Boundary control and boundary variation (Sophia-

Antipolis, 1990), 125–141, Lecture Notes in Control and Inform. Sci., 178, Springer, Berlin, 1992

[71] Clark, G., Packer, L.: Two-scale homogenization of non-linear degenerate evolution equations. J. Math. Anal. Appl. **238**(1), 316–328 (1999)

[72] Comte, M., Mironescu, P.: Minimizing properties of arbitrary solutions to the Ginzburg-Landau equation. Proc. Royal Soc. Edinburgh A **129**, 1157–1169 (1999)

[73] Crandall, M.G., Ishii, H., Lions, P.-L.: User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations. Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **27** (1), 1–67 (1992)

[74] Crandall, M., Lions, P.-L.: Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations. Transactions of the American Mathematical Society **277** (1), 1–42 (1983)

[75] Crandall, M., Rabinowitz, P.: Bifurcation from simple eigenvalues. J. Funct. Anal. **8**(2), 321–340 (1971)

[76] Davini, A., Siconolfi, A.: Metric techniques for convex stationary ergodic Hamiltonians. Calc. Var. Partial Differential Equations **40**(3-4), 391–421 (2011)

[77] Del Pino, M., Kowalczyk, M., Musso, M.: Variational reduction for Ginzburg-Landau vortices. J. Funct. Anal. **239**(2), 497–541 (2006)

[78] Dos Santos, M.: Local minimizers of the Ginzburg-Landau functional with prescribed degrees, J. Funct. Anal. **25**, 1053–1091 (2009)

[79] Ekeland, I., Temam, R.: Analyse convexe et problemes variationnels. (French) Collection Etudes Mathematiques. Gauthier-Villars (1974)

[80] Eizenberg, A., Kifer, Yu.: The asymptotic behavior of the principal eigenvalue in a singular perturbation problem with invariant boundaries. Probab. Theory Related Fields **76**(4), 439–476 (1987)

[81] Evans, L.C.: The perturbed test function method for viscosity solutions of nonlinear PDE. Proc. R. Soc. Edinburgh Sect. A **111** (3-4), 359–375 (1989)

[82] Evans, L.C.: Periodic homogenisation of certain fully nonlinear partial differential equations. Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **120**(3-4), 245–265 (1992)

[83] Evans, L., Gariepy, R.: Measure theory and fine properties of functions. CRC Press (1992)

[84] Evans, L.C., Ishii, H.: A PDE approach to some asymptotic problems concerning random differential equation with small noise intensities. Ann. L'Institut H. Poincare **2**, 1–20 (1985)

[85] Farina, A., Mironescu, P.: Uniqueness of vortexless Ginzburg-Landau type minimizers in two dimensions. Calc. Var. Partial Differential Equations **46**(3-4), 523–554 (2013)

[86] Fiorenza, A., Sbordone, C.: Existence and uniqueness results for solutions of nonlinear equations with right hand side in L^1. Studia Math. **127**, 223–231 (1998)

[87] Freidlin, M.I.: Dirichlet's problem for an equation with periodical coefficients depending on a small parameter. Teor. Veroyatnost. i Primenen. **9**, 133-139 (1964)

[88] Freidlin, M.I., Wentzell, A.D.: Random perturbations of dynamical systems. Fundamental Principles of Mathematical Sciences, **260**. Springer-Verlag (1984)

[89] Friedman, A.: Free boundary problems in science and technology. Notices of the AMS. **47**(8), 854–861 (2000)

[90] Friedman, A.: PDE problems arising in mathematical biology. Networks Heterog. Media **7**(4), 2012.

[91] Friedman, A., Reitich, F.: Symmetry-breaking bifurcation of analytic solutions to free boundary problems: an application to a model of tumor growth. Trans. Amer. Math. Soc. **353**(4), 1587–1634 (2001)

[92] Friedman, A., Hu, B.: Bifurcation for a free boundary problem modeling tumor growth by Stokes equation. SIAM J Math. Anal. **39**(1), 174–194 (2007)

[93] Antonio Gaudiello, A., Mel'nyk, T.: Homogenization of a nonlinear monotone problem with nonlinear Signorini boundary conditions in a domain with highly rough boundary. J. Differ. Equ. **265**(10), 5419 - 5454 (2018)

[94] Gidas, B., Ni, W.-M., Nirenberg, L.: Symmetry and related properties via the maximum principle. Comm. Math. Phys. **68**, 209–243 (1979)

[95] Gilbarg, D.,Trudinger, N.S.: Elliptic partial differential equations of second order. Reprint of the 1998 edition, Springer-Verlag (2001)

[96] Gérard, P.: Compactness description for the default Sobolev injection. ESAIM Control Optim. Calc. Var. **3**, 213–233 (1998)

[97] Golovaty, D.: The volume preserving motion by mean curvature as an asymptotic limit of reaction-diffusion equations. Q. of Appl. Math. **55**, 243–298 (1997)

[98] Golovaty, D., Berlyand, L.: On uniqueness of vector-valued minimizers of the Ginzburg-Landau functional in annular domains. Calc. Var. Partial Differential Equations **14**, 213–232 (2002)

[99] Hao, W., Hauenstein, J. D., Hu, B., Liu, Y., Sommese, A. J., Zhang, Y. T.: Bifurcation for a free boundary problem modeling the growth of a tumor with a necrotic core. Nonlinear Analysis: Real World Applications **13**(2), 694–709 (2012)

[100] Hélein, F.: Constant mean curvature surfaces, harmonic maps and integrable systems, Lectures in Mathematics ETH Zürich, Notes taken by Roger Moser, Birkhäuser Verlag (2001)

[101] Hillen, T., Painter, K.: A user's guide to PDE models for chemotaxis. J. Math. Biol. **58**(3,4), 183–217 (2009)

[102] Huang, Y., Zhang, Zh., Hu, B.: Bifurcation for a free-boundary tumor model with angiogenesis. Nonlinear Analysis: Real World Applications **35**, 483–502 (2017)

[103] Iaroshenko, O., Rybalko, V., Vinokur, V.M., Berlyand, L.: Vortex phase separation in mesoscopic superconductors. Scientific Reports: Nature Publishing Group **3**, 1758 (2013)

[104] Ishii, H.: Weak KAM aspects of convex Hamilton-Jacobi equations with Neumann type boundary conditions. J. Math. Pures Appl. **95**(1), 99–135 (2011)

[105] Ishii, H., Koike, S.: Remarks on elliptic singular perturbation problems. Appl. Math. Optim. **23**(1), 1–15 (1991)

[106] Ishii, H., Mitake, H.: Representation formulas for solutions of Hamilton-Jacobi equations with convex Hamiltonians. Indiana Univ. Math. J. **56**(5), 2159–2183 (2007)

[107] Jaffard, S. Analysis of the lack of compactness in the critical Sobolev embeddings. J. Funct.Anal. **161**, 384–396 (1999)

[108] Jaffe, A., Taubes, C.: Vortices and monopoles: Strucuture of static gauge theories. Birkhäuser (1980)

[109] Jimbo, S., Morita, Y.: Stability of nonconstant steady-state solutions to a Ginzburg-Landau equation in higher space dimensions. Nonlinear Anal. **22**(6), 753-770 (1994)

[110] Jimbo, S., Morita, Y., Zhai, J.: Ginzburg-Landau equation and stable steady state solutions in a non-trivial domain. Comm. Partial Differential Equations **20**(11-12), 2093-2112 (1995)

[111] Jimbo, S., Sternberg, P.: Nonexistence of permanent currents in convex planar samples. SIAM J. Math. Anal. **33**, 1379-1392 (2002)

[112] Keener, J., Keller, H.: Positive solutions of convex nonlinear eigenvalue problems. J. Differ. Equations **16**(1), 103–125 (1974)

[113] Keller, J.B.: A theorem on the conductivity of a composite medium. J. Math. Phys. **5**, 548–549 (1964)

[114] Keller, E., Segel, L.: Initiation of slime mold aggregation viewed as an instability. J. Theor. Biol. **26**, 399–415 (1970)

[115] Keller, E., Segel, L.: Model for chemotaxis. J. Theor. Biol. **30**, 225–234 (1971)

[116] Keller, E., Segel, L.: Traveling bands of chemotactic bacteria: a theoretical analysis. J. Theor. Biol. **30**, 235–248 (1971)

[117] Keren, K., Pincus, Z., Allen, G., Barnhart, E., Marriott, G., Mogilner, A., Theriot J.: Mechanism of shape determination in motile cells. Nature **453**, 475–480 (2008)

[118] Kifer, Yu.: On the principal eigenvalue in a singular perturbation problem with hyperbolic limit points and circles. J.Differ. Equations **37**(1), 108–139 (1980)

[119] Kifer, Yu.: Stochastic stability of the topological pressure. J. Analyse Math. **38**, 255–286 (1980)

[120] Korman, P.: Global Solution Curves for Semilinear Elliptic Equations. World Scientific Publishing, Singapore (2012)

[121] Kosygina, E.: Homogenization of stochastic Hamilton-Jacobi equations: brief review of methods and applications. Stochastic analysis and partial differential

equations pp. 189–204, Contemp. Math., **429**, Amer. Math. Soc., Providence 2007.

[122] Krasnosel'skii, M. A., Lifshits, E. M., Sobolev, A. V.: Positive linear systems: the method of positive operators. Heldermann Verlag (1989)

[123] Ladyzenskaja, O. A., Ural'ceva, N. N.: Certain classes of nonuniformly elliptic equations. Zap. Naucn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI) **5**, 186–191 (1967)

[124] Ladyzenskaja, O. A., Solonnikov, V. A., Uraltseva, N. N.: Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type. AMS (1988)

[125] Lancaster, P., Rodman, L.: Algebraic Riccati equations. Oxford Science Publications. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York (1995)

[126] Lieberman, G.M.: Oblique derivative problems in Lipschitz domains. II. Discontinuous boundary data. J. Reine Angew. Math. **389**, 1–21 (1988)

[127] Lin, F.H.: Solutions of Ginzburg-Landau eqwuations and critical points of the renormalized energy, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **12**, 599-622 (1995)

[128] Lin, F.H., Lin, T.-Ch.: Minimax solutions of the Ginzburg-Landau equations. Selecta Math. (N.S.) **3**, 99-113 (1997)

[129] Lio, F. D., Kim, C. I., Slepcev, D.: Nonlocal front propagation problems in bounded domains with Neumann-type boundary conditions and applications. Asymptot. Anal. **37**(3-4), 257–292 (2004)

[130] Lions, P.-L.: Resolution de problemes elliptiques quasilineaires. Arch. Rational Mech. Anal. **74**(4), 335–353 (1980)

[131] Lions, P.-L.: The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The limit case. II. Rev. Mat. Iberoamericana **1**, 45–121 (1985)

[132] Lions, P.-L., Papanicolaou, G., Varanhan, S.R.S.: Homogenization of Hamilton-Jacobi equations, unpublished work, (1987)

[133] Lions , P.-L., Souganidis, P.E.: Homogenization of degenerate second-order PDE in periodic and almost periodic environments and applications. Ann. I.H. Poincaré, AN **22**, 667–677 (2005)

[134] Liouville, J.: Sur l'equation aux difference partielles $\frac{d^2 \log \lambda}{dudv} \pm \frac{\lambda}{2a^2} = 0$. C. R. Acad. Sci. Paris **36**, 71–72 (1853)

[135] Lowengrub, J. S., Frieboes, H. B., Jin, F., Chuang, Y. L., Li, X., Macklin, P., Wise, S. M., Cristini, V.: Nonlinear modelling of cancer: bridging the gap between cells and tumours. Nonlinearity **23**(1), R1-R9 (2009)

[136] Lukkassen, D., Nguestseng, G., Wall, P.: Two-scale convergence. Int. J. Pure Appl. Math. **2**(1), 35–86 (2002)

[137] Marchenko, V.A., Khruslov, E.Ya.: Boundary-value problems with fine-grained boundary. Mat.Sb. (N.S.) **65**, 458–472 (1964)

[138] Mawhin, J.: Leray-Schauder degree: a half century of extensions and applications. Topol. Methods Nonlinear Anal. **14**(2), 195–228 (1999)

[139] Mawhin, J. , Willem, M.: Critical point theory and Hamiltonian systems. Appl. Math. Sciences **74**, Springer-Verlag, New York (1989)

[140] Melnik, T.A.: Asymptotic expansions of eigenvalues and eigenfunctions for elliptic boundary-value problems with rapidly oscillating coefficients in a perforated cube. J. Math. Sci. **75**(3), 1646–1671 (1995)

[141] Mel'nik, T. A., Popov A. V.: Asymptotic analysis of boundary value and spectral problems in thin perforated regions with rapidly changing thickness and different limiting dimensions. Mat. Sb., **203**(8), 97–124 (2012)

[142] Mel'nyk, T.A., Sivak, O.A.: Asymptotic analysis of a boundary-value problem with the nonlinean multiphase interactions in a perforated domain. Ukr. Mat. J. **61**(4), 494–512 (2009)

[143] Mel'nyk, T.A. Sivak, O.A.: Asymptotic analysis of a parabolic semilinear problem with nonlinear boundary multiphase interactions in a perforated domain. J. Math. Sci. **164**(3), 1–27 (2010)

[144] Mel'nyk, T.A., Sivak, O.A.: Asymptotic approximations for solutions to quasilinear and linear parabolic problems with different perturbed boundary conditions in perforated domains. J. Math. Sci. **177**(1), 50–70 (2011)

[145] Mel'nyk, T.A., Sivak, O.A.: Asymptotic approximations for solutions to quasilinear and linear elliptic problems with different perturbed boundary conditions in perforated domains. Asymptot. Anal. 75 (2011), 79–92.

[146] Mironescu, P., Pisante, A.: A variational problem with lack of compactness for $H^{1/2}(S^1; S^1)$ maps of prescribed degree. J. Funct. Anal. **217**, 249–279 (2004)

[147] Misiats, O.: The necessary conditions for the existence of local Ginzburg–Landau minimizers with prescribed degrees on the boundary Asympt. Anal. **89**(1-2), 37–61 (2014)

[148] Mitake, H.: Asymptotic solutions of Hamilton-Jacobi equations with state constraints. Appl. Math. Optim. **58**(3), 393–410 (2008)

[149] Mottoni, P., Schatzman, M.: Geometrical evolution of developed interfaces. Trans. Amer. Math. Soc. **347**, 1533–1589 (1995)

[150] Nguetseng, G.: A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization. SIAM J. Math. Anal. **20**(3), 608–623 (1989)

[151] O.A. Oleinik, T.A. Shaposhnikova, On the homogenization of the Poisson equation in partially perforated domains with arbitrary density of cavities

and mixed type conditions on their boundary. Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei (9) Mat. Appl. 7 (1996), no. 3, 129–146.

[152] Oleinik, O.A., Shaposhnikova, T.A.: On an averaging problem in a partially punctured domain with a boundary condition of mixed type on the boundary of the holes, containing a small parameter. (Russian) Differ. Uravn. **31**(7), 1150–1160, 1268 (1995); translation in Differential Equations **31**(7), 1086–1098 (1995)

[153] Pacard, F., Rivière, T.: Linear and Nonlinear Aspects of Vorticies. Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, **39**, Birkhauser Boston Inc., Boston (2000)

[154] Pankratova, I., Piatnitski, A.: On behavior at infinity of solutions to stationary convection-diffusion equation in a cylinder. Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B **11**(4), 935–970 (2009)

[155] Pastukhova, S.E.: On the character of the distribution of the temperature field in a perforated body with a given value on the outer boundary under heat exchange conditions on the boundary of the cavities that are in accord with Newton's law. (Russian) Mat. Sb. **187**(6), 85–96 (1996); translation in Sb. Math. **187**(6), 753–770 (1996)

[156] Pastukhova, S.E.: Tartar's compensated compactness method in the averaging of the spectrum of a mixed problem for an elliptic equation in a punctured domain with a third boundary condition. (Russian. Russian summary) Mat. Sb. **186**(5), 127–144 (1995); translation in Sb. Math. **186**(5), 753–770 (1995)

[157] Pastukhova, S.E.: Spectral asymptotics for a stationary heat conduction problem in a perforated domain. (Russian. Russian summary) Mat. Zametki **69**(4), 600–612 (2001); translation in Math. Notes **69**(3-4), 546–558 (2001)

[158] Perthame, B.: Perturbed dynamical systems with an attracting singularity and weak viscosity limits in Hamilton-Jacobi equations. Trans. Amer. Math. Soc. **317**(2), 723–748 (1990)

[159] Perthame, B., Vasseur, A.: Regularization in Keller-Segel type systems and the De Giorgi method. Commun. Math. Sci. **10**(2), 463–476 (2012)

[160] Piatnitski , A.L.: Averaging a singularly perturbed equation with rapidly oscillating coefficients in a layer. Math. USSR, Sb. **49**, 19–40 (1984)

[161] Piatnitski, A.: Asymptotic Behaviour of the Ground State of Singularly Perturbed Elliptic Equations. Commun. Math. Phys. **197**, 527–551 (1998)

[162] Piatnitski, A., Rybalko, V.: Homogenization of boundary value problems for monotone operators in perforated domains with rapidly oscillating boundary conditions of Fourier type. J. Math. Sci. **177**(1), 109–140 (2011)

[163] Piatnitski, A., Rybalko, A., Rybalko, V.: Ground states of singularly perturbed convection-diffusion equation with oscillating coefficients. ESAIM Contr. Op. Ca. Va. **20**(4), 1059–1077 (2014)

[164] Piatnitski, A., Rybalko, A., Rybalko, V.: Singularly perturbed spectral problems with Neumann boundary conditions. Complex Var. Elliptic Equ. **61**(2), 252–274 (2015)

[165] Piatnitski, A., Rybalko, V.: On the first eigenpair of singularly perturbed operators with oscillating coefficients. Commun. Part. Diff. Eq. **41**(1), 1–31 (2016)

[166] Piatnitski A., Rybalko V.: Singularly perturbed spectral problems in a thin cylinder with Fourier conditions on its bases. J. Math. Phys., Anal., Geom. **15**(2), 256–277 (2019)

[167] Pyatnitskii, A.L., Shamaev, A.S.: On the asymptotic behavior of the eigenvalues and eigenfunctions of a nonselfadjoint operator in $\mathbb{R}^n$. J. Math. Sci. **120**(3), 1411–1423 (2004)

[168] Pohozhaev, S.: Eigenfunctions of the equation $\Delta u + f(u) = 0$. Soviet Mat. Dokl. **6**, 1408–1411 (1965)

[169] Protter, M.H., Weinberger, H.F.: On the spectrum of general second oreder operators. Bull. Amer. Math. Soc. **72**, 251–255 (1966)

[170] Rauch, J. Five problems: an introduction to the qualitative theory of partial differential equations. Partial differential equations and related topics pp. 355-369. Lecture Notes in Math., **446**, Springer, Berlin (1975)

[171] Recho, P., Putelat, T., Truskinovsky, L.: Contraction-driven cell motility. Phys. Rev. Lett. **111**(10), 108102 (2013).

[172] Recho, P., Putelat, T., Truskinovsky, L.: Mechanics of motility initiation and motility arrest in crawling cells. J. Mech. Phys. Solids **84**, 469–505 (2015)

[173] Rodiac, R., Sandier, E.: Insertion of bubbles at the boundary for the Ginzburg–Landau functional. J. Fixed Point Theory Appl. **15**(2), 587–606 (2014)

[174] Runst, T., Sickel, W., Sobolev spaces of fractional order, Nemytskij operators, and nonlinear partial differential equations. de Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications **3**, Walter de Gruyter & Co., Berlin (1996)

[175] Rybalko V.: Local minimizers of the magnetic Ginzburg-Landau functional with S^1-valued order parameter on the boundary. J. Math. Phys., Anal., Geom. **10**(1), 134–151 (2014)

[176] Rybalko, V.: Spectral problems for singularly perturbed operators with oscillating coefficients. In: International Conference in Honor of Vladimir A. Marchenko's 90th birthday "Spectral Theory and Differential

Equations"(STDE-2012). Book of Abstracts, p. 92, Kharkiv, Ukraine, 20 - 24 August 2012

[177] Rybalko V. Critical points of the Ginzburg–Landau functional with semi-stiff boundary conditions, II International Conference “Analysis and Mathematical Physics”. Book of Abstracts, p. 23, Kharkiv, Ukraine, 16-20 June 2014

[178] Rybalko V. On the first eigenpair of singularly perturbed operators with Neumann boundary condition, III International Conference “Analysis and Mathematical Physics”. Book of Abstracts, pp. 13-14, Kharkiv, Ukraine, 15-19 June 2015

[179] Sacks, J., Uhlenbeck, K.: The existence of minimal immersions of 2-spheres. Ann. Math. **113**(1), 1–24 (1981)

[180] Sandier, E., Serfaty, S.: Global Minimizers for the Ginzburg-Landau Functional below the First Critical Magnetic Field. Annales IHP, Analyse non linéaire **17**, 119–145 (2000)

[181] Sandier, E., Serfaty, S.: Gamma-convergence of gradient flows with applications to Ginzburg-Landau, Commun. Pure Appl. Math. **57**(12), 1627–1672 (2004).

[182] Sandier, E., Serfaty, S.: Vortices in the magnetic Ginzburg-Landau model. Birkhäuser (2007)

[183] Serfaty, S.: Stability in 2D Ginzburg-Landau Passes to the limit, Indiana Univ. Math. J. **54**(1), 199–221 (2005)

[184] Serfaty, S.: Vortices in the Ginzburg-Landau model of superconductivity. International Congress of Mathematicians. Vol. III, 267–290, Eur. Math. Soc., Zurich, 2006.

[185] Serfaty, S.: Gamma-convergence of gradient flows on Hilbert and metric spaces and applications. Disc. Cont. Dyn. Systems A **31**(4), 1427–1451 (2011)

[186] Serrin, J.: The problem of Dirichlet for quasilinear elliptic differential equations with many independent variables. Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A **264**, 413–496 (1969)

[187] Schoen, R.: Conformal deformation of a Riemannian metric to constant scalar curvature. J. Differ. Geom. **20**(20), 478–495 (1984)

[188] Shao, D., Levine, H., Rappel, J. W. Coupling actin flow, adhesion, and morphology in a computational cell motility model. Proc. Nat. Acad. Sci. **109**(18), 6851–6856 (2012)

[189] Shao, D., Rappel, W.J., Levine, H. Computational model for cell morphodynamics. Phys. Rev. Lett. **105**, 108104 (2010)

[190] Showalter, R.E.: Monotone operators in Banach space and nonlinear partial differential equations. Mathematical Surveys and Monographs, **49**. American Mathematical Society (1997)

[191] Soner, H.M.: Optimal control with state-space constraint. I. SIAM J. Control Optim. **24** (3), 552–561 (1986)

[192] Struwe, M.: A global compactness result for elliptic boundary value problems involving limiting nonlinearities. Math. Z. **187**(4), 511–517 (1984)

[193] Sruwe, M.: On the asymptotic behavior of minimizers of the Ginzburg-Landau model in 2 dimensions. Differ. Integral Equ. **7**(5-6), 1613-1624 (1994)

[194] Suzuki, T.: Global analysis for a two-dimensional elliptic eigenvalue problem with the exponential nonlinearity. Annales de l'I.H.P. Analyse non linéaire **9**(4), 367–397 (1992)

[195] Taubes, C.: Arbitrary N-vortex solutions to the first order Ginzburg- Landau equations. Comm. Math. Phys. **72**, 277–292 (1980)

[196] Taubes, C.H.: Path connected Yang–Mills moduli spaces. J. Diff. Geom. **19**, 337–392 (1984)

[197] Trudinger, N.: Remarks concerning the conformal deformation of Riemannian structures on compact manifolds. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3) **22**(2), 265–274 (1968)

[198] Vanderlei, B., Feng, J.J., Edelstein-Keshet, L.: A computational model of cell polarization and motility coupling mechanics and biochemistry. Multiscale Model. Simul. **9**(4), 1420–1443 (2011)

[199] Vishik, M.I., Lyusternik, L.A.: Regular degeneracy and boundary layer for linear differential equations with a small parameter. Usp. Mat. Nauk, **12**(5), 3–122 (1957)

[200] Wente, H.C.: An existence theorem for surfaces of constant mean curvature, J. Math. Anal. Appl. **26**, 318–344 (1969)

[201] White, B.: Homotopy classes in Sobolev spaces and the existence of energy minimizing maps. Acta Math. **160**, 1-17 (1988)

[202] Winkler, M.: The two-dimensional keller-segel system with singular sensitivity and signal absorption: global large data solutions and their relaxation properties. Math. Models Methods Appl. Sci. **26**, 987–1024 (2016)

[203] Winkler, M., Djie, K.C.: Boundedness and finite-time collapse in a chemotaxis system with volume-filling effect. Nonlinear Anal.-Theor. **72**(2), 1044–1064 (2010)

[204] Yamabe, H.: On a deformation of Riemannian structures on compact manifolds. Osaka Math. J. **12**(1), 21–37 (1960)

[205] Ziebert, F., Aranson, I.: Effects of adhesion dynamics and substrate compliance on the shape and motility of crawling cells. PLoS ONE **8**(5), e64511 (2013)

[206] Ziebert, F., Swaminathan, S., Aranson, I.S.: Model for self-polarization and motility of keratocyte fragments. J. R. Soc. Interface **9**, 1084–1092 (2012)

Додаток А

Доведення Теореми 1.2.3 у загальному випадку

Виберемо $\Lambda > 0$ і ціле $d > 0$ такі що $\Lambda > I_0(d, G)$, і позначимо через $æ_0$ найбільше ціле число що задовольняє

$$I_0(d, A) + \pi æ_0 < \Lambda.$$

Ясно, що $æ_0 \geq 0$. Далі буде доведено, що для достатньо малих ε інфімум в (1.2.6) завжди досягається, якщо p, q задовольняють нерівності

$$æ(p, q) \leq æ_0 \quad \text{i} \quad p \leq d, \; q \leq d, \tag{A.1}$$

де $æ(p, q) = |d - q| + |d - p|$.

Твердження А.1. *Нехай задані цілі $K \leq æ_0$ і $p \leq q$, $q \leq d$ такі що $æ(p, q) \leq K$. Тоді, для достатньо малих ε інфімум в задачі (1.2.6) завжди досягається і*

$$m_\varepsilon(p, q, d) \leq m_\varepsilon(l, m, d) + \pi((l - p) + (m - q)) \quad \text{коли} \quad p \leq l \leq d, \; q \leq m \leq d. \tag{A.2}$$

Більш того, нерівність в (А.2) завжди є строгою крім випадку коли $l = p$ і $m = q$.

Доведення. Застосуємо індукцію за K. Базу індукції (K=0) було встановлено в Підрозділі 1.2.4 (див. Лему 1.2.16). Обгрунтування індуктивного переходу базується на наступній лемі, яку буде доведено в кінці Додатка А.

Лема А.2. *Припустимо, що цілі p і q задоволняють (А.1), і для $\varepsilon < \varepsilon_5$, $\varepsilon_5 > 0$, існує мінімізант u_ε задачі (1.2.6) чия енергія $E_\varepsilon(u_\varepsilon)$ задовольняє оцінку (1.2.66). Тоді для всіх $\varepsilon < \min\{\varepsilon_4, \varepsilon_5\}$ (де ε_4 – таке як в Лемі 1.2.22) існує $v_\varepsilon \in \mathcal{J}_{p(q-1)}$ таке що $\Phi(v_\varepsilon) \in (d-1/2, d+1/2)$ і*

$$E_\varepsilon(v_\varepsilon) < m_\varepsilon(p,q,d) + \pi. \tag{A.3}$$

Аналогічно, існує тестова функція v_ε в $\mathcal{J}_{(p-1)q}$, така що $\Phi(v_\varepsilon) \in (d-1/2, d+1/2)$ і є вірною нерівність (А.3).

З огляду на Лему А.2, для доведення Твердження А.1 для $K+1$ замість K достатньо показати, що $m_\varepsilon(p, q-1, d)$ завжди досягається для достатньо малих ε якщо $p \leq d$, $q \leq d$ і $æ(p,q) = K$ (той факт, що $m_\varepsilon(p-1, q, d)$ також досягається, доводиться так само). Нехай u – слабка H^1-границя мінімізуючої послідовності $(u^{(k)})$. Завдяки Лемі А.2 така мінімізуюча послідовність існує, більш того, з цієї Леми і приущення індукції випливає, що

$$\limsup_{k\to\infty} E_\varepsilon(u^{(k)}) < m_\varepsilon(l', m', d) + \pi(l'-p) + \pi(m'-(q-1)), \tag{A.4}$$

де $p \leq l' \leq d$, $q-1 \leq m' \leq d$ і $æ(l',m') \leq K$. Для $\varepsilon < \varepsilon_0$ (де $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\Lambda)$ – таке як в Твердженні 1.2.2) $\Phi(u) = \lim_{k\to\infty} \Phi(u^{(k)}) \in (d-1/2, d+1/2)$, отже u є розв'язком рівняння (1.2.1) (див. міркування в Лемі 1.2.16). Запишемо очевидну нерівність $\liminf_{k\to\infty} E_\varepsilon(u^{(k)}) \leq \limsup_{k\to\infty} E_\varepsilon(u^{(k)})$ і застосуємо до її лівої частини послідовно Лему 1.2.8 і Лему 1.2.15, а в правій частині скорисаємось (А.4) з $l' = m' = d$, в результаті отримуємо

$$I_0(d,A) - \frac{\pi}{2} + \pi æ(l,m) + \pi(|l-p| + |m-(q-1)|) \leq m_\varepsilon(d,d,d) + \pi æ(p, q-1),$$

де $l = \deg(u, \partial\omega)$, $m = \deg(u, \partial\Omega)$. Разом з цим має місце оцінка $m_\varepsilon(d,d,d) \leq I_0(d,A)$ (див. Лему 1.2.13), таким чином $|l-d| + |l-p| \leq |p-d| + 1/2$ і $|m-d| + |m-(q-1)| \leq |(q-1)-d| + 1/2$. Звідси витікає, що $p \leq l \leq d$, $q-1 \leq m \leq d$, оскільки l і m є цілими. Припустимо тепер що $l \neq p$ або $m \neq q-1$, тоді застосуємо Лему 1.2.8 і оцінку (A.4) з $l' = l$, $m' = m$, в результаті маємо

$$\begin{aligned} E_\varepsilon(u) + \pi(l-p) + \pi(m-(q-1)) &\le \liminf_{k\to\infty} E_\varepsilon(u^{(k)}) \\ &< m_\varepsilon(l,m,d) + \pi(l-p) + \pi(m-(q-1)). \end{aligned}$$

З іншого боку $u \in \mathcal{J}_{lm}$ і $\Phi(u) \in [d-1/2, d+1/2]$. Отже $E_\varepsilon(u) \ge m_\varepsilon(l,m,d)$ – протиріччя. Таким чином $l = p$ і $m = q-1$, тобто u є допустимою тестовою функцією в задачі (1.2.6) так що інфімум $m_\varepsilon(p, q-1, d)$ завжди досягається.$\square$

Доведення Леми A.2. Для спрощення позначень будемо опускати індекс ε. Основна ідея доведення полягає в модіфікації мінімізанта u задачі (1.2.6) в околі $\partial\Omega$ подібно тому як в Твердженні 1.2.17 (дів. Підрозділ 1.2.5). Оскільки u тепер може мати нулі конструкція є технічно більш складною. В наступних декількох кроках буде побудовано функцію v з додатковим нулем (вихорем) біля x^*, де x^* – точка на $\partial\Omega$ така що $\frac{\partial h}{\partial \nu}(x^*) > 0$ (див. Лему 1.2.22).

Крок I(Декомпозиція області). Зафіксуємо $\delta > 0$, таке що $1-\delta$ є регулярним значенням h (за лемою Сарда цій вимозі задовольняють майже всі δ). Розглянемо підобласть G де $h > 1-\delta$. Існує (єдина) зв'язна компонента D_δ цієї підобласті, така що $\partial D_\delta \supset \partial\Omega$. Оскільки $h(\partial\Omega) = 1 > h(\partial\omega)$, для достатньо малих δ межа області D_δ містить зв'язну компоненту $\Gamma_\delta \ne \partial\Omega$, що охоплює ω. Завдяки Лемі 1.2.22 можна вибрати δ достатньо малим $\delta < \delta_0$ ($\delta_0 > 0$) так що область обмежена Γ_δ і $\partial\Omega$ не перетинається з контуром $\mathcal{L}$,крім того якщо $\rho(x)(= |u(x)|)$ має нуль в точці x цієї області, то $h(x) > 1$. Тоді h не локальних мінімумів в цій області (h задовольняє рівняння $\operatorname{div}(\frac{1}{\rho^2}h) = 0$). Таким чином $h > 1-\delta$ в області обмеженій Γ_δ і $\partial\Omega$, тобто ця область співпадає з D_δ. Крім того множина $P = \{x \in D_\delta;\, h(x) \ge 1\}$ не залежить від δ для $\delta < \hat{\delta}_0$ ($0 < \hat{\delta}_0 < \delta_0$). Дійсно, розглянемо множину $S_\delta = \{x \in G; h(x) > \alpha\} \cap D_\delta$ ($0 < \delta < \delta_0$), де α – регулярне значення h і $1 < \alpha < 9/8$. S_δ складається з скінченого набору з $n(\delta)$ зв'язних компонент. Оскільки $D_\delta \supset D_{\delta'}$ для $\delta > \delta'$, функція $n(\delta)$ не зростає, тоді $n(\delta) = \lim_{\delta'\to 0} n(\delta')$ при $0 < \delta < \delta_0$ (для деякого $\delta_0 > 0$) і $S_\delta = S_{\delta'}$ якщо $\delta, \delta' \in (0, \delta_0)$. Відсіля випливає, що $1-\delta < h < \alpha$ в $D_\delta \setminus D_{\delta'}$ коли $0 < \delta' < \delta < \delta_0$.

