Фізико-технічний інститут низьких температур ім. Б. І. Вєркіна
Національна академія наук України

Фізико-технічний інститут низьких температур ім. Б. І. Вєркіна
Національна академія наук України

Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису

Хількова Лариса Олександрівна

УДК 517.9

ДИСЕРТАЦІЯ
Усереднені моделі дифузії в пористому середовищі з нелінійною адсорбцією на межі

01.01.03 – математична фізика
фізико-математичні науки (11 – математика та статистика)

Подається на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело
............Л. О. Хількова

Науковий керівник: Хруслов Євген Якович, доктор фізико-математичних наук, академік НАН України, професор

Харків – 2018

АНОТАЦІЯ

Хількова Л.О. Усереднені моделі дифузії в пористому середовищі з нелінійною адсорбцією на межі. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.03 – математична фізика. – Фізико-технічний інститут низьких температур імені Б.І. Вєркіна Національної академії наук України, Харків, 2018.

У дисертаційній роботі вивчаються питання усереднення крайових задач для рівнянь стаціонарної й нестаціонарної дифузії в сильно перфорованих областях $\Omega^\varepsilon = \Omega \setminus F^\varepsilon$ (тут $\Omega \subset R^n$ $(n \geqslant 2)$ – обмежена область, в якій розглядається процес, F^ε – перфоруюча множина) з нелінійною адсорбцією на межі F^ε, яка задається нелінійною крайовою умовою типу Робена. Область дифузії Ω^ε залежить від малого параметру $\varepsilon > 0$ так, що при $\varepsilon \to 0$ перфоруюча множина F^ε стає все більш порізаною й розташовується в фіксованій області Ω все більш щільно. Малий параметр ε задає масштаб перфорації.

Дифузійні процеси розглядаються в областях Ω^ε двох типів: сильно зв'язних перфорованих областях й областях із дрібнозернистою межею. Таким чином, дисертація складається з двох частин. Перша частина містить розділи 2-4 та присвячена усередненню в сильно зв'язних областях, друга містить розділ 5 і розглядає усереднення в областях з дрібнозернистою межею.

Перший тип областей Ω^ε – сильно зв'язні перфоровані області. Поняття сильної зв'язності відноситься не до однієї області, а до послідовності областей $\{\Omega^\varepsilon\}_\varepsilon$ – підобластей фіксованої області Ω. Області Ω^ε є сильно зв'язні, якщо будь-яка рівномірно обмежена по ε послідовність функцій $\{u^\varepsilon(x)\}_\varepsilon$, визначених в областях Ω^ε, компактна. Сильно зв'язні області – це широкий клас перфорованих областей, прикладами яких можуть бути як області, довільно перфоровані окремими частками, так й області, перфоруюча множина F^ε яких також є зв'язною.

Другий тип областей дифузії – області із дрібнозернистою межею. Розглядаються області, перфоруюча множина яких складається з малих (істотно менших масштабу перфорації ε) включень-куль довільно або випадково розподілених по області Ω.

Для обох типів перфорованих структур теорія усереднення третьої крайо-

вої задачі з нелінійною крайовою умовою становить великий інтерес і раніше не була побудована. Розгляду цієї проблеми і присвячена дана дисертація.

Основний зміст дисертаційної роботи складається зі вступу та п'яти розділів, розбитих на підрозділи.

У вступі обґрунтовано актуальність теми дисертації, сформульовано мету дослідження, висвітлено наукову новизну і практичне значення одержаних результатів, наведено відомості про публікації, особистий внесок здобувача і ступінь апробації роботи.

У першому розділі наводяться допоміжні відомості: визначаються сильно зв'язні області, наводиться узагальнена теорема Соболєва і будується «розбиття одиниці» з потрібними властивостями.

Другий розділ присвячено розгляду крайової задачі для рівняння стаціонарної дифузії в перфорованих сильно зв'язних областях $\Omega^\varepsilon \subset R^n$ $(n \geqslant 2)$ з нелінійною адсорбцією на межі перфоруючої множини F^ε. При кожному фіксованому ε доведено існування єдиного розв'язку $u^\varepsilon(x)$ такої задачі. Досліджено асимптотичну поведінку та установлено умови збіжності послідовності розв'язків $\{u^\varepsilon(x)\}_\varepsilon$, при прямуванні масштабу перфорації ε до 0, до розв'язку $u(x)$ усередненої задачі, вид якої визначено. Для визначення ефективних характеристик середовища, які є коефіцієнтами усередненого рівняння, уведемо «мезоскопічні» характеристики областей Ω^ε. Це локальні енергетичні характеристики мікроструктури, розглянуті в околі кожної точки $x \in \Omega$ – «мезокубі» K_h^x із центром у точці x і ребрами довжиною h. Префікс «мезо» означає, що розмір куба істотно більше розміру мікроструктури ε, але істотно менше розміру області Ω $(\varepsilon \ll h \ll 1)$. В даному розділі наведено дві теореми збіжності. У першій, доведена збіжність за умови існування щільності локальних енергетичних («мезоскопічних») характеристик рівномірно по $x \in \Omega$. У другій, отримано аналогічний результат, але при більш слабких інтегральних умовах. При доведенні теорем збіжності використовується варіаційний метод «мезоскопічних» характеристик, розроблений Є.Я. Хрусловим. Цей метод засновано на побудові нижньої та верхньої оцінок для розв'язків варіаційної задачі, яка відповідає початковій крайовій задачі.

Теореми збіжності, доведені у другому розділі, мають умови, виконання яких для областей довільного вигляду показати дуже важко. Як приклад сильно зв'язних областей для яких ці умови виконані, у третьому розділі розглядаються області локально-періодичної структури, перфоруюча множина яких складається з окремих зерен, що повільно змінюються залежно від точки розміщення. Для цих областей досліджено умови збіжності та отримано явні формули для ефективних характеристик середовища – тензора провідності й функції поглинання, які є коефіцієнтами усередненого рівняння.

Четвертий розділ присвячено розгляду початково-крайової задачі для рівняння нестаціонарної дифузії зі знесенням часток дифундуючої речовини рідиною в перфорованих сильно зв'язних областях довільного виду з нелінійною крайовою умовою типу Робена на межі перфорації. Операторним методом доведено, що при кожному фіксованому ε існує єдиний розв'язок такої задачі. Вивчена асимптотична поведінка послідовності розв'язків $\{u^\varepsilon(t,x)\}_\varepsilon$ при $\varepsilon \to 0$ та визначені умови збіжності, при яких $u^\varepsilon(x,t)$ збігаються до розв'язку усередненої задачі. При доведенні теореми збіжності використовуємо наступний підхід: для похідної розв'язку за часом та доданку, який описує знесення, одержуємо оцінки, які дозволяють звести параболічну задачу до еліптичної з компактним при майже усіх $t \in (0,T)$ вільним членом. До отриманої еліптичної крайової задачі застосовуємо теореми збіжності, доведені у другому розділі.

П'ятий розділ складає другу частину дисертації й присвячений усередненню задачі Робена в областях з дрібнозернистою межею. Розглядається крайова задача для рівняння стаціонарної дифузії в області $\Omega^\varepsilon = \Omega \setminus \cup_{i=1}^{N^\varepsilon} B_i^\varepsilon$, додаткової великому числу дрібних часток-куль $B_i^\varepsilon\,(i = 1, ..., N^\varepsilon)$, середня відстань між якими має порядок $O(\varepsilon)$, а середній радіус порядок $O(\varepsilon^\alpha)\,(\alpha > 1)$. Для того, щоб гранична поглинаюча здатність такої системи часток не зникала при $\varepsilon \to 0$, вважають, що частки мають сильне поглинання, тобто функція поглинання на їх поверхні має порядок $O(\varepsilon^\beta)\,(\beta = \beta(\alpha))$. Таким чином, задача залежить від двох параметрів: параметра α, що визначає наскільки малими є частки, і параметра β, що характеризує інтенсивність поглинання на їхній поверхні. Областю зміни параметрів α, β є область $\Lambda = \{1 < \alpha < 3,\ 2\alpha + \beta \geqslant 3\} \cup \{\alpha \geqslant 3,\ -\infty < \beta < \infty\}$. Досліджено вплив параметрів α, β на асимптотичну поведінку розв'язків. Зокрема встановлено, що при значенні параметра α більше критичного $(\alpha > 3)$ система часток при $\varepsilon \to 0$ не має загального поглинаючого ефекту незалежно від інтенсивності поглинання на їхній поверхні.

Цей розділ складається з двох глав. У першій, ми припускаємо, що кулі розподілені в області $\Omega \in R^3$ визначеним чином та мають задані радіуси. Вивчено асимптотичну поведінку розв'язків задачі, отримано умови збіжності та визначено вид усередненого рівняння, що описує головний член асимптотики.

При доведені теореми збіжності використовується варіаційний метод «квазірозв'язків», близький до методу «мезоскопічних» характеристик.

У другій главі розглядаються області із дрібнозернистою випадковою межею, у яких центри куль та їх радіуси випадкові і описуються сукупністю кінцевомірних функцій розподілу. При $\forall \varepsilon > 0$ функції розподілу породжують імовірнісну міру P^{ε} в імовірнісному просторі $\mathbb{P}^{\varepsilon}$. Точки ω^{ε} цього простору перебувають у взаємо-однозначній відповідності з випадковими множинами $F(\omega^{\varepsilon}) = \cup_i B_i^{\varepsilon}$ в Ω. Отримано умови на функції розподілу, при яких усі умови збіжності, визначені у першій главі, виконано. При значенні параметра $\alpha > 2$ доведено, що при $\varepsilon \to 0$ розв'язок крайової задачі $u^{\varepsilon}(x) = u(x, \omega^{\varepsilon})$, який є випадковою функцією, що залежить від $\omega^{\varepsilon} \in \mathbb{P}^{\varepsilon}$, збігається по ймовірності до невипадкової функції $u(x)$ – розв'язку усередненої задачі. Отримано явні формули для коефіцієнтів усередненого рівняння, які залежать від значень параметрів α, β. При значеннях параметра $1 < \alpha \leqslant 2$ питання асимптотити розв'язків задачі Робена у областях із випадковою дрібнозернистою межею залишається відкритим.

Усі основні результати наведено з повними доведеннями. Отримані результати мають теоретичний характер та є вкладом в теорію усереднення третьої крайової задачі в сильно перфорованих областях довільного виду.

Ключові слова: Усереднення, перфоровані області, сильно зв'язні області, області із дрібнозернистою межею, стаціонарна дифузія, нестаціонарна дифузія, адсорбція, нелінійна крайова умова Робена, мезоскопічні характеристики, варіаційний метод, енергетичний функціонал, функції розподілу, усереднене рівняння.

ABSTRACT

Khilkova L.O. Homogenized models of diffusion in a porous medium with nonlinear adsorption at the boundary. – Qualification scientific paper, manuscript.

The thesis for a Candidate's degree in Physics and Mathematics: Speciality 01.01.03 – Mathematical Physics. – B.I. Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering, National Academy of Sciences of Ukraine, Kharkiv, 2018.