Для таких δ і δ' функція h задовольняє $\mathrm{div}(\frac{1}{\rho^2}h) = 0$ в $D_\delta \setminus D_{\delta'}$ (згідно Леми 1.2.22), у той самий час $h < 1$ на межі області $D_\delta \setminus D_{\delta'}$, отже $h < 1$ в $D_\delta \setminus D_{\delta'}$. Таким чином $\{x \in D_\delta; h(x) \geq 1\} = P := \cap_{\delta'<\delta_0} D_{\delta'}$ коли $0 < \delta < \delta_0$.

Визначимо для $\delta < \delta_0$ ціле число

$$d' := \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_\delta} \frac{\partial h}{\partial \nu}\frac{\mathrm{d}s}{\rho^2} = \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_\delta} \frac{u}{|u|} \times \frac{\partial}{\partial \tau}\frac{u}{|u|}\mathrm{d}s = \deg(u, \Gamma_\delta).$$

Воно є додатним ($1 - \delta = h(\Gamma_\delta)$ є регулярним значенням h і $h > 1 - \delta$ в D_δ, крім того $\mathrm{div}(\rho^{-2}\nabla h) = 0$ в $D_\delta \setminus P$, отже $\frac{\partial h}{\partial \nu} > 0$ на Γ_δ) і d' не залежить від δ. Тоді функція u може бути представленою у вигляді $u = \rho e^{id'\theta}$ в $G_\delta = D_\delta \setminus P$, де $\theta : G_\delta \to \mathbb{D}R \setminus 2\pi\mathbb{D}Z$ – гладка функція і $\rho > 0$ в $\overline{G}_\delta$.

Без втрати загальності можемо вважати, що $u(x^*) = 1$. Оскільки $\frac{\partial h}{\partial \nu}(x^*) > 0$, то маємо $|\nabla h| > 0$ в $G \cap G'$ для деякого околу G' точки x^*. Можна вибрати G' таким, що область $G \cap G'$ є однозв'язною і $\rho > 0$ в $G \cap G'$. Тоді, оскільки $\nabla h = -d'\rho^2\nabla^\perp\theta$, відображення $x \mapsto (h, \theta)$ є C^1-діффіоморфізмом області $G \cap G'$ на її образ. Виберемо однозначну вітку θ в $G \cap G'$ умовою $\theta(x^*) = 0$. Покладемо $G'_\delta := \{x \in G \cap G'; 1 - \delta < h < 1,\ \theta \in (-\delta, \delta)\}$ і будемо розглядати настільки малі δ, що $\overline{G'_\delta} \subset G'$.

Якщо $1 - \delta' \in (1 - \delta, 1)$ є регулярним значенням функції h, то $\frac{\partial \theta}{\partial \tau} > 0$ на $\Gamma_{\delta'}$ і

$$\int_{\Gamma_{\delta'}} \frac{\partial \theta}{\partial \tau} ds = 2\pi.$$

Звідси випливає, що $\theta(x) \notin (-\delta, \delta) + 2\pi\mathbb{D}Z$ в $G_\delta \setminus G'_\delta$, тобто

$$x \in G'_\delta \Longleftrightarrow x \in G_\delta, 1 - \delta < h(x) < 1, \theta(x) \in (-\delta, \delta) + 2\pi\mathbb{D}Z.$$

Таким чином $G = G'_\delta \cup G''_\delta \cup (G \setminus G_\delta)$ (див. Рисунок A.1), де $G''_\delta = G_\delta \setminus G'_\delta$.

Крок II (конструкція тестової функції). Тестову функцію v in виберемо у вигляді

$$v = \begin{cases} u & \text{в } G \setminus G_\delta, \\ \rho w_t & \text{в } G_\delta, \end{cases} \tag{A.5}$$

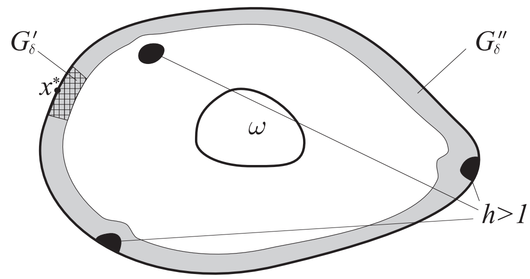

Рис. A.1: Декомпозиція області.

де $w_t = w_t(h(x), \theta(x))$ буде визначено нижче, $t > 0$. На межі ∂G_δ задаємо наступні крайові умови:

$$w_t = \mathrm{e}^{id'\theta} \frac{\mathrm{e}^{-i\theta} - (1 - t\varphi(\theta))}{\mathrm{e}^{-i\theta}(1 - t\varphi(\theta)) - 1} \quad \text{on} \quad \partial G_\delta \setminus \Gamma_\delta \tag{A.6}$$

$$w_t = \mathrm{e}^{id'\theta} \quad \text{on} \quad \Gamma_\delta, \tag{A.7}$$

де $0 \leq \varphi \leq 1$ – гладка 2π-періодична зрізаюча функція, така що $\varphi(\theta) = 1$ для $\theta \in (-\delta/2, \delta/2)$ і $\varphi(\theta) = 0$ якщо $\theta \notin (-\delta, \delta) + 2\pi\mathbb{D}Z$. Припустимо, що $w_t = w_t(h, \theta)$ є гладкою 2π-періодичною за θ функцією, визначеною в полосі $1 - \delta \leq h \leq 1$, і w_t задовольняє (A.6) і (A.7) коли $h = 1$ і $h = 1 - \delta$, відповідно. Тоді (A.5) задає для $0 < t < 1$ функцію $v \in H^1(G; \mathbb{D}R^2)$, таку що $|v| = 1$ на ∂G і

$$\deg\,(v, \partial\Omega) = q - 1, \quad \deg\,(v, \partial\omega) = p. \tag{A.8}$$

Розкладемо (A.6) в ряд

$$\mathrm{e}^{id'\theta} \frac{\mathrm{e}^{-i\theta} - (1 - t\varphi(\theta))}{\mathrm{e}^{-i\theta}(1 - t\varphi(\theta)) - 1} = (1 - tb_{-1}(t))\mathrm{e}^{id'\theta} + t \sum_{k \neq -1} b_k(t) \mathrm{e}^{-i(k - d' + 1)\theta}, \tag{A.9}$$

і визначимо $w_t(h, \theta)$:

$$w_t(h, \theta) = (1 - tb_{-1}(t) f_{-1}(h))\mathrm{e}^{id'\theta} + t \sum_{k \neq -1} b_k(t) f_k(h) \mathrm{e}^{-i(k - d' + 1)\theta}, \tag{A.10}$$

де функції f_k задаються (1.2.62) з $k_\pm(k) = \pm \dfrac{1}{d'} \sqrt{(k - d' + 1)^2 + \lambda - d'^2}$. Значення параметрів $t < 1$ і $\lambda \geq 2d'^2$ будуть вибрані нижче. Для коефіцієнтів $b_k(t)$ є справедливими наступні оцінки

$$|b_k(t) - c_k(t)| \leq C(1+|k|)^{-n},\ \forall n > 0, \tag{A.11}$$

де $C = C(n)$ не залежить від t, і $c_k = (t-2)(1-t)^k$ для $k \geq 0$, $c_{-1} = 1$, $c_k = 0$ для $k < -1$. Зазначимо, що c_k є коефіцієнтами Фур'є функції $\mathrm{e}^{id'\theta}(\mathrm{e}^{-i\theta} - (1-t))/(\mathrm{e}^{-i\theta}(1-t)-1)$ і оцінки (A.11) неважко отримати інтегруванням частинами в формулах для коефіцієнтів Фур'є.

Крок III (перевірка (A.3)). З Леми 1.2.18 випливає, що

$$E_\varepsilon(v) = E_\varepsilon(u) + L_\varepsilon^{(d')}(w_t, G_\delta)$$

де функціонал $L_\varepsilon^{(d')}(w)$ визначено в (1.2.51). Покажемо, що для достатньо малих t

$$L_\varepsilon^{(d')}(w_t, G_\delta) < \pi. \tag{A.12}$$

Для цього, як і в доведенні Твердження 1.2.17, розглянемо квадратичний функціонал

$$M'_\lambda(w_t) = \frac{1}{2}\int_{G_\delta}(d'^2|\partial_r w_t|^2 + |\partial_\theta w_t|^2 + \lambda|w_t - \mathrm{e}^{i\theta}|^2 - d'^2|w_t|^2)\rho^2|\nabla\theta|^2 \mathrm{d}x. \tag{A.13}$$

(нескладно показати, що w_t мінімізує функціонал (A.13) з крайовими умовами (A.6), (A.7).) Оскільки $\nabla h = -d'\rho^2\nabla^\perp\theta$ в G_δ і $\rho \leq 1$ в G,

$$\int_{G_\delta}\rho^2|\nabla w_t|^2 \mathrm{d}x \leq \int_{G_\delta}(d'^2|\partial_r w_t|^2 + |\partial_\theta w_t|^2)\rho^2|\nabla\theta|^2 \mathrm{d}x. \tag{A.14}$$

Покладемо

$$\lambda = \max\left\{\frac{9}{2\varepsilon^2 \min_{\overline{G'_\delta}}|\nabla\theta|^2},\ 2d'^2\right\},$$

тоді припускаючи, що $|w_t| \leq 2$ в G'_δ, наступна поточкова нерівність $2\varepsilon^2\lambda|w_t - \mathrm{e}^{i\theta}|^2|\nabla\theta|^2 \geq \rho^2(|w_t|^2-1)^2$ є вірною в G'_δ (див. доведення Твердження 1.2.17). Таким чином

$$L_\varepsilon^{(d')}(w_t, G_\delta) \leq M'_\lambda(w_t) + \frac{1}{4\varepsilon^2}\int_{G''_\delta}\rho^4(|w_t|^2-1)^2 \mathrm{d}x. \tag{A.15}$$

Для доведення (A.12) застосовується наступна формула

$$M'_\lambda(w_t) = \frac{t^2\pi}{d'} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |b_k(t)|^2 F'_k(f_k), \tag{A.16}$$

де функціонали F'_k задаються тією ж самою формулою (1.2.61), що і F_k, але з d' замість d. Представлення (A.16) є аналогом (1.2.60), воно випливає безпосередньо з наступної леми.

Лема A.3. *Нехай $f, g \in C^1([1-\delta, 1]; \mathbb{D}C)$, тоді для всіх цілих n, m*

$$\int_{G_\delta} f(h)\mathrm{e}^{in\theta}\overline{g(h)\mathrm{e}^{im\theta}}\,\rho^2|\nabla\theta|^2\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & \textit{якщо} \quad n \neq m \\ \dfrac{2\pi}{d'}\displaystyle\int_{1-\delta}^{1} f(s)\bar{g}(s)\mathrm{d}s, & \textit{якщо} \quad n = m. \end{cases}$$

Доведення. Розглянемо довільні регулярні значення α, β функції h, такі що $1-\delta \leq \alpha < \beta \leq 1$. Нехай $n \neq m$. Користуючись поточковими рівностями $\nabla h \cdot \nabla\theta = 0$ і div $(\rho^2\nabla\theta) = 0$ в G_δ, отримуємо

$$\begin{aligned} \int_{\hat{G}_\delta^{\alpha,\beta}} f\mathrm{e}^{in\theta}\overline{g\mathrm{e}^{im\theta}}\,\rho^2|\nabla\theta|^2\mathrm{d}x &= \frac{-i}{n-m}\int_{\hat{G}_\delta^{\alpha,\beta}} \nabla\theta\cdot\nabla\mathrm{e}^{i(nm)\ theta} f\bar{g}\rho^2\mathrm{d}x \\ &= \frac{i}{n-m}\int_{\hat{G}_\delta^{\alpha,\beta}} \mathrm{div}\ (\rho^2\nabla\theta) f\bar{g}\mathrm{e}^{i(n-m)\theta}\mathrm{d}x \\ &\quad + \frac{i}{n-m}\int_{\hat{G}_\delta^{\alpha,\beta}} \nabla\theta\cdot\nabla h(f'\bar{g} + f\bar{g}')\mathrm{e}^{i(n-m)\theta}\rho^2\mathrm{d}x = 0, \end{aligned} \tag{A.17}$$

де $\hat{G}_\delta^{\alpha,\beta} = \{x \in G_\delta;\ \alpha < h(x) < \beta\}$. Для $n = m$ покладемо $F(h) = \int_\alpha^r f(s)\bar{g}(s)ds$, тоді оскільки $|\nabla h| = d'\rho^2|\nabla\theta|$,

$$\begin{aligned} \int_{\hat{G}_\delta^{\alpha,\beta}} f(h)\bar{g}(h)\rho^2|\nabla\theta|^2\mathrm{d}x &= \frac{1}{d'^2}\int_{\hat{G}_\delta^{\alpha,\beta}} \nabla(F(h))\cdot\nabla h\frac{\mathrm{d}x}{\rho^2} = \frac{1}{d'^2}F(\beta)\int_{h=\beta}\frac{\partial h}{\partial\nu}\frac{\mathrm{d}s}{\rho^2} \\ &- \frac{1}{d'^2}\int_{\hat{G}_\delta^{\alpha,\beta}} \mathrm{div}\ (\frac{1}{\rho^2}\nabla h)F(h)\mathrm{d}x = \frac{2\pi}{d'}\int_\alpha^\beta f(s)\bar{g}(s)\mathrm{d}s, \end{aligned} \tag{A.18}$$

де використано той факт, що div $(\frac{1}{\rho^2}\nabla h) = 0$ в G_δ. Твердження Леми знаходимо переходом до границі $\alpha \to 1-\delta$, $\beta \to 1$ в (A.17, A.18). $\square$

Користуючись (A.11) в (A.16) обчислимо

$$M'_\lambda(w_t) = \frac{t^2\pi}{d'} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k(t)|^2 \Phi'_k(f_k) + O(t^2) = \pi((1-t)^2-1)^2 \sum_{k=0}^{\infty} k(1-t)^{2k}$$
$$+ 2\pi t^2(\lambda - d'^2) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1-t)^{2k}}{k} + O(t^2) = \pi - 2\pi t + o(t). \quad \text{(A.19)}$$

Явні обчислення також показують, що

$$|w_t - \mathrm{e}^{id'\theta}| \leq Ct \text{ коли } \theta \notin (-\alpha, \alpha) + 2\pi\mathbb{D}Z, \quad \text{(A.20)}$$

для $0 < \alpha < 2\pi$, де C не залежить від t. З (A.20) знаходимо що другий доданок в (A.15) є величиною порядку $O(t^2)$ для $t \to 0$. Комбінуючи це з (A.19) завершуємо доведення (A.12).

Крок IV. Доведення оцінки (A.15) проведено в припущенні, що $|w_t| < 2$ в G''_δ. Цього завжди можна досягти якщо замінити w_t на $\tilde{w}_t := w_t \min\{1, 2/|w_t|\}$, тоді ні перший доданок в (A.15) ні другий не збільшиться. Таким чином для завершення доведення Леми залишається тільки показати, що функція v задана рівністю (A.5) задовольняє $d - 1/2 \leq \Phi(v) \leq d + 1/2$ для достатньо малих t. Дійсно, з (A.20) витікає, що w_t слабко H^1-збігається до $\mathrm{e}^{id'\theta}$. Тоді $\|u - v\|_{L^2(G)}$ прямує до 0 при $t \to 0$, і, згідно з Лемою 1.2.9, $\Phi(v)$ стає близьким до $\Phi(u)$ для малих t, тоді як $d - 1/2 < \Phi(u) < d + 1/2$. $\square$

Додаток В

Асимптотична поведінка мінімізантів задачі (1.3.8)

Кожен мінімізант задачі (1.3.8) має щонайменше $|d|$ вихорів, оскільки степінь відображення d є приписаним на межі. Наступний результат описує поведінку мінімізантів та їх вихорів при $\lambda \to 1-0$.

Теорема B.1. *Для заданого цілого d, нехай (u^λ, A^λ) – мінімізант (1.3.8) для $\lambda < 1$. Тоді, для $\lambda \to 1-0$, (u^λ, A^λ) збігається до (u, A) сильно в $H^1(\Omega;\mathbb{C}) \times H^1(\Omega;\mathbb{R}^2)$ (з точністю до підпослідовності), де $(u, A) \in \mathcal{J}_d$ характеризується наступними властивостями:*

(a) (u, A) є мінімізантом (1.3.8) для $\lambda = 1$ (що описано в Твердженні 1.3.2), тобто $u = \gamma a(x;\xi_1)\dots a(x;\xi_d)e^{\varphi/2}$, де φ є розв'язком (1.4.17);

(b) точки $\xi_1 \dots \xi_d$ (вихорі u) максимізують функцію

$$\psi(\xi_1, \dots, \xi_d) = \int_\Omega \left(1 - |a(x;\xi_1)a(x;\xi_2)\dots a(x;\xi_d)|^2 e^{\varphi}\right)^2 \mathrm{d}x \tag{B.1}$$

серед $\xi_1, \dots, \xi_d \in \Omega$. Іншими словами (внаслідок структури мінімізантів для $\lambda = 1$, що описано в Твердженні 1.3.2) (u, A) є мінімізантом (1.3.8) для $\lambda = 1$ який максимізує $\int_\Omega |\mathrm{curl} A|^2 \, \mathrm{d}x$ серед всіх мінімізантів.

Крім того, вихорі u^λ збігаються до вихорів u.

Зауваження B.2. Розв'язок φ задачі (1.4.17) неперервно (відносно $H^1(\Omega)$-норми) залежить від $\xi_1, \dots \xi_d$, значить $\psi \in C(\Omega^d)$. В процесі доведення Теореми B.1 буде показано, що максимум ψ досягається на деякій компактній множині $K \subset\subset \Omega^d$.

Доведення. Доведення Теореми B.1 базується на асимптотичному розвиненні енергії в околі критичного значення $\lambda = 1$.

Доведення розіб'ємо на декілька кроків. Для визначеності будемо вважати, що $d > 0$ (випадок $d = 0$ є тривіальним, а випадок $d < 0$ розглядається аналогічно $d > 0$).

Крок I (слабка-H^1 збіжність (u^λ, A^λ) до мінімізанту (1.3.8) для $\lambda = 1$). З Наслідку 1.3.5 випливає, що $F_\lambda[u^\lambda, A^\lambda] = m_d(\lambda) < \pi d$. З цієї оцінки і (1.3.3) витікає, що $\|u^\lambda\|_{H^1} + \|A^\lambda\|_{H^1} \leq C$, де C не залежить від λ. Отже, з точністю до підпослідовності за якою збережемо позначення (u^λ, A^λ),

$$(u^\lambda, A^\lambda) \rightharpoonup (u, A) \text{ слабко в } H^1(\Omega; \mathbb{C}) \times H^1(\Omega; \mathbb{R}^2) \text{ коли } \lambda \to 1 - 0,$$

для деякої пари $(u, A) \in \mathcal{J}$. Зокрема, внаслідок теореми про вкладення Соболевських просторів, маємо

$$\int_\Omega (|u^\lambda|^2 - 1)^2 \,\mathrm{d}x \to \int_\Omega (|u|^2 - 1)^2 \,\mathrm{d}x, \text{ коли } \lambda \to 1 - 0. \tag{B.2}$$

Скористаємося тепер (B.2) і слабкою напівнеперервністю доданку $F^+[u, A]$ в (1.3.9),

$$\pi d \geq \pi d + \liminf_{\lambda \to 1-0} \Big(F^+[u^\lambda, A^\lambda] - \frac{1-\lambda}{8} \int_\Omega (|u^\lambda|^2 - 1)^2 \,\mathrm{d}x \Big) \geq \pi d + F^+[u, A].$$

Звідсіля $\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} + \frac{A_2 - iA_1}{2} u = 0$ і $\mathrm{curl} A + \frac{|u|^2 - 1}{2} = 0$ в Ω, таким чином (u, A) мінімізує $F_1[v, B]$ серед $(v, B) \in \mathcal{J}_{d'}$ для $d' = \deg(u, \partial\Omega)$. З іншого боку, внаслідок (B.2) і слабкої напівнеперервності $F_1[u, A]$ маємо

$$\pi d \geq \liminf_{\lambda \to 1-0} F_\lambda[u^\lambda, A^\lambda] = \liminf_{\lambda \to 1-0} F_1[u^\lambda, A^\lambda] \geq F_1[u, A] = \pi d',$$

звідки $d \geq d'$.

Покажемо, що $d' = d$. Припустимо від супротивного, що $d' < d$. Оскільки пара (u, A) є розв'язком (1.3.6)–(1.3.7) (з $\lambda = 1$), маємо $|u| \leq 1$ внаслідок принципа максимума. Проітеруємо $d - d'$ разів твердження (i) Леми 1.3.3, в результаті отримуємо пару $(v, B) \in \mathcal{J}_d$, таку що $F^+[v, B] = 0$ і

$$\int_\Omega (|v|^2 - 1)^2 \mathrm{d}x > \int_\Omega (|u|^2 - 1)^2 \mathrm{d}x. \tag{B.3}$$

Оскільки $(v, B) \in \mathcal{J}_d$ і $F^+[v, B] = 0$,

$$F_\lambda[u^\lambda, A^\lambda] \le F_\lambda[v, B] = \pi d - \frac{1-\lambda}{8}\int_\Omega (|v|^2-1)^2 dx,$$

де використано (1.3.9). З іншого боку,

$$F_\lambda[u^\lambda, A^\lambda] = \pi d + F^+[u^\lambda, A^\lambda] - \frac{1-\lambda}{8}\int_\Omega (|u^\lambda|^2-1)^2 \mathrm{d}x \ge \pi d - \frac{1-\lambda}{8}\int_\Omega (|u^\lambda|^2-1)^2 \mathrm{d}x.$$

Об'єднуючи ці оцінки отримуємо

$$\frac{1-\lambda}{8}\int_\Omega (|u^\lambda|^2-1)^2 \mathrm{d}x \ge \frac{1-\lambda}{8}\int_\Omega (|v|^2-1)^2 dx,$$

або

$$\int_\Omega (|u^\lambda|^2-1)^2 \mathrm{d}x \ge \int_\Omega (|v|^2-1)^2 \mathrm{d}x. \tag{B.4}$$

Перейдемо до границі $\lambda \to 1-0$ в (B.4) користуючись (B.2),

$$\int_\Omega (|u|^2-1)^2 \mathrm{d}x \ge \int_\Omega (|v|^2-1)^2 \mathrm{d}x, \tag{B.5}$$

це протирічить (B.3). Таким чином, $d' = d$.

Крок II (нулі u максимізують (B.1)). Зазначимо, що (B.5) є справедливим для будь-якого v, такого що (v, B) є розв'язком (1.3.8) для $\lambda = 1$. Оскільки (u, A) є мінімізантом (1.3.8) для $\lambda = 1$, з Пропозиції 1.3.2 випливає, що $\psi(\xi_1', \dots, \xi_d') \le \psi(\xi_1, \dots, \xi_d)$ де $\xi_1', \dots, \xi_d'$ and $\xi_1, \dots, \xi_d$ - нулі v та u, відповідно.

Покажемо, що $\sup\{\psi(\xi_1, \dots, \xi_d);\ (\xi_1, \dots, \xi_d) \in \bar{\Omega}^d\}$ досягається у внутрішній точці Ω^d. Припустимо, від супротивного, що існує мінімізуюча послідовність $(\xi_1^{(n)}, \dots, \xi_d^{(n)}) \in \Omega^d$ яка збігається до $(\xi_1, \dots, \xi_k, \dots, \xi_d)$ і $\xi_1, \dots, \xi_k \in \Omega$ в той час коли $\xi_{k+1}, \dots, \xi_d \in \partial\Omega$, $k < d$. Тоді $|a(\,\cdot\,; \xi_1^{(n)}) \dots a(\,\cdot\,; \xi_d^{(n)})|^2 \to |a(\,\cdot\,; \xi_1) \dots a(\,\cdot\,; \xi_k)|^2$ в $L^p(\Omega)$, $\forall p > 1$, as $n \to \infty$. Більш того має місце збіжність розв'язків $\varphi = \varphi(x; \xi_1^{(n)}, \dots, \xi_d^{(n)})$ задачі (1.4.17) при $n \to \infty$,

$$\varphi(\,\cdot\,; \xi_1^{(n)}, \dots, \xi_d^{(n)}) \to \varphi(\,\cdot\,; \xi_1, \dots \xi_k) \text{ в } C^{1,\alpha}(\bar{\Omega}),\ \forall\, 0 < \alpha < 1,$$

де $\varphi(x; \xi_1, \dots, \xi_k)$ є єдиним розв'язком

$$\begin{cases} -\Delta\varphi + |a(x;\xi_1)\dots a(x;\xi_k)|^2 e^\varphi = 1 \text{ в } \Omega \\ \varphi = 0 \text{ на } \partial\Omega. \end{cases}$$

Дійсно, з принципу максимуму, застосованого до (1.4.17), маємо

$$0 < \varphi(x; \xi_1^{(n)}, \dots, \xi_d^{(n)}) \leq -2 \sum_j \log |a(x; \xi_j^{(n)})| \ \text{ в } \Omega.$$

Таким чином $0 < -\Delta\varphi(x; \xi_1^{(n)}, \dots, \xi_d^{(n)}) \leq 1$ і користуючись стандартними еліптичними оцінками отримуємо $\|\varphi(\,\cdot\,; \xi_1^{(n)}, \dots, \xi_d^{(n)})\|_{W^{2,p}} \leq C$ для всіх $p > 1$ з константою C, що не залежить від $\xi_1^{(n)}, \dots, \xi_d^{(n)}$. Це дозволяє перейти до границі коли $n \to \infty$ в задачі (1.4.17) для $\varphi(x; \xi_1^{(n)}, \dots, \xi_d^{(n)})$ і отримати бажаний результат про збіжність.

Таким чином, згідно з Твердженням 1.3.2,

$$(\tilde{u}, \tilde{A}) = (\gamma a(x, \xi_1), \dots, a(x, \xi_k) e^{\varphi(x; \xi_1, \dots, \xi_k)/2}, -\frac{1}{2}\nabla^{\perp}\varphi)$$

($\gamma = \mathrm{const} \in S^1$) є мінімізантом $F_1[u, A]$ в $\mathcal{J}_k$. Внаслідок Леми 1.3.3 існує пара $(v, B) \in \mathcal{J}_d$, така що $0 \leq F^+[v, B] \leq F^+[\tilde{u}, \tilde{A}] = 0$ (отже (v, B) є розв'язком задачі (1.3.8) для $\lambda = 1$) і

$$\psi(\xi_1', \dots, \xi_d') = \int_\Omega (|v|^2 - 1)^2 \,\mathrm{d}x > \int_\Omega (|\tilde{u}|^2 - 1)^2 \,\mathrm{d}x = \lim_{n \to \infty} \psi(\xi_1^n, \dots, \xi_d^n),$$

де $\xi_1', \dots, \xi_d'$ – нулі v. Це є протиріччям.

Крок III (збіжність вихорів). Було доведено, що $(u^\lambda, A^\lambda) \to (u, A)$ слабко в $H^1(\Omega; \mathbb{C}) \times H^1(\Omega; \mathbb{R}^2)$. Більш того, завдяки збіжності енергій $F_1[u^\lambda, A^\lambda] \to \pi d = F_1[u, A]$, маємо $(u^\lambda, A^\lambda) \to (u, A)$ сильно в $H^1(\Omega; \mathbb{C}) \times H^1(\Omega; \mathbb{R}^2)$.

Через специфічний вибір калібровки (1.3.3),

$$A^\lambda = -\frac{1}{2}\nabla^{\perp}\varphi^\lambda \text{ в } \Omega, \text{ де } \varphi^\lambda \text{ є розв'язком } \begin{cases} -\Delta\varphi^\lambda = 2\mathrm{curl} A^\lambda \text{ в } \Omega \\ \varphi^\lambda = 0 \text{ на } \partial\Omega. \end{cases}$$

З Пропозиції 1.3.2 випливає, що $u = \gamma a(x, \xi_1) \dots a(x, \xi_d) e^{\varphi/2}$, $A = -\frac{1}{2}\nabla^{\perp}\varphi$, де $\gamma = \mathrm{Const} \in S^1$. Покажемо, що $\|\varphi_\lambda - \varphi\|_{W^{2,p}} \to 0$ для кожного $p > 1$. Дійсно, з сильної-H^1 збіжності u^λ до u і A^λ до A разом з поточковими оцінками $|u^\lambda| \leq 1$, $|u| \leq 1$ в Ω випливає, згідно з другим рівнянням в (1.3.6), що

$$-\nabla^{\perp}(\mathrm{curl} A^\lambda) = (iu^\lambda, \nabla u^\lambda - iA^\lambda u^\lambda) \to (iu, \nabla u - iAu) \text{ сильно в } L^2(\Omega).$$

Отже, $\mathrm{curl}A^\lambda \to \mathrm{curl}A$ в $H^1(\Omega)$, звідки $\Delta\varphi_\lambda \to \Delta\varphi$ в $H^1(\Omega)$. Тепер шукана збіжність випливає завдяки стандартним еліптичним оцінкам і теоремі про вкладення соболєвських просторів. Зокрема маємо $\varphi^\lambda \to \varphi$ в $C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$ $(\forall 0 < \alpha < 1)$ та $A^\lambda \to A$ в $C(\bar{\Omega})$.

Покладемо $v^\lambda = u^\lambda e^{-\varphi_\lambda/2}$. Тоді

$$e^{\varphi_\lambda/2}\Delta v^\lambda = \Delta u^\lambda - \nabla u^\lambda \cdot \nabla\varphi_\lambda - \frac{1}{2}\Delta\varphi_\lambda u^\lambda + \frac{1}{4}|\nabla\varphi_\lambda|^2 u^\lambda,$$

і користуючись першим рівнянням в (1.3.6) (завдяки (1.3.3) його можна переписати як $\Delta u^\lambda = 2iA^\lambda \cdot \nabla u^\lambda + |A^\lambda|^2 u^\lambda - \frac{\lambda}{2}u^\lambda(1-|u^\lambda|^2)$) отримуємо сильну-$L^2(\Omega)$ збіжність

$$\Delta v^\lambda \to \Delta(ue^{-\varphi/2}) = \gamma\Delta(a(x;\xi_1)\dots a(x;\xi_d)) = 0.$$

Розглянемо тепер

$$\begin{cases} \Delta w^\lambda = 0 \text{ в } \Omega \\ w^\lambda = v^\lambda (= u^\lambda) \text{на } \partial\Omega. \end{cases}$$

Маємо $u^\lambda = v^\lambda e^{\varphi_\lambda/2} = e^{\varphi_\lambda/2}w^\lambda + e^{\varphi_\lambda/2}(v^\lambda - w^\lambda)$. Оскільки $\Delta(v^\lambda - w^\lambda) = \Delta v^\lambda \to 0$ сильно в $L^2(\Omega)$ і $v^\lambda - w^\lambda = 0$ на $\partial\Omega$, за допомогою стандартних еліптичних оцінок виводимо $\|v^\lambda - w^\lambda\|_{H^2} \to 0$. Зокрема $\|v^\lambda - w^\lambda\|_{C(\bar{\Omega})} \to 0$. З іншого боку, слід w^λ на $\partial\Omega$ збігається до сліда u сильно в $H^{1/2}(\partial\Omega)$. Тоді, користуючись результатом з [56] знаходимо, що $|w^\lambda| \geq 1/2$ у деякому фіксованому околі $\partial\Omega$. Отже існує компакт $K \Subset \Omega$, такий що всі нулі u^λ знаходяться в K. Разом з цим, $w^\lambda \to v^\lambda$ в $C^2_{loc}(\Omega)$ як можна показати за допомогою еліптичних оцінок. Таким чином нулі u^λ збігаються до нулів u. Це завершує доведення Теореми B.1. $\square$

Додаток C

Доведення Леми 1.4.6

В процесі доведення кілька разів буде використано формулу

$$\int_G |\nabla u|^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_G \Big|\frac{\partial u}{\partial \bar z}\Big|^2 \mathrm{d}x \\ + \pi(|u(\partial\Omega)|^2 \deg(u/|u|,\partial\Omega) - |u(\partial\omega)|^2 \deg(u/|u|,\partial\omega)), \quad \text{(C.1)}$$

що є справедливою для довільної функції $u \in H^1(G;\mathbb{C})$, що задовольняє $|u| = \mathrm{const} > 0$ на $\partial\Omega$ і на $\partial\omega$ (можливо інша константа). Щоб вивести (C.1) потрібно проінтегрувати поточкову рівність

$$|\nabla u|^2 = 2\frac{\partial u}{\partial x_1} \times \frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{1}{2}\Big|\frac{\partial u}{\partial \bar z}\Big|^2 = \frac{\partial}{\partial x_1}\Big(u \times \frac{\partial u}{\partial x_2}\Big) - \frac{\partial}{\partial x_2}\Big(u \times \frac{\partial u}{\partial x_1}\Big) + \frac{1}{2}\Big|\frac{\partial u}{\partial \bar z}\Big|^2$$

і скористатися інтегруванням частинами.

Почнемо з доведення такого допоміжного результату.

Лема C.1. *Має місце збіжність:*

$$|\theta^\lambda|^2 \to 1 \text{ *сильно в* } L^2(G) \text{ *коли* } \lambda \to 1-0 \quad \text{(C.2)}$$

і

$$\nabla\tilde\theta^\lambda \to 0 \text{ *в* } C_{\mathrm{loc}}(G;\mathbb{C}^2). \quad \text{(C.3)}$$

Доведення. Оскільки функція θ^λ є гармонічною, $\Delta\theta^\lambda = 0$ в G, маємо

$$\Delta|\theta^\lambda|^2 = 2|\nabla\theta^\lambda|^2 \geq 0 \text{ в } G. \quad \text{(C.4)}$$

Тоді внаслідок принципу максимуму $|\theta^\lambda| \le \max\{1, e^{\alpha^\lambda}\}$ в G. Крім того, згідно з (1.4.60),

$$\frac{1}{2}\int_G |\nabla\theta^\lambda|^2\,\mathrm{d}x = \pi + \frac{1}{4}\int_G \Big|\frac{\partial\theta^\lambda}{\partial\bar z}\Big|^2\,\mathrm{d}x \le \pi + C\varepsilon^2, \tag{C.5}$$

ду використано формулу (C.1). Таким чином $\|\theta^\lambda\|_{H^1(G;\mathbb{C})} \le C$ зі сталою C, що не залежить від λ. Звідси випливає, що, з точністю до виділення підпослідовності, $\theta^\lambda \to \theta$ слабко в $H^1(G;\mathbb{C})$, і $|\theta| = 1$ на ∂G. Крім того, з огляду на (1.4.60) і (C.5),

$$\int_G \Big|\frac{\partial\theta}{\partial\bar z}\Big|^2\,\mathrm{d}x = 0, \text{ тобто } \frac{\partial\theta}{\partial\bar z} = 0 \text{ в } G,$$

і

$$\frac{1}{2}\int_G |\nabla\theta|^2\,\mathrm{d}x \le \pi. \tag{C.6}$$

Тоді $\theta = \mathrm{const} \in \mathbb{S}^1$. Дійсно, оскільки $\frac{\partial\theta}{\partial\bar z} = 0$ в G, достатньо показати, що $|\theta| \equiv 1$ в G. Маємо $\Delta|\theta|^2 = 2|\nabla\theta|^2 + 2(\Delta\theta,\theta) = 2|\nabla\theta|^2 \ge 0$ в G і $|\theta| = 1$ на ∂G. Якщо ми припустимо, що $|\theta| \not\equiv 1$ в ∂G, тоді внаслідок Леми Хопфа $\frac{\partial|\theta|}{\partial\nu} > 0$ на $\partial\Omega$ і $\frac{\partial|\theta|}{\partial\nu} < 0$ на $\partial\omega$. З рівняння $\frac{\partial\theta}{\partial\bar z} = 0$ в G випливає, що $\theta \times \frac{\partial\theta}{\partial\tau} = \frac{\partial|\theta|}{\partial\nu} > 0$ на $\partial\Omega$ і $\theta \times \frac{\partial\theta}{\partial\tau} = \frac{\partial|\theta|}{\partial\nu} < 0$ на $\partial\omega$, отже $\deg(\theta,\partial\Omega) \ge 1$ і $\deg(\theta,\partial\omega) \le -1$. Тоді користуючись формулою (C.1) знаходимо

$$\frac{1}{2}\int_G |\nabla\theta|^2\,\mathrm{d}x = \pi\deg(\theta,\partial\Omega) - \pi\deg(\theta,\partial\omega) \ge 2\pi,$$

що протирічить (C.6). Таким чином показано, що з точністю до виділення підпослідовності $\theta^\lambda \to \mathrm{const} \in \mathbb{S}^1$ слабко в $H^1(G;\mathbb{C})$ коли $\lambda \to 1-0$, і збіжності (C.2), (C.3) випливають за допомогою теореми про вкладення просторів Соболєва і еліптичних оцінок. □

Далі вивчається поточкова асимптотика $|\theta^\lambda|$.

Доведення твердження (i) Леми 1.4.6. Оскільки $\deg(\theta^\lambda,\partial\Omega) = 1$ і $\deg(\theta^\lambda/|\theta^\lambda|,\partial\omega) = 0$, θ^λ має щонайменше один нуль в G. Нехай ξ^λ позначає той нуль θ^λ, який є найближчим до $\partial\Omega$ тоді, згідно з (C.2)-(C.3),

$$\xi^\lambda \to \partial\Omega \text{ коли } \lambda \to 1-0.$$

Доведемо, що ξ^λ – єдиний нуль. Для цього спочатку покажемо що інші нулі (якщо є) локалізовані біля ξ^λ. Скористаємося коареа формулою (див., наприклад, [83]):

$$\int_G |1-|\theta^\lambda|^2|\,|\nabla|\theta^\lambda||\,\mathrm{d}x = \int_0^{\max\{1,e^{\alpha^\lambda}\}} \mathrm{d}t \int_{\{x:|\theta^\lambda(x)|=t\}} |1-t^2|\,\mathrm{d}\mathcal{H}^1,$$

де $\mathcal{H}^1$ є одновимірна міра Хаусдорфа в $\mathbb{R}^2$. З іншого боку, користуючись (C.2), (C.5) і нерівністю Коші-Шварця знаходимо

$$\int_G |1-|\theta^\lambda|^2|\,|\nabla|\theta^\lambda||\,\mathrm{d}x \le C\|1-|\theta^\lambda|^2\|_{L^2(G)} \to 0 \text{ коли } \lambda \to 1-0.$$

Відсіля випливає, що існує регулярне значення $t^\lambda \in (4/5, 6/7)$ функції $|\theta^\lambda|$ таке що $\mathcal{H}^1(\{x \in G; |\theta^\lambda| = t^\lambda\}) \to 0$, коли $\lambda \to 1-0$. (Зазначимо, що згідно з Лемою Сарда майже всі $t \in (0, \max\{1, e^{\alpha^\lambda}\})$ є регулярними значеннями $|\theta^\lambda|$.) Покладемо

$$T^\lambda := \{z \in G; |\theta^\lambda| < t^\lambda\},$$

тоді, для достатньо малих $1-\lambda$, границя ∂T^λ множини T^λ складається зі скінченного числа $k(=k(\lambda))$ замкнених кривих що відокремлюють однозв‘язні підобласті $\varpi_0^\lambda, \dots, \varpi_k^\lambda$ області G, де ϖ_0^λ – підобласть, що містить ξ^λ. Застосуємо принцип максимуму до (C.4), маємо $|\theta^\lambda| < t^\lambda$ в кожній підобласті ϖ_j^λ. Це означає, зокрема, що ці області є відокремленими. Більш того, наступна Лема показує, що для достатньо малих $1-\lambda$ має місце нерівність

$$|\theta^\lambda| \ge 1/5 \text{ в } \ T^\lambda \setminus \varpi_0^\lambda. \tag{C.7}$$

Лема C.2. *Нехай ϖ – однозвязна область з гладкою межею і нехай $v \in H^1(\varpi, \mathbb{C})$ задовольняє $\Delta v = 0$ в ϖ і $|v| \ge 4/5$ на $\partial\varpi$. Тоді, якщо $|v(y)| \le 1/5$ для деякого $y \in \varpi$, то*

$$\frac{1}{2}\int_\varpi |\nabla v|^2\,\mathrm{d}x \ge \frac{3\pi}{5}.$$

Доведення. Оскільки рівняння $\Delta v = 0$ і інтеграл Діріхле є конформно інваріантними, можна вважати, без зменшення загальності, що $\varpi = \mathbb{D}$ і $|v(0)| \le 1/5$.

Тоді

$$v = v(0) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k z^k + c_k \bar{z}^k \text{ в } \mathbb{D},$$

і інтеграл Діріхле виражається наступним чином

$$\frac{1}{2}\int_{\varpi} |\nabla v|^2 \, \mathrm{d}x = \pi \sum_{k=1}^{\infty} k(|b_k|^2 + |c_k|^2),$$

проте

$$\frac{16}{25}\pi \le \frac{1}{2}\int_{\partial\mathbb{D}} |v|^2 \, \mathrm{d}s = \pi(|v(0)|^2 + \sum_{k=1}^{\infty}(|b_k|^2 + |c_k|^2).$$

Таким чином
$$\frac{1}{2}\int_{\varpi} |\nabla v|^2 \, \mathrm{d}x \ge \pi\Big(\frac{16}{25} - \frac{1}{25}\Big) = \frac{3\pi}{5}. \qquad \square$$

Доведення твердження (i) Леми 1.4.6 завершено.

З Леми C.2 і (C.5) випливає, що нуль ξ^λ належить до ϖ_0^λ, коли λ є достатньо близьким до 1. Крім того, згідно з (C.7),

$$|\theta^\lambda| \ge \min\Big\{\inf_{T^\lambda\setminus\varpi_0^\lambda} |\theta^\lambda|, \inf_{G\setminus T^\lambda} |\theta^\lambda|\Big\} \ge 1/5 \text{ в } G \setminus \varpi_0^\lambda.$$

Для вивчення поведінки θ^λ в ϖ_0^λ застосуємо конформне перетворення a_{ξ^λ}, що задається (1.4.20), але попередньо продовжимо θ^λ в ω таким чином що $\|\theta^\lambda\|_{L^\infty(\Omega;\mathbb{C})}$, $\|\theta^\lambda\|_{H^1(\Omega;\mathbb{C})} \le C$ з константою C, що не залежить від λ (це є можливим через L^∞- і H^1-оцінки одержані в доведенні Леми C.1). Покладемо

$$\Theta^\lambda(\zeta) := \theta^\lambda((a_{\xi^\lambda})^{-1}(\zeta)).$$

Завдяки конформній інваріантності інтеграла Діріхле маємо $\Theta^\lambda \in H^1(\mathbb{D};\mathbb{C})$ і $\|\Theta^\lambda\|_{H^1(\mathbb{D};\mathbb{C})} \le C$. Крім того, Θ^λ задовольняє $\Delta\Theta^\lambda = 0$ в $a_{\xi^\lambda}(G)$ і $\Theta^\lambda(0) = \theta^\lambda(\xi^\lambda) = 0$. Без зменшення загальності можна припускати що $\frac{\partial\Theta^\lambda}{\partial\zeta}(0)$ є дійсним і $\frac{\partial\Theta^\lambda}{\partial\zeta}(0) \ge 0$ (цього завжди можна досягти помноженням θ^λ на константу з одиничним модулем). Покажемо, що

$$\Theta^\lambda(\zeta) \rightharpoonup \zeta \text{ при } \lambda \to 1-0 \text{ слабко в } H^1(\mathbb{D};\mathbb{C}).$$

Ясно що, з точністю до виділення підпослідовності, функції Θ^λ збігаються до деякої Θ слабко в $H^1(\mathbb{D};\mathbb{C})$ коли $\lambda \to 1-0$, і $|\Theta| = 1$ на $\partial\mathbb{D}$. Легко також переконатися що $|a_\xi(x)| \to 1$ рівномірно на $\bar{\omega}$ коли $\xi \to \partial\Omega$, звідки для довільногог фіксованогог $0 < r < 1$ маємо $(a_{\xi^\lambda})^{-1}(\mathbb{D}_r) \subset G$ коли $1-\lambda$ є достатньо малим. Для таких λ, Θ^λ задовольняє $\Delta\Theta^\lambda = 0$ в $\mathbb{D}_r$, отже еліптичні оцінки дають наступний результат,

$$\Theta^\lambda \to \Theta \text{ в } C^k(\mathbb{D}_r;\mathbb{C}) \text{ для кожного } \ k > 0. \tag{C.8}$$

Зокрема маємо

$$\Theta(0) = \lim_{\lambda\to 1-0} \Theta^\lambda(0) = 0 \ \text{ i } \ \frac{\partial\Theta}{\partial\zeta}(0) = \lim_{\lambda\to 1-0} \frac{\partial\Theta^\lambda}{\partial\zeta}(0) \ge 0.$$

Крім того, користуючись (C.5) знаходимо

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{D}} |\nabla\Theta|^2 \,\mathrm{d}\zeta &= \lim_{r\to 1-0}\lim_{\lambda\to 1-0}\int_{\mathbb{D}_r} |\nabla\Theta^\lambda|^2\,\mathrm{d}\zeta \\ &= \lim_{r\to 1-0}\lim_{\lambda\to 1-0}\int_{(a_{\xi^\lambda})^{-1}(\mathbb{D}_r)} |\nabla\theta^\lambda|^2\,\mathrm{d}x \le \lim_{\lambda\to 1-0}\int_G |\nabla\theta^\lambda|^2\,\mathrm{d}x \le 2\pi.\end{aligned} \tag{C.9}$$

З іншого боку $\Delta\Theta = 0$ в $\mathbb{D}$, внаслідок (C.8). Отже Θ можна представити у вигляді $\Theta = \sum_{k=1}^\infty (b_k\zeta^k + c_k\bar{\zeta}^k)$, і

$$\int_{\mathbb{D}_1(0)} |\nabla\Theta|^2\,\mathrm{d}\zeta - 2\pi = \int_{\mathbb{D}} |\nabla\Theta|^2\,\mathrm{d}\zeta - \int_{\mathbb{S}^1} |\Theta|^2\,\mathrm{d}s = 2\pi\sum_{k=1}^\infty (k-1)(|b_k|^2 + |c_k|^2).$$

Тоді (C.9) має місце тільки якщо $b_k = c_k = 0$ для $k > 1$, таким чином $\Theta = b_1\zeta + c_1\bar{\zeta}$. Оскільки $|b_1|^2 + |c_1|^2 = 1$, $b_1 = \frac{\partial\Theta}{\partial\zeta}(0) \ge 0$ і

$$|c_1|^2 = \frac{4}{\pi}\int_{\mathbb{D}_{1/2}} \left|\frac{\partial\Theta}{\partial\bar{\zeta}}\right|^2\mathrm{d}\zeta = \lim_{\lambda\to 1-0}\frac{4}{\pi}\int_{(a_{\xi^\lambda})^{-1}(\mathbb{D}_{1/2})} \left|\frac{\partial\theta^\lambda}{\partial\bar{z}}\right|^2\mathrm{d}\zeta = 0 \text{ (згідно з (1.4.60))},$$

маємо $\Theta(\zeta) = \zeta$.

З (C.8) випливає, що $\varpi_0^\lambda \subset (a_{\xi^\lambda})^{-1}(\mathbb{D}_{7/8})$ коли $1-\lambda$ є достатньо малим (оскільки $|\theta^\lambda| = t^\lambda$ на $\partial\varpi_0^\lambda$ і $t^\lambda \in (4/5, 6/7)$ у той час як

$$\min\{|\theta^\lambda(x)|; x \in \partial(a_{\xi^\lambda})^{-1}(\mathbb{D}_{7/8})\} \to 7/8);$$

з (C.8) витікає також що $|\Theta^\lambda(\zeta)| = |\zeta|(1 + o(1))$ в $\mathbb{D}_{7/8}$ коли $\lambda \to 1 - 0$, таким чином $|\theta^\lambda| = |a_{\xi^\lambda}|(1 + o(1))$ в $(a_{\xi^\lambda})^{-1}(\mathbb{D}_{7/8})$, де $o(1)$ позначає функцію чия L^∞-норма прямує до нуля. З іншого боку, в силу (1.4.59) і (C.7), маємо $\log(1/5) \le \log|\theta^\lambda| \le \alpha^\lambda \le C$ в $G \setminus \varpi_0^\lambda$. Таким чином ξ^λ є єдиним нульом θ^λ. Крім того $C_1|a_{\xi^\lambda}| \le |\theta^\lambda| \le C_2|a_{\xi^\lambda}|$ в G, для деяких констант $0 < C_1 < C_2$. Залишається тільки зазначити, що $|\gamma_{\xi^\lambda}|$ допускає факторізацію $|\gamma_{\xi^\lambda}| = |a_{\xi^\lambda}|\exp(\sigma_{\xi^\lambda})$ (див. Підрозділ 1.4.2) і $\sigma_{\xi^\lambda} \to 0$ рівномірно в $\bar{G}$ коли $\xi^\lambda \to \partial\Omega$. □

Далі показано існування сім'ї функцій ϑ^λ, що задовольняє умови твердження (ii) Леми 1.4.6.

Оскільки (єдиний) нуль ξ^λ функції θ^λ наближається до $\partial\Omega$ коли $\lambda \to 1 - 0$, можна вважати що $(a_{\xi^\lambda})^{-1}(\mathbb{D}_{8/9}) \subset G$. Перемасштабуємо θ^λ як раніше, $\Theta^\lambda(\zeta) := \theta^\lambda((a_{\xi^\lambda})^{-1}(\zeta))$, тоді $\Delta\Theta_\lambda = 0$ в $\mathbb{D}_{8/9}$ і $\Theta^\lambda(0) = 0$. Відсіля випливає, що для Θ^λ є справедливим представлення

$$\Theta^\lambda(\zeta) = \sum_{k=1}^{\infty}(b_{k,\lambda}\zeta^k + c_{k,\lambda}\bar{\zeta}^k) \text{ в } \mathbb{D}_{8/9}.$$

Розглянемо антиголоморфну частину $\tilde{\vartheta}^\lambda$ функції Θ^λ,

$$\tilde{\vartheta}^\lambda := \sum_{k=1}^{\infty} c_{k,\lambda}\bar{\zeta}^k,$$

і покажемо, що

$$|\tilde{\vartheta}^\lambda(\zeta)| \le C\varepsilon|\zeta| \text{ в } \mathbb{D}_{7/8}, \tag{C.10}$$

$$|\nabla\tilde{\vartheta}^\lambda| \le C\varepsilon \text{ в } \mathbb{D}_{7/8}. \tag{C.11}$$

Обидві ці нерівності випливають з оцінки $|c_{k,\lambda}| \le C(9/8)^k\varepsilon$, де C не залежить від k та ε. Остання оцінка доводиться наступним чином:

$$\pi\sum_{k=1}^{\infty} k(8/9)^{2k}|c_{k,\lambda}|^2 = \int_{\mathbb{D}_{8/9}(0)}\Big|\frac{\partial\Theta^\lambda}{\partial\bar{\zeta}}\Big|^2 \mathrm{d}\zeta \le \int_G\Big|\frac{\partial\theta^\lambda}{\partial\bar{z}}\Big|^2 \mathrm{d}x,$$

згідно з (1.4.60) права частина мажорується $C\varepsilon^2$.

Введемо до розгляду функцію ϑ^λ, поклавши

$$\vartheta^\lambda(z) := \sigma(a_{\xi^\lambda}(x))\tilde{\vartheta}^\lambda(a_{\xi^\lambda}(x)),$$

де σ – гладка зрізіюча функція, така що

$$\sigma(\zeta) = \begin{cases} 1 \text{ якщо } \zeta \in \mathbb{D}_{1/4} \\ 0 \text{ якщо } \zeta \notin \mathbb{D}_{1/2}. \end{cases}$$

Лема C.3. *Наступні оцінки є справедливими:*

$$|\vartheta^\lambda(z)| \leq C\varepsilon|\gamma_{\xi^\lambda}(z)| \ \textit{в}\ G, \tag{C.12}$$

$$\int_G |\nabla\vartheta^\lambda(x)|^2\,\mathrm{d}x \leq C\varepsilon^2 \ \textit{і}\ \int_G |\nabla\vartheta^\lambda(x)|^p\,\mathrm{d}x = o(\varepsilon^p) \ \textit{для всіх}\ 1 \leq p < 2. \tag{C.13}$$

Крім того,

$$\frac{\partial}{\partial\bar{z}}(\theta^\lambda - \vartheta^l) = 0 \ \textit{в}\ (a_{\xi^\lambda})^{-1}(\mathbb{D}_{1/4}). \tag{C.14}$$

Доведення. Оцінка (C.12) випливає з (C.10) і поточкової нерівності $|a_{\xi^\lambda}| \leq |\gamma_{\xi^\lambda}|$ в G (ця нерівність є наслідком конструктивного визначення функції $|\gamma_{\xi^\lambda}|$ наданого в Підрозділі 1.4.2); (C.14) є прямим наслідком визначення ϑ^λ. Для доведення першої оцінки в (C.13) використаємо конформну інваріантність інтегралу Діріхле,

$$\int_G |\nabla\vartheta^\lambda(x)|^2\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{D}_{1/2}} |\nabla(\sigma(\zeta)\tilde{\vartheta}^\lambda(\zeta))|^2\,\mathrm{d}\zeta,$$

і (C.10)-(C.11). Друга оцінка в (C.13) витікає з першої і того факту, що міра $\mathrm{supp}(|\nabla\vartheta^\lambda|)$ прямує до нуля коли $\lambda \to 1-0$. □

Зазначимо що з другої оцінки в (C.13) разом з тим фактом, що $\vartheta^\lambda = 0$ на ∂G, в силу теорми про вкладення соболєвських просторів, випливає, що $\|\vartheta^\lambda\|_{L^q(G)} = o(\varepsilon)$ для всіх $q \geq 1$. Для завершення доведення (ii) необхідно оцінити $\log|s^\lambda|$, де

$$s^\lambda := (\theta^\lambda - \vartheta^\lambda)/\gamma_{\xi^\lambda}.$$

Зазначимо, що $0 < C_1 \leq |s^\lambda| \leq C_2$ коли $1-\lambda$ є достатньо малим, це випливає з (i) і (C.12). Також маємо $|s^\lambda| = 1$ на ∂G і $|s^\lambda| = \mathrm{const} > 0$ на $\partial\omega$, крім того $\deg(s^\lambda, \partial\Omega) = \deg(s^\lambda/|s^\lambda|, \partial\omega) = 0$. Таким чином можна виділити однозначну вітку $\log s^\lambda$ в G. Покладемо

$$S^\lambda := \frac{1}{\varepsilon}\log s^\lambda.$$

Лема C.4. *Дійсна чистина S^λ збігається до нуля слабко в $H^1(G)$ коли $\lambda \to 1-0$.*

Доведення. Маємо

$$\begin{aligned}\int_G |\nabla S^\lambda|^2\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{\varepsilon^2}\int_G |\nabla s^\lambda|^2 \frac{\mathrm{d}x}{|s^\lambda|^2} \le \frac{C}{\varepsilon^2}\int_G |\nabla s^\lambda|^2\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{4C}{\varepsilon^2}\int_G \Big|\frac{\partial s^\lambda}{\partial \bar z}\Big|^2\,\mathrm{d}x = \frac{4C}{\varepsilon^2}\int_{G\setminus(a_{\xi^\lambda})^{-1}(\mathbb{D}_{1/4})} \Big|\frac{\partial s^\lambda}{\partial \bar z}\Big|^2\,\mathrm{d}x \\ &\le \frac{C_1}{\varepsilon^2}\int_G \Big(\Big|\frac{\partial \theta^\lambda}{\partial \bar z}\Big|^2 + \Big|\frac{\partial \vartheta^\lambda}{\partial \bar z}\Big|^2\Big)\,\mathrm{d}x \le C_2,\end{aligned}$$

де використано послідовно поточкову оцінку $1/|s^\lambda|^2 \le C$, формулу (C.1), властивість (C.14), оцінку $|\gamma_{\xi^\lambda}| \ge |a_{\xi^\lambda}| \ge 1/4$ в $G \setminus (a_{\xi^\lambda})^{-1}(\mathbb{D}_{1/4})$, і (1.4.60) разом з першою оцінкою в (C.13). Дійсна частина S_1^λ функції S^λ задовольняє $S_1^\lambda = 0$ на $\partial\Omega$, звідки, віднявши середнє значення $\langle S_2^\lambda\rangle$ з уявної частини, отримуємо

$$\|S^\lambda - i\langle S_2^\lambda\rangle\|_{H^1(G;\mathbb{C})} \le C.$$

Таким чином, з точністю до виділення підпослідовності,

$$S^\lambda - i\langle S_2^\lambda\rangle \to S \text{ слабко в } H^1(G;\mathbb{C}),$$

де функція $S \in H^1(G;\mathbb{C})$, її дійсна частина S_1 є нульовою на $\partial\Omega$ і приймає постійне значення на $\partial\omega$ у той час як уявна частина має нульове середнє значення в G. З іншого боку

$$\begin{aligned}\int_G \Big|\frac{\partial S^\lambda}{\partial \bar z}\Big|^p\,\mathrm{d}x &\le \frac{C}{\varepsilon^p}\int_{G\setminus(a_{\xi^\lambda})^{-1}(B_{1/4})} \Big(\Big|\frac{\partial \theta^\lambda}{\partial \bar z}\Big|^p + \Big|\frac{\partial \vartheta^\lambda}{\partial \bar z}\Big|^p\Big)\frac{\mathrm{d}x}{|\gamma_{\xi^\lambda}|^p} \\ &\le \frac{C}{\varepsilon^p}\int_G \Big(\Big|\frac{\partial \theta^\lambda}{\partial \bar z}\Big|^p + \Big|\frac{\partial \vartheta^\lambda}{\partial \bar z}\Big|^p\Big)\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

і для $1 \le p < 2$ згідно з (1.4.64) і другою оцінкою в (C.13) права частина прямує до нуля при $\lambda \to 1-0$. Таким чином

$$\frac{\partial S}{\partial \bar z} = 0 \text{ в } G. \tag{C.15}$$

Відсіля випливає, що $\exp(S) : G \to \mathbb{C}$ є голоморфною функцією. Крім того $|\exp(S)| = 1$ на $\partial\Omega$, $|\exp(S)| = \mathrm{const}$ на $\partial\omega$ і $\deg(\exp(S), \partial\Omega) = \deg(\exp(S)/|\exp(S)|, \partial\omega) = 0$ (оскільки уявна частина S є однозначною функцією). Таким чином

$$\frac{1}{2}\int_G |\nabla \exp(S)|^2 \,\mathrm{d}x = 2\int_G \Big|\frac{\partial \exp(S)}{\partial \bar{z}}\Big|^2 \,\mathrm{d}x = 0, \tag{C.16}$$

де використано формулу (C.1). Остаточно маємо $S \equiv 0$ в G, оскільки з (C.16) випливає, що S є сталою проте дійсна частина S є нульовою на $\partial\Omega$ і її уявна частина має нульове середнє. $\square$

З Леми C.4 випливає збіжність слідів, $|S^\lambda| \to 0$ на $\partial\omega$, тобто $\log|\theta^\lambda| - \log|\gamma_{\xi^\lambda}| = o(\varepsilon)$, також, з огляду на теорему про вкладення соболєвських просторів, маємо $S^\lambda = \frac{1}{\varepsilon}\log(|\theta^\lambda - \vartheta^\lambda|/|\gamma_{\xi^\lambda}|) \to 0$ в $L^q(G)$ для всіх $q \geq 1$. Лему 1.4.6 доведено. $\square$

Додаток D

Уточнені спектральні асимтотики сингулярно збуреної задачі Діріхле у випадку, коли період осциляцій є значно більшим параметра збурення

Твердження Теореми 2.1.4 залишаються справедливими і у випадку, коли період осциляцій коефіцієнтів оператору (2.1.1) у швидкій змінній є ε^α з $\alpha > 1$. Як і в Теоремі 2.1.4 припускаємо, що $c(x, y) = 0$. У цьому випадку ефективне поле знесення як і раніше задається формулою (2.1.20), проте функція θ^* тепер визначається як нормалізований, $\int_Y \theta^* \, \mathrm{d}y = 1$, Y-періодичний розв'язок рівняння

$$\frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j}\big(a^{ij}(x, y)\theta^*(x, y)\big) = 0.$$

Треба зазначити, що для $\alpha > 1$ близьких до 1 множина концентрації власної функції u_ε може досить сильно ухилятися від нулів ξ векторного поля $\overline{b}$ (через сингулярну залежність останнього від параметра α).

Для більш точного визначення положень точок концентрації u_ε, введемо до розгляду наближений гамільтоніан $\overline{H}_\varepsilon(p, x)$ визначений як (адитивне) власне значення, що відповідає Y-періодичній власній функції рівняння

$$-a^{ij}(x, y)\frac{\partial^2 \theta_\varepsilon(p, x, y)}{\partial y_i \partial y_j} + H(p + \varepsilon^{\alpha-1}\nabla_y \theta_\varepsilon(p, x, y), x, y) = \overline{H}_\varepsilon(p, x), \qquad \text{(D.1)}$$

визначимо твкож наближене ефективне поле знесення $\overline{b}_\varepsilon(x)$ формулою

$$\overline{b}^j_\varepsilon(x) = -\frac{\partial \overline{H}_\varepsilon}{\partial p_j}(0, x).$$

Власне значення $\overline{H}_\varepsilon$ є єдиним і функція θ_ε є єдиною з точністю до адитивної константи, більш того θ_ε є масштабоване логарифмічне перетворення $\theta_\varepsilon = -\frac{1}{\varepsilon^{2(\alpha-1)}} \log \vartheta_\varepsilon$ додатної Y-періодичної власної функції лінійного рівняння

$$\varepsilon^{2(1-\alpha)} a^{ij}(x,y) \frac{\partial^2 \vartheta_\varepsilon}{\partial y_i \partial y_j} + \varepsilon^{1-\alpha}(b^j(x,y) - 2a^{ij}(x,y)p_i) \frac{\partial \vartheta_\varepsilon}{\partial y_j} + H(p,x,y)\vartheta_\varepsilon = \overline{H}_\varepsilon(p,x)\vartheta_\varepsilon.$$

Аналогічно випадку $\alpha = 1$, знесення $\overline{b}_\varepsilon(x)$ визначається формулою

$$\overline{b}_\varepsilon(x) = \int_Y b(x,y)\theta^*_\varepsilon(x,y)\,\mathrm{d}y, \tag{D.2}$$

через Y-періодичний розв'язок θ^*_ε рівняння

$$\frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j}\big(a^{ij}(x,y)\theta^*_\varepsilon\big) - \varepsilon^{\alpha-1}\frac{\partial}{\partial y_j}\big(b^j(x,y)\theta^*_\varepsilon\big) = 0, \tag{D.3}$$

нормалізований формулою $\int_Y \theta^*_\varepsilon \,\mathrm{d}y = 1$. Оскільки другий член рівняння (D.3) має малий множник $\varepsilon^{\alpha-1}$, то неважко показати, що $\|\overline{b}_\varepsilon - \overline{b}\|_{C^1(\overline{\Omega})} = O(\varepsilon^{\alpha-1})$. Отже, якщо поле $\overline{b}$ має скінчене число нулів Ω, і вони є гіперболічними нерухомими точками рівняння $\dot{x} = -\overline{b}(x)$, тоді, для достатньо малих $\varepsilon > 0$, поле $\overline{b}_\varepsilon$ має те саме число нулів, які лежать на відстані не більшій ніж $O(\varepsilon^{\alpha-1})$ від відповідних нулів $\overline{b}$.

Теорема D.1. *Нехай $\alpha > 1$ і $c(x,y) = 0$. Тоді, за умовами (2.1.23), всі твердження Теореми 2.1.4 залишаються вірними, за вийнятком Твердження (ii), де $\overline{\xi}$ має бути замінено на нейближчій нуль векторного поля $\overline{b}_\varepsilon(x)$.*

Доведення. Приведемо тільки основні змінення, які треба внести до міркувань в Підрозділах 2.1.6 і 2.1.7 щоб адаптувати їх до випадка $\alpha > 1$.

Для того щоб знайти оцінку знизу для власних значень λ_ε, діємо аналогічно Підрозділу 2.1.6. Проте, міркування Підрозділу 2.1.6 потрібно модіфікути заміною нулів ξ поля $\overline{b}$ на нулі ξ_ε поля $\overline{b}_\varepsilon$, також замість функцій θ^* потрібно використовувати θ^*_ε. Зазначимо, що хоча $\xi_\varepsilon \to \xi$ при $\varepsilon \to 0$, відстань між цими двома точками може бути порядку $\varepsilon^{\alpha-1}$, так що в локальному масштабі $\sqrt{\varepsilon}$ ця відстань може необмежено зростати. Тим не менш, з точністю до заміни ξ на

ξ_ε локальний аналіз є таким самим як і в Підрозділі 2.1.6. Наголосимо, що для $\alpha \in (1, 3/2)$ твердження Леми 2.1.14 є вірним тільки якщо щонайменше один з нулів $\bar{b}$ є внутрішньою точкою Ω. Ясно, що цю умову задовільнено якщо (2.1.23) є вірним.