In the thesis we study the questions of homogenization of boundary-value problems for equations of stationary and non-stationary diffusion in strongly perforated domains $\Omega^\varepsilon = \Omega \setminus F^\varepsilon$ (here $\Omega \subset R^n$ $(n \geqslant 2)$ be a fixed bounded domain in which the process is considered, F^ε be a perforating set) with a non-linear Robin's boundary condition on the boundary of F^ε. The domain Ω^ε depends on the small parameter $\varepsilon > 0$ such that the set F^ε becomes more and more loosened and distributes more densely in the domain Ω as $\varepsilon \to 0$. The small parameter ε defines a perforation scale.

Diffusion processes are considered in the domains Ω^ε of two types: in strongly connected perforated domains and in domains with fine-grained boundary. Thus, the thesis consists of two parts. The first part includes chapters 2-4 and is devoted to homogenizing of Robin's problem in strongly connected domains, the second part includes chapter 5 and considers to homogenizing the same problem in domains with the fine-grained boundaries.

The first type of domains Ω^ε is strongly connected domains. First of all, we emphasize that the notion of strongly connected refer to sequences of domains $\{\Omega^\varepsilon\}_\varepsilon \in \Omega$ and not to a fixed domains. The domains Ω^ε are strongly connected if any sequence of functions $\{u^\varepsilon(x)\}_\varepsilon$, which are uniformly bounded on ε, is compact. Strongly connected domains are a wide class of perforated domains, examples of which can be as domains arbitrarily perforated by separate particles, and domains whose perforating set F^ε is also connected.

The second type of the diffusion domains is domains with the fine-grains boundary. We consider the domains which perforating set consists of small (substantially smaller the scale ε) inclusions-balls arbitrarily or randomly distributed over the domain Ω.

For both types of perforated structures, the theory of homogenization of the third boundary value problem with a non-linear boundary condition is of great

interest and has not yet been constructed. The thesis is devoted to the consideration of this problem.

The main content of the thesis consists of the introduction and five sections divided into subsections.

The introduction substantiates the relevance of the topic of the thesis, formulates the purpose of the study, highlights the scientific novelty and the practical significance of the obtained results, provides a information about the publications, the personal contribution of the applicant and the level of approbation of the work.

In the first section the auxiliary information is given: the strongly connected domains are defined, Sobolev's generalized theorem is represented and a partition of unity with the necessary properties is constructed.

The second section is devoted to the consideration of the boundary value problem for the equation of stationary diffusion in the perforated strongly connected domains $\Omega^\varepsilon \subset R^n$ $(n \geqslant 2)$ with a non-linear adsorption on the boundary of the perforating set F^ε. For each fixed ε we prove the existence of the unique solution $u^\varepsilon(x)$ for this problem. We study the asymptotic behavior and establish conditions of convergence of a sequence of solutions $\{u^\varepsilon(x)\}_\varepsilon$ of the problem, as $\varepsilon \to 0$, to a solution $u(x)$ of a homogenized problem, the type of which is defined. To determine the effective characteristics of the porous medium, which are the coefficients of the homogenized equation, we introduce «mesoscopic» characteristics of the domains Ω^ε. These are local energy characteristics of the microstructure constructed in the «mesocube» K_h^x centered at point $x \in \Omega$ of size h. The prefix «meso» means that the size of the cube is substantially larger than the size of microstructure ε, but is substantially smaller than the size of the domain Ω $(\varepsilon \ll h \ll 1)$. In the section we give two theorem. In the first theorem we prove the convergence In the first theorem, we prove the convergence, provided that densities of local «mesoscopic» characteristics exist uniformly by $x \in \Omega$. In the second, we get a similar result, but with weaker integral conditions. In the proof of the convergence theorems, we use the variational method of the «mesoscopic» characteristics, developed by E.Ya. Khruslov. This method is developed by E.Ya. Khruslov, it is based on the extension of solutions and the construction of upper and lower estimates for variational functionals.

The convergence theorems, proved in the second section, have the conditions that it is very difficult to show for domains of arbitrary form. As an example of the strongly connected domains for which these conditions are fulfilled, in the third section we consider the domains of locally-periodic structure. For these domains, we investigate the conditions of the convergence and obtain explicit formulas for the effective characteristics of the medium that are coefficients of the homogenized equation.

In the fourth section we consider an initial boundary-value problem for a parabolic equation describing non-stationary diffusion in porous media with non-linear absorption on the boundary and the transfer of the diffusing substance by fluid. For each fixed ε by the operator method we prove the existence of the unique solution for this problem. We study the asymptotic behavior of a sequence of solutions $\{u^{\varepsilon}(t,x)\}_{\varepsilon}$ when the scale of microstructure ε tends to zero, define the conditions of convergence and obtain the homogenized model of the diffusion process. In the proof of the convergence theorem, we use the following approach: for the derivative of the solution by time and a drift term we obtain estimates that allow us to reduce the parabolic problem to an elliptic problem with a compact free term for almost all $t \in (0,T)$. We use the convergence theorems, proved in the second section, to the obtained elliptic problem.

The fifth section is the second part of the thesis, it is devoted to the homogenization of Robin's problem in the domains with a fine-grained boundary. We consider the boundary-value problem for the stationary diffusion equation in the domain $\Omega^{\varepsilon} = \Omega \setminus \cup_{i=1}^{N^{\varepsilon}} B_i^{\varepsilon}$, which is additional of fine grain-balls large number $B_i^{\varepsilon}\,(i = 1,...,N^{\varepsilon})$. A mean distance between the nearest centers is $O(\varepsilon)$, and the mean radius is $O(\varepsilon^{\alpha})\,(\alpha > 1)$. In order that the limiting absorption power of such system of particles does not disappear as $\varepsilon \to 0$, we assume that the particles have a strong absorption, that is, the absorption function on their surfaces by the order $O(\varepsilon^{\beta})\,(\beta = \beta(\alpha))$. Thus, the problem depends on two parameters: the parameter α, which determines how small the particles are, and the parameter β, which characterizes the absorption intensity of their surface. The domain of changing the parameters α, β is $\Lambda = \{1 < \alpha < 3,\, 2\alpha + \beta \geqslant 3\} \cup \{\alpha \geqslant 3,\, -\infty < \beta < \infty\}$. We investigate the influence of the parameters α, β on the asymptotic behavior of the solutions. In particular, it was found that, for the parameter α more of a critical value ($\alpha > 3$) system of the particles, as $\varepsilon \to 0$, does not have a general absorbing effect, independent of the absorption intensity on their surface.

This section consists of two subsections. In the first, we assume that the balls are definitely distributed in the fixed domain $\Omega \in R^3$ and have the given radii. We study the asymptotic behavior of the solution of the problem, obtain the convergence conditions and derive the homogenized equation describing the principal term of the asymptotic. In the proof of the convergence theorems, we use the variational method of the «quasi-solutions», which is close to the method of «mesoscopic» characteristics. This method is based on the construct of upper and lower estimates for solutions of the variational problem that corresponds to Robin's problem.

In the second subsection, we consider the domains with a fine-grained boundary. The locations and radii of the inclusions are randomly distributed and described by a set of finite dimensional distribution functions. For $\forall\,\varepsilon > 0$ the distribution functions generate the probability measure P^ε in the probability space $\mathbb{P}^\varepsilon$. The points ω^ε of this space are in one-to-one correspondence with the random sets $F(\omega^\varepsilon) = \cup_i B_i^\varepsilon$ in Ω. We define conditions on the distribution functions, by which all convergence conditions, defined in the first subsection, are fulfilled. For $\alpha > 2$ it is proved that as $\varepsilon \to 0$ the solution $u^\varepsilon(x) = u(x, \omega^\varepsilon)$ of the boundary value problem, which is a random function, depending on $\omega^\varepsilon \in \mathbb{P}^\varepsilon$, converges in probability to a non-random function $u(x)$ be a solution of the homogenized problem. We obtain explicit formulas for the coefficients of the homogenized equation, which depend on the values of the parameters α, β. For values of the parameter $1 < \alpha \leqslant 2$, a question of the asymptotic of solutions to Robin's problem in domains with a random fine-grained boundary remains open.

All basic results are given with complete proofs. Obtained results are of theoretical character and are a contribution to the theory of homogenization of the third boundary value problem in strongly perforated domains.

Key words: Homogenization, perforated domains, strongly connected domains, domains with fine-grains boundary, stationary diffusion, non-stationary diffusion, adsorption, non-linear Robin's boundary condition, variational method, energy functional, distribution functions, homogenized equation.

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА

Наукові праці, в яких опубліковані основні результати дисертації:

1. *Хилькова Л.А.* О гладкой зависимости решения «ячеечной» краевой задачи Неймана от параметров области / Л.А. Хилькова // Доповіді НАНУ. – 2014. – № 4. – С. 32-36.

2. *Гончаренко М.В.* Усреднённая модель диффузии в пористой среде с нелинейным поглощением на границе / М.В. Гончаренко, Л.А. Хилькова // Укр.матем.журн. – 2015. – Т. 67, № 9. – С. 1201–1216.

3. *Гончаренко М.В.* Усредненная модель диффузии в локально периодической пористой среде с нелинейным поглощением на границе / М.В. Гончаренко, Л.А. Хилькова // Доповіді НАНУ. – 2016. – № 6. – С. 15-19.

4. *Хилькова Л.А.* Усреднение уравнения диффузии в областях с мелкозернистой границей с нелинейным граничным условием типа Робена / Л.А. Хилькова. // Вісник ХНУ, Серія «Матем., прикладна матем. і механіка». – 2016. – т. 84. – С. 93-111.

5. *Goncharenko M.* Homogenized Model of Non-Stationary Diffusion in Porous Media with the Drift / M. Goncharenko, L. Khilkova // J. Math. Phys. Anal. Geom. – 2017. – Vol. 13, No. 2. – P. 154-172.

6. *Khruslov E.Ya.* Integral conditions for convergence of solutions of non-linear Robin's problem in strongly perforated domains / E.Ya. Khruslov, L.O. Khilkova, M.V. Goncharenko // J. Math. Phys. Anal. Geom.- 2017.- vol.13, No.3.- P.1-31.

7. *Хруслов Е.Я.* Нелинейная задача Робена в областях с мелкозернистой случайной границей / Е.Я. Хруслов, Л.А. Хилькова // Доповіді НАНУ. – 2017. – № 9. – С. 3-8.

Публікації, які засвідчують апробацію дисертації:

8. *Khilkova L.* Homogenized model of diffusion in porous media with nonlinear absorption at the boundary // II International Conference "Analysis and mathematical physics", Kharkiv, June 16-20, 2014. Book of abstracts. – P. 32-33.

9. *Хількова Л.О.* Усереднена модель дифузії в сильно зв'язному пористому середовищі з нелінійним поглинанням на межі // International Conference of Young Mathematicians, Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, June 3–6, 2015. Book of abstracts. – с. 173.