Міркування Підрозділу 2.1.7 також можна адаптувати до випадку $\alpha > 1$. Як і в доведенні оцінки знизу виводиться рівняння (2.1.61) для границі функцій $w_\varepsilon(z) = u_\varepsilon(\xi_\varepsilon + \sqrt{\varepsilon} z)$, проте побудову функцій Φ^ν_μ і Ψ_ε потрібно модифікувати. Векторне поле знесення $\bar{b}_\varepsilon$ лінеарізується в ξ_ε і квадратичні функції Φ^ν_μ (що тепер залежать від параметру ε) конструюються як в Підрозділі 2.1.7 з $B^{ji}_\varepsilon = \frac{\partial \bar{b}^j}{\partial x_i}(\xi_\varepsilon)$ замість B^{ji}; також, в побудові функцій Ψ_ε використовується власна функція θ_ε (див. (D.1)) і Ψ_ε задається формулою $\Psi_\varepsilon(x) = \Phi^\nu_\mu(x) + \varepsilon^{2\alpha-1}\theta_\varepsilon(\nabla \Phi^\nu_\mu(x), x, x/\varepsilon^\alpha)$. $\square$

Насамкінець зазначимо, що випадок $\alpha < 1$ залишається відкритим, адже стратегія застосована для $\alpha \geq 1$ не працює для $\alpha < 1$. Зокрема, не існує природного способу визначити ефективне знесення оскільки відповідна періодична коміркова задача (D.3) стає сингулярною для $\alpha < 1$.

Додаток Е

Єдиність адитивної власної функції і варіаційне визначення множини Обрі

Наступний простий результат дає критерій єдиностірозв'язку для задачі (2.1.4)-(2.1.5).

Твердження Е.1. *Нехай $\lambda = \lambda_{\overline{H}}$, тобто (2.1.4)–(2.1.5) має розв'язок W. Тоді W – єдиний розв'язок (з точністю до адитивної сталої) тодіі тільки тоді коли $S_{\overline{H}-\lambda}(x,y) = 0$ для всих $x, y \in \mathcal{A}_{\overline{H}-\lambda}$, де $S_{\overline{H}-\lambda}(x,y) = d_{\overline{H}-\lambda}(x,y) + d_{\overline{H}-\lambda}(y,x)$.*

Доведення. Якщо $S_{\overline{H}-\lambda}(x,y) = 0$, тоді $W(x) - W(y) = d_{\overline{H}-\lambda}(x,y)$; це є наслідком того факта, що $W(x) - W(y) \le d_{\overline{H}-\lambda}(x,y)$ для всих x, y. Зокрема, якщо $S_{\overline{H}-\lambda}(x,y) = 0$ для всих $x, y \in \mathcal{A}_{\overline{H}-\lambda}$, тоді для $\xi \in \mathcal{A}_{\overline{H}-\lambda}$, отримуємо $W(x) = d_{\overline{H}-\lambda}(x,\xi) + W(\xi)$ на $\mathcal{A}_{\overline{H}-\lambda}$. Таким чином, згідно з формулою (2.1.18), $W(x) = d_{\overline{H}-\lambda}(x,\xi) + W(\xi)$ в Ω, тобто W – єдиний розв'язок (з точністю до адитивної сталої).

Якщо є дві точки $\xi, \xi' \in \mathcal{A}_{\overline{H}-\lambda}$, такі що $S_{\overline{H}-\lambda}(\xi,\xi') > 0$, тоді $W_0(x) = d_{\overline{H}-\lambda}(x,\xi)$ and $W_1(x) = d_{\overline{H}-\lambda}(x,\xi') - d_{\overline{H}-\lambda}(\xi,\xi')$ – два розв'язка (2.1.4)-(2.1.5) і $0 = W_0(\xi) = W_1(\xi)$, проте $W_0(\xi') - W_1(\xi') = S_{\overline{H}-\lambda}(\xi,\xi') > 0$. $\square$

Наступне Твердження показує, що множину Обрі справді можна визначити формулою (2.1.17).

Твердження Е.2. *Нехай $\overline{H}(p,x) \in C(\mathbb{R}^N \times \overline{\Omega})$ – опуклий відносно p гамільтоніан, такий що $\min\{H(p,x)/|p|;\ x \in \overline{\Omega}\} \to +\infty$ коли $|p| \to \infty$. Припусти-*

мо, що $\lambda_{\overline{H}}$ – адитивне власне значення задачі (2.1.11)–(2.1.12). Тоді множину Обрі $\mathcal{A}_{\overline{H}-\lambda_{\overline{H}}}$ визначену в (2.1.15) можна еквівалентно визначити наступним чином:

$$y \in \mathcal{A}_{\overline{H}-\lambda_{\overline{H}}} \Longleftrightarrow \sup_{\delta>0} \inf\Big\{\int_0^t (\overline{L}(\dot\eta,\eta)+\lambda_{\overline{H}})\,\mathrm{d}\tau\,;\, \eta(0)=\eta(t)=y, t>\delta\Big\}=0, \tag{E.1}$$

де інфімум береться серед всих абсолютно неперервних $\eta : [0,t] \to \overline{\Omega}$.

Доведення. Нехай $y \in \mathcal{A}_{\overline{H}-\lambda_{\overline{H}}}$. Тоді, оскільки функція $u(t,x) := d_{\overline{H}-\lambda_{\overline{H}}}(x,y)$ є розв'язком (2.1.11)–(2.1.12), то вона є також стаціонарним в'язкісним суброзв'язком рівняння $\frac{\partial u}{\partial t} + \overline{H}(\nabla u, x) - \lambda_{\overline{H}} = 0$ в $(0,+\infty)\times\Omega$ і суперрозв'язком в $(0,+\infty)\times\overline{\Omega}$. Згідно з [61, твердженням (5) Теореми X.1], $u(t,x)$ визначається формулою Лакса-Олейник

$$u(t,x) = \inf\Big\{\int_0^t (\overline{L}(\dot\eta,\eta)+\lambda_{\overline{H}})\,\mathrm{d}\tau + d_{\overline{H}-\lambda_{\overline{H}}}(z,y);\, \eta(0)=z,\, \eta(t)=x,\, z\in\overline{\Omega}\Big\}, \tag{E.2}$$

де як і раніше інфімум береться серед всих абсолютно неперервних траєкторій η в $\overline{\Omega}$. Тоді, користуючись формулою (2.1.16) для $d_{\overline{H}-\lambda_{\overline{H}}}(\eta,y)$ маємо, для кожного $\delta > 0$,

$$\begin{aligned} 0 &= d_{\overline{H}-\lambda_{\overline{H}}}(y,y) = u(\delta,y)\\ &= \inf\Big\{\int_0^\delta (\overline{L}(\dot\eta,\eta)+\lambda_{\overline{H}})\,\mathrm{d}\tau +\\ &\qquad \int_0^{t'} (\overline{L}(\dot\eta',\eta')+\lambda_{\overline{H}})\,\mathrm{d}\tau;\; \eta'(0)=\eta(t)=y,\, \eta'(t')=\eta(0),\, t'>0\Big\}\\ &= \inf\Big\{\int_0^t (\overline{L}(\dot\eta'',\eta'')+\lambda_{\overline{H}})\,\mathrm{d}\tau;\; \eta''(0)=\eta''(t)=y,\, t>\delta\Big\}. \end{aligned}$$

Навпаки, нехай $\{t^n\}_{n=1}^\infty$ – послідовність дійсних додатних чисел, $t^n\to\infty$, і

$$\Delta_n := \inf\Big\{\int_0^{t^n} (\overline{L}(\dot\eta,\eta)+\lambda_{\overline{H}})\,\mathrm{d}\tau;\; \eta(0)=\eta(t^n)=y\Big\} \to 0, \quad \text{при } n\to\infty.$$

Розглянемо функцію $u(t,x)$, що задається формулою (E.2). З огляду на (2.1.16) маємо $u(t,x) \ge \inf\{d_{\overline{H}-\lambda_{\overline{H}}}(x,z) + d_{\overline{H}-\lambda_{\overline{H}}}(z,y);\; z\in\overline{\Omega}\} \ge d_{\overline{H}-\lambda_{\overline{H}}}(x,y)$. Оскільки

(2.1.11)–(2.1.12) має розв'язок W, після додавання сталої до W (якщо необхідно) знаходимо $u(t,x) \leq W(x) + C \leq C_1$ за допомогою принципу порівняння (див. [61, Section III]). Згідно з [61, твердженням (5) Теореми X.1], функції $v_s(t,x) = u(t+s,x)$ є рівномірно неперервними за Ліпшицем на $[0,+\infty) \times \overline{\Omega}$ для $s \geq 1$. Отже,

$$w(x) = \liminf_{\tau\to\infty} u(\tau,x) = \lim_{r\to\infty} \inf_{s\geq r} u(s,x) = \lim_{r\to\infty} \inf_{s\geq r} u(t+s,x)$$

є неперервним за Ліпшицем суперрозв'язком рівняння

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \overline{H}(\nabla w, x) - \lambda_{\overline{H}} = 0 \quad \text{в } (0,+\infty) \times \overline{\Omega}.$$

Оскільки функція w не залежить від t, вона також є суперрозв'язком рівняння $\overline{H}(\nabla w, x) - \lambda_{\overline{H}} = 0$ в $\overline{\Omega}$. З іншого боку

$$\begin{aligned} w(x) &\leq \limsup_{n\to\infty} \inf_{t>0} u(t^n + t, x) \\ &\leq \inf\Big\{ \int_0^t (\overline{L}(\dot{\eta},\eta) + \lambda_{\overline{H}})\,\mathrm{d}\tau;\ \eta(t) = x,\ \eta(0) = y,\ t > 0 \Big\} + \limsup_{n\to\infty} \Delta_n \\ &= d_{\overline{H}-\lambda_{\overline{H}}}(x,y). \end{aligned}$$

Отже $d_{\overline{H}-\lambda_{\overline{H}}}(x,y) = w(x)$, і, таким чином, $d_{\overline{H}-\lambda_{\overline{H}}}(x,y)$ задовольняє (2.1.12). $\square$

Додаток F

Множина Обрі для малих збурень градієнтного поля

Приведемо доведення твердження, що сформульовано в Зауваженні 2.1.5.

Лема F.1. *Нехай векторне поле $b(x, y)$ є малим C^1-збуренням $\nabla P(x)$ градієнтного поля з C^2-потенціалом $P(x)$, і припустимо, що*

- *множина $\{x \in \overline{\Omega};\ \nabla P(x) = 0\}$ утворюється скінченним набором точок в Ω,*
- *матриця Гессе $\left(\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} P(x)\right)_{i,j=\overline{1,N}}$ в кожній з цих точок є невиродженою.*

Тоді умова (2.1.23) виконується.

Доведення. Розглянемо векторне поле $b(x, y)$ яке є малим C^1-збуренням $\nabla P(x)$, тобто $\|b(x, y) - \nabla P(x)\|_{C^1(\overline{\Omega}\times\overline{Y})} = \delta$, і δ є малим. Покажемо, що множина Обрі $\mathcal{A}_{\overline{H}}$ гамільтоніана $\overline{H}(p, x)$, що визначається (2.1.9) (з $c(x, y) = 0$) є в точності множиною нулів $\overline{b}(x)$ в Ω, за умови, що δ є достатньо малим. Оскільки множина Обрі $\overline{H}(p, x)$ співпадає з такою гамільтоніана (2.1.9), можна припускати без зменшення загальності, що $\overline{H}(p, x) = \sum p_i^2 - \overline{b}^i(x) p_i$. Знайдемо спочатку меожину Обрі $\mathcal{A}_{H^0}$ гамільтоніана

$$H^0(p, x) = \sum p_i^2 - p_i \frac{\partial P(x)}{\partial x_i}.$$

Обчислимо відповідний лагранжіан $L^0(v, x) = \frac{1}{4}|v + \nabla P(x)|^2$ і скористаємось критерієм (2.1.17). Нехай $\xi \in \mathcal{A}_{H^0}$, тоді існує послідовність абсолютно неперервних траєкторій $\eta^n : [0, t^n] \to \overline{\Omega}$, $\eta^n(0) = \eta^n(t^n) = \xi$, з $t^n \to \infty$ і

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{t^n} |\dot{\eta}^n + \nabla P(\eta^n)|^2 \mathrm{d}\tau = 0.$$

Відсіля маємо

$$0 = \lim_{n\to\infty} \int_0^{t^n} (|\dot{\eta}^n|^2 + 2\nabla P_\delta(\eta^n) \cdot \dot{\eta}^n + |\nabla P(\eta^n)|^2) \mathrm{d}\tau = \lim_{n\to\infty} \int_0^{t^n} (|\dot{\eta}^n|^2 + |\nabla P(\eta^n)|^2) \mathrm{d}\tau.$$

Отже $\eta^n(t) \to \xi$ рівномірно на кожному фіксованому інтервалі $[0, T]$, і ξ належить до множини $K = \{x \in \Omega;\ \nabla P(x) = 0\}$. Ясно також, що $K \subset \mathcal{A}_{H^0}$. Зазначимо тепер, що ефективне знесення $\overline{b}(x)$, задане формулою (2.1.20), можна записати як $\overline{b}(x) = \nabla P(x) + \tilde{b}_\delta(x)$ з C^1-малим $\tilde{b}_\delta(x)$, $\|\tilde{b}_\delta\|_{C^1} = \overline{O}(\delta)$ при $\delta \to 0$. Остання оцінка випливає з регулярності θ^*. Завдяки припущенню про критичні точки $P(x)$, нулі $\overline{b}(x)$ є ізольованими і близькими до K коли δ є достатньо малим. Більш того, в малому околі ω точки $\xi \in K$ поле $\overline{b}(x)$ приймає нульове значення у одній точці $\xi_\delta \in \omega$ і $|\xi - \xi_\delta| = \overline{O}(\delta)$. Тоді можна побудувати C^2-функцію P_δ, таку що $|\nabla P_\delta(x)| > 0$ в $\overline{\Omega} \setminus K_\delta$, де K_δ є множиною нулів $\overline{b}(x)$, і $|\overline{b}(x) - \nabla P_\delta(x)| = g_\delta(x)|\nabla P_\delta(x)|$ з $\max_{x\in\overline{\Omega}} g_\delta(x) = \overline{O}(\delta)$ при $\delta \to 0$. Відсіля випливає наступна оцінка (для достатньо малих δ)

$$|v + \overline{b}(x)|^2 \geq \frac{1}{2}|v|^2 + 2\nabla P_\delta(x) \cdot v + V_\delta(x), \qquad \forall v \in \mathbb{R}^N,\ x \in \overline{\Omega},$$

де $V_\delta > 0$ в $\overline{\Omega} \setminus K_\delta$. Тоді, аналогічно міркуванням, що наведено вище, можна показати, що $\mathcal{A}_{\overline{H}} = K_\delta$. Більш того, кожна точка $\xi \in K_\delta$ є гіперболічною нерухомою точкою рівняння $\dot{x} = -\overline{b}(x)$, якщо δ є достатньо малим. $\square$

Додаток G

Властивості розв'язків матричного рівняння Бернуллі

Нижче представлено деякі результати про розв'язки матричного рівняння Бернуллі (2.1.59), які використано в Підрозділах 2.1.6 і 2.1.7. Нагадаємо, що матриця Q в (2.1.59) є додатно визначеною, Π_s і Π_u позначають проектори на інваріантні підпростори матриці B, які відповідають власним значенням з додатними і вяд'ємними дійсними частинами.

Твердження G.1. *Максимальний додатно напіввизначений розв'язок* Γ *рівняння (2.1.59) має наступні властивості: (i)* $\Gamma = \Pi_s^*\Gamma\Pi_s$, *(ii)* $\Gamma \geq \gamma\Pi_s^*\Pi_s$ *(у сенсі квадратичних форм) для деякого* $\gamma > 0$, *(iii)* $2\mathrm{tr}(Q\Gamma) = \mathrm{tr}(B\Pi_s)$, *тобто* $2\mathrm{tr}(Q\Gamma)$ *є сумою додатних дійсних частин власних значень* B.

Доведення. З рівняння (2.1.59) випливає, що $X = \Pi_u^*\Gamma\Pi_u$ задовольняє

$$4\Pi_u^*\Gamma Q\Gamma\Pi_u - X(B\Pi_u) - (B\Pi_u)^*X = 0. \tag{G.1}$$

Розглянемо симетричний розв'язок (G.1), який визначений формулою

$$\tilde{X} = \int_0^\infty Y(t)\,\mathrm{d}t, \tag{G.2}$$

де $Y(t) = -4e^{(B\Pi_u)^*t}\Pi_u^*\Gamma Q\Gamma\Pi_u e^{B\Pi_u t}$ (зазначимо, що $\dot{Y}(t) = Y(t)(B\Pi_u) + (B\Pi_u)^*Y(t)$ і $Y(t) \to 0$ коли $t \to +\infty$, отже інтегруванням знаходимо $\tilde{X}(B\Pi_u) + (B\Pi_u)^*\tilde{X} = -Y(0) = 4\Pi_u^*\Gamma Q\Gamma\Pi_u$, тобто $\tilde{X}$ справді задовольняє (G.1)). Покажемо, що $X = \tilde{X}$. В супротивному випадку $Z := X - \tilde{X}$ є ненульовим розв'язком рівняння $Z(B\Pi_u) + (B\Pi_u)^*Z = 0$ і $Z = \Pi_u^*Z\Pi_u$. Тоді $Z(t) = Z$

є стаціонарним розв'язком рівняння $\dot{Z}(t) = Z(t)(B\Pi_u) + (B\Pi_u)^* Z(t)$. Останнє рівняння має розв'язок $\tilde{Z}(t) = e^{(B\Pi_u)^* t}\Pi_u^* Z \Pi_u e^{B\Pi_u t}$ який прямує до нуля при $t \to +\infty$ і задовольняє початкову умову $\tilde{Z}(0) = Z$. Таким чином $Z = 0$, тобто $X = \tilde{X}$. З іншого боку, внаслідок (G.2) маємо $\tilde{X} \le 0$, разом з цим $X \ge 0$, отже $X = \tilde{X} = 0$. Оскільки матриця Γ є додатно напіввизначеною, маємо також $\Gamma\Pi_u = \Pi_u^*\Gamma = 0$ і обчислення $\Gamma = (\Pi_u + \Pi_s)^*\Gamma(\Pi_u + \Pi_s) = \Pi_s^*\Gamma\Pi_s$ завершує доведення (i). Протягом доведення твердження (i) додатково знайдено, що Γ є максимальним додатно напіввизначеним розв'язком рівняння

$$4\Gamma Q \Gamma - \Gamma(B\Pi_s) - (B\Pi_s)^*\Gamma = 0. \tag{G.3}$$

Дійсно, припустимо, що $\tilde{\Gamma}$ є іншим додатно напіввизначеним розв'язком (G.3), тоді $\Pi_u^*\tilde{\Gamma} Q \tilde{\Gamma}\Pi_u = 0$. Відсіля випливає, що $\tilde{\Gamma}\Pi_u = 0$ і тоді $\tilde{\Gamma} = \Pi_s^*\tilde{\Gamma}\Pi_s$. Отже $\tilde{\Gamma}B = \Pi_s^*\tilde{\Gamma}(\Pi_s)^2 B = \tilde{\Gamma}(B\Pi_s)$ і таким чином $\tilde{\Gamma}$ задовольняє (2.1.59).

Для доведення тверджень (ii) і (iii) розглянемо максимальні додатно визначені розв'язки $\tilde{\Gamma}_\delta$ рівняння

$$4\tilde{\Gamma}_\delta Q \tilde{\Gamma}_\delta - \tilde{\Gamma}_\delta(B\Pi_s + \delta I) - (B\Pi_s + \delta I)^*\tilde{\Gamma}_\delta = 0 \tag{G.4}$$

з $\delta > 0$. Існування єдиного додатно визначеного розв'язку випливає з того факту, що $\tilde{\Gamma}_\delta^{-1}$ є єдиним розв'язком матричного рівняння Ляпунова

$$4Q - (B\Pi_s + \delta I)\tilde{\Gamma}_\delta^{-1} - \tilde{\Gamma}_\delta^{-1}(B\Pi_s + \delta I)^* = 0, \tag{G.5}$$

який визначається формулою

$$\tilde{\Gamma}_\delta^{-1} = 4\int_{-\infty}^{0} e^{(B\Pi_s + \delta I)t} Q e^{(B\Pi_s + \delta I)^* t}\, \mathrm{d}t.$$

Відомо (див. [125, Теорема 11.2.1]), що $\tilde{\Gamma}_\delta$ збігається до (максимального додатно напіввизначеного) розв'язоку Γ рівняння (G.3) коли $\delta \to +0$. Це дозволяє встановити (iii):

$$\begin{aligned} 2\mathrm{tr}(Q\Gamma) = 2\lim_{\delta\to+0} 2\mathrm{tr}(Q\tilde{\Gamma}_\delta) &= \frac{1}{2}\lim_{\delta\to+0} \mathrm{tr}\left(\tilde{\Gamma}_\delta^{-1}(B\Pi_s + \delta I)^*\tilde{\Gamma}_\delta + (B\Pi_s + \delta I)\right) \\ &= \mathrm{tr}(B\Pi_s). \end{aligned}$$

Насамкінець, якщо припустити, що (ii) не виконується, тоді існує вектор $\eta \in \mathbb{R}^N$, такий що $\Gamma\eta = 0$ і разом з тим $\Pi_s\eta \neq 0$. З іншого боку, $\Gamma\left(\lim_{\delta\to+0}\tilde{\Gamma}_\delta^{-1}\Pi_s^*\Pi_s\eta\right) = \Pi_s^*\Pi_s\eta$, де границя $\lim_{\delta\to+0}\tilde{\Gamma}_\delta^{-1}\Pi_s^*\Pi_s\eta$ існує з огляду на те, що $e^{(B\Pi_s+\delta I)t}Qe^{(B\Pi_s+\delta I)^*t}\Pi_s^*\Pi_s\eta$ спадає експоненціально при $t\to-\infty$, рівномірно відносно $\delta\geq 0$. Згідно з альтернативою Фредгольма $\Pi_s^*\Pi_s\eta$ і η повинні бути ортогональними, відкіля знаходимо $|\Pi_s\eta| = 0$. Знайдене протиріччя показує, що твердження (ii) справді є вірним. $\square$

Додаток H

Єдиність розв'язків деяких параболічних задач на власні значення

Наведений нижче результат узагальнює теорему з [167] про існування і єдність першого власного значення еліптичних операторів у $\mathbb{R}^N$ на випадок параболічних спектральних задач. Конкретніше, нехай A_t – P-періодична (відносно змінної часу t) сім'я еліптичних операторів в $\mathbb{R}^N$ вигляду

$$A_t u = a^{ij}(t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + b(t,x)\cdot\nabla u + c(t,x)u$$

Будемо припускати, що коефіцієнти $a^{ij}(t)$ задовольняють умову рівномірної еліптичності і має місце симетрія $a^{ij} = a^{ji}$; $|b(t,x)| \le c_1 + c_2|x|$; $c(t,x)$ прямує до $-\infty$ коли $|x| \to \infty$ рівномірно відносно t; всі коєфіцієнти є C^1-функціями, P-періодичними відносно t. Розглядається спектральна задача

$$-\partial_t u + A_t u = \lambda u \qquad \text{в} \;\; \mathbb{R}\times\mathbb{R}^N \tag{H.1}$$

з умовою P-періодичності відносно t і спадання до нуля при $|x| \to \infty$. Точніше, шукаються власні функції з класу Ξ додатних P-періодичних відносно t функцій $u(t,x)$, що спадають до нуля коли $|x| \to \infty$ рівномірно відносно t.

Лема H.1. *Існує єдине власне значення λ задачі (H.1) з відповідною власною функцією $u \in \Xi$. Це власне значення є дійсним і простим. Причому, для кожного $s > 0$ існує стала C_s, така що $|u(t,z)| \le C_s(1+|x|)^{-s}$.*

Доведення. Розглянемо допоміжні спектральні задачі

$$\begin{aligned} &-\tfrac{\partial u_k}{\partial t} + \mathcal{A}_t u_k = \lambda_k u_k, \qquad |x| < k, t \in \mathbb{R}, \\ &u_k(t+P, \cdot\,) = u_k(t, \cdot\,) \quad \text{і } u_k = 0 \text{ коли } |x| = k. \end{aligned} \tag{H.2}$$

З теореми Крейна-Рутмана для довільних $k > 0$ перше власне значення λ_k (власне значення з максимальною дійсною частиною) цієї задачі є дійсним і простим, і відповідну власну функцію u_k можна вибрати додатною. Користуючись оцінками Аронсона неважко показати, що $|\lambda_k| \le C$ з $C > 0$, що не залежить від k.

Нормалізуємо власні функції u_k задачі (H.2) рівністю $\max u_k = 1$ і, з огляду на рівномірну обмеженість $|\lambda_k|$, за допомогою нерівності Гарнака знаходимо

$$\sup\{|u_k(t,x)|;\, x \in B_{R_0},\, t \in \mathbb{R}\} \le c(R_0),$$

для кожного $R_0 > 0$, де B_s – куля, $\{x \in \mathbb{R}^{N-1} \,:\, |x| \le s\}$, і $c(R_0)$ не залежить від k.

Розглянемо тепер функцію $v_s(x) = c(R_0)|x|^{-s}$ з $s > 0$. Оскільки $c(t,x)$ прямує до $-\infty$ коли $|x| \to \infty$, неважко перевірити, що $(\mathcal{A}_t - \lambda_k)v_s < 0$ для $x \in (B_k \setminus B_{R_0})$ якщо R_0 є достатньо великим. Разом з цим $u_k \le v_s$ коли $x \in \partial(B_k \setminus B_{R_0})$, отже користуючись принципом максимума знаходимо, що $u_k \le v_s$ для $x \in (B_k \setminus B_{R_0})$ (припускаємо, що R_0 є таким великим, що $c(t,x) - \lambda_k \le 0$ для $|x| > R_0$). Перейдемо до границі $k \to \infty$, можливо для підпослідовності, в результаті отримуємо граничну функцію u яка є додатним розв'язком рівняння

$$-\frac{\partial u}{\partial t} + \mathcal{A}_t u = \lambda u, \qquad x \in \mathbb{R}^N,\, t \in \mathbb{R}$$

з $u(0) = 1$, і $\forall\, s > 0$ існує стала C_s, така що $|u(t,z)| \le C_s(1+|x|)^{-s}$. Доведення простоти λ є аналогічним [167].

Для доведення єдності λ розглянемо сім'ю спряжених рівнянь

$$\frac{\partial u_k^*}{\partial t} + A_t^* u_k^* = \lambda_k u_k^*, \qquad x \in B_k,\ t \in \mathbb{R},$$

з умовою P-періодичності відносно t і умовою Діріхле $u^* = 0$ для $x \in \partial B_k$. Згідно з Теоремою Крейна-Рутмана функція u_k^* є додатною. Крім того, оскільки власні значення λ_k є рівномірно обмеженими, u_k^* задовольняє нерівність Гарнака, рівномірну за k. Введемо нормалізацію $u_k^*(0) = 1$. Внаслідок рівномірної відносно k неперервності за Гельдером функцій u_k^* (див. [124], Теорема III.10.1) отримуємо, що функції u_k^* збігаються, при $k \to \infty$ (для підпослідовності), рівномірно на компактах в $\mathbb{R}^N \times [0, P]$, до функції u^* яка є додатним розв'язком рівняння

$$\partial_t u^* + A_t^* u^* = \lambda u^*.$$

Припустимо, що існує інше власне значення $\hat{\lambda} \neq \lambda$ задачі (H.1), таке що відповідна власна функція $\hat{u}$ є дійсною і додатною. Додаванням константи до $c(x,t)$ (якщо потрібно) можна зробити власні значення λ і $\hat{\lambda}$ додатними.

Виберемо $R_0(s)$, таке що $A_t|x|^{-s} < 0$ для $x \in \mathbb{R}^N \setminus B_{R_0}$. Тоді

$$\lambda_k \int_0^P \int_{B_k \setminus B_{R_0}} |x|^{-s} u_k^* \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \int_0^P \int_{B_k \setminus B_{R_0}} |x|^{-s} (\partial_t + A_t^*) u_k^* \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^P \int_{B_M \setminus B_{R_0}} u_k^* A_t(|x|^{-s}) \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_0^P \int_{\partial B_{R_0}} |x|^{-s} \frac{\partial u_k^*}{\partial \nu_a} \,\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}t$$

$$- \int_0^P \int_{\partial B_{R_0}} u_k^* \frac{\partial |x|^{-s}}{\partial \nu_a} \,\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}t + \int_0^P \int_{\partial B_{R_0}} (b(x,t)\cdot\nu) u_k^* |x|^{-s} \,\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}t + \int_0^P \int_{\partial B_k} |x|^{-s} \frac{\partial u_k^*}{\partial \nu_a} \,\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}t;$$

де ν позначає одиничну зонішню нормаль, і ν_a – конормаль на $\partial(B_k \setminus B_{R_0})$. За допомогою стандартних параболічних оцінок знаходимо, що другий, третій і четвертий члени в правій яастині є обмеженими рівномірно відносно k. Оскільки інтеграл в лівій частині є додатним а перший і останняй члени в правій частині є від'ємними, у границі $k \to \infty$ знаходимо

$$\int_0^P \int_{\mathbb{R}^N} u^* (1 + |x|)^{-s} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t < +\infty.$$

Також маємо наступну поточкову оцінку для $\hat{u}$ чиє доведення є аналогічним u: $\forall s > 0$ існує стала C_s, така що $\hat{u}(t,x) \leq C_s (1 + |x|)^{-s}$.

Для завершення доведення виберемо $R_0 > 0$, таке що $c(t,x) - \hat{\lambda} \leq 0$ коли $|x| \geq R_0$, і розглянемо функцію $\hat{v}_k$ яка співпадає з $\hat{u}$ в $\mathbb{R} \times B_{R_0}$ і продовжується в $\mathbb{R} \times B_k \setminus B_{R_0}$ як єдиний P-періодичний відносно t розв'язок задачі

$$-\partial_t \hat{v}_k + A_t \hat{v}_k = \hat{\lambda} \hat{v}_k, \quad x \in B_k \setminus B_{R_0},$$
$$\hat{v}_k = \hat{u} \text{ на } \partial B_{R_0}, \quad \hat{u}_k = 0 \text{ на } \partial B_k.$$

За допомогою інтегрування частинами отримуємо

$$\hat{\lambda} \int_0^P \int_{B_k} \hat{v}_k u_k^* \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t = \int_0^P \int_{B_{R_0}} u_k^* (-\partial_t \hat{u} + A_t \hat{u}) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t$$
$$+ \int_0^P \int_{B_k \setminus B_{R_0}} u_k^* (-\partial_t \hat{v}_k + A_t \hat{v}_k) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t = \int_0^P \int_{B_k} \hat{v}_k (\partial_t u_k^* + A_t^* u_k^*) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t$$
$$+ \int_0^P \int_{\partial B_{R_0}} u_k^* \Big[\frac{\partial \hat{v}_k}{\partial \nu_a}\Big] \,\mathrm{d}\sigma \,\mathrm{d}t = \lambda_k \int_0^P \int_{B_k} \hat{v}_k u_k^* \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t + \int_0^P \int_{\partial B_{R_0}} u_k^* \Big[\frac{\partial \hat{v}_k}{\partial \nu_a}\Big] \,\mathrm{d}\sigma \,\mathrm{d}t,$$

де $[\frac{\partial \hat{v}_k}{\partial \nu_a}]$ позначає стрибок похідної по конормалі від $\hat{v}_k$ при переході через ∂B_{R_0}. Оскільки $0 \leq \hat{v}_k \leq \hat{u}$ (згідно з принципом максимума), $\forall\, s > 0$ маємо $|\hat{v}_k(x,t)| \leq C_s(1+|x|)^{-s}$ рівномірно відносно k. Скориставшись принципом максимума ще раз, знаходимо, що функції $\hat{v}_k$ збігаються рівномірно до $\hat{u}$ при $k \to \infty$. Тоді, внаслідок стандартних параболічних оцінок $[\frac{\partial \hat{v}_k}{\partial \nu_a}] \to 0$ рівномірно на $\mathbb{R} \times \partial B_{R_0}$. Таким чином у границі $k \to \infty$ отримуємо

$$\hat{\lambda} \int_0^P \int_{\mathbb{R}^N} \hat{u} u^* \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t = \lambda \int_0^P \int_{\mathbb{R}^N} \hat{u} u^* \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t,$$

звідки $\hat{\lambda} = \lambda$. $\square$

Додаток I

Структура розв'язків задачі мінімізації граничного функціонала (3.1.35)

За допомогою опуклої дуальності (див., наприклад, [79]) перейдемо від задачі

$$M_\sigma = \min\Big\{\frac{1}{2}\int_\Omega \big(|\nabla(h-\sigma)|^2 + (h-\sigma)^2 + 2\pi\gamma\Phi((-\Delta h + h)/(2\pi))\big)\,dx; \\ (h-\sigma)\in H_0^1(\Omega),\ -\Delta h + h \in L^2(\Omega)\Big\} \quad \text{(I.1)}$$

до дуальної:

$$-M_\sigma = \min\left\{\frac{1}{2}\int_\Omega (|\nabla f|^2 + f^2)\,dx + \mathcal{F}^*(-f);\ f\in H_0^1(\Omega)\right\}, \qquad \text{(I.2)}$$

де $\mathcal{F}^*(f)$ – перетворення Лежандра функціонала

$$\mathcal{F}(\kappa) = \pi\gamma\int_\Omega \Phi((-\Delta\kappa + \kappa + \sigma)/(2\pi)),$$

тобто

$$\mathcal{F}^*(f) = \sup\left\{\int_\Omega (\nabla f\cdot\nabla\kappa + f\kappa)\,dx - \mathcal{F}(\kappa);\ \kappa\in H_0^1(\Omega)\right\}.$$

Завдяки тому, що $\mathcal{F}(\kappa)$ є напівнеперервним знизу, мінімізант $(\bar{h}-\sigma)$ задачі (I.1) і мінімізант $\bar{f}$ задачі (I.2) співпадають (більш того M_σ в (I.1) і (I.2) однакові). Таким чином, маємо

$$2\pi D(x) = -\Delta\bar{h} + \bar{h} = -\Delta\bar{f} + \bar{f} + \sigma \qquad \text{(I.3)}$$

Обчислення претворення Лежандра $\mathcal{F}^*(f)$ зводитья до обчислення перетворення Лежандра $\Phi^*(f)$ функції $\pi\gamma\Phi(z/(2\pi))$. Дійсно, за допомогою інтегрування частинами, знаходимо

$$\int_\Omega (\nabla f\cdot\nabla\kappa + f\kappa)\,dx - \mathcal{F}(\kappa) =$$
$$\int_\Omega(-\Delta\kappa+\kappa+\sigma)f\,dx - \int_\Omega\Big(\pi\gamma\Phi\big((-\Delta\kappa+\kappa+\sigma)/(2\pi)\big) - \sigma f\Big)dx,$$

отже

$$\mathcal{F}^*(-f) = \int_\Omega(\Phi^*(-f)+\sigma f)dx. \tag{I.4}$$

Перетворення Лежандра $\Phi^*(f)$ функції $\pi\gamma\Phi(z/(2\pi))$ є $\Phi^*(f) = 0$ для $|f|\le\gamma/2$ і $\Phi^*(f) = 2\pi k|f| - \pi\gamma k^2$ для $k\gamma-\gamma/2\le|f|\le k\gamma+\gamma/2$.

Таким чином задача (I.1) є еквівалентною задачі

$$\min\Big\{\frac{1}{2}\int_\Omega\big(|\nabla f|^2 + f^2 + 2\Phi^*(f) + 2\sigma f\big)\,dx; f\in H_0^1(\Omega)\Big\}, \tag{I.5}$$

і граничний розподіл $D(x)$ визначається через $\bar f$ формулою (I.3).

В наступній Лемі встановлюється монтонну залежність мінімізантів від σ.

Лема I.1. *Нехай $\bar f_\sigma$ – мінімізант (I.5), тоді $\bar f_\sigma \le 0$ в Ω для всіх $\sigma > 0$, і $\bar f_\alpha \le \bar f_\beta$ в Ω якщо $\alpha>\beta$.*

Доведення. Покладемо

$$\tilde\Phi^*_\delta(f) = \frac{1}{2\delta}\int_{f-\delta}^{f+\delta}\Phi^*(z)\,dz,$$

і зазначимо, що внаслідок неперервності і опуклості $\tilde\Phi^*$ функція $\tilde\Phi^*_\delta\in C^1(\mathbb{R})$ і є опуклою. Нехай $\tilde f_\sigma$ – мінімізант функціоналу (I.5) з $\tilde\Phi^*_\delta$ замість Φ^*. Очевидно, він є неперервною функцією. Припустимо, що функція $\tilde f = \tilde f_\beta - \tilde f_\alpha$ має від'ємний мінімум, тоді віднімемо рівняння Ейлера-Лагранжа для $\tilde f_\alpha$ від рівняння Ейлера-Лагранжа для $\tilde f_\beta$:

$$-\Delta\tilde f + \tilde f + (\beta-\alpha) + (\tilde\Phi^*_\delta)'(f_\beta) - (\tilde\Phi^*_\delta)'(f_\alpha) = 0$$

У точці мінімума $\tilde f$ маємо $-\Delta\tilde f\le 0$, $\tilde f<0$, $\beta-\alpha<0$ і $(\tilde\Phi^*_\delta)'(\tilde f_\beta) - (\tilde\Phi^*_\delta)'(\tilde f_\alpha)\le 0$. З отриманого протирічча знходимо $\tilde f_\beta\ge\tilde f_\alpha$. Зокрема, для $\beta=0$ маємо $\tilde f_\sigma\le 0$ коли $\sigma>0$.

Для завершення доведення переходимо до границі $\delta\to 0$. □

Розглянемо випадок слабкого магнітного поля $h^{\varepsilon}_{ext} = \sigma/\varepsilon^2$, коли $\sigma > 0$ є малим. Природно очикувати, що у цьому випадку мінімізант $\bar{f}_\sigma$ задачі (I.5) задовольняє $-\gamma/2 < f_\sigma \leq 0$. Тоді $\Phi^*(f_\sigma + v) = 0$ в Ω для достатньо малих тестових функцій $v \in C_0^\infty(\Omega)$, звідки випливає, що $\bar{f}_\sigma$ співпадає з розв'язком задачі

$$\begin{cases} \Delta f = f + \sigma \text{ в } \Omega \\ f = 0 \text{ на } \partial\Omega. \end{cases} \tag{I.6}$$

Твердження I.2. *Нехай f_1 – розв'язок задачі (I.6) для $\sigma = 1$, і γ задається (3.1.3). Якщо*

$$\sigma \leq \sigma_{\text{cr1}} := \frac{\gamma}{2 \max |f_1|} \tag{I.7}$$

тоді мінімізант $\bar{f}_\sigma$ задачі (I.5) визначається рівністю $\bar{f}_\sigma = \sigma f_1$, і, згідно з (I.3), $D(x) = 0$.

Доведення. Оскільки

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \left(|\nabla f|^2 + f^2 + 2\Phi^*(f) + 2\sigma f\right) dx \geq \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|\nabla f|^2 + f^2 + 2\sigma f\right) dx \tag{I.8}$$

для всіх f, і (I.8) перетворюється на рівність якщо f мінімізує праву частину $f = \sigma f_1$, то дійсно $\bar{f}_\sigma = \sigma f_1$. □

Якщо параметр σ перевищує σ_{cr1}, тоді σf_1 більше не є мінімізантом (I.5), і (I.5) зводиться до наступної варіаційної задачі

$$\min\left\{\frac{1}{2}\int_\Omega \left(|\nabla f|^2 + f^2 + 4\pi(|f| - \gamma/2)_+ + 2\sigma f\right) dx;\ f \in H_0^1(\Omega)\right\}. \tag{I.9}$$

Твердження I.3. *Нехай g_σ – мінімізант (I.9) і нехай*

$$\sigma_{\text{cr2}} := \max\{\sigma > 0; \max |g_\sigma| \leq 3\gamma/2\}. \tag{I.10}$$

Тоді для $\sigma \in (\sigma_{\text{cr1}}, \sigma_{\text{cr2}})$ мінімізант $\bar{f}_\sigma$ of (I.5) співпадає з мінімізантом (I.9).

Доведення. Скориставшись Лемою I.1, неважко показати, що мінімізант g_σ задачі (I.9) задовольняє поточкову нерівність $g_\sigma \geq -3\gamma/2$ в Ω коли $\sigma \leq \sigma_{\text{cr2}}$. Далі потрібно повторити міркування з Твердження I.2. □

Для того, щоб описати структуру функції $D(x)$ потрібно більш детально вивчити задачу (I.9).

Твердження I.4. *Якщо $\sigma_{\mathrm{cr1}} < \sigma \le 2\pi + \gamma/2$, тоді (I.9) зводиться до задачі*

$$\min\left\{\frac{1}{2}\int_\Omega \left(|\nabla f|^2 + f^2 + 2\sigma f\right) dx;\ f \in H_0^1(\Omega),\, |f| \le \gamma/2\right\}. \tag{I.11}$$

Мінімізант $\bar f_\sigma$ приймає значення $-\gamma/2$ на множині ненульової (двовимірної) міри. Більш того, функція $D(x)$ є нульовою в області де $\bar f(x) > -\gamma/2$ і $D(x) = (\sigma - \gamma/2)/(2\pi)$ у противному випадку.

Якщо $\max\{\sigma_{\mathrm{cr1}}, 2\pi + \gamma/2\} < \sigma \le \sigma_{\mathrm{cr2}}$, тоді $D(x) = 1$ коли $\bar f_\sigma(x) < -\gamma/2$ і $D(x) = 0$ коли $\bar f_\sigma(x) \ge -\gamma/2$, де $\bar f_\sigma$ – мінімізант (I.9).

Доведення. Нехай $\sigma_{\mathrm{cr1}} < \sigma \le 2\pi + \gamma/2$, тоді $f^2 + 4\pi(|f| - \gamma/2)_+ + 2\sigma f > \gamma^2/4 - \sigma\gamma$ коли $f < -\gamma/2$. Звідси випливає, що мінімізант$\bar f_\sigma$ задачі (I.9) задовольняє поточкову нерівність $\bar f_\sigma \ge -\gamma/2$. Ясно також, що $\bar f_\sigma \le 0$. Таким чином, $\bar f_\sigma$ мінімізує (I.11). Якщо припустити, що $\bar f_\sigma$ задовольняє строгу нерівність $\bar f_\sigma(x) > -\gamma/2$ для майже всіх $x \in \Omega$, тоді $-\Delta \bar f_\sigma(x) + \bar f_\sigma(x) + \sigma = 0$ в Ω, отже $\bar f_\sigma$ є розв'язком задачі (I.6). Оскільки $\sigma > \sigma_{\mathrm{cr1}}$, маємо протирічча з поточковою оцінкою $\bar f_\sigma \ge -\gamma/2$.

У випадку $\max\{\sigma_{\mathrm{cr1}}, 2\pi + \gamma/2\} < \sigma \le \sigma_{\mathrm{cr2}}$, маємо $-\Delta \bar f_\sigma(x) + \bar f_\sigma(x) + \sigma = 0$ коли $-\gamma/2 < \bar f_\sigma \le 0$, і $-\Delta \bar f_\sigma(x) + \bar f_\sigma(x) + \sigma = 2\pi$ коли $\bar f_\sigma < -\gamma/2$. Таким чином необхідно тільки показати що множина рівня $\bar f_\sigma = -\gamma/2$ має нульову міру. Для цього розглянемо множину $W = \{x \in \Omega;\ -\gamma/2 \ge \bar f_\sigma > -\gamma/2 - \delta\}$, де $\delta > 0$. Для достатньо малих δ межу W можна розбити на дві непусті частини $S_1 = \{x \in \partial W;\ \bar f_\sigma = -\gamma/2\}$ і $S_2 = \{x \in \partial W;\ \bar f_\sigma = -\gamma/2 - \delta\}$. Обидві множини S_1 і S_2 мають нульову міру. Розглянемо функцію U, таку що $\Delta U = 0$ у внутрішніх точках W, $U = -\gamma/2$ на S_1, і $U = -\gamma/2 - \delta$ на S_2. Згідно з принципом максимуму $U < -\gamma/2$ у внутрішніх точках W. З іншогог боку $\bar f_\sigma \le U$ (інакше $\min\{\bar f_\sigma, U\}$ є мінімізантом). Таким чином множина рівня $\bar f_\sigma = -\gamma/2$ співпадає з S_1 і має нульову міру. $\square$

Для $\sigma > \sigma_{\mathrm{cr2}}$ з'являються вихорі з кратністю більшою одиниці. Як і у випадку простих вихорів, є два сценарія у залежності від того чи $\sigma_{\mathrm{cr2}} < \gamma/2 + 2\pi$ або $\sigma_{\mathrm{cr2}} \geq \gamma/2 + 2\pi$. Визначимо

$$\sigma_{\mathrm{cr3}} := \max\{\sigma > 0; \max|g_\sigma| \leq 5\gamma/2\}, \tag{I.12}$$

де g_σ – мінімізант задачії

$$\min\left\{\frac{1}{2}\int_\Omega \big(|\nabla f|^2 + f^2 + 4\pi((|f| - \gamma/2)_+ + (|f| - 3\gamma/2)_+) + 2\sigma f\big)\,dx;\right.$$
$$\left. f \in H_0^1(\Omega)\right\}. \tag{I.13}$$

Твердження I.5. *Якщо $\sigma_{\mathrm{cr2}} < \sigma \leq 4\pi + 3\gamma/2$, тоді (I.13) зводиться до задачі*

$$\min\left\{\frac{1}{2}\int_\Omega \big(|\nabla f|^2 + f^2 + 4\pi(|f| - \gamma/2)_+ + 2\sigma f\big)\,dx;\ f \in H_0^1(\Omega),\ |f| \leq 3\gamma/2\right\}. \tag{I.14}$$

Мінімізант $\bar{f}_\sigma$ приймає значення $-3\gamma/2$ на множині ненульової (двовимірної) міри. Більш того, функція $D(x)$ є нульовою в області де $\bar{f}_\sigma(x) > -\gamma/2$, $D(x) = 1$ коли $-3\gamma/2 < \bar{f}_\sigma(x) < -\gamma/2$ і $D(x) = (\sigma - 3\gamma/2)/(2\pi)$ коли $\bar{f}_\sigma(x) = -3\gamma/2$.

Якщо $\max\{\sigma_{\mathrm{cr2}}, 4\pi + 3\gamma/2\} < \sigma \leq \sigma_{\mathrm{cr3}}$, тоді $D(x) = 0$ коли $\bar{f}_\sigma(x) > -\gamma/2$, $D(x) = 1$ якщо $-3\gamma/2 < \bar{f}_\sigma(x) < -\gamma/2$ і $D(x) = 2$ коли $f_\sigma(x) < -3\gamma/2$, де $\bar{f}_\sigma$ – мінімізант (I.13).

Доведення цього результату є аналогічним попереднім випадкам. Подальше збільшення магнітного поля призводить до вихорів з більшими кратностями у вложених областях. Якісно структуру $D(x)$ описано в наступній Теоремі.

Теорема I.6. *Існує строго зростаюча послідовність критичних значень $\sigma_{\mathrm{cr}j} = \sigma_{\mathrm{cr}j}(\gamma, \Omega)$, $j = 1, 2, \ldots$, така що для $\sigma_{\mathrm{cr}j} < \sigma < \sigma_{\mathrm{cr}(j+1)}$ функція $D(x)$ приймає постійні значення на підмножинах $\Omega_k \setminus \Omega_{k+1}$, де $\Omega_k = \Omega_k(\sigma)$, $k = 0, 1, \ldots, j$ – строго вкладені підобласті і $\Omega_0 = \Omega$. Більш конкретно, $D(x) = 0$ в $\Omega_0 \setminus \Omega_1$ і $D(x) = k$ в $\Omega_k \setminus \Omega_{k+1}$, $k \leq j - 1$. Коли $x \in \Omega_j$ можливі такі два випадка: якщо $\sigma < 2\pi j + (j - 1/2)\gamma$ тоді $(j-1) < D(x) < j$, у противному випадку $D(x) = j$.*

Додаток J

Доведення теореми про усереднення для параболічної задачі (3.2.2)

В термінах операторів $\mathcal{A}_\varepsilon$ і $\mathcal{G}_\varepsilon$ задача (3.2.2) має вигляд

$$\begin{cases} \partial_t u_\varepsilon(t) + \mathcal{A}_\varepsilon(u_\varepsilon(t)) - \mathcal{G}_\varepsilon(u_\varepsilon(t)) = f(t), \ t > 0 \\ u_\varepsilon(0) = \tilde{u}. \end{cases} \tag{J.1}$$

Вивчається асимптотична поведінка розв'язків u^ε задачі (J.1) коли $\varepsilon \to 0$. При цьому будемо користатись означенням двохмасштабної збіжності функцій, що залежать від змінної часу t. Слідуючи [71], будемо називати

послідовність $v_\varepsilon = v_\varepsilon(x,t)$, яка є обмеженою в $L^2(\Omega \times [0,T])$, двохмасштабно збіжною до $V_0(x,y,t)$ якщо

$$\int_0^T \int_\Omega v_\varepsilon \phi(x, x/\varepsilon, t)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t \to \int_0^T \int_Y \int_\Omega V_0 \phi(x,y,t)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}t, \tag{J.2}$$

$\forall\ Y$–періодичної відносно y функції $\phi(x,y,t) \in C^\infty(\Omega \times Y \times [0,T])$.

Основні властивості збіжності (J.2) є аналогічними стандартній двохмасштабній збіжності. Зокрема, довільна обмежена в $L^2(\Omega \times [0,T])$ послідовність має підпослідовність, що збігається у сенсі (J.2); якщо $\|v_\varepsilon\|_{L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega))} \le C$, тоді, з точністю до підпослідовності, v_ε і Dv_ε збігаються у сенсі (J.2) до V_0 і $DV_0(x,t) + D_y V_1(x,y,t)$, відповідно, де $V_0 \in L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega))$, $V_1 \in L^2([0,T] \times \Omega; W^{1,2}_{per}(Y))$. Зазначимо, що з (J.2) взагалі кажучі не випливає, що $v_\varepsilon(\,\cdot\,,t)$ збігається двохмасштабно для майже всіх $t \in [0,T]$, але

$$\int_\alpha^\beta v_\varepsilon \mathrm{d}t \to \int_\alpha^\beta V_0 \mathrm{d}t \ \text{ двохмасштабно для всіх } \ 0 \le \alpha < \beta \le T.$$

1 (*Існування і єдиність розв'язку задачі* (J.1)). Для заданого $T > 0$, покажемо, що задача (J.1) має єдиний розв'язок на інтервалі $[0, T]$. Для цього зазначимо, що оператор $\mathcal{A}_\varepsilon(u) - \mathcal{G}_\varepsilon(u) + \tilde{\lambda} u$ стає монотонним для достатньо великих $\tilde{\lambda} > 0$. Дійсно, користуючись (3.2.8) отримуємо

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{G}_\varepsilon(u) - \mathcal{G}_\varepsilon(v), u - v\rangle_\varepsilon \leq C \int_{S_\varepsilon} |u - v|^2 \mathrm{d}\sigma \\ \leq \kappa/2 \|D(u - v)\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \Gamma_\varepsilon \|u - v\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)}, \ \forall u, v \in W^{1,2}(\Omega_\varepsilon), \quad \text{(J.3)}\end{aligned}$$

де κ – стала з (3.2.5), і Γ_ε не залежить від u_ε і v_ε (остання нерівність в (J.3) випливає з компактності оператора сліду $T_\varepsilon : W^{1,2}(\Omega_\varepsilon) \to L^2(S_\varepsilon)$, $T_\varepsilon w =$ слід w на S_ε). Покладемо $\tilde{\lambda} = \Gamma_\varepsilon + 1$, користуючись (3.2.5) і (J.3) тепер неважко перевірити, що

$$\text{оператор } u \mapsto \mathcal{A}_\varepsilon(u) - \mathcal{G}_\varepsilon(u) + \tilde{\lambda} u \text{ є монотонним.} \quad \text{(J.4)}$$

Заміною невідомої функції $v_\varepsilon = e^{-\tilde{\lambda} t} u_\varepsilon$ задача (J.1) зводиться до еволюційної задачі $\partial_t v_\varepsilon(t) + \tilde{\mathcal{A}}_\varepsilon(v_\varepsilon(t), t) - \tilde{\mathcal{G}}_\varepsilon(v_\varepsilon(t), t) + \tilde{\lambda} v_\varepsilon = e^{-\tilde{\lambda} t} f(t),\ t > 0$, з початковою умовою $v_\varepsilon(0) = \tilde{u}$, де $\tilde{\mathcal{A}}_\varepsilon : v \mapsto e^{-\tilde{\lambda} t} \mathcal{A}_\varepsilon(e^{\tilde{\lambda} t} v)$ і $\tilde{\mathcal{G}}_\varepsilon : v \mapsto e^{-\tilde{\lambda} t} \mathcal{G}_\varepsilon(e^{\tilde{\lambda} t} v)$. До неї можна застосувати відомі абстрактні результати для монотонних операторів (див., наприклад, [186]), і з (J.4), (3.2.5) і (J.3) випливає існування єдиного розв'язку на $[0, T]$ для довільних функцій $f \in L^2([0, T]; X^*_\varepsilon)$ і $\tilde{u} \in L^2(\Omega)$.

2 (*Рівномірні апріорні оцінки*). Покажемо, що для довільного $T > 0$ розв'язок u_ε задачі (J.1) задовольняє наступні оцінки для малих ε,

$$\|\partial_t u_\varepsilon\|^2_{L^2(0,T;X^*_\varepsilon)}, \|u_\varepsilon\|^2_{L^2(0,T;X_\varepsilon)} \leq C(\langle \tilde{u}, \tilde{u}\rangle_\varepsilon + \|f\|^2_{L^2(0,T;X^*_\varepsilon)} + 1), \quad \text{(J.5)}$$

зі сталою C, що не залежить від ε. Нехай ε_0, λ_0 – сталі з Теореми 3.2.1. З (J.1) маємо, для $\varepsilon \leq \varepsilon_0$

$$\begin{aligned}\langle u_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t)\rangle_\varepsilon + 2 \int_0^t \langle \mathcal{A}_\varepsilon(u_\varepsilon(\tau)) + \mathcal{G}_\varepsilon(u_\varepsilon(\tau)) + \lambda_0 u_\varepsilon(\tau), u_\varepsilon(\tau)\rangle_\varepsilon \mathrm{d}\tau \\ = \langle \tilde{u}, \tilde{u}\rangle_\varepsilon + 2 \int_0^t \langle f(\tau) + \lambda_0 u_\varepsilon(\tau), u_\varepsilon(\tau)\rangle_\varepsilon \mathrm{d}\tau. \quad \text{(J.6)}\end{aligned}$$

Тоді (J.6) в комбінації з (3.2.53) дають

$$\langle u_\varepsilon(T'), u_\varepsilon(T')\rangle_\varepsilon + 2\kappa_1 \|u_\varepsilon\|^2_{L^2(0,T';X_\varepsilon)} \le \langle \tilde{u}, \tilde{u}\rangle_\varepsilon + \|f\|_{L^2(0,T';X^*_\varepsilon)} \|u_\varepsilon\|_{L^2(0,T';X_\varepsilon)} + 2T'\kappa_2 + 2\lambda_0 \int_0^{T'} \langle u_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t)\rangle_\varepsilon \mathrm{d}t, \ \forall\ 0 \le T' \le T. \quad \text{(J.7)}$$

Отже

$$\langle u_\varepsilon(T'), u_\varepsilon(T')\rangle_\varepsilon \le e^{2\lambda_0 T'}(\langle \tilde{u}, \tilde{u}\rangle_\varepsilon + \frac{1}{\kappa_1}\|f\|^2_{L^2(0,T';X^*_\varepsilon)} + 2T'\kappa_2), \quad \text{(J.8)}$$

таким чином, з оцінки (J.8) і (J.7) випливає друга оцінка в (J.5), а для доведення пешої оцінки запишемо $\|\partial_t u_\varepsilon\|_{L^2(0,T;X^*_\varepsilon)} \le \|\mathcal{A}_\varepsilon(u_\varepsilon)\|_{L^2(0,T;X^*_\varepsilon)} + \|\mathcal{G}_\varepsilon(u_\varepsilon)\|_{L^2(0,T;X^*_\varepsilon)} + \|f\|_{L^2(0,T;X^*_\varepsilon)}$ і скористаємось другою оцінкою в (J.5) і (3.2.52).

3 (*Усереднення задачі* (J.1)). Продовжимо u_ε на Ω за допомогою оператора продовження P_ε (див. Підрозділ [**?**]), тоді результуюча функція, яку продовжимо позначати u_ε, задовольняє

$$\|u_\varepsilon(t)\|_{L^2(\Omega)} \le C \text{ для всіх } t \in [0,T], \text{ і } \|u_\varepsilon\|_{L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega))} \le C, \quad \text{(J.9)}$$

зі сталою C, що не залежить від ε. Відсіля випливає, що, з точністю до підпослідовності,

$$u_\varepsilon \to U_0(x,t) \text{ двохмасштабно (у сенсі (J.2)) і слабко в } L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega)), \quad \text{(J.10)}$$

$$D_x u_\varepsilon \to D_x U_0(x,t) + D_y U_1(x,y,t) \text{ двохмасштабно (у сенсі (J.2))}, \quad \text{(J.11)}$$

де $U_0 \in L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega))$, $U_1 \in L^2(0,T;L^2(\Omega;W^{1,2}_{per}(Y)))$. Крім того, якщо покласти $\hat{u}_\varepsilon = u_\varepsilon$ для $x \in \Omega_\varepsilon$ і $\hat{u}_\varepsilon = 0$ для $x \in \Omega \setminus \Omega_\varepsilon$, тоді з (J.10) випливає, що $\hat{u}_\varepsilon \to |Y^*|U_0(x,t)$ слабко в $L^2(0,T;L^2(\Omega))$.

Нехай $X = W^{1,2}(\Omega)$ і нехай X^* позначає дуальний простір відносно парування

$$\langle u, v\rangle = |Y^*|\int_\Omega uv \mathrm{d}x.$$

Покажемо, що $U_0 \in W^{1,2}(0,T;X^*)$, і $\hat{u}_\varepsilon(t) \to |Y^*|U_0(t)$ слабко в $L^2(\Omega)$ для всіх $0 \le t \le T$. З (J.10) випливає, що для довільних $\phi \in X$ і $\varphi \in C_0^\infty([0,T])$,

$$\int_0^T \langle \partial_t u_\varepsilon, \phi\rangle_\varepsilon \varphi(t)\mathrm{d}t = -\int_0^T \langle u_\varepsilon, \phi\rangle_\varepsilon \varphi'(t)\mathrm{d}t \to -\int_0^T \langle U_0, \phi\rangle \varphi'(t)\mathrm{d}t. \quad \text{(J.12)}$$

З іншого боку, користуючись (J.5), отримуємо

$$\left|\int_0^T \langle \partial_t u_\varepsilon, \phi\rangle_\varepsilon \varphi(t)\mathrm{d}t\right|^2 \le C\int_0^T \|\phi\|^2_{X_\varepsilon}|\varphi(t)|^2\mathrm{d}t \le C\|\varphi\phi\|^2_{L^2(0,T;X)}. \tag{J.13}$$

Тоді з (J.12), (J.13) випливає, що $U_0 \in W^{1,2}(0,T;X^*)$. Згідно з (J.8) норми $\|\hat{u}_\varepsilon(t)\|_{L^2(\Omega)}$ є рівномірно обмеженими відносно $0<\varepsilon\le\varepsilon_0$ і $t\in[0,T]$. Таким чином, для доведення слабкої збіжності $\hat{u}_\varepsilon(t)\to|Y^*|U_0(t)$ в $L^2(\Omega)$ для довільного $t\in[0,T]$ достатньо показати, що

$$\langle u_\varepsilon(t),\phi\rangle_\varepsilon \to \langle U_0(t),\phi\rangle \text{ для всіх } \phi\in X. \tag{J.14}$$

З першої оцінки в (J.5) знаходимо $|\langle u_\varepsilon(t)-u_\varepsilon(t'),\phi\rangle_\varepsilon| \le C|t-t'|^{1/2}\|\phi\|_X$, з іншого боку маємо (J.14) у сенсі слабкої з зірочкою збіжності в $L^\infty(0,T)$, оскільки $\hat{u}_\varepsilon \to |Y^*|U_0(x,t)$ слабко в $L^2(0,T;L^2(\Omega))$. Таким чином (J.14) має місце для всіх $t\in[0,T]$, так що $\forall t\in[0,T]$ $\hat{u}_\varepsilon(t)\to|Y^*|U_0(t)$ слабко в $L^2(\Omega)$, зокрема,

$$\begin{aligned}\liminf_{\varepsilon\to0}\langle u_\varepsilon(T),u_\varepsilon(T)\rangle_\varepsilon &= \liminf_{\varepsilon\to0}\int_{\Omega_\varepsilon}\left((u_\varepsilon(T)-U_0(T))^2-U_0^2(T)\right)\mathrm{d}x\\ &+2\lim_{\varepsilon\to0}\int_\Omega \hat{u}_\varepsilon(T)U_0(T)\,\mathrm{d}x = \liminf_{\varepsilon\to0}\int_{\Omega_\varepsilon}(u_\varepsilon(T)-U_0(T))^2\,\mathrm{d}x + \langle U_0(T),U_0(T)\rangle\\ &\ge \langle U_0(T),U_0(T)\rangle,\end{aligned} \tag{J.15}$$

і, очевидно,

$$\langle u_\varepsilon(T),v_\varepsilon\rangle_\varepsilon \to \langle U_0(T),V_0\rangle, \text{ для довільної послідовності } (v_\varepsilon)\text{, такої що } v_\varepsilon\to V_0 \text{ сильно в } L^2(\Omega). \tag{J.16}$$

Лема J.1. *Якщо (u_ε) є (під)послідовністю розв'язків (J.1), такою що виконується (J.10), тоді*

$$\|u_\varepsilon - U_0\|_{L^2(\Omega\times[0,T])} \to 0 \text{ при } \varepsilon\to0. \tag{J.17}$$

Доведення. Внаслідок (J.10) достатньо встановити компактність (u_ε) в $L^2(\Omega\times[0,T])$. Для цього буде побудовано послідовність компактів K_k ($k=1,2,\dots$) в $L^2(\Omega\times[0,T])$, таку що $\lim_{k\to\infty}\limsup_{\varepsilon\to0}\operatorname{dist}_{L^2(\Omega\times[0,T])}(u_\varepsilon,K_k)=0$.

Нехай $0 = \omega_\varepsilon^{(0)} < \omega_\varepsilon^{(1)} \le \dots \le \omega_\varepsilon^{(j)} \le \dots$ – спектр задачі Неймана

$$\begin{cases} -\Delta\phi = \omega\phi \text{ в } \Omega_\varepsilon \\ \frac{\partial\phi}{\partial\nu} = 0 \text{ на } \partial\Omega_\varepsilon. \end{cases}$$

Виберемо власні функції $\phi_\varepsilon^{(j)}$ так щоб вони утворювали ортонормований базис в $L^2(\Omega_\varepsilon)$, тоді

$$u_\varepsilon(t) = \sum_{j=0}^{\infty} f_\varepsilon^{(j)}(t) P_\varepsilon \phi_\varepsilon^{(j)}, \text{ where } f_\varepsilon^{(j)}(t) = \langle u_\varepsilon(t), \phi_\varepsilon^{(j)} \rangle_\varepsilon.$$

Ясно, що функції $\phi_\varepsilon^{(j)}/(\omega_\varepsilon^{(j)}+1)^{1/2}$ утворюють ортонормований базис в $W^{1,2}(\Omega_\varepsilon)$ (зі скалярним добутком $\int_{\Omega_\varepsilon}(\nabla u \cdot \nabla v + uv)\mathrm{d}x$), отже

$$\sum_{j=0}^{\infty}(1+\omega_\varepsilon^{(j)}) \int_0^T |f_\varepsilon^{(j)}(t)|^2 \mathrm{d}t = \|u_\varepsilon\|^2_{L^2(0,T;X_\varepsilon)} \le \|u_\varepsilon\|^2_{L^2(0,T;X)} \le C. \tag{J.18}$$

Добре відомо, що $\omega_\varepsilon^{(k)} \to \omega^{(k)}$ при $\varepsilon \to 0$, де $0 = \omega^{(0)} < \omega^{(1)} \le \dots \le \omega^{(j)} \le \dots$ – дискретний спектр усередненої задачі. З першої оцінки в (J.5) маємо $|f_\varepsilon^{(j)}(t) - f_\varepsilon^{(j)}(t')| \le C|t-t'|^{1/2}\|\phi_\varepsilon^{(j)}\|_{X_\varepsilon} = C|t-t'|^{1/2}(1+\omega_\varepsilon^{(j)})^{1/2}$ для всіх $t, t' \in [0,T]$. Звідси випливає, що, для довільного фіксованого k, послідовність $(u_\varepsilon^{(k)} := \sum_{j=0}^{k} f_\varepsilon^{(j)}(t) P_\varepsilon \phi_\varepsilon^{(j)})$ лежить в обмеженій замкненій підмножині K_k множини $C^{1/2}([0,T];X)$. Неважко бачити, що множину K_k можна вибрати компактною в $L^2(\Omega \times [0,T])$. З іншого боку, згідно з властивостями оператора продовження P_ε,

$$\|u_\varepsilon - u_\varepsilon^{(k)}\|^2_{L^2(\Omega\times[0,T])} \le C \int_0^T \|u_\varepsilon - u_\varepsilon^{(k)}\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \mathrm{d}t = C \sum_{j=k+1}^{\infty} \int_0^T |f_\varepsilon^{(j)}(t)|^2 \mathrm{d}t,$$

отже, з огляду на (J.18), $\limsup_{\varepsilon\to 0} \mathrm{dist}_{L^2(\Omega\times[0,T])}(u_\varepsilon, K_k) \le \limsup_{\varepsilon\to 0} \|u_\varepsilon - u_\varepsilon^{(k)}\|_{L^2(\Omega\times[0,T])} \le C/\omega^{(k+1)} \to 0$ коли $k \to \infty$. □

Виберемо тепер довільні $V_0(x,t) \in C^\infty(\overline{\Omega} \times [0,T])$, $V_1(x,y,t) \in C^\infty(\overline{\Omega} \times \overline{Y} \times [0,T])$, де $V_1(x,y,t)$ є Y-періодичною функцією відносно y, покладемо

$v_\varepsilon = V_0(x,t) + \varepsilon V_1(x, x/\varepsilon, t)$, і скористаємось тестовою функцією $w_\varepsilon = u_\varepsilon - v_\varepsilon$ в (J.1):

$$\frac{1}{2}\langle u_\varepsilon(T), u_\varepsilon(T)\rangle_\varepsilon - \frac{1}{2}\langle \tilde{u}, \tilde{u}\rangle_\varepsilon - \langle u_\varepsilon(T), v_\varepsilon(T)\rangle_\varepsilon + \langle \tilde{u}, v_\varepsilon(0)\rangle_\varepsilon$$
$$+ \int_0^T \langle u_\varepsilon(t), \partial_t v_\varepsilon(t)\rangle_\varepsilon \mathrm{d}t + \int_0^T \langle \mathcal{A}_\varepsilon(u_\varepsilon(t)), w_\varepsilon(t)\rangle_\varepsilon \mathrm{d}t - \int_0^T \langle \mathcal{G}_\varepsilon(u_\varepsilon(t)), w_\varepsilon(t)\rangle_\varepsilon \mathrm{d}t$$
$$= \int_0^T \langle f(t), w_\varepsilon(t)\rangle_\varepsilon \mathrm{d}t. \quad \text{(J.19)}$$

З огляду на (J.10) і (J.15), (J.16), можна перейти до границі $\liminf_{\varepsilon\to 0}$ у (J.19), в результаті отримуємо

$$\liminf_{\varepsilon\to 0}\bigg(\frac{1}{2}\langle u_\varepsilon(T), u_\varepsilon(T)\rangle_\varepsilon - \frac{1}{2}\langle \tilde{u}, \tilde{u}\rangle_\varepsilon - \langle u_\varepsilon(T), v_\varepsilon(T)\rangle_\varepsilon + \langle \tilde{u}, v_\varepsilon(0)\rangle_\varepsilon$$
$$+ \int_0^T (\langle u_\varepsilon(t), \partial_t v_\varepsilon(t)\rangle_\varepsilon - \langle f(t), w_\varepsilon(t)\rangle_\varepsilon)\mathrm{d}t\bigg)$$
$$\geq \frac{1}{2}\langle U_0(T), U_0(T)\rangle - \frac{1}{2}\langle \tilde{u}, \tilde{u}\rangle - \langle U_0(T), V_0(T)\rangle + \langle \tilde{u}, V_0(0)\rangle$$
$$+ \int_0^T (\langle U_0(t), \partial_t V_0(t)\rangle - \langle f(t), U_0(t) - V_0(t)\rangle)\mathrm{d}t. \quad \text{(J.20)}$$

Внаслідок (J.11) також маємо

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^T \langle \mathcal{A}_\varepsilon(v_\varepsilon(t)), w_\varepsilon(t)\rangle_\varepsilon \mathrm{d}t$$
$$= \int_0^T \int_\Omega \int_{Y^*} a(D_x V_0 + D_y V_1, y)\cdot(D_x U_0 + D_y U_1 - D_x V_0 - D_y V_1)\mathrm{d}y\mathrm{d}x\mathrm{d}t. \quad \text{(J.21)}$$

Покажемо, що

$$\int_0^T \langle \mathcal{G}_\varepsilon(u_\varepsilon), u_\varepsilon - v_\varepsilon\rangle_\varepsilon \mathrm{d}t \to \int_0^T M(U_0, U_1, V_0, V_1)\mathrm{d}t \text{ при } \varepsilon\to 0, \quad \text{(J.22)}$$

де $M(U_0, U_1, V_0, V_1)$ визначено в (3.2.31) (або, еквівалентно, правою частиною (3.2.26)). Доведення (J.22) тісно слідує міркуванням в кінці Підрозділу 3.2.3 (доведення (3.2.26)), проте замість Твердження 3.2.7 скористаємось наступним результатом.