10. *Khilkova L.* Homogenized conductivity tenzor and absorption function for

a locally periodic porous medium // III International Conference “Analysis and mathematical physics”, Kharkiv, June 15-19, 2015. Book of abstracts. – P. 25-26.

11. *Khilkova L.* Homogenized model of non-stationary diffusion in porous media with the drift // IV International Conference “Analysis and mathematical physics”, Kharkiv, June 13-17, 2016. Book of abstracts. – P. 22.

12. *Khilkova L.* The study of the asymptotic behavior of the third boundary value problem solutions in domains with fine-grained boundaries // 5th International Conference on Differential Equations and Applications dedicated to Ya. B. Lopatynsky, Kyiv, Ukraine, November 9-11, 2016. Book of abstracts. – P. 75-76.

13. *Хількова Л.О.* Інтегральні умови збіжності розв’язку нелінійної задачі Робена в сильно перфорованих областях // International Conference of Young Mathematicians dedicated to the 100th Anniversary of NAS of Ukraine, Professor Yu. O. Mitropolskiy, Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, June 7–10, 2017. Book of abstracts. – c. 104.

14. *Khilkova L.* Homogenization of the diffusion equation in domains with the fine-grained boundary with the nonlinear boundary Robin condition // V International Conference “Analysis and mathematical physics” dedicated to Vladimir A. Marchenko’s 95th birthday and the centennial anniversary of NAS of Ukraine, Kharkiv, June 19-24, 2017. Book of abstracts. – P. 36-37.

15. *Khilkova L.* Robin’s nonlinear problem in domains with a fine-grained random boundary // International Conference Differential Equations, Math.Physics and Applications, Cherkasy, October 17-19, 2017. Book of abstracts. – P. 64-65.

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність теми

Дисертація присвячена питанням усереднення крайової та початково-крайової задач для рівнянь стаціонарної й нестаціонарної дифузії в сильно перфорованих областях з нелінійною крайовою умовою типу Робена.

Теорія усереднення – це напрямок у теорії рівнянь із частинними похідними, який інтенсивно розвивається та знаходить широке застосування у фізиці, хімії, реології та інших областях природознавства. Цей напрямок пов'язаний із вивченням процесів у сильно неоднорідних середовищах, тобто середовищах з великим числом неоднорідних включень або порожнин, типовими прикладами яких є композитні матеріали й пористі середовища. Такі процеси описуються диференціальними рівняннями зі швидко осцилюючими по просторовим змінним коефіцієнтами або розглянутими в сильно перфорованих областях з відповідними крайовими умовами. Безпосереднє розв'язання відповідних крайових або початково-крайових задач практично неможливо ні аналітичними, ні чисельними методами. Проте часто такі середовища мають стійкі макроскопічні характеристики: провідність, поглинання, діелектричну проникність та інші. Природний підхід у цій ситуації полягає в переході до макроскопічних моделей процесів, тобто побудові усереднених рівнянь, коефіцієнти яких є ефективними характеристиками середовища.

Термін «усереднення» вперше з'явився в монографії А. Пуакаре «Нові методи небесної механіки» (1892-1897 рр.) і спочатку зв'язувався з методами нелінійної механіки і звичайних диференціальних рівнянь, розвиненими в працях М.М. Боголюбова, М.М. Крилова, Ю.О. Митропольського [8, 25, 32].

Задачі усереднення для рівнянь у частинних похідних давно привертали увагу фізиків і механіків, але довгий час залишалися поза інтересами математиків. Питання про обчислення ефективних характеристик мікронеоднорідних середовищ ставилося ще в класичних працях Пуассона і Максвелла. У 1964 р. вийшла перша математична робота В.О. Марченка, Є.Я. Хруслова [29] з теорії усереднення диференціальних рівнянь у частинних похідних, що стала початком інтенсивного розвитку математичної теорії усереднення. Це було викликано не тільки численними застосуваннями, у першу чергу у зв'язку зі створенням композитних матеріалів, але й появою нових глибоких ідей, методів і понять, важливих для математики.

Для побудови усереднених рівнянь були розроблені різні методи. Використовуючи методику М.М. Боголюбова, Ю.О. Митропольського [8, 32], М.С. Бахвалов у працях [1, 2] запропонував *метод двомасштабних розвинень* для рівнянь у частинних похідних із сильно осцилюючими періодичними коефіцієнтами. У цьому методі істотно використовується поняття *«компенсована компактність»*, уведене та детально розглянуте у працях F. Murat [109] і L. Tartar [117]. Застосовуючи метод двомасштабних розвинень, J. Lions у [104] побудував повне асимптотичне розкладання для розв'язку рівняння Пуассона в перфорованих періодичних областях з однорідними умовами Діріхле на межі. І.В. Скрипнік у роботі [36] побудував асимптотичне розкладання та отримав усереднену задачу для квазілінійних еліптичних рівнянь другого порядку з неоднорідними умовами Діріхле на межі при таких загальних припущеннях, що охоплювали лінійні дивергентні рівняння з вимірними обмеженими коефіцієнтами. У статті [37] ним була запропонувана методика побудови асимптотичного розкладення для параболічних задач, пов'язана з локальними розглядами не тільки по просторовим, а й по часової координатам.

Для аналізу збіжності розв'язків початкової й усередненої задач у працях E. De Giorgi, S. Spagnolo [80, 116] було введене та досліджене поняття *G-збіжності* операторів. Дотримуючись їх, В.В. Жиков, С.М. Козлов, О.А. Олійник у [15, 16, 18] побудували теорію G-збіжності еліптичних операторів 2-го порядку дивергентного типу та застосували її до усереднення таких операторів зі швидко осцилюючими періодичними коефіцієнтами. Значний внесок у розвиток теорії G-збіжності зробили О.А. Ковалевський [21–23] і О.А. Панков [114]. У зв'язку з вивченням задач варіаційного обчислення E. De Giorgi, T. Franzoni [81] було введене поняття *Γ-збіжності*, що успішно застосовувалося до усереднення варіаційних функціоналів [17]. Усебічному розгляду цього поняття присвячені монографії G. Dal Maso [79] й A. Braides [57].

Для усереднення задач із неперіодичною мікроструктурою Є.Я. Хруслов розробив *метод «мезоскопічних» характеристик*, заснований на побудові нижньої та верхньої оцінок для розв'язків варіаційних задач і близький до методу *Γ-збіжності*. Уперше цей метод застосовано до усереднення крайової задачі Неймана для рівняння Пуассона в статті [45], у якій було введене фундаментальне поняття *сильно зв'язних областей*, що ґрунтувалося на можливості продовження розв'язків. Розвинений в останній праці загальний варіаційний підхід виявився універсальним, численні застосування цього методу для різних класів задач розглядалися в монографії В.О. Марченка, Є.Я. Хруслова [31] і роботах інших авторів [4–6, 11, 40, 51, 55, 64].

У 1989 р. G. Nguetseng запровадив новий для функціонального аналізу тип збіжності – *двомасштабну збіжність* і запропонував метод усереднення періодичних задач, заснований на цьому понятті [110]. Подальший розвиток зазначений метод одержав у працях G. Allaire [52], В.В. Жикова, Г.А. Іосиф'яна [19]. У роботі А.Л. П'ятницького, В.О. Рибалка [113] за допомогою цього методу була отримана усереднена модель для нелінійних еліптичного й параболічного рівнянь зі швидко осцилюючими коефіцієнтами з нелінійними умовами 3-го роду на межі перфорації.

Однією з останніх розробок для усереднення періодичних мікроструктур є *Periodic Unfolding метод*, запропонований D. Cioranescu, A. Damlamian, G. Griso у статті [70], який отримав подальший розвиток у працях [71–74, 78].

На сьогодні існує низка монографій, присвячених математичній теорії усереднення й пов'язаним з нею питанням асимптотичного аналізу, G-збіжності та Г-збіжності функціоналів. Це роботи В.О. Марченка, Є.Я. Хруслова [30, 31], A. Bensoussan, J. Lions, G. Papanicolaou [54], М.С. Бахвалова, Г.П. Панасенка [2], E. Sanchez-Palencia [38], О.А. Олійник, Г.А. Іосиф'яна, О.С. Шамаєва [34], І.В. Скрипніка [36], G. Dal Maso [79], В.В. Жикова, С.М. Козлова, О.А. Олійник [18], U. Hornung [93], D. Cioranescu, J. Saint Jean Paulin [69], О.А. Панкова [114], А.Л. П'ятницького, Г.О. Чечкіна, О.С. Шамаєва [35], L. Tartar [118, 119].

З кінця минулого століття особливу увагу фізиків і математиків привернено до розгляду дифузійних процесів у мікронеоднорідних середовищах з реакцією на межі мікроскопічних часток або порожнин (адсорбцією, якщо мікроскопічні реакції задані монотонними неспадними функціями). Для стаціонарних дифузійних процесів, щільність дифундуючої речовини $u^\varepsilon(x)$ описується крайовою задачею з крайовими умовами типу Робена:

$$\begin{cases} -D\Delta u^\varepsilon = f^\varepsilon(x), \quad x \in \Omega^\varepsilon = \Omega \setminus F^\varepsilon, \\ \dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial \nu} + \varepsilon\sigma(u^\varepsilon) = 0, \quad x \in \partial F^\varepsilon. \end{cases} \tag{0.0.1}$$

Тут Ω – обмежена область у просторі $\mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 2)$, у якій розглядається процес, F^ε – сильно «порізана» множина в Ω, ε – малий параметр, що характеризує масштаб мікроструктури; функція $\sigma(u)$ характеризує поведінку речовини на межі мікроскопічних часток ∂F^ε. Наведемо деякі практично важливі приклади функції поглинання $\sigma(u)$, які використовуються в хімічних технологіях:

1. $\sigma(u) = \frac{\alpha u}{1+\beta u}$, $\quad \alpha,\, \beta > 0$ (кінетика Лангмюра);
2. $\sigma(u) = |u|^{p-1}u$, $\quad 0 < p < 1$ (кінетика Френдліха).

Складна структура області Ω^ε не ускладнює доведення можливості розв'язання задачі (0.0.1): для кожного фіксованого ε при різних припущеннях можна довести існування розв'язку (див. наприклад [59, 66, 86, 105, 106]), однак при малих ε практично неможливо знайти ці розв'язки. Але за допомогою методів теорії усереднення, можна дослідити асимптотичну поведінку послідовності розв'язків $\{u^\varepsilon(x)\}_\varepsilon$ при $\varepsilon \to 0$. При цьому виявляється, що головний член асимптотики $u(x)$ описується усередненим рівнянням реакції-дифузії

$$-\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + c(x,u) = f(x), \tag{0.0.2}$$

що розглядається у всій області Ω та ефективно враховує провідність області Ω^ε і реакцію, або адсорбцію, на межі множини ∂F^ε.

Перші результати з усереднення 3-ої крайової задачі були отримані в 90 роках XX ст. і представлені у працях О.А. Олійник, Т.А. Шапошникової [111], W. Jäger, О.А. Олійник, О.С. Шамаєва [94], D. Cioranescu, P. Donato [66], в яких досліджувалися рівняння стаціонарної дифузії в періодично перфорованих областях з лінійною адсорбцією, а також у статті Л.В. Берлянда, М.В. Гончаренко [6], де вивчалася нестаціонарна дифузія в неперіодичних сильно зв'язних областях з лінійною адсорбцією на межі перфоруючої множини.

У працях U. Hornung, W. Jäger [92, 93] на прикладі лінійної моделі була запропонована стратегія усереднення для деяких хімічних процесів, пов'язаних з дифузією, адсорбцією й хімічними реакціями, що виникають у пористих середовищах. Нелінійні моделі хімічних реакційних потоків за участю дифузії, адсорбції й хімічних реакцій, що відбуваються на межі або всередині періодичної перфорації, розглянуті в роботах J. Diaz [83], C. Conca, J. Diaz, A. Linan, C. Timofte [75–77], B. Calmuschi, C. Timofte [61], C. Timofte [120], C. Timofte, N. Cotfas, G. Pavel [121], G. Allaire, H. Hutridurga [53].

Методом асимптотичних розвинень у статті А.Г. Бєляєва, А.Л. П'ятницького, Г.О. Чечкіна [3] були побудовані головні члени асимптотики, а в працях Т.А. Мельника, О.А. Сівак [107, 108] – повне асимптотичне розкладання для розв'язків лінійних крайових задач для еліптичного [3, 108] і параболічного

[107] диференціального оператора другого порядку зі швидко осцилюючими коефіцієнтами в періодично перфорованих областях з лінійною ([3]) і нелінійною ([107, 108]) третьою крайовою умовою на межі перфорації.

Periodic Unfolding метод, запропонований у [70] для усереднення періодичних мікроструктур, був успішно застосований в роботах D. Cioranescu, P. Donato, R. Zaki [71, 72], B. Cabarrubias, P. Donato [60] при дослідженні асимптотичної поведінки розв'язків нелінійної задачі Робена.

Перфоровані середовища з локально-періодичною мікроструктурою за наявності невеликої дисипації на межі порожнин досліджувалися у статті Г.О. Чечкіна, А.Л. П'ятницького [62]. Відповідний математичний опис включає крайову умову третього роду з малим параметром ε^β, що характеризує дисипацію. Було показано, що ефективні характеристики середовища істотно залежать від значення β. У роботі [63] розглядалося усереднення одного класу нелінійних еліптичних задач із квадратичним зростанням на межі періодично перфорованої області. Автори задають умову Діріхле на зовнішній межі й неоднорідну нелінійну умову Робена з малим параметром ε^2 на межі порожнин.

В останні роки актуальними стали задачі з різними крайовими умовами на окремих ділянках межі. У роботі U. De Maio, T. Durante, Т.А. Мельника [82] вивчалася еліптична крайова задача в області, утвореній об'єднанням деякої області Ω_0 і великої кількості тонких стрижнів двох типів з різними лінійними умовами Робена на бічній поверхні. У роботах Т.А. Мельника, О.А. Сівак крайові задачі для еліптичного [105, 108] і параболічного [106, 107] диференціальних операторів другого порядку зі швидко осцилюючими коефіцієнтами досліджувалися в областях, періодично перфорованих порожнинами декількох типів з різними нелінійними умовами Робена в [105, 106] і Діріхле, Неймана, Робена [107, 108] на поверхні порожнин кожного типу.

Варто підкреслити, що в усіх зазначених працях (крім [6]) розглядалися перфоровані області $\Omega^\varepsilon = \Omega \setminus \cup_i F_i^\varepsilon$, де F_i^ε – дрібні непересічні тіла (частки або каверни), періодично розподілені в Ω з періодом ε, які мають діаметр $d^\varepsilon = O(\varepsilon)$. Така структура області дифузії є модельною, вона вловлює основні характерні риси процесу дифузії в пористому середовищі з поглинанням на межі й часто природно обґрунтована. Проте реальні пористі середовища можуть мати й іншу структуру, наприклад, тверда поглинаюча фракція середовища може бути зв'язною або розподіл окремих перфоруючих часток може бути далеко не періодичним. Для таких структур теорія усереднення третьої крайової задачі з нелінійною крайовою умовою не була побудована. Розв'язанню цієї проблеми присвячена перша частина дисертації (розділи 2-4). Розглядається поглинаюча множина F^ε довільного виду, але така, щоб область дифузії задовольняла умову сильної зв'язності (§1.1). Основний результат полягає в одержанні умов збіжності розв'язку $u^\varepsilon(x)$ задачі (0.0.1) до розв'язку $u(x)$ усередненого рівняння (0.0.2).

В останні роки, у зв'язку з розвитком нанотехнологій, увагу математиків стали привертати задачі усереднення рівняння дифузії в областях «малої» перфорації, тобто областях $\Omega^\varepsilon = \Omega \setminus \cup_i F_i^\varepsilon$, де F_i^ε – розподілені в Ω частки з діаметром порядку $O(\varepsilon^\alpha)$ $(\alpha > 1)$ значно менших відстаней між найближчими частками, що мають порядок $O(\varepsilon)$. Для того щоб гранична поглинаюча здатність такої системи часток не зникала при $\varepsilon \to 0$, вважають, що частки мають сильне поглинання. Характер поведінки глобального реакційного члена при зменшенні діаметра часток може істотно мінятися. Розмір перфорації, при якому відбувається якісна зміна поведінки, називається критичним.

Перший результат усереднення в областях «малої» перфорації був отриманий у праці В.О. Марченка, Є.Я. Хруслова [29], в якій досліджувалася задача Діріхле для рівняння Гельмгольца. Відзначимо, що, починаючи з цієї праці, області, перфоровані частками «малого» або критичного розміру, називають *областями із дрібнозернистою межею.* D. Cioranescu, F. Murat у статтях [67, 68] вивчали задачу Діріхле в періодично перфорованих областях і визначили, що розмір перфорації $\varepsilon^{\frac{n}{n-2}}$, де n – розмірність простору, для такої задачі є критичним. Вони показали, що в усередненому рівнянні з'являється додатковий член нульового порядку, який був названий *«дивним» членом.*

Перші результати дослідження третьої крайової задачі в періодичних областях «малої» перфорації були отримані в роботах S. Kaizu [96] (1989 р.) для напівлінійних крайових умов і М.В. Гончаренко [90] (1997 р.) для нелінійних. У праці [90] розглядалися області в просторі $\mathbb{R}^3$, перфоровані періодично розподіленими малими кулями при різних значеннях параметрів α і β, що визначають розміри куль і силу поглинання на їхній поверхні. Отримано рівняння виду (0.0.2), у якому $a_{ij}(x) = \delta_{ij}$ і виведена формула для визначення ефективного поглинання $c(x, u)$ при $2 < \alpha \leqslant 3$, $\beta = 2\alpha - 3$. Останнім часом питання усереднення третьої крайової задачі в областях з «малою» періодичною перфорацією стало особливо актуальним і досліджувалось багатьма авторами: A. Brillard, M. Lobo, E. Pérez, J. Diaz, D. Gómez-Castro, C. Timofte, W. Jäger, M. Neuss-Radu, М.Н. Зубовою, Т.А. Шапошниковою в працях [58, 84, 85, 89, 95, 112, 122, 123] за різних технічних припущень.

Представляє великий інтерес дослідження таких задач і тоді, коли перфоруюча множина F^{ε} розподіляється в області Ω не періодично, а довільно, у тому числі випадково. Розгляду цього питання присвячена друга частина дисертації (розділ 5).

Зв'язок з науковими програмами, планами, темами

Дослідження, які склали зміст дисертаційної роботи, проведені у відповідності з тематичним планом Фізико-технічного інституту низьких температур ім. Б.І. Вєркіна НАН України з відомчої тематики за темою "Дослідження багатофазних течій сумішей рідин і газів у пористих середовищах та вихрових структур у надплинних рідинах"(керівник: академік НАН України, професор Є.Я. Хруслов, номер державної реєстрації 0110U007897).

Мета і завдання дисертації

Метою роботи є побудова усереднених моделей процесів дифузії в пористих середовищах з поглинанням на межі.

Завдання дослідження:

1. Дослідити асимптотичну поведінку розв'язків крайової задачі для оператора Лапласа з нелінійною крайовою умовою типу Робена в перфорованих сильно зв'язних областях.

2. Побудувати асимптотичне наближення локальних енергетичних характеристик локально-періодичного пористого середовища та вивести явні формули для ефективних характеристик середовища – тензора провідності та функції поглинання.

3. Дослідити асимптотичну поведінку розв'язків початково-крайової задачі для рівняння нестаціонарної дифузії зі знесенням часток дифундуючої речовини рідиною з нелінійною крайовою умовою типу Робена в перфорованих сильно зв'язних областях.

4. Дослідити асимптотичну поведінку розв'язків крайової задачі для оператора Лапласа з нелінійною крайовою умовою типу Робена в перфорованих областях із дрібнозернистою межею при довільному розподілі перфоруючої множини, що складається із часток-куль.

5. Дослідити асимптотичну поведінку розв'язків крайової задачі для оператора Лапласа з нелінійною крайовою умовою типу Робена в перфорованих областях із дрібнозернистою випадковою межею.

Об'єкт дослідження – еліптичні та параболічні крайові задачі для оператора Лапласа в сильно перфорованих областях з нелінійною крайовою умовою типу Робена на межі перфорації.

Предмет дослідження – асимптотична поведінка розв'язків еліптичних і параболічних крайових задач для оператора Лапласа в сильно перфорованих областях з нелінійною крайовою умовою типу Робена на межі за прямування масштабу перфорації $\varepsilon \to 0$.

Методи дослідження

Для розв'язання поставлених задач використовуються результати та методи теорії усереднення диференціальних рівнянь у частинних похідних, асимптотичного й функціонального аналізу. При доведені теорем збіжності застосовуються варіаційні методи: метод «мезоскопічних» характеристик і метод «квазірозв'язків», засновані на продовженні розв'язків і побудові нижньої та верхньої оцінок для варіаційних функціоналів.

Наукова новизна одержаних результатів

Основні результати, які визначають наукову новизну й виносяться на захист:

1. Досліджено асимптотичну поведінку розв'язків крайової задачі для оператора Лапласа в перфорованих сильно зв'язних областях довільного виду з нелінійною крайовою умовою типу Робена на межі перфоруючої множини. Установлено рівномірні та інтегральні умови збіжності, отримано усереднене рівняння, до розв'язку якого збігаються розв'язки початкової задачі.

2. Для областей локально-періодичної структури отримано явні формули для ефективних характеристик середовища – тензора провідності й функції поглинання, які є коефіцієнтами усередненого рівняння.

3. Досліджено асимптотичну поведінку розв'язків початково-крайової задачі для рівняння нестаціонарної дифузії зі знесенням часток дифундуючої речовини рідиною в перфорованих сильно зв'язних областях довільного виду з нелінійною крайовою умовою типу Робена на поверхні перфоруючої множини; отримано усереднене рівняння.