Твердження J.2. *Припустимо, що* $q(t,x,y) \in C([0,T]\times\Omega; L^\infty(S))$ *задовольняє,* (a) $|q(t,x,y)-q(t',x',y)| \le C(|x-x'|+|t-t'|)$ *з* $C>0$*, що не залежить від* $x,x'\in\Omega$*,* $t,t'\in[0,T]$ *і* $y\in S$*;* (b) $q(t,x,y)$ *є* Y*-перідодичною функцією відносно* $y\in S$*;*
(c) $\displaystyle\int_{Y\cap S} q(t,x,y)\mathrm{d}\sigma_y = 0$ *для всіх* $x\in\Omega$*,* $t\in[0,T]$*.*

Тоді, для заданої послідовності $w_\varepsilon \in L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega))$*, такої що* $w_\varepsilon \to W_0$*,* $D_x w_\varepsilon(x,t) \to D_x W_0(x,t) + D_y W_1(x,y,t)$ *двохмасштабно (у сенсі (J.2)) при* $\varepsilon\to 0$*, маємо*

$$\int_0^T\int_{S_\varepsilon} q(t,x,x/\varepsilon)(w_\varepsilon-\bar{w}_\varepsilon)\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}t \to \int_0^T\int_\Omega\int_{Y\cap S} q(t,x,y)(D_xW_0\cdot y+W_1)\mathrm{d}\sigma_y\mathrm{d}x\mathrm{d}t. \tag{J.23}$$

Доведення. Покладемо $0=t_0^{(n)}<\dots<t_j^{(n)}=Tj/n<\dots<t_n^{(n)=T}$, $\Delta_j^{(n)}=(t_{j-1}^{(n)},t_j^{(n)})$, тоді, користуючись (3.2.38) і неперервністю за Ліпшицем функції $q(t,x,y)$ відносно t, знаходимо

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_{S_\varepsilon} q(t,x,x/\varepsilon)(w_\varepsilon-\bar{w}_\varepsilon)\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}t &= \sum_{j=1}^n\int_{\Delta_j^{(n)}}\int_{S_\varepsilon} q(t,x,x/\varepsilon)(w_\varepsilon-\bar{w}_\varepsilon)\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}t\\ &= \sum_{j=1}^n\int_{S_\varepsilon} q(t_j^{(n)},x,x/\varepsilon)\int_{\Delta_j^{(n)}}(w_\varepsilon-\bar{w}_\varepsilon)\mathrm{d}t\mathrm{d}\sigma + r_\varepsilon^{(n)}, \end{aligned}\tag{J.24}$$

з

$$|r_\varepsilon^{(n)}| \le \frac{C}{n}\int_0^T\int_{S_\varepsilon}|w_\varepsilon-\bar{w}_\varepsilon|\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}t \le \frac{C}{n}\int_0^T\|w_\varepsilon\|_{W^{1,2}(\Omega)}\mathrm{d}t. \tag{J.25}$$

Розглянемо функцію $W_\varepsilon = \int_{\Delta_j^{(n)}} w_\varepsilon \mathrm{d}t$ і застосуємо Твердження 3.2.7, маємо

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{S_\varepsilon} q(t_j^{(n)},x,x/\varepsilon)(W_\varepsilon-\bar{W}_\varepsilon)\mathrm{d}t\mathrm{d}\sigma = \int_{\Delta_j^{(n)}}\int_\Omega\int_{Y\cap S} q(t_j^{(n)},x,y)(D_xW_0\cdot y+W_1)\mathrm{d}\sigma_y\mathrm{d}x\mathrm{d}t. \tag{J.26}$$

Перейдемо до границі (для підпослідовності) при $\varepsilon\to 0$ в (J.24) і в отриманому співвідношенні спрямуємо n до ∞, тоді, користуючись (J.25) і (J.26) знаходимо (J.23). $\square$

Доведення (J.22) (продовження). Внаслідок Леми 3.2.9 і (J.9) маємо

$$\int_0^T \langle \mathcal{G}_\varepsilon(u_\varepsilon), u_\varepsilon - v_\varepsilon\rangle_\varepsilon \mathrm{d}t = \int_0^T \int_{S_\varepsilon} g(\bar{u}_\varepsilon, x/\varepsilon)(u_\varepsilon - v_\varepsilon - \bar{u}_\varepsilon + \bar{v}_\varepsilon)\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}t$$
$$+ \int_0^T \int_{S_\varepsilon} g'_u(\bar{u}_\varepsilon, x/\varepsilon)(\bar{u}_\varepsilon - \bar{v}_\varepsilon)(u_\varepsilon - \bar{u}_\varepsilon)\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}t + O(\varepsilon^{2/(N+2)}).$$

Наблизимо U_0 функціями $u_\delta^{(1)} \in C^1(\overline{\Omega} \times [0,T])$: $\|U_0 - u_\delta^{(1)}\|_{L^2(\Omega\times[0,T])} \le \delta$,тоді, користуючись Лемою 3.2.10, Лемою J.1 (збіжність u_ε до U_0 в $L^2(\Omega \times [0,T])$), властивостями функцій $g(u,y)$ і $g'_u(u,y)$ (умови (I)–(3.2.9)), (3.2.38) і другою оцінкою в (J.9), отримуємо

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^T \langle \mathcal{G}_\varepsilon(u_\varepsilon), u_\varepsilon - v_\varepsilon\rangle_\varepsilon \mathrm{d}t = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^T \int_{S_\varepsilon} \big(g(u_\delta^{(1)}, x/\varepsilon)(u_\varepsilon - v_\varepsilon - \bar{u}_\varepsilon + \bar{v}_\varepsilon)$$
$$+ g'_u(u_\delta^{(1)}, x/\varepsilon)(u_\delta^{(1)} - V_0)(u_\varepsilon - \bar{u}_\varepsilon)\big)\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}t + O(\delta), \quad \text{(J.27)}$$

за умови, що границі існують. Застосуємо Твердження J.2 для того щоб обчислити границі в правій частині (J.27), тоді в границі $\delta \to 0$ знаходимо (J.22). □

Тепер, завдяки монотонності $\mathcal{A}_\varepsilon(u)$ можна прейти до границі $\liminf_{\varepsilon\to 0}$ в (J.19), в результаті, внаслідок (J.20)–(J.22) маємо

$$\int_0^T (\langle \partial_t U_0(t), U_0(t) - V_0(t)\rangle - \langle f(t), U_0(t) - V_0(t)\rangle)\mathrm{d}t$$
$$+ \int_0^T \int_\Omega \int_{Y^*} a(D_x V_0 + D_y V_1, y)\cdot(D_x U_0 + D_y U_1 - D_x V_0 - D_y V_1)\mathrm{d}y\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$
$$- \int_0^T M(U_0, U_1, V_0, V_1)\mathrm{d}t \le 0. \quad \text{(J.28)}$$

Цю нерівність одержано для довільних функції $V_0(x,t) \in C^\infty(\overline{\Omega} \times [0,T])$ і функції $V_1(x,y,t) \in C^\infty(\overline{\Omega} \times \overline{Y} \times [0,T])$ (Y-періодичної відносно y), з міркувань щільності нерівність залишається справедливою для довільних $V_0 \in L^2(0,T; W^{1,2}(\Omega))$, $V_1 \in L^2(0,T; L^2(\Omega; W^{1,2}_{per}(Y)))$. Таким чином можна покласти

$V_0 = U_0$, $V_1 = U_1 \pm \delta\phi(x,t)w(y)$, де $w \in W^{1,2}_{per}(Y)$, $\phi \in C^\infty(\overline{\Omega} \times [0,T])$ і $\delta > 0$ є довільними, поділити (J.28) на δ і перейти до границі $\delta \to 0$:

$$\int_0^T \int_\Omega \left(\int_{Y^*} a(D_x U_0 + D_y U_1, y) \cdot D_y w \mathrm{d}y - \int_{S \cap Y} g(U_0, y) w \mathrm{d}\sigma_y \right) \varphi(x,t) \mathrm{d}x \mathrm{d}t = 0. \tag{J.29}$$

Таким чином, U_1 задовольняє (3.2.17) з $u = U_0$ і $\xi = D_x U_0$ для майже всіх $(x,t) \in \Omega \times [0,T]$. Покладемо тепер $V_0 = U_0 \pm \delta\Phi(x,t)$, $V_1 = U_1$, де $\Phi \in C^\infty(\overline{\Omega} \times [0,T])$ і $\delta > 0$ є довільними, поділимо (J.28) на δ і перейдемо до границі $\delta \to 0$. В результаті оримуємо

$$\begin{aligned} |Y^*| &\int_0^T \int_\Omega \partial_t U_0(x,\tau)\Phi(x,\tau)\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau \\ &+ \int_0^T \int_\Omega (a^*(D_x U_0, U_0) \cdot D_x\Phi - b^*(D_x U_0, U_0)\Phi - \mathrm{div}_x(g^*(U_0)\Phi))\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau \\ &\qquad = |Y^*| \int_0^T \int_\Omega f(x,t)\Phi(x,\tau)\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau, \end{aligned} \tag{J.30}$$

що є слабким формулюванням (3.2.4). □

Додаток K

Властивості усереднених задач (3.2.3) і (3.2.4)

Визначимо оператори $\mathcal{A}^*, \mathcal{B}^*, \mathcal{T}^* : X \to X^*$ by $\mathcal{B}^*(u) = b^*(Du, u)$,

$$\langle \mathcal{A}^*(u), v \rangle = \int_\Omega a^*(Du, u) \cdot Dv \mathrm{d}x, \ \forall v \in X,$$

$$\langle \mathcal{T}^*(u), v \rangle = \int_{\partial\Omega} g^*(u) \cdot \nu \, v \mathrm{d}\sigma = \int_\Omega \mathrm{div}(g^*(u)v) \mathrm{d}x, \ \forall v \in X.$$

Тоді, в термінах операторів $\mathcal{F}^*(u) = \mathcal{A}^*(u) - \mathcal{B}^*(u) - \mathcal{T}^*(u)$, задачі (3.2.3) і (3.2.4) мають вигляд

$$\mathcal{F}^*(u) + \lambda u = f, \tag{K.1}$$

$$\begin{cases} \partial_t u + \mathcal{F}^*(u) = f, \ t > 0 \\ u = \tilde{u}, \ \text{коли } t = 0. \end{cases} \tag{K.2}$$

Згідно з Теоремою 3.2.2 існує розв'язок (знайдений в границі розв'язків (M.1)) задачі (K.1) для кожної функції $f \in L^2(\Omega)$; аналогічно, внаслідок Теореми 3.2.6 задача (K.2) має розв'язок на інтервалі часу $[0, T]$ для $f \in L^2(\Omega \times [0, T])$ і $\tilde{u} \in L^2(\Omega)$. Розв'язність задач (K.1) і (K.2) можна довести для більш загальних f, зокрема, $f \in X^*$ і $f \in L^2(0, T; X^*)$ в (K.1) і (K.2), відповідно. Проте більш проблематичною є єдність розв'язку.

1(*Властивості a^* і b^**). Наступний результат описує a^* і b^*.

Лема K.1. *Функції a^* і b^* визначені формулами (3.2.14), (3.2.15) є неперервними, причому, існують сталі $\gamma, \alpha, r > 0$ і C, такі що*

$$a^*(\xi, u) \cdot \xi \geq \gamma |\xi|^2 - C(|u|^2 + 1) \ \text{і} \ |a^*(\xi, u)| \leq C(|\xi| + |u| + 1), \tag{K.3}$$

$$(a^*(\xi,u)-a^*(\zeta,v))\cdot(\xi-\zeta)\geq\alpha|\xi-\zeta|^2-r(u-v)^2, \tag{K.4}$$

$|b^*(\xi,u)|\leq C(|\xi|+|u|+1)$ *і*

$$\begin{aligned}(b^*(\xi,u)-b^*(\zeta,v))(v-u)\leq{}&\frac{1}{4}(a^*(\xi,u)-a^*(\zeta,v))\cdot(\xi-\zeta))\\&+C\big(|u-v|^2+|u-v|^2(|\xi|+|u|+1)/(1+|u-v|)\big).\end{aligned} \tag{K.5}$$

Доведення цієї Леми базується на дослідженні властивостей розв'язків $w(y;\xi,u)$ задачі (3.2.17). Будемо користуватись наступними добре відомим результатами,

$$\int_{S\cap Y}\Big|w-\frac{1}{|Y^*|}\int_{Y^*}w\mathrm{d}x\Big|^2\mathrm{d}\sigma\leq C\int_{Y^*}|Dw|^2\,\mathrm{d}x, \tag{K.6}$$

$$\int_{Y^*}|D_yw+\xi|^2\,\mathrm{d}y\geq\rho|\xi|^2,\ \rho>0, \tag{K.7}$$

для всих $\xi\in\mathbb{R}^N$, $w\in W^{1,2}_{per}(Y^*)$, де C і ρ не залежать від w і ξ.

Лема K.2. *Для довільних $\xi\in\mathbb{R}^N$, $u\in\mathbb{R}$ існує єдиний (з точністю до адитивної сталої) розв'язок $w(y;\xi,u)$ задачі (3.2.17) і*

(a) $\displaystyle\int_{Y^*}|D_yw(y;\xi,u)|^2\mathrm{d}y\leq C(|\xi|^2+|u|^2+1)$,

(b) $a^*(\xi,u)\cdot\xi\geq\gamma|\xi|^2-C(|u|\,|\xi|+|u|^2+1)$ *(з $\gamma>0$)*,

(c) *існують α, $\beta>0$ і r, такі що, для довільних ξ, $\zeta\in\mathbb{R}^N$ і u, $v\in\mathbb{R}$*

$$(a^*(\xi,u)-a^*(\zeta,v))\cdot(\xi-\zeta)\geq\alpha|\xi-\zeta|^2-r(u-v)^2+\beta\int_{Y^*}|D\hat{w}|^2\mathrm{d}y,$$

де $\hat{w}=w(y;\xi,u)-w(y;\zeta,v)$,

(d) $w(y;\zeta,v)\to w(y;\xi,u)$ *сильно в $W^{1,2}_{per}(Y^*)\setminus\mathbb{R}$ коли $\zeta\to\xi$, $v\to u$.*

Доведення. Існування єдиного розв'язку (3.2.17) в $W^{1,2}_{per}(Y^*)\setminus\mathbb{R}$ випливає з припущень (i)-(iii) і (vi) на функції a і g (див. Підрозділ 3.2.1). Для доведення (a) з (3.2.17) отримуємо, за допомогою інтегрування частинами,

$$\int_{Y^*}a(\xi+Dw,y)\cdot(\xi+Dw)\mathrm{d}y=\int_{S\cap Y}g(u,y)w\mathrm{d}\sigma+\int_{Y^*}a(\xi+Dw,y)\cdot\xi\mathrm{d}y \tag{K.8}$$

Застосуємо нерівність Пуанкаре (K.6) і візьмемо до уваги (3.2.10), (I), в результаті отримуємо, для всих $k > 0$,

$$\int_{Y^*} a(\xi + Dw, y) \cdot (\xi + Dw)\mathrm{d}y \leq C(|u| + 1)\|Dw\|_{L^2(Y^*)} + C|\xi|\,\|\xi + Dw\|_{L^2(Y^*)}$$
$$\leq C(|u| + 1)(\|\xi + Dw\|_{L^2(Y^*)} + |\xi|) + C|\xi|\,\|\xi + Dw\|_{L^2(Y^*)}$$
$$\leq k((|u| + 1)^2 + \frac{C}{k}(|\xi|^2 + \|\xi + Dw\|^2_{L^2(Y^*)}), \quad (K.9)$$

де C не залежить від k, u і ξ. Виберемо k в (K.9) достатньо великим і скористаємось (3.2.6):

$$\int_{Y^*} |\xi + Dw|^2\mathrm{d}y \leq C(|u|^2 + |\xi|^2 + 1).$$

З цієї нерівності випливає (a) .

Твердження (b) неважко довести застосувавши (K.7) в лівій частині (K.8) і (K.6) в комбінації з (I), (3.2.10) для членів в правій частині.

Для доведення (c), з (3.2.17) знаходимо, за допомогою інтегруванням частинами,

$$(a^*(\xi, u) - a^*(\zeta, v)) \cdot (\xi - \zeta) = \int_{S\cap Y} (g(v, y) - g(u, y))\hat{w}\mathrm{d}\sigma$$
$$+ \int_{Y^*} (a(\xi + D_y w(y; \xi, u)) - a(\zeta + D_y w(y; \zeta, v))) \cdot (\xi - \zeta + D_y\hat{w})\mathrm{d}y. \quad (K.10)$$

Беручі до уваги (3.2.8), (3.2.10) і користуючись (K.6) можна оцінити перший член I_1 в правій частині (K.10):

$$|I_1| \leq k|u - v|^2 + \frac{C}{k}\int_{Y^*} |D\hat{w}|^2\mathrm{d}y, \text{ for any } k > 0, \quad (K.11)$$

де C не залежить від k, ξ, ζ, u, v. З огляду на (3.2.5) і (K.7) маємо наступну оцінку знизу для другого члену I_2 в правій частині (K.10)

$$I_2 \geq (1 - \delta)\kappa\rho|\xi - \zeta|^2 + \delta\kappa\int_{Y^*} |\xi - \zeta + D_y\hat{w}|^2\mathrm{d}y$$

з $0 < \delta < 1$, що буде вибрано нижче. З іншого боку, користуючись елементарною нерівністю $a^2 \leq 2(a + b)^2 + 2b^2$, знаходимо

$$\int_{Y^*} |D_y\hat{w}|^2\mathrm{d}y \leq 2\int_{Y^*} |\xi - \zeta + D_y\hat{w}|^2\mathrm{d}y + 2|\xi - \zeta|^2,$$

таким чином

$$I_2 \geq \kappa(\rho - \delta(\rho+1))|\xi - \zeta|^2 + \frac{\delta\kappa}{2}\int_{Y^*} |D_y\hat{w}|^2 \mathrm{d}y.$$

Виберемо тепер $0 < \delta < 1$, таке що $\rho - \delta(æ+1) > 0$, і покладемо $k = 4C/(\delta\kappa)$ (де C – стала з (K.11)), тоді отримуємо (b) з $\alpha = \kappa(\rho - \delta(\rho+1)) > 0$, $\beta = (\delta\kappa)/4 > 0$.

Насамкінець, твердження (d) є прямим наслідком (a) і (c). □

Доведення Леми K.1. Згідно з Лемою K.2 достатньо тільки перевірити (K.5). Покладемо$\hat{w} = w(y;\xi,u) - w(y;\zeta,v)$, застосуємо (K.6) і використаємо умови (i), (iii), (iv) для g:

$$\begin{aligned}(b^*(\xi,u) - b^*(\zeta,v))(v-u) &= (v-u)\int_{S\cap Y} g'_u(v,y)\hat{w}\mathrm{d}\sigma_y \\ &+ (v-u)\int_{S\cap Y}(g'_u(u,y) - g'_u(v,y))w(y;\xi,u)\mathrm{d}\sigma_y \\ &\leq C|u-v|\|D\hat{w}\|_{L^2(Y^*)} + C|u-v|^2\|Dw(\,\cdot\,;\xi,u)\|_{L^2(Y^*)}/(1+|u|+|v|). \quad \text{(K.12)}\end{aligned}$$

Тоді твердження (a) і (c) Леми K.2 ведуть до (K.5). □

Зауваження K.3. У випадку, коли функція $g(u,y)$ є лінійною відносно u, оцінку (K.5) можна спростити до наступної:

$$(b^*(\xi,u) - b^*(\zeta,v))(v-u) \leq \frac{1}{4}(a^*(\xi,u) - a^*(\zeta,v)) \cdot (\xi - \zeta)) + C|u-v|^2.$$

Розглянемо тепер окремий випадок коли функція $a(\xi,y)$ є лінійною відносно ξ, тобто $a(\xi,y) = A(y)\xi$ з $A \in L^\infty(Y;\mathbb{R}^{N\times N})$, $A(y)\xi\cdot\xi \geq \kappa|\xi|^2$ ($\kappa > 0$), $\forall\xi \in \mathbb{R}^N$, $y \in Y$. Тоді розв'язок (3.2.17) можна записати як суму $w(y;\xi,u) = w^{(1)}(y;\xi) + \tilde{w}(y;u)$, де $w^{(1)}$ – розв'язок (3.2.18), і $\tilde{w}$ – єдиний (з точністю до адитивної сталої) розв'язок задачі

$$\begin{cases} \operatorname{div}(A(y)D_y\tilde{w}) = 0 \text{ в } Y^* \\ A(y)D_y\tilde{w}\cdot\nu = g(u,y) \text{ на } S\cap Y \\ \tilde{w} \text{ є } Y\text{-періодичною функцією.}\end{cases} \quad \text{(K.13)}$$

Зазначимо, що $w^{(1)}(y;\xi)$ лінійно залежить від ξ, також маємо

$\|\tilde{w}(y;u)\|_{W^{1,2}(Y^*)\setminus\mathbb{D}R} \le C(|u|+1)$, $\|\tilde{w}(y;u)-\tilde{w}(y;v\|_{W^{1,2}(Y^*)\setminus\mathbb{R}} \le C|u-v|$,

$\|\tilde{w}'_u(y;u)-\tilde{w}'_u(y;v)\|_{W^{1,2)}(Y^*)\setminus\mathbb{R}} \le C|u-v|/(1+|u|+|v|)$,

де C не залежить від u, v. Доведення цих оцінок є аналогічним доведенню (3.2.33)–(3.2.35). Таким чином маємо

$$b^*(\xi,u)=\frac{\partial}{\partial u}\int_{Y^*}A(y)D_y\tilde{w}(y;u)\cdot D_y w^{(1)}(y;\xi)\mathrm{d}y \\ +\int_{Y^*}A(y)D_y\tilde{w}'_u(y;u)\cdot D_y\tilde{w}(y;u)\mathrm{d}y=H'(u)\cdot\xi+h(u) \quad (\text{K}.14)$$

з H, h, такими що $|H(u)-H(v)|\le C|u-v|$, $|h(u)-h(v)|\le C|u-v|$.

2(*Єдиність розв'язку задачі* (K.1)). У окремих випадках випадках коли вимірність простору $N\le 3$, або функція $a(\xi,y)$ є лінійною відносно ξ, або $g(u,y)$ є лінійною відносно u буде доведено, що (K.1) не може мати двох різних розв'язків для достатньо великих λ.

Наступну нерівність будемо використовувати для оцінки слідів функцій на $\partial\Omega$. Для кожного $\delta>0$ існує стала Λ_δ, така що

$$\int_{\partial\Omega}|w|^2\mathrm{d}\sigma\le\delta\|Dw\|^2_{L^2(\Omega)}+\Lambda_\delta\|w\|_{L^2(\Omega)},\ \forall w\in W^{1,2}(\Omega). \quad (\text{K}.15)$$

Ця нерівність є наслідком компактності оператора сліду $T_{\partial\Omega}: W^{1,2}(\Omega)\to L^2(\partial\Omega)$, $T_{\partial\Omega}u=$ слід u на $\partial\Omega$. Завдяки ліпшецевості $g(u,y)$ відносно u, з нерівності (K.15) випливає

$$|\langle\mathcal{T}^*(u)-\mathcal{T}^*(v),u-v\rangle|\le\frac{\alpha}{4}\|u-v\|^2_X+C\|u-v\|^2_{L^2(\Omega)}, \quad (\text{K}.16)$$

де стала $\alpha>0$ є тією самою, що і в (K.4).

Нехай u, v – розв'язки (K.1).

Випадок I ($g(u,y)$ *є лінійною відносно* u). Користуючись Лемою K.1, Зауваженням K.3 і (K.16) отримуємо

$$\langle\mathcal{F}^*(u)-\mathcal{F}^*(v)+\lambda(u-v),u-v\rangle\ge\frac{\alpha}{4}\|u-v\|^2_X+(\lambda-\hat{\lambda}_0)\|u-v\|^2_{L^2(\Omega)}, \quad (\text{K}.17)$$

з $\hat{\lambda}_0$, що не залежить від λ. Тоді $u = v$ якщо $\lambda \geq \hat{\lambda}_0$.

Випадок II ($a(\xi, y)$ *є лінійною відносно* ξ). Маємо, згідно з (K.14),

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{B}^*(u) - \mathcal{B}^*(v)), v - u\rangle = |Y^*| \int_\Omega (u - v)(\operatorname{div}(H(u) - H(v)) + h(u) - h(v))\mathrm{d}x \\ = |Y^*| \int_\Omega (\nabla(v - u) \cdot (H(u) - H(v)) + (u - v)(h(u) - h(v)))\mathrm{d}x \\ + |Y^*| \int_{\partial\Omega} (u - v)(H(u) - H(v)) \cdot \nu \,\mathrm{d}\sigma \\ \leq \frac{\alpha}{4}\|u - v\|_X^2 + C\|u - v\|_{L^2(\Omega)}^2,\end{aligned}$$

де використано (K.15). Ця нерівність і Лема K.1 ведуть до (K.17) (можливо з іншою сталою $\hat{\lambda}_0$).

Випадок III (*Вимірність простору* $N = 2, 3$). Добре відомо, що для таких вимірностей $X (= W^{1,2}(\Omega))$ є компактно вкладеним в $L^4(\Omega)$, причому $\|w\|_{L^4(\Omega)}^2 \leq C\delta\|w\|_X^2 + C\delta^{-N/(4-N)}\|w\|_{L^2(\Omega)}^2$ для всих $w \in X$ і $\delta > 0$, де C не залежить від $\delta > 0$ і w (див., наприклад, [130]). Користуючись останньою нерівністю, Лемою K.1 і (K.16) неважко показати, що

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{F}^*(u) - \mathcal{F}^*(v), u - v\rangle \geq \frac{\alpha}{4}\|u - v\|_X^2 \\ - C(\delta\|u - v\|_X^2 + \delta^{-N/(4-N)}\|u - v\|_{L^2(\Omega)}^2)(\|u\|_X + 1),\ \forall \delta > 0. \quad \text{(K.18)}\end{aligned}$$

З іншого боку, внаслідок Леми K.1 і визначення $\mathcal{T}^*(u)$, для всіх $w \in X$ $\langle \mathcal{A}^*(w), w\rangle \geq \gamma\|w\|_X^2 - C(\|w\|_{L^2(\Omega)}^2 + 1)$, $|\langle \mathcal{B}^*(w), w\rangle| \leq C(\|w\|_X + \|w\|_{L^2(\Omega)} + 1)\|w\|_{L^2(\Omega)}$ and $|\langle \mathcal{T}^*(w), w\rangle| \leq C\|w\|_X\|w\|_{L^2(\Omega)}$. Таким чином існує $\tilde{\lambda}_0$, таке що $\langle \mathcal{F}^*(u), u\rangle \geq \frac{\gamma}{2}\|u\|_X^2 - \tilde{\lambda}_0\langle u, u\rangle$, отже, для $\lambda \geq \tilde{\lambda}_0$ маємо апріорну оцінку $\|u\|_X \leq C(\|f\|_{X^*} + 1)$ з C, що не залежить від u, f і $\lambda \geq \tilde{\lambda}_0$. Тоді, для розв'язків u, v задачі (K.1), з (K.18) отримуємо

$$\frac{\alpha}{4}\|u - v\|_X^2 + \lambda\|u - v\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C(\|f\|_{X^*} + 1)(\delta\|u - v\|_X^2 + \delta^{-N/(4-N)}\|u - v\|_{L^2(\Omega)}^2),$$

і, поклавши $\delta = \alpha/(8C((\|f\|_{X^*} + 2))$, знаходимо, що $u = v$ для $\lambda \geq \hat{\lambda}_0 (= \max\{\tilde{\lambda}_0, C(\|f\|_{X^*} + 1)\delta^{-N/(4-N)}\})$. Зазначимо, що для $N = 2$ можна вибрати сталу $\hat{\lambda}_0$, що не залежить від f .

2(*Єдиність для задачі* (K.2)). Для заданого $T > 0$, покажемо, що задача (K.2) не може мати два різних розв'язки u, v на інтервалі часу $[0, T]$ якщо функція $a(\xi, y)$ є лінійною відносно ξ або $g(u, y)$ є лінійною відносно u. Дійсно, $w = u - v$ задовольняє $\partial_t \langle w(t), w(t) \rangle + 2\langle \mathcal{F}^*(u(t)) - \mathcal{F}^*(v(t)), u(t) - v(t) \rangle = 0$, $0 < t < T$, і $w(0) = 0$, разом з цим внаслідок (K.17) маємо $-2\langle \mathcal{F}^*(u(t)) - \mathcal{F}^*(v(t)), u(t) - v(t) \rangle \leq C \langle w(t), w(t) \rangle$, $0 < t < T$, отже $e^{-Ct} \|w(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq 0$ звідки $w \equiv 0$.

Для вимірностей $N = 2, 3$ доведення єдиності є таким. Нехай u, v – два розв'язки, покладемо $w := u - v$, $R(t) := \langle w(t), w(t) \rangle$, і, користуючись (K.18) з $\delta = \alpha/(8C((\|u\|_X + 1))$, оцінимо

$$R'(t) - CR(t)(\|u(t)\|_X + 1)^2 \leq 0,\ \ 0 < t < T.$$

Оскільки $R(0) = 0$, то $R(t)\exp\{-C \int_0^t (\|u(\tau)\|_X + 1)^2 \, \mathrm{d}\tau\} \leq 0$ отже $R \equiv 0$, тобто $u = v$.

Додаток L

Перші члени асимтотичного розвинення біжних хвиль біля точки біфуркації і виникнення асиметричних форм

Розглянемо окремий випадок, коли необхідна умова біфуркації біжних хвиль (4.1.30)(див. Підрозділ 4.1.2) задовольняється на парі (Λ_0, Φ_0), де Φ_0 – мінімальний розв'язок (4.1.12)–(4.1.13). Тоді можна (формально) виписати перші члени асимтотичного розвинення розв'язку за степенями малого параметра $\varepsilon := V$. Це розвинення можна огрунтувати за допомогою редукції Ляпунова-Шмідта. Наближення першого порядку введено в Підрозділі 4.1.2, обчислимо тепер три перші члени асимтотичного розвинення і покажемо, що у першому порядку корекція Λ_0 є нульовою. Зазначимо, що корекція першого порядку форми області є нульовою, корекція другого порядку є симетричною відносно y-вісі, а у третьому порядку виникає асиметрія (відносно y-вісі).

Невідому область Ω шукаємо у вигляді $\Omega = \{(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \mid \varphi \in [-\pi,\pi), 0 \le r < R + \rho(\varphi)\}$. Введемо розкладення розв'язків (4.0.9)–(4.0.11) за степенями ε:

$$\rho = \varepsilon\rho_1 + \varepsilon^2\rho_2 + \varepsilon^3\rho_3 + O(\varepsilon^4), \quad S = \Phi_0(r) + \varepsilon S_1 + \varepsilon^2 S_2 + \varepsilon^3 S_3 + O(\varepsilon^4),$$

$$\Lambda = \Lambda_0 + \varepsilon\Lambda_1 + \varepsilon^2\Lambda_2 + \varepsilon^3\Lambda_3 + O(\varepsilon^4), \quad \text{and} \quad \lambda = \lambda_0 + \varepsilon\lambda_1 + \varepsilon^2\lambda_2 + \varepsilon^3\lambda_3 + O(\varepsilon^4),$$

де $\lambda_0 = \beta/R - \Phi_0'(R)$. Підставимо ці розвинення в (4.0.9)–(4.0.11), і групуванням членів порядку ε, ε^2, ε^3 знаходимо наступні рівняння

$$-\Delta S_1 + S_1 = \Lambda_0 e^{\Phi_0(r)}(S_1 - x) + \Lambda_1 e^{\Phi_0(r)}, \tag{L.1}$$

$$-\Delta S_2+S_2=\Lambda_0 e^{\Phi_0(r)}S_2+\frac{\Lambda_0}{2}e^{\Phi_0(r)}(S_1-x)^2+\Lambda_1 e^{\Phi_0(r)}(S_1-x)+\Lambda_2 e^{\Phi_0(r)}, \quad (L.2)$$

$$\begin{aligned}-\Delta S_3+S_3-\Lambda_0 e^{\Phi_0(r)}S_3&=\Lambda_0 e^{\Phi_0(r)}\left((S_1-x)S_2+(S_1-x)^3/6\right)\\&+\Lambda_1 e^{\Phi_0(r)}\left(S_2+(S_1-x)^2/2\right)+\Lambda_2 e^{\Phi_0(r)}(S_1-x)+\Lambda_3 e^{\Phi_0(r)}\end{aligned} \quad (L.3)$$

в B_R з крайовими умовами

$$S_1(R,\varphi)+\Phi_0'(R)\rho_1(\varphi)=0 \quad (L.4)$$

$$S_2(R,\varphi)+\Phi_0'(R)\rho_2(\varphi)=T_1(\varphi) \quad (L.5)$$

$$S_3(R,\varphi)+\Phi_0'(R)\rho_3(\varphi)=-\partial_r S_1(R,\varphi)\rho_2+T_2(\varphi) \quad (L.6)$$

і

$$\cos\varphi=\partial_r S_1(R,\varphi)+\Phi_0''(R)\rho_1(\varphi)+\frac{\beta}{R^2}(\rho_1''(\varphi)+\rho_1(\varphi))+\lambda_1, \quad (L.7)$$

$$0=\partial_r S_2(R,\varphi)+\Phi_0''(R)\rho_2(\varphi)+\frac{\beta}{R^2}(\rho_2''(\varphi)+\rho_2(\varphi))+T_3(\varphi)+\lambda_2 \quad (L.8)$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{R}\rho_2'(\varphi)\sin\varphi&=\partial_r S_3(R,\varphi)+\Phi_0''(R)\rho_3(\varphi) \quad (L.9)\\&+\partial_r^2 S_1(R,\varphi)\rho_2(\varphi)-\partial_\varphi S_1(R,\varphi)\frac{\rho_2'(\varphi)}{R^2}+\frac{\beta}{R^2}(\rho_3''(\varphi)+\rho_3(\varphi))+T_4(\varphi)+\lambda_3,\end{aligned}$$

де T_i, $i=1,\dots 4$ позначають члени, що містять множники $\rho_1(\varphi)$ або $\rho_1'(\varphi)$, які, як буде показано далі, є нульовими.

Як зазначено в Підрозділі 4.1.5, з огляду на симетрію задачі розглядаються тільки парні функції ρ. Більш того, накладаються умови, що площа Ω повинна співпадати з площею диска B_R і центр мас знаходиться у початку координат. У порядку ε ці умови ведуть до

$$\int_{-\pi}^{\pi}\rho_1\,d\varphi=0, \quad \int_{-\pi}^{\pi}\rho_1\cos\varphi\,d\varphi=0. \quad (L.10)$$

Оскільки Φ_0 – мінімальний розв'язок (4.1.12)–(4.1.13) можна локально параметризувати розв'язки $(\Lambda,\Phi(r,\Lambda))$ задачі (4.1.12)–(4.1.13) параметром Λ, так що $\Phi_0(r)=\Phi(r,\Lambda_0)$. Розкладемо ρ_1 в ряд Фур'є $\rho_1=\sum c_l\cos l\varphi$, тоді з (L.1),(L.4) знаходимо

$$S_1=\tilde{\phi}(r,\Lambda_0)\cos\varphi+\Lambda_1\partial_\Lambda\Phi(r,\Lambda_0)+\sum c_l h_l(r)\cos l\varphi,$$

де $\tilde{\phi}(r,\Lambda)$ – розв'язки (4.1.28)–(4.1.29) і h_l – розв'язки задач (4.1.91) з $\Lambda = \Lambda_0$ і $\Phi = \Phi_0$ (оскільки Φ_0 – мінімальний розв'язок (4.1.12)-(4.1.13), розв'язки h_l задач (4.1.91) є однозначно визначеними). з (L.10) випливає, що перші два коефіцієнти Фур'є є нульовими, $c_0 = c_1 = 0$. Більш того, за умови (4.1.92) знаходимо внаслідок (L.7), що всі інші коефіцієнти Фур'є c_l також є нульовими, тобто $\rho_1 = 0$. Таким чином

$$S_1 = \tilde{\phi}(r,\Lambda_0)\cos\varphi + \Lambda_1\partial_\Lambda\Phi(r,\Lambda_0) \tag{L.11}$$

(нижче буде показано, що насправді $\Lambda_1 = 0$).

Аналогічно наведеним вище міркуванням, застосувавши Фур'є аналіз до задачі (L.2),(L.5), (L.8) знаходимо

$$S_2 = \Lambda_1\partial_\Lambda\tilde{\phi}(r,\Lambda_0)\cos\varphi + \tilde{S}_2(r)\cos 2\varphi + G(r), \quad \rho_2 = -\frac{\tilde{S}_2(R)}{\Phi_0'(R)}\cos 2\varphi, \tag{L.12}$$

де $\tilde{S}_2$ задовольняє

$$-\tilde{S}_2'' - \frac{1}{r}\tilde{S}_2' + (1+4/r^2)\tilde{S}_2 - \Lambda_0 e^{\Phi_0(r)}\tilde{S}_2 = \frac{\Lambda_0}{4}e^{\Phi_0(r)}(\tilde{\phi}(r,\Lambda_0) - r)^2 \tag{L.13}$$

на $(0,R)$ з

$$\tilde{S}_2(0) = 0, \quad \tilde{S}_2'(R) = \frac{\Phi_0''(R) - 3\beta/R^2}{\Phi_0'(R)}\tilde{S}_2(R), \tag{L.14}$$

і $G(r)$ – деяка функція чий точний вигляд є неважливим. Зазначимо, що за умови (4.1.92) задача (L.13)–(L.14) має єдиний розв'язок.

Розглянемо тепер Фур'є компоненту, що відповідає $\cos\varphi$ в (L.8), в результаті маємо $\Lambda_1 = 0$, за умови, що $\partial_\Lambda\tilde{\phi}'(R,\Lambda_0) \neq 0$. Останню нерівність доводимо наступним чином. Помножимо (4.1.28) на $\Phi'(r,\Lambda)r$ і проінтегруємо від 0 до R: that

$$\begin{aligned}\tilde{\phi}'(R,\Lambda) &= \frac{\Lambda}{R\Phi'(R,\Lambda)}\int_0^R e^{\Phi(r,\Lambda)}\Phi'(r,\Lambda)r^2\,dr \\ &= 1 + \frac{\Lambda R^2 - \int_0^R \Phi(r,\Lambda)r\,dr - \Lambda\int_0^R e^{\Phi(r,\Lambda)}r\,dr}{\int_0^R \Phi(r,\Lambda)r\,dr - \Lambda\int_0^R e^{\Phi(r,\Lambda)}r\,dr}.\end{aligned} \tag{L.15}$$

Тоді

$$\partial_\Lambda \tilde{\phi}'(R,\Lambda_0) > \frac{R^2 - \int_0^R \partial_\Lambda \Phi(r,\Lambda_0) r\, dr - \int_0^R e^{\Phi(r,\Lambda_0)} r\, dr}{\int_0^R \Phi(r,\Lambda_0) r\, dr - \Lambda_0 \int_0^R e^{\Phi(r,\Lambda_0)} r\, dr}, \tag{L.16}$$

де використано той факт, що мінімальні розв'язки $\Phi(r,\Lambda)$ зростають відносно Λ, і знаменник в (L.15) є від'ємним. Оскільки пара $(\Lambda,\Phi) = (\Lambda_0,\Phi_0)$ задовольняє (4.1.31) маємо

$$\partial_\Lambda \tilde{\phi}'(R,\Lambda_0) > -\frac{\int_0^R (\partial_\Lambda \Phi(r,\Lambda_0) - \Phi(r,\Lambda_0)/\Lambda_0) r\, dr}{\int_0^R \Phi(r,\Lambda_0) r\, dr - \Lambda_0 \int_0^R e^{\Phi(r,\Lambda_0)} r\, dr}. \tag{L.17}$$

Функція $w = \partial_\Lambda \Phi(r,\Lambda_0) - \Phi(r,\Lambda_0)/\Lambda_0$ є додатною, внаслідок принципу максимуму застосованого до рівняння $-\Delta w + w = \Lambda_0 e^{\Phi_0(r)} \partial_\Lambda \Phi(r,\Lambda_0) > 0$. Таким чином, $\partial_\Lambda \tilde{\phi}'(R,\Lambda_0) > 0$.

Насамкінець, щоб визначити S_3 і ρ_3 застосуємо аналіз Фур'є до (L.3),(L.6), (L.9). В результаті для ρ_3 отримуємо формулу

$$\rho_3 = -\frac{\tilde{S}_3(R)}{\Phi_0'(R)} \cos 3\varphi, \tag{L.18}$$

де $\tilde{S}_3$ – розв'язок

$$-\tilde{S}_3'' - \frac{1}{r}\tilde{S}_3' + (1+9/r^2)\tilde{S}_3 - \Lambda_0 e^{\Phi_0(r)} \tilde{S}_3 = \frac{\Lambda_0}{2} e^{\Phi_0(r)} (\tilde{\phi}(r) - r) \tilde{S}_2(r) + \frac{\Lambda_0}{24} e^{\Phi_0(r)} (\tilde{\phi}(r) - r)^3 \tag{L.19}$$

на $(0,R)$ з крайовими умовами

$$\tilde{S}_3(0) = 0, \quad \tilde{S}_3'(R) = \frac{\Phi_0''(R) - 8\beta/R^2}{\Phi_0'(R)} \tilde{S}_3(R) + \frac{\tilde{\phi}''(R) - 2/R}{2\Phi_0'(R)} \tilde{S}_2(R). \tag{L.20}$$

Таким чином, перші члени асимтотичного розвинення функції ρ, які визначають форму області є

$$\rho = -\varepsilon^2 \frac{\tilde{S}_2(R)}{\Phi_0'(R)} \cos 2\varphi - \varepsilon^3 \frac{\tilde{S}_3(R)}{\Phi_0'(R)} \cos 3\varphi + \dots \tag{L.21}$$

де $\tilde{S}_2$ – розв'язок (L.13)–(L.14), $\tilde{S}_3$ – розв'язок (L.19)-(L.20), і $\tilde{\phi}$ – розв'язок (4.1.28)–(4.1.29) з $\Lambda = \Lambda_0$ і $\Phi = \Phi_0$.

Додаток М

Модель фазового поля для описання мобільності живих клітин і її контрастна границя

В [206] [205] запропоновано модель фазового поля для описання мобільності еукаріотичних клітин на субстраті. У даному підрозділі розглядається спрощена версія моделі ($\gamma = 0$ в [206]), яка складається з двох пов'язаних диференціальних рівнянь з частинними похідними

$$\frac{\partial \rho_\varepsilon}{\partial t} = \Delta\rho_\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon^2}W'(\rho_\varepsilon) - P_\varepsilon \cdot \nabla\rho_\varepsilon + \lambda_\varepsilon(t), \quad x \in \Omega,\ t > 0, \tag{M.1}$$

$$\frac{\partial P_\varepsilon}{\partial t} = \varepsilon\Delta P_\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon}P_\varepsilon - \beta\nabla\rho_\varepsilon \tag{M.2}$$

у обмеженій області $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, де невідомими є фазове поле ρ_ε і вектор P_ε, що описує осереднену орієнтацію сітки мікрофіламент (ниток актіну). Систему (M.1)–(M.2) знайдено за допомогою дифузійного масштабування рівнянь в [206]. Вивчаєтья асимтотична поведінка розв'язків цієї задачі в границі контрастної фазової функції за спеціальними масштабними припущеннями на параметри задачі. Також задача (M.1)–(M.2) відрізняється від оригінальної моделі [206] реалізацією механізму збереження площі, а саме, в (M.1)–(M.2) введено дінамічний множник Лагранжа

$$\lambda_\varepsilon(t) = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \left(\frac{1}{\varepsilon^2}W'(\rho_\varepsilon) + P_\varepsilon \cdot \nabla\rho_\varepsilon\right)\,dx \tag{M.3}$$

замість контролю площини через параметр в потенціалі, що застосовано в орігінальній моделі [206]. Функція $W'(\rho)$ в (M.1) є похідною потенціалу з двома рівними ямами (наприклад, $W(\rho) = \frac{1}{4}\rho^2(1-\rho)^2$).

Скалярна фазова функція ρ_ε приймає значення близькі до мінімальних значень потенціалу, 1 і 0, для достатньо малих $\varepsilon > 0$ всюди в Ω за виключенням тонкого перехідного шару. Відповідні підобласті інтерпретуються як внутрішні і зовнішні відносно клітини, перехідний шар моделює процеси біля мембрани клітини. В рівнянні (M.2), $\beta > 0$ є фіксованим параметром який описує інтенсивність створення поля P_ε біля інтерфейсу. На межі області $\partial\Omega$ накладаються крайові умови $\partial_\nu \rho_\varepsilon = 0$ і $P_\varepsilon = 0$.

Вивчається асимптотична поведінка розв'язків (M.1)–(M.2) у границі $\varepsilon \to 0$ (границя контрастного фазового поля). Добре відомі методи для вивчення асимптотичногої поведінки розв'язків в моделях фазового поля, такі як техніка в'язкіснисних розв'язків і метод Γ-збіжності, див., наприклад, [129, 97, 185], не можна застосувати до (M.1)-(M.2) через перев'зку рівнянь членами $P_\varepsilon \cdot \nabla \rho_\varepsilon$ і $\nabla \rho_\varepsilon$ (так званими *активними* членами). Методи поточкового порівняння розв'яків, необхідні для застосування техніки в'язкіснисних розв'язків, не працюють для (M.1)-(M.2) саме через наявність активних членів. Через ці члени система також не має структури градієнтного потоку, що унеможливлює застосування методів основаних на Γ-збіжності [185], [181]. Проте для (M.1)-(M.2) застосовується прямий підхід, що базується на формальних асимптотичних розвиненнях [66], [149], [67].

На першому етапі дослідження задачі (M.1)-(M.2) буде показано існування розв'язків для достатньо малих ε шляхом встановлення енергетичних і поточкових оцінок. Далі буде формально виводено граничний закон руху за допомогою двохмасштаного анзацу у дусі [149]. У наступному кроці буде строго доведено існування нетрівіальних розвєязків типу біжучої хвилі в одномірній версії (M.1)-(M.2) у випадку коли потенціал W має певну асиметрію. При цьому використовується асимптотичне зведення до двовимірної задачі для швидкості волни V і константи λ, з подальшим застосуванням Теореми Шаудера про нерухому точку. Насамкінець, для одновимірного аналогу задачі (M.1)-(M.2) буде строго обгрунтовано нелінійне рівняння для швидкості інтерфейсу і показано існування петлі гістерезису за допомогою чисельного моделювання.

1.*Існування розв'язків і границя контрастного фазового поля у двовимірній моделі.* Спочатку покажемо, що для достатньо малих $\varepsilon > 0$ єдиний розв'язок ρ_ε, P_ε задачі (M.1)–(M.2) існує і ρ_ε має структуру контрастного інтерфейсу між двома фазами 0 і 1, за умови, що начальні дані є добре підготовленими. Для формулювання цього результату введемо допоміжні функціонали (енергетичного типу):

$$\begin{aligned} E_\varepsilon(t) &:= \tfrac{\varepsilon}{2}\textstyle\int_\Omega |\nabla\rho_\varepsilon(x,t)|^2dx + \tfrac{1}{\varepsilon}\int_\Omega W(\rho_\varepsilon(x,t))dx, \\ F_\varepsilon(t) &:= \textstyle\int_\Omega \Big(|P_\varepsilon(x,t)|^2 + |P_\varepsilon(x,t)|^4\Big)dx. \end{aligned} \tag{M.4}$$

Теорема M.1. *Припустимо, що початкові дані для системи* (M.1)–(M.2) *задовольняють* $-\varepsilon^{1/4} < \rho_\varepsilon(x,0) < 1+\varepsilon^{1/4}$*, і*

$$E_\varepsilon(0) + F_\varepsilon(0) \le C_1. \tag{M.5}$$

Тоді для кожного $T > 0$ *існує розв'язок* ρ_ε, P_ε *задачі* (M.1)–(M.2) *на інтервалі часу* $(0,T)$ *для достатньо малих* $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < \varepsilon_0(T)$*. Крім того,* $-\varepsilon^{1/4} \le \rho_\varepsilon(x,t) \le 1+\varepsilon^{1/4}$ *і*

$$\varepsilon\int_0^T\int_\Omega\Big(\frac{\partial\rho_\varepsilon}{\partial t}\Big)^2dxdt \le C_2, \quad E_\varepsilon(t) + F_\varepsilon(t) \le C_2 \quad \forall t\in(0,T), \tag{M.6}$$

де C_2 *не залежить від* t *і* ε*.*

Крім існування розв'язку Теорема M.1 показує, що якщо початкові дані мають структуру контрастного інтерфейсу між фазами, ця структура зберігається з часом, на всьому інтервалі $(0,T)$. Твердження Теореми M.1 є нетривіальним через квадратичний член $P_\varepsilon\cdot\nabla\rho_\varepsilon$ в (M.1), що, взагалі кажучи, може привести до нескінченного росту розв'язку за скінченний інтарвал часу. Основна ідея доведення – знайти і використати оцінку для ρ_ε в $L^\infty((0,T)\times\Omega)$, це зроблено шляхом комбінування принципу максимуму і енергетичних оцінок.

Наступним кроком вивчається граничний перехід $\varepsilon\to 0$ для системи (M.1)–(M.2). Розв'язок щукаємо у вигляді анзацу (локально, в околі інтерфейсу)

$$\rho_\varepsilon = \theta_0(d/\varepsilon) + \varepsilon\theta_1(d/\varepsilon,S) + \dots, \quad P_\varepsilon = \nu\Psi_0(d/\varepsilon,S) + \dots, \tag{M.7}$$

де $d = d(x,t)$ – відстань (зі знаком) до невідомої кривої інтерфейсу $\Gamma(t)$, $S = s(p(x,t),t)$, $p(x,t)$ – проекція x на $\Gamma(t)$ і $s(\xi,t)$ – праметрізація $\Gamma(t)$, $\nu = \nu(p(x,t),t)$ – внутрішньо направлена нормаль до $\Gamma(t)$ в $p(x,t) \in \Gamma(t)$. Підставимо анзац в (M.1), і, групуючи члени (формально) порядку ε^{-2}, знаходимо, що θ_0 задовольняє $\theta_0'' = W'(\theta_0)$. Добре відомо, що існує єдиний (з точністю до ссуву) розв'язок (стояча хвиля) $\theta_0(z)$ який прямує до 0 або 1 коли $z \to -\infty$ або $z \to +\infty$. Для потенціалу $W(\rho) = \frac{1}{4}\rho^2(\rho-1)^2$ функція θ_0 явно задається формулою $\theta_0(z) = \frac{1}{2}\left(1 + \tanh\frac{z}{2\sqrt{2}}\right)$. Підставимо (M.7) в (M.2) і розллянемо головний (порядку ε^{-1}) член. Позначимо через $V(x,t)$ швидкість $\Gamma(t)$ у напрямку номалі в точці $x \in \Gamma(t)$, тоді знаходимо, що скалярна функція $\Psi_0(z)$ задовольняє

$$-\frac{\partial^2\Psi_0}{\partial z^2} - V\frac{\partial\Psi_0}{\partial z} + \Psi_0 + \beta\theta_0'(z) = 0. \tag{M.8}$$

Насамкінець, припустимо що головний член в розвиненні λ_ε маж порядок ε^{-1}, $\lambda_\varepsilon = \lambda(t)/\varepsilon + \dots$, і згрупуємо всі члени порядку ε^{-1} в (M.2), тоді

$$-\frac{\partial^2\theta_1}{\partial z^2} + W''(\theta_0)\theta_1 = (V-\kappa)\frac{\partial\theta_0}{\partial z} - \Psi_0\frac{\partial\theta_0}{\partial z} + \lambda(t),$$

де κ позначає кривизну $\Gamma(t)$. Умова розв'язності цього рівняння (ортогональність власній функції θ_0' лінеарізованого рівняння Аллена-Кана) дає шукане рівняння для контрастного інтерфейса

$$V(x,t) = \kappa(x,t) + \frac{1}{c_0}\Phi_\beta(V(x,t)) - \lambda(t), \quad x \in \Gamma(t), \tag{M.9}$$

де $c_0 = \displaystyle\int (\theta_0')^2\,dz$, і $\Phi_\beta(V)$ визначається рівнянням

$$\Phi_\beta(V) = \int_{\mathbb{R}} \Psi_0\,(\theta_0'(z))^2\,dz. \tag{M.10}$$

З умови збереження площі $\int_{\Gamma(t)} V ds = 0$ випливає, що $\lambda(t) = \frac{1}{c_0|\Gamma(t)|}\int_{\Gamma(t)}(c_0\kappa + \Phi_\beta(V))ds$.

Наведене вище формальне виведення границі строго обгрунтоване в одновимірному випадку (див. Теорем M.6, нижче) через значні технічни скдаднощі в двовимірному випадку. Розв'язність (M.9) доведено в [40] для β менших певного критичного значення, крім того показано, шо (M.9) має властивість параболічної регулярізації. Проте для великих β, рівняння (M.9) може мати кілька розв'язків. Для того щоб знайти критерій селекції і висвітити роль параметра β в русі інтерфейсу нижче розглянуто одновимірну модель.

2.*Розв'язки типу біжних хвиль в одномірному випадку.* Розв'язки системи (M.1)–(M.2) зазнають значних якісних змін коли збільшується параметр β і потенціал має $W(\rho)$ має певну асиметрію, наприклад, $W(\rho) = \frac{1}{4}\rho^2(\rho-1)^2(1+\rho^2)$. Розглянемо питання існування розв'язків типу біжучих хвиль в одновимірному випадку системи (M.1)–(M.2) з $\Omega = \mathbb{R}^1$. Шукаємо просторово локалізовані розв'язки системи (M.1)-(M.2) вигляду $\rho_\varepsilon = \rho_\varepsilon(x-Vt)$, $P_\varepsilon = P_\varepsilon(x-Vt)$. Це веде до стаціонарних рівнянь з невідомою (постійною) швидкістю V і константою λ:

$$0 \;=\; \partial_x^2\rho_\varepsilon + V\partial_x\rho_\varepsilon - \frac{W'(\rho_\varepsilon)}{\varepsilon^2} - P_\varepsilon\partial_x\rho_\varepsilon + \frac{\lambda}{\varepsilon}, \tag{M.11}$$

$$0 \;=\; \varepsilon\partial_x^2 P_\varepsilon + V\partial_x P_\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon}P_\varepsilon - \beta\partial_x\rho_\varepsilon. \tag{M.12}$$

Розв'язки (M.11)–(M.12) локалізовані на інтервалі $(-a, a)$, для заданого $a > 0$, шукаємо постулуючи анзац для фазової функції ρ_ε:

$$\rho_\varepsilon = \theta_0((x+a)/\varepsilon)\theta_0((a-x)/\varepsilon) + \varepsilon\psi_\varepsilon + \varepsilon u_\varepsilon, \tag{M.13}$$

де константа ψ_ε – найменший розв'язок рівняння $W'(\varepsilon\psi) = \varepsilon\lambda$, і u_ε – нова невідома функція, що прямує до нуля при $x \to \pm\infty$. Зазначимо, що перший член $\theta_0((x+a)/\varepsilon)\theta_0((a-x)/\varepsilon)$ має "П подібний профіль і стає характеристичною функцією інтервала $(-a, a)$ у границі $\varepsilon \to 0$.

Твердження M.2. *Для довільного $\beta \geq 0$ і достатньо малих ε існує локалізований стаціонарний розв'язок (з $V = 0$) задачі* (M.11)–(M.12). *Він є локалізованим у тому сенсі, що в представленні* (M.13) *функція $u_\varepsilon \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ задовольняє оцінку $\|u_\varepsilon\|_{L^\infty} \leq C$.*

Твердження M.2 обгрунтовує очікуване існування стаціонарних розв'язків в класі функцій з симетрією $\rho(-x) = \rho(x)$ і $P(-x) = -P(x)$. Проте виявляється, що не всі локалізовані розв'язки (M.11)–(M.12) є стаціонарними. Дійсно, припустимо, що існують розв'язки вигляду біжної хвилі з ненульовою швидкістю, для визначеності $V > 0$, і перейдемо до границі $\varepsilon \to 0$ в (M.11)–(M.12). Тоді у передньому і задньому перехідних шарах ($x = \pm a$ в (M.13)) формально знаходимо два співвідношення для швидкості V і константи λ:

$$c_0 V = \Phi_\beta(V) - \lambda, \text{ і } -c_0 V = \Phi_\beta(-V) - \lambda. \tag{M.14}$$

Виключимо λ з цих рівнянь, в результаті знаходимо рівняння для швидкості V:

$$2c_0 V = \Phi_\beta(V) - \Phi_\beta(-V). \tag{M.15}$$

Це рівняння завжди має корінь $V = 0$ який відповідає стаціонарному розв'язку (M.11)–(M.12) описаному в Твердженні M.2. Два інші розв'язки, скажімо V_0 і $-V_0$, виникають для достатньо великих $\beta > 0$ у випадку коли $\Phi_\beta(V) > \Phi_\beta(-V)$ для $V > 0$ (зазначимо, що для $W(\rho) = \frac{1}{4}\rho^2(\rho-1)^2$ функція Φ_β є парною, отже права частина (M.15) є нульовою для всіх β і з необідністю $V = 0$). Ці еврістичні міркування можна зробити строгими, що веде до наступного результату.

Теорема M.3. *Нехай $W(\rho)$ і β є такими, що* (M.15) *має корінь $V = V_0 > 0$ і $\Phi'_\beta(V_0) + \Phi'_\beta(-V_0) \neq 2c_0$ (невиродженість кореня). Тоді для достатньо малих l $\varepsilon > 0$ існує локалізований розв'язок* (M.11)–(M.12) *з $V = V_\varepsilon \neq 0$, причому $V_\varepsilon \to V_0 \neq 0$ при $\varepsilon \to 0$.*

Зауваження M.4. В Теоремі M.3 важливим є існування ненульового кореня (M.15), що є неможливим для симетричного потенціалу $W(\rho) = \frac{1}{4}\rho^2(\rho-1)^2$, проте має місце для асиметричних потенціалів, наприклад, $W(\rho) = \frac{1}{4}\rho^2(\rho-1)^2(1+\rho^2)$.

Доведення Теореми M.3 складається з двох кроків. У першому кроці (M.13) використовується для того щоб переписати (M.11)–(M.12) як одне рівняння вигляду $\mathcal{A}_\varepsilon u_\varepsilon + \varepsilon B_\varepsilon(V,\lambda) + \varepsilon^2 C_\varepsilon(u_\varepsilon, V, \lambda) = 0$, де $\mathcal{A}_\varepsilon u := \varepsilon^2 \partial_x^2 u - W''(\theta_0((x +$

$a)/\varepsilon)\theta_0((a-x)/\varepsilon))u$ – лінеаризований оператор Аллена-Кана. Останнє рівняння можна представити як задачу про нерухому точку, $u_\varepsilon = -\varepsilon\mathcal{A}_\varepsilon^{-1}(B_\varepsilon(V,\lambda) + \varepsilon C_\varepsilon(u_\varepsilon, V, \lambda))$. Оператор $\mathcal{A}_\varepsilon$ має нульове власне значення кратності два. Це веде до умов розв'язності (ортогональність власним функціям) які в головному порядку співпадають з (M.14). У другому кроці застосовується Теорема Шаудера про нерухому точку для доведення існування розв'язків (M.11)–(M.12).

3. *Границя контрастної фазової функції в одновимірній моделі і гістерезис.* Вивчимо асимптотичну поведінку при $\varepsilon \to 0$ розв'язків наступної одновимірної задачі

$$\frac{\partial \rho_\varepsilon}{\partial t} = \partial_x^2 \rho_\varepsilon - \frac{W'(\rho_\varepsilon)}{\varepsilon^2} - P_\varepsilon \partial_x \rho_\varepsilon + \frac{F(t)}{\varepsilon}, \tag{M.16}$$

$$\frac{\partial P_\varepsilon}{\partial t} = \varepsilon \partial_x^2 P_\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon} P_\varepsilon - \beta \partial_x \rho_\varepsilon, \tag{M.17}$$

$x \in \mathbb{R}^1$, $t > 0$, з заданою функцією $F : (0, +\infty) \to \mathbb{R}^1$. Це є модельною задачею для (M.1)–(M.2), вона описує перехідний шар між нульовою і одиничною фазами на інтерфейсі. Змінна $x \in \mathbb{R}$ відповідає масштабованій відстані до інтерфейсу, $F(t)$ моделює сили спричинені кривизною інтерфейсу і умовою збереження площі (константа λ_ε), для простоти припускаємо, що $F(t)$ не залежить від x. Розв'язки (M.16)–(M.17) шукаємо у вигляді

$$\rho_\varepsilon(x,t) = \theta_0(y) + \varepsilon\psi_\varepsilon(y,t) + \varepsilon u_\varepsilon(y,t), \quad y = \frac{x - x_\varepsilon(t)}{\varepsilon}, \tag{M.18}$$

де θ_0 і ψ_ε – відомі функції, u_ε – нова невідома функція. Положення інтерфейсу $x_\varepsilon(t)$ визначено неявно через додаткову умову ортогональності $u_\varepsilon(y,t)$ до $\theta_0'(y)$ в $L^2(\mathbb{R})$:

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \theta_0'(y) u_\varepsilon(y,t)\,dy = 0. \tag{M.19}$$

Ця умова дозволяє скористатись нерівностями Пуанкаре для знаходження апріорних оцінок для u_ε. Функцію $\psi_\varepsilon(y,t)$ визначено рівністю

$$\psi_\varepsilon(y,t) = \psi_\varepsilon^-(t) + \theta_0(y)(\psi_\varepsilon^+(t) - \psi_\varepsilon^-(t)),$$

де $\partial_t(\varepsilon\psi_\varepsilon^\pm) = -\frac{W'((1\pm1)/2+\varepsilon\psi_\varepsilon^\pm)}{\varepsilon^2} + \frac{F(t)}{\varepsilon}$, $\psi_\varepsilon^\pm(0) = 0$. Існування $x_\varepsilon(t)$ а також оцінки для u_ε отримано в наступному результаті.

Теорема М.5. *Нехай $\rho_\varepsilon, P_\varepsilon$ – розв'язок задачі* (М.16)-(М.17) *з початковою умовою для ρ_ε і P_ε :*

$$\rho_\varepsilon(x,0) = \theta_0\left(x/\varepsilon\right) + \varepsilon v_\varepsilon\left(x/\varepsilon\right), \tag{M.20}$$

де $\|v_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R})} < C$, $\|v_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq C/\varepsilon$, і функція $P_\varepsilon(x,0) = p_\varepsilon(\frac{x}{\varepsilon})$ задовольняє

$$\|p_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|\partial_y p_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R})} < C. \tag{M.21}$$

Тоді існує траєкторія $x_\varepsilon(t)$, така що має місце розвинення (М.18) *з $\|u_\varepsilon(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R})} < C$ для $t \in [0,T]$ і $\int_\mathbb{R} u_\varepsilon\theta_0' dy = 0$. Причому, за умови $\int_\mathbb{R} v_\varepsilon\theta_0' dy = 0$ швидкість інтерфейсу $V_\varepsilon = \dot{x}_\varepsilon(t)$ визначається системою:*

$$(c_0 + \varepsilon\tilde{\mathcal{O}}_\varepsilon(t))V_\varepsilon(t) = \int (\theta_0')^2\Psi_\varepsilon dy - F(t) + \varepsilon\mathcal{O}_\varepsilon(t), \tag{M.22}$$

$$\varepsilon\frac{\partial\Psi_\varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial^2\Psi_\varepsilon}{\partial y^2} + V_\varepsilon(t)\frac{\partial\Psi_\varepsilon}{\partial y} - \Psi_\varepsilon - \beta\theta_0'(y), \tag{M.23}$$

де $\tilde{\mathcal{O}}_\varepsilon(t)$ і $\mathcal{O}_\varepsilon(t)$ є обмеженими в $L^\infty(0,T)$.