4. Досліджено асимптотичну поведінку розв'язків крайової задачі для оператора Лапласа з нелінійною крайовою умовою типу Робена в областях з дрібнозернистою межею при довільному розподілі перфоруючої множини, що складається із часток-куль. Установлено умови збіжності та виведено усереднене рівняння.

5. Досліджено асимптотичну поведінку розв'язків крайової задачі для опе-

ратора Лапласа з нелінійною крайовою умовою типу Робена в областях з дрібнозернистою випадковою межею. Виведено усереднене рівняння й отримано явні формули для його коефіцієнтів, які виражаються через функцію розподілу центрів і радіусів часток.

Практичне значення одержаних результатів

Результати, отримані в дисертаційній роботі, мають теоретичне спрямування та є внеском у теорію усереднення диференціальних рівнянь з частинними похідними в перфорованих областях. Знайдені усереднені рівняння можуть бути використані при чисельному розв'язку еліптичних крайових задач в локально-перфорованих областях і перфорованих областях з дрібнозернистою межею. Одержані результати можуть бути застосовані в Фізико-технічному інституті низьких температур ім. Б. І. Вєркіна НАН України, Інституті математики НАН України, Інституті прикладної математики та механіки НАН України, Київському національному університеті ім. Тараса Шевченка, Інституті прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача.

Особистий внесок здобувача

Основні дослідження проведені автором самостійно. Науковому керівнику Є.Я. Хруслову належать постановки задач. В спільних роботах [47, 103] Є.Я. Хруслову належать загальні схеми дослідження. Співавтору М.В. Гончаренко в роботі [12] належать Леми 1, 2, в роботі [13] загальна схема доведення, в роботі [91] Лема 1, в роботі [103] Леми 1,6.

Апробація результатів дисертації

Результати дисертаційної роботи доповідались та обговорювались на наступних міжнародних наукових конференціях і семінарах:

1. Науковий семінар відділу диференціальних рівнянь і геометрії Фізико-технічного інституту низьких температур ім. Б.І. Вєркіна НАН України (керівник: академік НАН України, д.ф.-м.н., професор Є.Я. Хруслов), 15 квітня 2015 р., Харків, Україна.

2. Науковий семінар кафедри математичної фізики механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченко «Асимптотичні та аналітичні методи для задач математичної фізики» (керівники: д.ф.-м.н., професор Т.А. Мельник, д.ф.-м.н., професор В.Г. Самойленко), 14 грудня 2017 р., Київ, Україна.

3. Науковий семінар відділу нелінійного аналізу і рівнянь математичної фізики Інституту прикладної математики і механіки НАН України, (керівник:

д.ф.-м.н., І.І. Скрипнік), 22 січня 2018 р., Слов'янськ, Україна.

4. Науковий семінар відділу диференціальних рівнянь і геометрії Фізико-технічного інституту низьких температур ім. Б.І. Вєркіна НАН України (керівник: академік НАН України, д.ф.-м.н., професор Є.Я. Хруслов), 7 лютого 2018 р., Харків, Україна.

5. II International Conference «Analysis and mathematical physics», 16-20 червня 2014 р., Харків, Україна.

6. International Conference of Young Mathematicians, 3-6 червня 2015 р., Київ, Україна.

7. III International Conference «Analysis and mathematical physics», 15-19 червня 2015 р., Харків, Україна.

8. IV International Conference «Analysis and mathematical physics», 13-17 червня 2016 р., Харків, Україна.

9. 5th International Conference on Differential Equations and Applications dedicated to Ya. B. Lopatynsky, 9-11 листопада 2016 р., Київ, Україна.

10. International Conference of Young Mathematicians dedicated to the 100th Anniversary of Academician of National Academy of Sciences of Ukraine, Professor Yu. O. Mitropolskiy, 7-10 червня 2017 р., Київ, Україна.

11. V International Conference «Analysis and mathematical physics» dedicated to Vladimir A. Marchenko's 95th birthday and the centennial anniversary of the National Academy of Sciences of Ukraine, 19-24 червня 2017 р., Харків, Україна.

12. International Conference Differential Equations, Mathematical Physics and Applications, 17-19 жовтня 2017 р., Черкаси, Україна.

Публікації

Основні результати дисертації опубліковані у фахових виданнях у семи статтях [12, 13, 41, 42, 47, 91, 103], а також у тезах, уміщених у матеріалах конференцій [43, 44, 97–102].

Структура дисертації.

Дисертація складається з анотації, вступу, п'яти розділів, розбитих на підрозділи, висновків та списку використаних джерел. Обсяг дисертації становить 154 сторінки. Список використаних джерел містить 123 найменування.

Автор висловлює глибоку подяку науковому керівнику академіку НАН України Євгену Яковичу Хруслову за постійну увагу до роботи, корисні рекомендації та підтримку й співавтору Марії Віталіївні Гончаренко за плідну співпрацю.

РОЗДІЛ 1
ДОПОМІЖНІ ВІДОМОСТІ

1.1 Сильно зв'язні області

Поняття «сильна зв'язність» відноситься не до фіксованої області, а до послідовності областей. Уперше це поняття було введено в роботі [45], пізніше у працях ([51, 64, 65]) використовувався також термін «умова продовження». Детальний розгляд цього поняття наведено в [31, гл. 3], можливість продовження для періодичних структур довільного виду вивчалася в роботі [51].

Нехай Ω – обмежена область у $\mathbb{R}^n\,(n \geqslant 2)$, а Ω^ε – послідовність її підобластей таких, що при $\varepsilon \to 0$ підобласті Ω^ε та їх доповнення $F^\varepsilon = \Omega \setminus \Omega^\varepsilon$ розташовуються асимптотично щільно в Ω, тобто для будь-якої кулі $B \subset \Omega$ при досить малому ε

$$B \cap \Omega^\varepsilon \neq \emptyset, \quad B \cap F^\varepsilon \neq \emptyset,$$

і лебегова міра областей Ω^ε не прямує до нуля, тобто при будь-якому $\varepsilon > 0$

$$mes\{\Omega^\varepsilon \cap B\} \geqslant C_1 mes\{B\} > 0, \tag{1.1.1}$$

де константа C_1 не залежать від ε.

Розглянемо послідовність функцій $\{u^\varepsilon(x) \in H^1(\Omega^\varepsilon)\}_\varepsilon$, що задовольняють умові

$$\|u^\varepsilon\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)} \leqslant C_2, \tag{1.1.2}$$

де константа C_2 не залежить від ε.

Одне з перших питань, що виникає в теорії усереднення крайових задач, – це питання про компактність послідовності $\{u^\varepsilon(x)\}_\varepsilon$, а саме: чи можна з послідовності функцій, що задовольняють умову (1.1.2), виділити підпослідовність $\{u^{\varepsilon_k}(x)\}_k$, що збігається до деякої функції $u(x)$, визначеної в усій області Ω. Збіжність при цьому розуміється в наступному сенсі.

Визначення 1.1. Будемо казати, що послідовність функцій $\{u^\varepsilon(x) \in L^p(\Omega^\varepsilon)\}_\varepsilon$ збігається в $L^p(\Omega^\varepsilon, \Omega)$, якщо існує функція $u(x) \in L^p(\Omega)$ така, що

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|u^\varepsilon - u\|_{L^p(\Omega^\varepsilon)} = 0. \tag{1.1.3}$$

Тепер визначимо поняття «сильна зв'язність» ([31, гл. 3]).

Визначення 1.2. Будемо казати, що послідовність областей $\{\Omega^\varepsilon\}_\varepsilon$ задовольняє умові сильної зв'язності (або коротше області Ω^ε є сильно зв'язними), якщо будь-яка послідовність функцій $\{u^\varepsilon(x)\}_\varepsilon$, що визначена в Ω^ε і задовольняє нерівності (1.1.2), компактна в сенсі збіжності Визначення 1.1.

Умова сильної зв'язності для областей Ω^ε, що задовольняють нерівності (1.1.1), може бути замінена більш «простою» умовою – умовою продовження.

Визначення 1.3. Будемо казати, що послідовність областей $\{\Omega^\varepsilon\}_\varepsilon$ задовольняє умові продовження, якщо для будь-якої функції $u^\varepsilon(x) \in H^1(\Omega^\varepsilon)$ існує функція $\tilde{u}^\varepsilon(x) \in H^1(\Omega)$ така, що $\tilde{u}^\varepsilon(x) = u^\varepsilon(x)$ при $x \in \Omega^\varepsilon$, і справедлива нерівність

$$\|\nabla \tilde{u}^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leqslant C \|\nabla u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}, \tag{1.1.4}$$

де константа C не залежить від ε.

Твердження 1.1. *Нехай послідовність областей* $\{\Omega^\varepsilon\}_\varepsilon$ *задовольняє* (1.1.1), *тоді нерівність* (1.1.4) *еквівалентна нерівності*

$$\|\tilde{u}^\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \leqslant C \|u^\varepsilon\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)} \tag{1.1.5}$$

і області Ω^ε *є сильно зв'язними.*

Доведення твердження наведено в [31, гл. 3]. З твердження 1.1 випливає, що області, які задовольняють умови (1.1.1) та (1.1.4), є сильно зв'язними.

Розглянемо кілька прикладів сильно зв'язних областей.

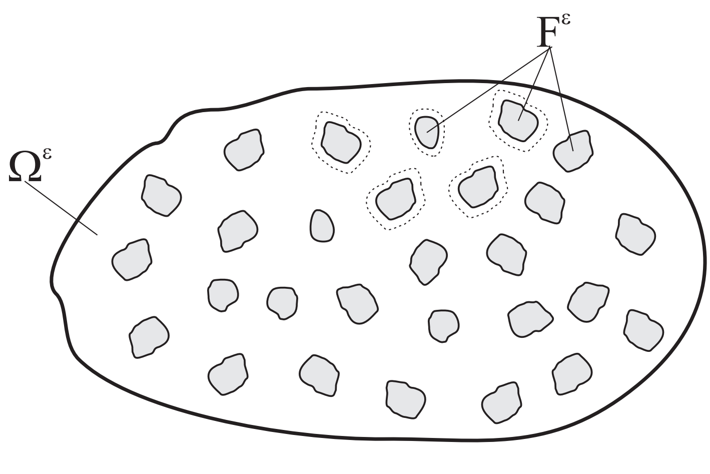


Рисунок 1.1 — Сильно зв'язна область

Приклад 1.1. Нехай множина $F^\varepsilon \in \mathbb{R}^3$ складається з окремих часток F_i^ε ($i = 1, ..., N^\varepsilon = O(\varepsilon^{-3})$), утворених гомотетичним стисненням у ε раз одного з M фіксованих тіл F^j ($j = 1, ..., M$, $M \in \mathbb{N}$) з ліпшицевою межею. Частки F_i^ε розміщуються в області Ω так, що мінімальна відстань ρ_i^ε від i-ої частки до інших часток і до межі області

$$\rho_i^\varepsilon \geqslant \alpha d_i^\varepsilon,$$

де d_i^ε – діаметр частки, а константа α не залежить від ε. Прикладом такої області є область, зображена на рисунку 1.1, виконання умови продовження для цієї області показано в [31].