Зведену систему (М.22)–(М.23) можна далі спростити в границі $\varepsilon \to 0$. Формальний перехід до границі в (М.23) веде до рівняння (М.8), чий єдиний розв'язок залежить від параметра V. Підставимо цей розв'язок в (М.22), в результаті отримуємо рівняння

$$c_0 V_0(t) = \Phi_\beta(V_0(t)) - F(t) \tag{M.24}$$

для граничної швидкості $V_0 = \lim_{\varepsilon\to0} V_\varepsilon$. Проте рівняння (М.24) не є, взагалі кажучі, однозначно розв'язним. Графік функції $c_0 V - \Phi_\beta(V)$ для достатньо великих β наведено в Рис. М.1, де можна побачити, що (М.24) має три кореня коли $F \in [F_{\min}, F_{\max}]$. Для обгрунтування (М.24) і селекціїї коректного розв'язку зведемо систему (М.22)-(М.23) до одного нелінійного рівняння підстановкою формули для V_ε з (М.22) в (М.23). Тоді, масштабуванням часу (і опускаючи члени порядку ε) знаходимо рівняння $\partial_t U = \partial_y^2 U +$

$\frac{1}{c_0}(\int(\theta_0')^2Udy - F)\partial_y U - U - \beta\theta_0'$, дослідження якого за великим часом допоможе знайти границю (M.22)–(M.23) при $\varepsilon \to 0$. Лінеаризуємо оператор $\mathcal{A}_V U = \partial_y^2 U + V\partial_y U - U - \frac{1}{c_0}\partial_y\Psi_0\int(\theta_0'(z))^2U(z)dz$ навколо стаціонарвного розв'язку Ψ_0 наведеного вище нелінійного оператора, де функція Ψ_0 знаходиться підстановкою коренів V рівняння $c_0V = \Phi_\beta(V) - F$ в рівняння (M.8) (що має єдиний розвязок).

Визначимо множину стійких швидкостей $\mathcal{S}$ формулою $\mathcal{S} = \{V \in \mathbb{R};\, \sigma(\mathcal{A}_V) \subset \{\lambda \in \mathbb{C}; \mathrm{Re}\lambda < 0\}\}$, де $\sigma(\mathcal{A}_V)$ позначає спектр оператора $\mathcal{A}_V$ (зазначимо, що $\mathcal{S}$ – відкрита множина).

Теорема M.6. *Нехай $F(t)$ – неперервна функція, і припустимо, що $V_0 \in \mathcal{S}$ задовольняє $c_0V_0 = \Phi_\beta(V_0) - F(0)$. Припустимо також, що $\|p_\varepsilon - \Psi_0\|_{L^2} \le \delta$, де Ψ_0 – розв'язок* (M.8) *з $V = V_0$ і $\delta > 0$ – деяке мале число, що залежить від V_0 проте не залежить від ε. Тоді швидкість $V_\varepsilon(t) = \dot{x}_\varepsilon(t)$, що визначено в Теоремі M.5, збігається до неперервного розв'язку рівняння $c_0V(t) = \Phi_\beta(V(t)) - F(t)$ з $V(0) = V_0$ на кожному скінченному інтервалі $[0, T]$ де такий розв'язок існує і $V(t) \in \mathcal{S}$ $\forall t \in [0, T]$.*

Можна висунути гіпотезу, що стійкість швидкості пов'язана з монотонністю $c_0V - \Phi_\beta(V)$. Принаймні є вірним наступний результат.

Твердження M.7. *Якщо $c_0 \le \Phi_\beta'(V)$, тоді V не є стійкою швикістю.*

Взагалі кажучи похідна $\Phi_\beta'(0)$ є ненульовою якщо потенціал $W(\rho)$ є асиметричним. Зокрема для $W(\rho) = \frac{1}{4}\rho^2(1-\rho)^2(1+\rho^2)$ маємо $c_0 < \Phi_\beta'(0)$ коли $\beta > \beta_{critical} > 0$, тобто нульова швидкість не є стійкою. Для двовимірної задачі це означає нестійкість круглої форми клітини, що веде до спонтанного порушення симетрії яке наблюдають в експериментах.

Теорема M.6 описує локальну за часом еволюцію інтерфейсу згідно з законом $c_0V = \Phi_\beta(V) - F(t)$ доки V не залишить множину стійких швидкостей $\mathcal{S}$. Можна висунути гіпотезу, що цей закон залишається вірним також після того, як V досягне межу зв'язної компоненти $\mathcal{S}$. Розглянемо приклад з $\beta = 150$,

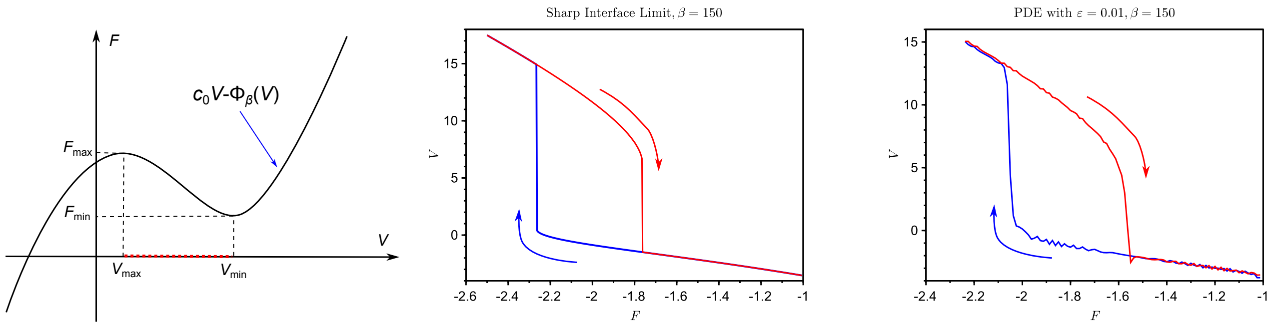

Рис. М.1: Петля гістерезису в задачі про мобільність клітини. (Праворуч) Графік $c_0 V - \Phi_\beta(V)$; (в центрі, праворуч) $V = V(F)$, (в центрі): розв'язок (М.9), (праворуч): розв'язок системи (М.16)-(М.17). Стрілки показують напрямок еволюції пари $(V(t), F(t))$ з часом t; синя крива відповідає $F_\downarrow(t)$, червона крива відповідає $F_\uparrow(t)$.

відповідний графік $c_0 V - \Phi_\beta(V)$ представлено на Рис. М.1. Виберемо $F(t) = F_\uparrow(t) := -2.25 + 1.25t$ для $t \in [0, 1]$ і $F(t) = F_\downarrow(t) := F_\uparrow(2 - t)$ для $t \in (1, 2]$. Для добре підготовлених начальних даних швидкість інтерфейсу V зростає з $F(t)$ до $V_{\max}$ потім вона стрибає до іншої гілки і продовжує змінюватися в $(V_{\min}, +\infty)$ до моменту коли спаде до $V_{\min}$ і зазнає ще один стирибок, потім вона змінюється в $(-\infty, V_{\max})$ і повертається до вихідної швидкості в момент $t = 2$, див. Рис. М.1. Таким чином в системі спостерігається петля гістерезису, це підтверджується чисельними обрахунками для граничного рівняння (М.24) і вихідної системи (М.16)-(М.17) для малих ε. Результати обчислень для $\varepsilon = 0.01$ наведено справа на Рис. М.1.

Результати дослідження моделі фазового поля з повними доведеннями опубліковано в [42] і [40].

Додаток N

Доведення технічних результатів з Підрозділу 1.6.2

Доведення Леми 1.6.10. Почнемо з простішого випадку коли область Ω є однозв'язною. Так як $h \in \mathbf{H}$, існує функція h^* гармонічно спряжена до h, і нормалізована рівністю $\int_{\psi\Omega} h^* dx = 0$. Нагадаємо тотожність

$$\operatorname{Jac}(g, h) := -\nabla g \cdot \nabla^{\perp} h.^1 \tag{N.1}$$

Користуючись (N.1) і тим фактом, що $\nabla h^* = \nabla^{\perp} h$, виводимо $\int_{\Omega} f \nabla g \cdot \nabla h dx = -\int_{\Omega} f \operatorname{Jac}(g, h^*) dx$. Скориставшись тепер (1.6.18) отримуємо (1.6.20) з $C(\Omega) = \sqrt{2}$.

Розглянемо тепер випадок багатозв'язної області і позначимо через ω_j, $j = 1, \dots k$, обмежені однозв'язні компоненти $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}$. Виберемо довільні точки $a_j \in \omega_j$ і введемо векторні поля $X_j(x) := \frac{1}{2\pi} \left(\nabla \log(x - a_j)\right)^{\perp}$, кожне з полей X_j є потенціальним. Визначимо $X := (\nabla h)^{\perp}$. Ясно, що знайдуться гладкі криві $\Gamma_j \subset \Omega$, $j = 1, \dots k$, такі що:

1. Γ_j є гомотопною $\partial \omega_j$ в $\overline{\Omega}$.
2. $\left| \int_{\Gamma_j} X \cdot \tau ds \right| \le C \|\nabla h\|_{L^2}$.

Покладемо $c_j := \int_{\Gamma_j} X \cdot \tau ds$, $Y := X - \sum_j c_j X_j$. Векторне поле Y є потен-

[1] Нагадаємо, що $(a, b)^{\perp} = (-b, a)$.

ціальним, крім того $\|Y\|_{L^2} \le C\|\nabla h\|_{L^2}$ і $\displaystyle\int_{\Gamma_j} Y \cdot \tau ds = 0$, $\forall j$.[2] Таким чином $\displaystyle\int_{\Gamma} Y \cdot \tau ds = 0$ для кожної регулярної замкненої кривої $\Gamma \subset \Omega$. Звідси $Y = \nabla u$ для деякої функції u, і легко бачити, що $\|\nabla u\|_{L^2} \le C\|\nabla h\|_{L^2}$. Для завершення доведення залишається скористатись (1.6.18):

$$\left|\int_\Omega f\nabla g\cdot\nabla h dx\right| dx = \left|\int_\Omega f \operatorname{Jac}(g,u)dx + \sum_j c_j \int_\Omega f\nabla g \cdot X_j^\perp dx\right| \le C(\Omega)\|\nabla f\|_{L^2}\|\nabla g\|_{L^2}\|\nabla h\|_{L^2}. \qquad \square$$

Доведення Леми 1.6.11. Достатньо встановити оцінки (1.6.22) і (1.6.23) для гладких f і g. У цьому випадку функція u є гладкою і [3]

$$\begin{cases} -\Delta u = 2\nabla u(f)\cdot\nabla u(g) & \text{в } \Omega \\ u = 0 & \text{на } \partial\Omega. \end{cases} \tag{N.2}$$

Помножимо (N.2) на u і скорисаємось (1.6.20), в результаті знаходимо

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 dx \le C(\Omega)\|\nabla u\|_{L^2}\|\nabla u(f)\|_{L^2}\|\nabla u(g)\|_{L^2} \le C(\Omega)\|\nabla u\|_{L^2}|f|_{H^{1/2}}|g|_{H^{1/2}},$$

звідки випливає (1.6.23).

Для доведення (1.6.22) запишемо, як в Лемі 1.6.10, $\nabla u(g) = -\nabla v - c_j X_j^\perp$, з $\|\nabla v\|_{L^2} \le C|g|_{H^{1/2}}$ і $|c_j| \le C|g|_{H^{1/2}}$. Тоді маємо

$$\Delta u = 2\operatorname{Jac}(u(f), v) - 2\sum c_j(\nabla u(f)) \times X_j. \tag{N.3}$$

Тепер, користуючись Лемою 1.6.9, одержуємо

$$\|u\|_{L^\infty} \le C(\Omega)\left(\|\nabla u(f)\|_{L^2}\|\nabla v\|_{L^2} + \sum |c_j|\|\nabla u(f)\|_{L^2}\|X_j\|_{L^\infty}\right) \le C(\Omega)|f|_{H^{1/2}}|g|_{H^{1/2}} \qquad \square.$$

---

[2]Остання властивість є наслідком рівності $\displaystyle\int_{\Gamma_j} X_l ds = \begin{cases} 1, & \text{якщо } j = l \\ 0, & \text{якщо } j \neq l \end{cases}$.

[3]неважко показати, що (N.2) є вірним для довільних $f, g \in H^{1/2}(\partial\Omega)$.

Доведення Леми 1.6.12. Покладемо $u_n := u(fg_n) - u(f)u(g_n) - u(fg) + u(f)u(g)$. Внаслідок Леми 1.6.11 маємо, $|u_n| \le C$ і $u_n \rightharpoonup 0$ слабко в $H^1(\Omega)$. Таким чином $u_n \nabla u(f) \to 0$ сильно в $L^2(\Omega)$. Оскільки $-\Delta u_n = 2\nabla u(f) \cdot \big(\nabla u(g_n) - \nabla u(g)\big)$, то

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx = 2\int_\Omega \big(u_n \nabla u(f)\big) \cdot \big(\nabla u(g_n) - \nabla u(g)\big) \to 0 \quad \text{коли } n \to \infty. \qquad \square$$

Доведення Леми 1.6.14. Покладемо $u := u(f)$ і $v_n := u(g_n)$. З огляду на Лему 1.6.12, (1.6.24) є еквівалентим

$$\int_\Omega |u\nabla v_n + v_n \nabla u|^2 dx = \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \int_\Omega |\nabla v_n|^2 dx + o(1). \tag{N.4}$$

Внаслідок принципу максимуму $|u| \le 1$, $|v_n| \le 1$. Користуючись цим фактом разом з тим, що $v_n \to 1$ майже всюду в Ω і $\nabla v_n \rightharpoonup 0$ слабко в $L^2(\Omega)$, знаходимо,

$$\int_\Omega (u\nabla v_n) \cdot (v_n \nabla u) dx = \int_\Omega \nabla v_n \cdot (v_n \overline{u} \nabla u) dx \to 0.$$

Тоді (N.4) зводиться до

$$\int_\Omega |u|^2 |\nabla v_n|^2 dx + \int_\omega |v_n|^2 |\nabla u|^2 dx = \int_\omega |\nabla v_n|^2 dx + \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + o(1), \tag{N.5}$$

(N.5) що, в свою чергу, неважко довести комбінуючи наступні факти:

1. $|u(z)| \to 1$ рівномірно, коли $\operatorname{dist}(z, \partial\Omega) \to 0$ (див. [56], Теорема A3.2).
2. $\displaystyle\int_K |\nabla v_n|^2 dx \to 0$ для кожного компакту $K \subset \Omega$.
3. $|v_n| \le 1$.
4. $v_n \to 1$ рівномірно на компактах в Ω. $\square$

Зауваження N.1. У випадку коли Ω є однозв'язною областю доведення (1.6.24) можна значно спростити. А саме, внаслідок конформної інваріантності тих об'єктів, що розглядаються, можна вважати, що $\Omega = \mathbb{D}$. Тоді, розкладаючи f в ряд Фур'є $f = \sum a_n e^{in\theta}$, отримуємо

$$\int_{\mathbb{S}^1} \int_{\mathbb{S}^1} \frac{|f(x) - f(y)|^2}{|x-y|^2} ds_x ds_y = 4\pi^2 \sum |n||a_n|^2 = 4\pi |f|^2_{H^{1/2}}. \tag{N.6}$$

Таким чином (1.6.24) зводиться до

$$\int_{\mathbb{S}^1}\int_{\mathbb{S}^1}\frac{|f(x)g_n(x)-f(y)g_n(y)|^2}{|x-y|^2}\,ds_xds_y=\int_{\mathbb{S}^1}\int_{\mathbb{S}^1}\frac{|f(x)-f(y)|^2}{|x-y|^2}\,ds_xds_y$$
$$+\int_{\mathbb{S}^1}\int_{\mathbb{S}^1}\frac{|g_n(x)-g_n(y)|^2}{|x-y|^2}\,ds_xds_y+o(1). \tag{N.7}$$

Скористаємось тим фактом, що $|f|=|g_n|=1$:

$$\frac{|f(x)g_n(x)-f(y)g_n(y)|^2}{|x-y|^2}=\frac{|f(x)(g_n(x)-g_n(y))+(f(x)-f(y))g_n(y)|^2}{|x-y|^2}$$
$$=\frac{|g_n(x)-g_n(y)|^2}{|x-y|^2}+\frac{|f(x)-f(y)|^2}{|x-y|^2}+2F_n\cdot G_n,$$

де $F_n(x,y)=\overline{f}(x)g_n(y)\dfrac{f(x)-f(y)}{|x-y|}$ і $G_n(x,y)=\dfrac{g_n(x)-g_n(y)}{|x-y|}$. Отже для доведення (N.7) необхідно показати, що

$$\int_{\mathbb{S}^1}\int_{\mathbb{S}^1}F_n\cdot G_nds_xds_y\to 0, \tag{N.8}$$

для цього скористаємось тим, що $F_n\to F(x,y)=\overline{f}(x)\dfrac{f(x)-f(y)}{|x-y|}$ сильно в $L^2(\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1)$ і $G_n\rightharpoonup 0$ слабко в $L^2(\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1)$.[4]

Доведення Теореми 1.6.15. **Крок I** (u має щонайменше один нуль в $\mathbb{D}$). Дійсно, в противному випадку $u\in C(\mathbb{D};\mathbb{C}\setminus\{0\})$ і $\partial\lim_{|z|\to1}|u(z)|=1$, тобто $|u|\geq\alpha>0$ для деякого α. Тоді можна записати $u=|u|e^{\imath\varphi}$, з $\varphi\in H^1(\Omega;\mathbb{R})$, що веде до наступного протиріччя,

$$1=\deg\,(e^{\imath\varphi},\mathbb{S}^1)=\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}}\mathrm{Jac}\,(e^{\imath\varphi})dx=0.$$

Виберемо один з (можливо декількох) нулів $a\in\mathbb{D}$ функції u. Покладемо $v=u\circ M_{-a}=u\circ M_a^{-1}$. Тоді функція v є гармонічною, $v(0)=0$, і $v|_{\mathbb{S}^1}=h$, з $h=g\circ N_{-a}$. Крім того, маємо $|h|_{H^{1/2}}=|g|_{H^{1/2}}$, внаслідок конформної інваріантності $H^{1/2}$-напівнорми.

[4]Першу збіжність отримуємо користуючись тим, що $f_n\to f$ сильно в $H^{1/2}$ разом з Теоремою Лебега про мажоровану збіжність. Друга збіжність випливає з того факту, що $g_n-1\rightharpoonup 0$ слабко в $H^{1/2}$.

Крок II (Доведення твердження *4.*). Міркуємо від супротивного: припустимо, що існують $\mu > 0$, $r \in (0,1)$, такі що

$$\inf_{\alpha\in\mathbb{S}^1} \|\alpha v_n - \mathrm{Id}\|_{C^2(\mathbb{D}_r)} \geq \mu$$

для деякої послідовності (v_n) гармонічних функцій, таких що

$$\begin{cases} v_n(0) = 0 \\ h_n := v_n|_{\mathbb{S}^1} \text{ має модуль 1 і степінь 1.} \\ |h_n|^2_{H^{1/2}} \leq \pi + \dfrac{1}{n} \end{cases}$$

Тоді, з точністю до підпослідовності, $v_n \to v$ в $C^\infty_{loc}(\mathbb{D})$, і $h_n \rightharpoonup h \in H^{1/2}(\mathbb{S}^1;\mathbb{S}^1)$. Крім того $v = u(h)$ і v задовольняє

$$\begin{cases} \|\alpha v - \mathrm{Id}\|_{C^2(\mathbb{D}_r)} \geq \mu, \ \forall\, \alpha \in \mathbb{S}^1 \\ v(0) = 0 \\ |h|^2_{H^{1/2}} \leq \pi \end{cases}.$$

Спочатку розглянемо випадок, коли $\deg\,(h, \mathbb{S}^1) = 1$. Оскільки $|h|^2_{H^{1/2}} \leq \pi$, з Наслідку 1.6.5 виводимо (враховуючи той факт, що $v(0) = 0$), що $\partial v = \gamma\ \mathrm{Id}$ для $\gamma \in \mathbb{S}^1$ і це є протиріччям. Таким чином $\deg\,(h, \mathbb{S}^1) \neq 1$. Тоді за допомогою Леми 1.6.2 виводимо:

$$\begin{aligned} \pi = \lim \frac{1}{2}\int_{\mathbb{D}} |\nabla v_n|^2 dx &\geq \frac{1}{2}\int_{\mathbb{D}} |\nabla v|^2 dx + \pi|\deg\,(h_n, \mathbb{S}^1) - \deg\,(h, \mathbb{S}^1)| \\ &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{D}} |\nabla v|^2 dx + \pi|1 - \deg\,(h, \mathbb{S}^1)|. \end{aligned} \tag{N.9}$$

Це означає, що v є сталою з модулем 1, тобто $v(0) \neq 0$.

В наступній частині доведення будемо припускати, що $|g|^2_{H^{1/2}} \leq \pi + \delta$, де $\delta < \delta_0$ і δ_0 буде вибрано пізніше.

Крок III. Для $0 < s < r < 1$ і достатньо малих δ_0 (що залежать від s і r), маємо $\partial|v| \geq s$ на $\mathbb{D} \setminus \mathbb{D}_r$.

Дійсно, зафіксуємо довільне $\mu > 0$ і візьмемо $R \in (r, 1)$, яке буде уточнено пізніше. Внаслідок доказаного в Кроці II маємо

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{D}_R} |\nabla v|^2 dx \geq \pi R^2 - \mu \text{ і } |v(x)| \geq |x| - \mu \text{ in } \overline{\mathbb{D}}_R, \tag{N.10}$$

якщо δ_0 є достатньо малим. Зокрема,

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{D}\setminus\overline{\mathbb{D}}_R} |\nabla v|^2 dx \leq \pi - \pi R^2 + \mu + \delta_0 \text{ і } |v| \geq R - \mu \text{ на } \partial(\mathbb{D} \setminus \overline{\mathbb{D}}_R). \tag{N.11}$$

Скористаємось далі наступним спеціальним випадком результату [85, Теорема 3.6] скомбінованого з [85, Приклад 3.5 с)].

Лема N.2. *1. Нехай* $0 < R < 1$ *і покладемо* $\omega := \mathbb{D} \setminus \overline{\mathbb{D}}_R$. *Нехай* $v \in H^1(\mathbb{D})$ *– довільна комплекснозначна гармонічна функція. Припустимо, що* $t \leq |v| \leq 1$ *на* $\psi\omega$, *для деякого* $t \geq 0$, *і визначимо* $s = \partial \inf_\omega |v|$. *Тоді*

$$\int_\omega |\nabla v|^2 dx \geq 4\mathcal{A}_{s,t},$$

де $\mathcal{A}_{s,t}$ *– площа області* $\{z \in \mathbb{D};\, |z| < t, \mathrm{Re}\ z > s\}$.

2. *Такий самий висновок є справедливим якщо* $\omega = \mathbb{D}$.

3. *Такий самий висновок є справедливим якщо* $\omega = \mathbb{D}$ *або* $\mathbb{D}\setminus\overline{\mathbb{D}}_R$ *і* v *мінімізує* $\mathcal{E}_\beta$ *в* $\mathbb{D}$ *зі своїми крайовими даними на межі.*

4. *Спеціальний випадок: якщо функція* v *є гармонічною і додатково* $|v| = 1$ *на* $\mathbb{S}^1$, *крім того* $\int_{\mathbb{D}} |\nabla v|^2 dx \leq c < 2\pi$, *тоді існує* $\lambda = \lambda(c) > 0$, *таке що* $|v| \geq \lambda$ *в* $\mathbb{D}$.

Крок III (продовження). Так як $\mathcal{A}_{s,t}$ не залежить від R, користуючись твердженням *1.* Леми N.2 і (N.11), отримуємо наступне: якщо R є достатньо близьким до 1 і μ, δ_0 є достатньо малими, тоді $|v| \geq s$ в $\mathbb{D} \setminus \overline{\mathbb{D}}_R$. Залишається скомбінувати цей факт з другим твердженням в (N.10).

Крок IV (функція u має точно один нуль). Дійсно, комбінуючи доказане у Кроці III і Кроці II , доходимо висновку, що v має точно один нуль для малих δ_0 (і цей нуль лежить в околі центра). Те саме є справедливим і для u.

Крок V (неперервність відображення $g \mapsto a$). Це твердження є наслідком єдиності нуля. Дійсно, нехай $g_n \to g$ в $H^{1/2}(\mathbb{S}^1;\mathbb{S}^1)$. Тоді існує число $r > 0$, що не залежить від n, таке що

$$|u(g_n)| \geq \frac{1}{2} \quad \text{в } \mathbb{D} \setminus \overline{\mathbb{D}}_r, \forall\, n. \tag{N.12}$$

Цей результат доводиться аналогічно Теоремі A3.2 в [56]. Тепер неважко довести збіжність нулів $u(g_n)$ до нуля $u(g)$ користуючись рівномірною збіжностю $u(g_n)$ до $u(g)$ на компактах в $\mathbb{D}$.

Крок VI (доведення *2.*). Оскільки норма $|\cdot|_{H^{1/2}}$ є інваріантною відносно композиції з звуженнями на $\mathbb{S}^1$ конформних відображень Мебіуса і помноження на сталі з одиничним модулем, можна вважатити, що $u(0) = 0$, і що твердження *4.* виконується з $a = 0$ і $\alpha = 1$. Нехай θ позначає полярний кут і нехай $r \in (1/2, 1)$. Згідно з твердженням *4.*, для достатньо малих δ функцію u можна записати наступним чином $u = \mathrm{Id}\,\eta e^{\imath\varphi} = |u|e^{\imath(\theta+\varphi)}$ в $\mathbb{D} \setminus \overline{\mathbb{D}}_r$, з $\eta, \varphi \in H^1(\mathbb{D} \setminus \overline{\mathbb{D}}_r; \mathbb{R})$. З огляду на результат Кроку III і принцип максимуму можна вважати, що $1/2 \leq |u| \leq 1$.

Домовимось позначати через $o(1)$ величину, що збігається до 0 рівномірно (відносно g, що розглядається як параметр) коли $\delta \to 0$. Далі буде доведено оцінку

$$\|\nabla\varphi\|_{L^2(\mathbb{D}\setminus\overline{\mathbb{D}}_r)} = o(1), \tag{N.13}$$

яка, очевидно, тягне за собою твердження *2.*

Для доведення (N.13), спочатку покажемо, що $\|u - \mathrm{Id}\|_{H^1} = o(1)$. Дійсно, розглянемо послідовність (u_n), $u_n = u(g_n)$, таку що $\delta_n := |g_n|^2_{H^{1/2}} - \pi \to 0$ при $n \to \infty$ і твердження *4.* виконується з $a = 0$ і $\alpha = 1$. Тоді $u_n \rightharpoonup \mathrm{Id}$ слабко в $H^1(\mathbb{D})$, і

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{D}} |\nabla u_n|^2 dx = |g_n|_{H^{1/2}} \to \pi = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{D}} |\nabla\,\mathrm{Id}|^2 dx \quad \text{as } n \to \infty.$$

Отже $\|u_n - \mathrm{Id}\|_{H^1} \to 0$. Далі, запишемо

$$|\nabla\varphi| = \left|\nabla\,\frac{|\mathrm{Id}|\,u}{|u|\,\mathrm{Id}}\right| \quad \text{в } \mathbb{D} \setminus \overline{\mathbb{D}}_r.$$

Тоді (N.13) випливає з того факту, що $\|u - \mathrm{Id}\|_{H^1} = o(1)$ і поточкових оцінок $1/2 \le |u| \le 1$, $1/2 \le |\mathrm{Id}| \le 1$ в $\mathbb{D} \setminus \overline{\mathbb{D}}_r$. □

Доведення Теореми 1.6.16. Як і в доведенні Теореми 1.6.15, Крок VI, достатньо встановити твердження *2.* у спеціальному випадку коли $u(g)(0) = 0$. Міркуємо від супротивного: припустимо, що існують послідовності функцій $(g_n) \subset \mathcal{H}_1$ і точок $(z_n) \subset \mathbb{D}$, такі що

$$|g_n|^2_{H^{1/2}} \le 2\pi - \delta,\ |z_n| \to 1,\ u_n := u(g_n) \text{ задовольняє } u_n(0) = 0 \text{ і } |u_n(z_n)| \to 0. \tag{N.14}$$

Тоді існують $D \in \mathbb{Z}$, $g \in \mathcal{H}_D$ і $u = u(g)$, такі що

$$u_n \to u \text{ в } C^\infty_{loc}(\mathbb{D}),\ u(0) = 0 \tag{N.15}$$

(з точністю до виділення підпослідовності). Покажемо спочатку, що $D = 1$. Дійсно, ті самі міркування, що ведуть до (N.9) дають наступну нерівність

$$2\pi > 2\pi - \delta \ge \frac{1}{2}\int_{\mathbb{D}} |\nabla u|^2 dx + \pi|1 - D|. \tag{N.16}$$

Скомбінуємо тепер (N.16) з Наслідком 1.6.5, маємо $D = 0$ або $D = 1$. Якщо $D = 0$, тоді $\partial \int_{\mathbb{D}} |\nabla u|^2 dx \le 2(\pi - \delta)$. З цієї нерівності і Леми N.2, твердження *4.* випливає, що $|u| \ge \lambda$ в $\mathbb{D}$ для деякого $\lambda > 0$. Проте це протирічить (N.15). Таким чином $D = 1$.

Для заданого $s \in (0, 1)$, що буде вибрано нижче, існує $R \in (0, 1)$, таке що $|u(z)| > \partial s$ на $\partial\mathbb{D}_R$ ([56], Теорема A3.2). Тоді, завдяки (N.15), нерівність $|u_j| \ge s$ виконується на $\partial\mathbb{D}_R$ коли j є достатньо великим. З іншого боку $\deg\,(u, \partial\mathbb{D}_R) = 1$ для R достатньо близьких до 1, комбінуючи це з (N.15) знаходимо $\deg\,(u_n, \partial\mathbb{D}_R) = 1$ для достатньо великих n. Тепер, користуючись (1.6.7), отримуємо оцінку

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{D}_R} |\nabla u_n|^2 dx \ge \pi s^2. \tag{N.17}$$

З іншого боку, оскільки $|u_n(z_n)| \to 0$ і $|u_n| \ge s$ на $\psi(\mathbb{D} \setminus \overline{\mathbb{D}}_R)$, внаслідок Леми

N.2, твердження *1.*, маємо

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{2} \int_{\mathbb{D}\setminus\overline{\mathbb{D}}_R} |\nabla u_n|^2 dx \geq \pi s^2. \tag{N.18}$$

Для s достатньо близьких до 1, дістаємо протирічча комбінуючи (N.17) з (N.18).

Після тогог як встановлено існування R і μ про які йдеться в твердженні *2.*, твердженя *1.* доводиться наступним чином. Скориставшись конформною інваріантністю, можна вважати, що $u(0) = 0$. Так як $|u| \geq \mu > 0$ в $\mathbb{D} \setminus \overline{\mathbb{D}}_R$, маємо deg $(u, \partial\mathbb{D}_R) = 1$. Міркуючи аналогічно початку Кроку *6.* в доведенні Теореми1.6.15, можна записати

$$u = |u| e^{\imath(\theta+\varphi)} \text{ в } \mathbb{D} \setminus \overline{\mathbb{D}}_R. \tag{N.19}$$

Тоді оцінка $\int_{\mathbb{D}} |\nabla u|^2 dx \leq 4\pi$ дає

$$\int_{\mathbb{D}\setminus\overline{\mathbb{D}}_R} |\nabla \varphi|^2 dx \leq C. \tag{N.20}$$

Це завершує доведення твердження *1.* і загалом Теореми 1.6.16 . $\square$

Доведення Леми 1.6.18. Якщо $c(\beta, a) \geq 2\pi$, тоді немає що доводити. В противному випадку, використаємо Наслідок 1.6.17 і одержимо, що інфімум в (1.6.27) досягається. Будемо міркувати від супротивного і принустимо, що $c(\beta, a_0) = \pi$. Якщо v є мінімізантом (1.6.27) тоді, згідно з Наслідком 1.6.5, $v = M_{\alpha,a}$ і

$$\int_{\mathbb{D}} \beta(1 - |v|^2)^2 dx = 0. \tag{N.21}$$

З іншого боку

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{\pi r^2} \int_{B(a,r)} \beta(1 - |v|^2)^2 dx = b(1 - |v|^2)^2(a), \tag{N.22}$$

що протирічить (N.21). $\square$