Наведемо приклад сильно зв'язної області, що має зв'язне доповнення.

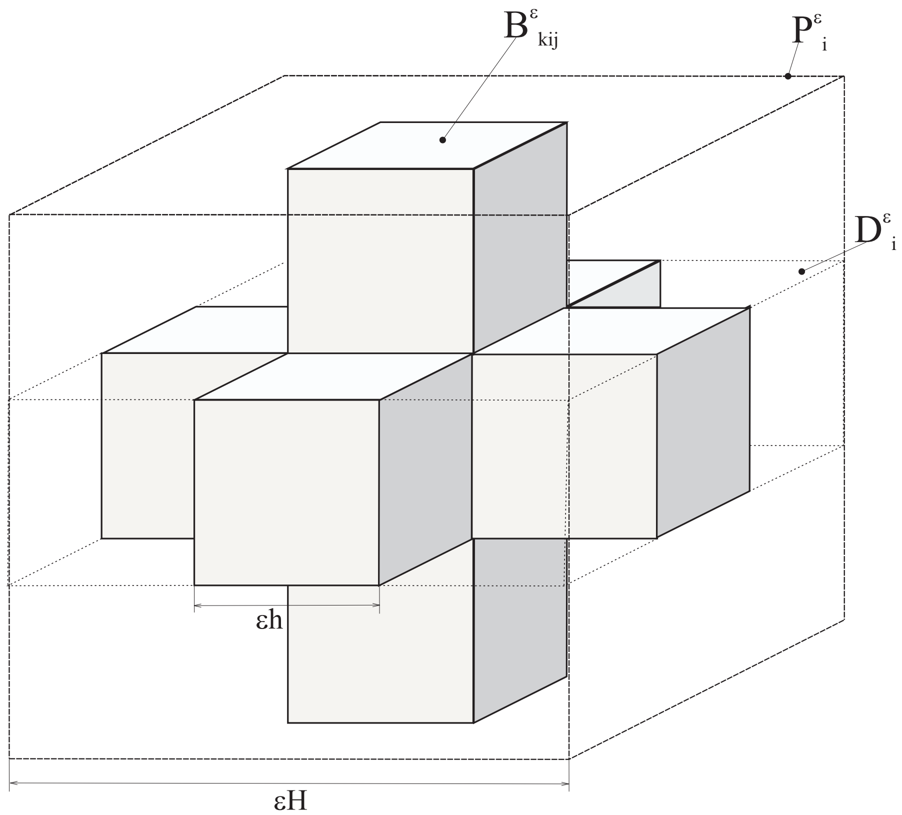


Рисунок 1.2 — Сильно зв'язна область зі зв'язним доповненням

Приклад 1.2. Розглянемо в просторі $\mathbb{R}^3$ нескінченну періодичну систему пересічних брусів B_{kij}^ε ($k = 1, 2, 3;\; i, j = 0, \pm 1, \pm 2, ...$), осі яких утворюють періодичну систему прямих з періодом εH, а основами є квадрати зі стороною εh. Частина цієї системи, розташованої в кубі P_i^ε зі стороною εH, показана на рисунку 1.2.

Позначимо $\Omega^\varepsilon = \cup_{k=1}^{3} \cup_{i,j=0}^{\pm\infty} B_{kij}^{\varepsilon}$. Доповнення $\mathbb{R}^3 \setminus \Omega^\varepsilon$ до області Ω^ε зв'язне і має такий самий вигляд, що й сама область. Виконання умови продовження для областей $\mathbb{R}^3 \setminus \Omega^\varepsilon$ і Ω^ε показано в [31].

1.2 Узагальнена теорема Соболєва

У роботі при оцінці поверхневих інтегралів неодноразово використовується узагальнена теорема Соболєва ([28, стор. 58]), що для зручності наведена в цьому параграфі без доведення.

Нехай Ω – обмежена область простору $\mathbb{R}^n$ із гладкою межею, μ – міра в Ω. Введемо функціональні простори:
$W_p^\ell(\Omega)$ – простір Соболєва, що складається з усіх елементів $L^p(\Omega)$, які мають узагальнені похідні до ℓ-го порядку включно з $L^p(\Omega)$, з нормою

$$\|u\|_{W_p^\ell(\Omega)} = \left(\sum_{k=0}^{\ell} \int\limits_{\Omega} |D^k u|^p \, dx \right)^{1/p};$$

$L^q(\Omega, \mu)$ – простір функцій, вимірних щодо міри μ і сумованих по μ зі ступенем q, з нормою

$$\|u\|_{L^q(\Omega,\mu)} = \left(\int |u|^q \, d\mu \right)^{1/q}.$$

Теорема 1.1 (узагальнена теорема Соболєва). *Нехай Ω – обмежена область простору $\mathbb{R}^n$ із гладкою межею, μ – міра в Ω, що задовольняє умові*

$$m = \sup_{x\in\Omega,\, \rho>0} \rho^{-s} \mu(\Omega \cap B(x,\rho)) < \infty, \tag{1.2.1}$$

де $s > 0$, $B(x,\rho)$ – куля із центром у точці x радіуса ρ.

Тоді для будь-якої функції $u(x) \in C^\infty(\Omega) \cap W_p^\ell(\Omega)$ справедлива оцінка

$$\sum_{j=0}^{k} \|D^j u\|_{L^q(\Omega,\mu)} \leqslant C(m) \|u\|_{W_p^l(\Omega)}, \tag{1.2.2}$$

де $C(m)$ – постійна, що не залежить від функції $u(x)$ (залежить тільки від m), а параметри q, s, p, ℓ задовольняють нерівностям
a) $p > 1$, $0 < n - p(\ell - k) < s \leqslant n$, $q \leqslant sp(n - p(\ell - k))^{-1}$;
b) $p = 1$, $0 < n - \ell + k \leqslant s \leqslant n$, $q \leqslant s(n - \ell + k)^{-1}$;
c) $p > 1$, $n = p(\ell - k)$, $s \leqslant n$, q – будь-яке додатне число.

Зауваження 1.1. У роботі ця теорема застосовується при доведенні вкладення простору $H^1(\Omega) := W_2^1(\Omega)$ у простір $L^q(\Omega, \mu)$ з мірою, що задовольняє нерівності (1.2.1) при $s = n - 1$. Таким чином, $p = 2$, $\ell = 1$, $s = n - 1$. Відповідно до цієї теореми нерівність (1.2.2) при $k = 0$ для $n = 2$ справедлива при будь-якому додатному q, для $n > 2$ при $0 < q \leqslant \frac{2(n-1)}{(n-2)}$.

1.3 Спеціальне розбиття одиниці

Побудуємо «розбиття одиниці» – набір гладких функцій, який будемо використовувати при побудові функцій, що апроксимують розв'язки початкових крайових задач. Побудова системи «розбиття одиниці» неодноразово розглядалася раніше (див. наприклад [14, гл. 2]), але зазвичай не робляться оцінки похідних, які будуть потрібні нам надалі. Тому для зручності приводимо доведення повністю.

Побудуємо покриття простору $\mathbb{R}^n$ пересічними кубами $\{K_h^\alpha = K(x^\alpha, h)\}_\alpha$, із центрами в точках x^α і сторонами $h \ll 1$, орієнтованими по координатних осях, що утворюють періодичну решітку періодом $h - r$, де $r \ll h$ – товщина перекриття (рис. 1.3).

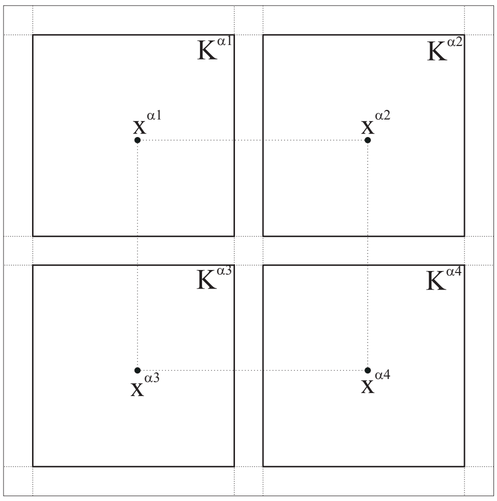


Рисунок 1.3 — Покриття $\mathbb{R}^2$ пересічними кубами

Лема 1.1. *По покриттю $\{K_h^\alpha = K(x^\alpha, h)\}_\alpha$ можна побудувати «розбиття одиниці» $\{\varphi^\alpha(x)\}_\alpha$ – набір гладких функцій, що задовольняють умови:*

1. $\varphi^\alpha(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$;

2. $0 \leqslant \varphi^\alpha(x) \leqslant 1$ *при* $x \in \mathbb{R}^n$*;*

3. $\varphi^\alpha(x) = 1$ *при* $x \in K^\alpha_{h-2r}$*;*

4. $\varphi^\alpha(x) = 0$ *при* $x \notin K^\alpha_h$*;*

5. $|D^\lambda \varphi^\alpha(x)| < \frac{C}{r^\lambda}$, $\lambda = 1, 2$, *де константа* C *не залежить від значень* h, r*;*

6. $\sum\limits_\alpha \varphi^\alpha(x) = 1$ *при* $x \in \mathbb{R}^n$.

Доведення. Розглянемо на дійсній осі $x \in \mathbb{R}$ функцію

$$f(x) := \begin{cases} \exp\left(\dfrac{1}{x^2-1}\right) \text{ при } -1 < x < 1, \\ 0 \text{ при інших } x, \end{cases}$$

функція $f(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$.

Нехай $0 < r \ll \frac{h}{2} \ll \frac{1}{2}$ – дійсні числа. Далі розглянемо функцію, отриману стисненням у $\frac{r}{2}$ раз функції $f(x)$ (рис. 1.4 а):

$$f_r(x) := f\left(\frac{2x}{r}\right),$$

функція $f_r(x)$ також належить простору $C^\infty(\mathbb{R})$. По функції $f_r(x)$ побудуємо функцію $F(x)$ (рис. 1.4 б), визначену рівністю

$$F(x) := \begin{cases} \dfrac{\int_{-\infty}^{x+\frac{h-r}{2}} f_r(t)\,dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} f_r(t)\,dt} \text{ при } x \leqslant 0, \\ \dfrac{\int_{x-\frac{h-r}{2}}^{+\infty} f_r(t)\,dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} f_r(t)\,dt} \text{ при } x > 0. \end{cases}$$

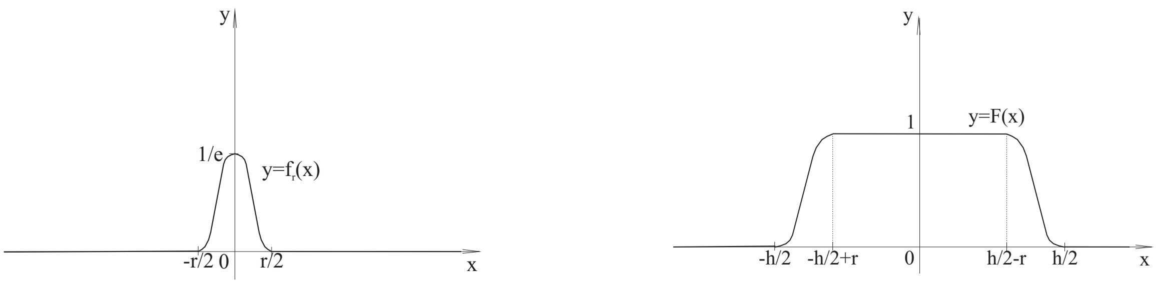
Легко побачити, що $F(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$ і $F(x) = 1$ при $-\frac{h}{2}+r \leqslant x \leqslant \frac{h}{2}-r$, $F(x) = 0$ при $x \leqslant -\frac{h}{2}$ або $x \geqslant \frac{h}{2}$, $F(x)$ зростає від 0 до 1 при $-\frac{h}{2} < x < -\frac{h}{2}+r$ та спадає від 1 до 0 при $\frac{h}{2} - r < x < \frac{h}{2}$.

Оцінимо першу та другу похідні функції $F(x)$:

$$|F'(x)| \leqslant \frac{\max f_r(x)}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_r(t)\,dt} = \frac{\exp(-1)}{\frac{r}{2}\int\limits_{-1}^{+1} f(t)\,dt} = \frac{C_1}{r},$$

$$|F''(x)| = \frac{\max|f_r'(x)|}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_r(t)\,dt} = \frac{\frac{2}{r}\max|f'(x)|}{\frac{r}{2}\int\limits_{-1}^{+1} f(t)\,dt} = \frac{C_2}{r^2},$$

де константи C_1, C_2 не залежать від h, r.



а) функція $f_r(x)$ б) функція $F(x)$

Рисунок 1.4 — Графіки функцій

Покриємо дійсну вісь $\mathbb{R}$ точками $x^{\alpha_i} = i(h-r)$ $(i = -\infty, ..., +\infty)$ і визначимо функції, отримані за допомогою зсуву функції $F(x)$ (рис. 1.5)

$$F^{\alpha_i}(x) := F(x - x^{\alpha_i}).$$

Очевидно, що через властивості функції $F(x)$, функції $F^{\alpha_i}(x)$ мають наступні властивості: $F^{\alpha_i}(x) \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ і $F^{\alpha_i}(x) = 1$ при $x^{\alpha_i} - \frac{h}{2} + r \leqslant x \leqslant x^{\alpha_i} + \frac{h}{2} - r$, $F^{\alpha_i}(x) = 0$ при $x \leqslant x^{\alpha_i} - \frac{h}{2}$ або $x \geqslant x^{\alpha_i} + \frac{h}{2}$, $F^{\alpha_i}(x)$ зростає від 0 до 1 при $x^{\alpha_i} - \frac{h}{2} < x < x^{\alpha_i} - \frac{h}{2} + r$ та спадає від 1 до 0 при $x^{\alpha_i} + \frac{h}{2} - r < x < x^{\alpha_i} + \frac{h}{2}$, їхні похідні задовольняють оцінкам

$$|\,(F^{\alpha_i}(x))'\,| \leqslant \frac{C_1}{r}, \quad |\,(F^{\alpha_i}(x))''\,| \leqslant \frac{C_2}{r^2},$$

де константи C_1, C_2 не залежать від h, r.

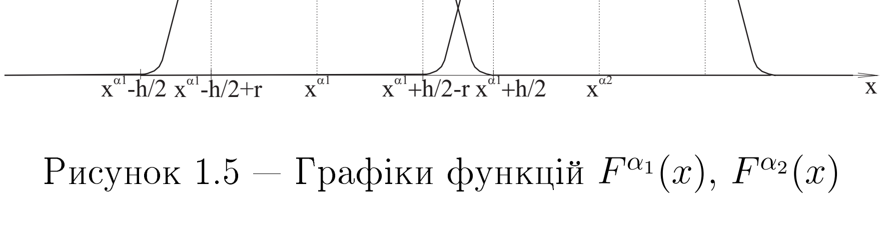


Рисунок 1.5 — Графіки функцій $F^{\alpha_1}(x)$, $F^{\alpha_2}(x)$

Доведемо справедливість рівності

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} F^{\alpha_i}(x) = 1. \tag{1.3.1}$$

Нехай точка $x \in [x^{\alpha_j} - h/2 + r, x^{\alpha_j} + h/2 - r]$, тоді ця рівність очевидна:

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} F^{\alpha_i}(x) = F^{\alpha_j}(x) = 1.$$

Нехай точка $x \in [x^{\alpha_j}+h/2-r, x^{\alpha_j}+h/2] = [x^{\alpha_{j+1}}-h/2, x^{\alpha_{j+1}}-h/2+r]$ належить двом суміжним відрізкам розбиття, тобто лежить у їх перетині, тоді

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} F^{\alpha_i}(x) = F^{\alpha_j}(x) + F^{\alpha_{j+1}}(x) = \frac{\int\limits_{x-\left(x^{\alpha_j}+\frac{h-r}{2}\right)}^{+\infty} f_r(t)dt}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_r(t)\,dt} + \frac{\int\limits_{-\infty}^{x-\left(x^{\alpha_{j+1}}-\frac{h-r}{2}\right)} f_r(t)dt}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_r(t)\,dt} =$$

$$= \frac{\int\limits_{x-\left(x^{\alpha_j}+\frac{h-r}{2}\right)}^{+\infty} f_r(t)dt + \int\limits_{-\infty}^{x-\left(x^{\alpha_j}+\frac{h-r}{2}\right)} f_r(t)dt}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_r(t)\,dt} = 1.$$

Рівність (1.3.1) доведено.

Розглянемо тепер функцію $\varphi^\alpha(x)$ ($\alpha = \{\alpha^1, \alpha^2, ..., \alpha^n\}$ – мультиіндекс), визначену при $x = \{x_1, x_2, ..., x_n\} \in \mathbb{R}^n$ формулою

$$\varphi^\alpha(x) := \prod_{i=1}^{n} F^{\alpha^i}(x_i).$$

Легко побачити, що $\varphi^\alpha(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ і $\varphi^\alpha(x) = 1$ при $x \in K^\alpha_{h-2r}$, $\varphi^\alpha(x) = 0$ при $x \notin K^\alpha_h$, $0 \leqslant \varphi^\alpha(x) \leqslant 1$ при $x \in K^\alpha_h \setminus K^\alpha_{h-2r}$. Окрім того,

$$|D\varphi^\alpha(x)| \leqslant \frac{\tilde{C}_1}{r}, \quad |D^2\varphi^\alpha(x)| \leqslant \frac{\tilde{C}_2}{r^2}, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n.$$

де константи $\tilde{C}_1$, $\tilde{C}_2$ не залежать від h, r. Таким чином, функція $\varphi^\alpha(x)$ задовольняє властивостям 1)-5). Доведемо справедливість властивості 6). Внаслідок (1.3.1) маємо

$$\sum_\alpha \varphi^\alpha(x) = \sum_{i_1=-\infty}^{+\infty} ... \sum_{i_n=-\infty}^{+\infty} \prod_{j=1}^{n} F^{\alpha^j_{i_j}}(x_j) = \sum_{i_1=-\infty}^{+\infty} F^{\alpha^1_{i_1}}(x_1) \left(\sum_{i_2=-\infty}^{+\infty} F^{\alpha^2_{i_2}}(x_2) \times \right.$$

$$\left. \times \left(... \left(\sum_{i_n=-\infty}^{+\infty} F^{\alpha^n_{i_n}}(x_n) \right) \right) \right) = 1.$$

Властивість 6) доведено, система функцій, яку шукали, побудована.

Лема 1.1 доведена. □

РОЗДІЛ 2

УСЕРЕДНЕННЯ РІВНЯННЯ СТАЦІОНАРНОЇ ДИФУЗІЇ В СИЛЬНО ЗВ'ЯЗНИХ ПОРИСТИХ СЕРЕДОВИЩАХ

Другий розділ присвячений дослідженню крайової задачі для рівняння стаціонарної дифузії в сильно зв'язних перфорованих областях $\Omega^\varepsilon = \Omega \setminus F^\varepsilon$, де Ω – обмежена область, а F^ε – замкнута множина типу пористого тіла, поверхня якого має поглинаючу властивість, що описується нелінійною крайовою умовою Робена, ε характеризує масштаб перфорації. Доведено, що при кожному фіксованому ε існує єдиний розв'язок $u^\varepsilon(x)$ крайової задачі. Досліджена асимптотична поведінка $\{u^\varepsilon(x)\}_\varepsilon$ при $\varepsilon \to 0$. Асимптотичний аналіз складається із двох частин. У першій теорема збіжності доводиться за умови існування щільності локальних енергетичних характеристик середовища рівномірно по $x \in \Omega$, у другій – за більш слабких інтегральних умов. Результати цього розділу були опубліковані в роботах [12, 103] і матеріалах міжнародних конференцій [44, 97].

2.1 Постановка задачі

Нехай Ω – обмежена область у $\mathbb{R}^n\,(n \geqslant 2)$, F^ε – замкнута множина в Ω із гладкою межею. Будемо вважати, що області $\Omega^\varepsilon = \Omega \setminus F^\varepsilon$ задовольняють умови (1.1.1), (1.1.4), а тоді внаслідок Твердження 1.1 й умові сильної зв'язності (1.1.5).

В області $\Omega^\varepsilon = \Omega \setminus F^\varepsilon$ розглянемо крайову задачу

$$\begin{cases} -\Delta u^\varepsilon = f^\varepsilon(x), \quad x \in \Omega^\varepsilon, \\ \dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial \nu} + \sigma^\varepsilon(x, u^\varepsilon) = 0, \quad x \in \partial F^\varepsilon, \\ u^\varepsilon = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.1.1}$$

де функції $f^\varepsilon(x) \in L^2(\Omega^\varepsilon)$ та $\sigma^\varepsilon(x,u) \in C(\Omega \times \mathbb{R})$ задані. Припустимо, що при будь-якому ε функція $\sigma^\varepsilon(x,u)$ задовольняє наступні умови:

a_1: $\forall\, u_1, u_2 \in \mathbb{R} :\ (\sigma^\varepsilon(x,u_1) - \sigma^\varepsilon(x,u_2)) \cdot (u_1 - u_2) \geqslant 0;$

a_2: $\sigma^\varepsilon(x,0) = 0;$

a_3: $\forall\, u \in \mathbb{R} \,:\ |\sigma^\varepsilon(x,u)| \leqslant \hat\sigma^\varepsilon(x) \cdot \left(1 + |u|^\Theta\right), \left(\Theta < \frac{n}{n-2}\right)$, де функція $\hat\sigma^\varepsilon(x) \in C(\Omega)$, $\hat\sigma^\varepsilon(x) \geqslant 0$ і задовольняє умові: для будь-якої кулі $B(\rho, z)$ радіуса

$\rho\,(0<\rho<1)$ із центром у точці $z\in\Omega$

$$\int\limits_{\partial F^\varepsilon\cap B(\rho,z)} \hat{\sigma}^\varepsilon(x)d\Gamma < C_1\rho^n + C_2(\varepsilon)\rho^{n-1},$$

де постійні C_1, C_2 не залежать від z,ρ, постійна C_1 не залежить від ε, а $C_2(\varepsilon)\to 0$ при $\varepsilon\to 0$.

Задача (2.1.1) описує процес стаціонарної дифузії в пористому середовищі Ω^ε, де $u^\varepsilon(x)$ – концентрація речовини, що дифундує.

Позначимо

$$H^1(\Omega^\varepsilon,\partial\Omega)=\{u(x)\in H^1(\Omega^\varepsilon):\, u|_{\partial\Omega}=0\}.$$

Визначення 2.1. Узагальненим розв'язком задачі (2.1.1) будемо називати функцію $u^\varepsilon(x)$ із простору $H^1(\Omega^\varepsilon,\partial\Omega)$, що задовольняє тотожності

$$\int\limits_{\Omega^\varepsilon}(\nabla u^\varepsilon,\nabla\varphi)\,dx+\int\limits_{\partial F^\varepsilon}\sigma^\varepsilon(x,u^\varepsilon)\varphi\,d\Gamma=\int\limits_{\Omega^\varepsilon}f^\varepsilon\varphi\,dx,\quad \forall\,\varphi(x)\in H^1(\Omega^\varepsilon,\partial\Omega). \quad (2.1.2)$$

При кожному фіксованому ε існує єдиний узагальнений розв'язок задачі (2.1.1) (Теорема 2.1). Основною метою цього розділу є вивчення асимптотичної поведінки розв'язків задачі (2.1.1) при $\varepsilon\to 0$. У §§2.4, 2.5 ми доведемо, що за певних умов розв'язки $u^\varepsilon(x)$ задачі (2.1.1) в $L^p(\Omega^\varepsilon,\Omega)$ $\left(p<\frac{2n}{n-2}\right)$ прямують до розв'язку $u(x)$ наступної усередненої задачі в області Ω:

$$\begin{cases} -\sum\limits_{i,j=1}^{n}\dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\dfrac{\partial u}{\partial x_j}\right)+\dfrac{1}{2}c_u(x,u)=f(x), \quad x\in\Omega, \\ u(x)=0, \quad x\in\partial\Omega. \end{cases} \quad (2.1.3)$$

Тут $\{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$ – компоненти додатньо визначеного симетричного тензору, що характеризує ефективну провідність пористого середовища, $c_u(x,u)=\frac{\partial}{\partial u}c(x,u)$ і функція $c(x,u)$ характеризує ефективні поглинаючі властивості середовища. Коефіцієнти усередненого рівняння визначаються через локальні енергетичні характеристики областей Ω^ε, розгляду яких присвячено §2.3. Ці характеристики описують властивості середовища в малому околу кожної точки $x\in\Omega$.

Визначення 2.2. Узагальненим розв'язком усередненої задачі (2.1.3) будемо називати функцію $u(x)\in\mathring{H}^1(\Omega)$, що задовольняє тотожності

$$\int\limits_{\Omega}\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}dx+\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}c_u(x,u)\varphi dx=\int\limits_{\Omega}f\varphi dx, \quad \forall\varphi(x)\in\mathring{H}^1(\Omega). \quad (2.1.4)$$

У цьому розділі наведено дві теореми збіжності. У першій доведена збіжність за умови існування щільності локальних енергетичних характеристик рівномірно по $x \in \Omega$. У другій отримано аналогічний результат, але при більш слабких інтегральних умовах. Доведено, що інтегральні умови є достатніми, але дуже правдоподібно, що вони є й необхідними для збіжності $u^\varepsilon(x)$ до $u(x)$.

2.2 Існування та єдиність узагальненого розв'язку задачі (2.1.1)

При кожному фіксованому ε доведемо існування єдиного узагальненого розв'язку задачі (2.1.1). При доведенні будемо використовувати підхід, розвинений у роботі [88].

Теорема 2.1. *При кожному фіксованому ε задача* (2.1.1) *має єдиний узагальнений розв'язок $u^\varepsilon(x) \in H^1(\Omega^\varepsilon, \partial\Omega)$.*

Доведення. Разом із задачею (2.1.1) будемо розглядати енергетичний функціонал

$$\Phi^\varepsilon[u^\varepsilon] = \int\limits_{\Omega^\varepsilon} |\nabla u^\varepsilon|^2\, dx + \int\limits_{\partial F^\varepsilon} g^\varepsilon(x, u^\varepsilon)\, d\Gamma - 2\int\limits_{\Omega^\varepsilon} f^\varepsilon u^\varepsilon\, dx \tag{2.2.1}$$

у класі функцій $u^\varepsilon(x) \in H^1(\Omega^\varepsilon, \partial\Omega)$, де $g^\varepsilon(x, u^\varepsilon)$ визначена формулою (2.3.7).

Згідно з [88, гл. 8] існування функції, що мінімізує функціонал (2.2.1), випливає з його коерцитивності та слабкої напівнеперервності знизу. Мінімізант функціонала (2.2.1) також є узагальненим розв'язком задачі (2.1.1).

Покажемо, що функціонал $\Phi^\varepsilon[\cdot]$ коерцитивний. Унаслідок умови продовження (1.1.4) і нерівності Фрідріхса справедливі нерівності

$$\|u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)} \leqslant \|\tilde{u}^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leqslant C_1 \|\nabla \tilde{u}^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leqslant C_2 \|\nabla u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)},$$

де постійні C_1, C_2 не залежать від ε, тут функція $\tilde{u}^\varepsilon(x)$ – продовження функції $u^\varepsilon(x)$ на всю область Ω. Звідси, користуючись нерівностями Юнга, Коші-Буняковського та $g^\varepsilon(x, u) \geqslant 0$, одержуємо

$$\Phi^\varepsilon[u^\varepsilon] = \int\limits_{\Omega^\varepsilon} |\nabla u^\varepsilon|^2\, dx + \int\limits_{\partial F^\varepsilon} g^\varepsilon(x, u^\varepsilon)\, d\Gamma - 2\int\limits_{\Omega^\varepsilon} f^\varepsilon u^\varepsilon\, dx \geqslant \int\limits_{\Omega^\varepsilon} |\nabla u^\varepsilon|^2\, dx -$$

$$- 2\left|\int\limits_{\Omega^\varepsilon} f^\varepsilon u^\varepsilon\, dx\right| \geqslant \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega^\varepsilon} |\nabla u^\varepsilon|^2\, dx + \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega^\varepsilon} |\nabla u^\varepsilon|^2\, dx - \frac{1}{2\delta}\int\limits_{\Omega^\varepsilon} |u^\varepsilon|^2\, dx -$$

$$-2\delta \int\limits_{\Omega^\varepsilon} |f^\varepsilon|^2\,dx \geqslant \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega^\varepsilon} |\nabla u^\varepsilon|^2\,dx + \left(\frac{1}{2C} - \frac{1}{2\delta}\right)\int\limits_{\Omega^\varepsilon} |u^\varepsilon|^2\,dx - 2\delta\|f^\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)}.$$

Поклавши $\delta = 2C$, $C_1 = min\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4C}\right)$ та $C_2 = 4C\|f^\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)}$, одержуємо, що для будь-якої функції $u \in H^1(\Omega^\varepsilon, \partial\Omega)$ справедлива нерівність

$$\Phi^\varepsilon[u] \geqslant C_1\|u\|^2_{H^1(\Omega^\varepsilon)} - C_2,$$

що означає, що функціонал $\Phi^\varepsilon[\cdot]$ коерцитивний у просторі $H^1(\Omega^\varepsilon, \partial\Omega)$.

Тепер доведемо слабку напівнеперервність знизу функціонала $\Phi^\varepsilon[\cdot]$. Для цього використовуємо підхід, аналогічний розвиненому у роботі [105].

Представимо функціонал $\Phi^\varepsilon[\cdot]$ у вигляді

$$\Phi^\varepsilon[u^\varepsilon] = \int\limits_{\Omega^\varepsilon} L(\nabla u^\varepsilon, u^\varepsilon, x)\,dx,$$

де $L(p, u, x)$ – Лагранжіан функціонала. Для цього скористаємося наступною лемою.

Лема 2.1. *Для будь-якої функції $\varphi \in H^1(\Omega^\varepsilon, \partial\Omega)$ справедлива рівність*

$$\int\limits_{\partial F^\varepsilon} \varphi\,d\Gamma = \int\limits_{\Omega^\varepsilon} (\nabla\psi_0, \nabla\varphi)\,dx - \frac{|\partial F^\varepsilon|}{|\Omega^\varepsilon|}\int\limits_{\Omega^\varepsilon} \varphi\,dx, \tag{2.2.2}$$

де $|\partial F^\varepsilon|$, $|\Omega^\varepsilon|$ – поверхнева й об'ємна міри відповідних множин, а функція $\psi_0(x)$ є розв'язком крайової задачі

$$\begin{cases} -\Delta\psi_0 = \dfrac{|\partial F^\varepsilon|}{|\Omega^\varepsilon|}, \quad x \in R^n \setminus F^\varepsilon, \\ \dfrac{\partial\psi_0}{\partial\nu} = 1, \quad x \in \partial F^\varepsilon, \\ \psi_0(x) \to 0 \quad \text{\textit{при}} \quad |x| \to \infty. \end{cases} \tag{2.2.3}$$

Доведення. Враховуючи гладкість межі ∂F^ε, існування та єдиність розв'язку $\psi_0(x)$ задачі (2.2.3) можна довести стандартним способом методами теорії потенціалів ([39, гл.4]).

Помножимо диференціальне рівняння задачі на довільну функцію $\varphi \in H^1(\Omega^\varepsilon, \partial\Omega)$ та проінтегруємо по області Ω^ε. Використовуючи інтегрування частинами і крайові умови, одержуємо необхідну рівність (2.2.2).

Лема 2.1 доведена. □

Запишемо функціонал $\Phi^\varepsilon[\cdot]$ за допомогою Леми 2.1 у вигляді:

$$\Phi^\varepsilon[u^\varepsilon] = \int\limits_{\Omega^\varepsilon} |\nabla u^\varepsilon|^2\,dx + \int\limits_{\Omega^\varepsilon} (\nabla\psi_0, \nabla_x g^\varepsilon(x, u^\varepsilon))\,dx - \frac{|\partial F^\varepsilon|}{|\Omega^\varepsilon|}\int\limits_{\Omega^\varepsilon} g^\varepsilon(x, u^\varepsilon)\,dx -$$

$$-2\int\limits_{\Omega^\varepsilon} f^\varepsilon u^\varepsilon\,dx = \int\limits_{\Omega^\varepsilon} |\nabla u^\varepsilon|^2\,dx + 2\int\limits_{\Omega^\varepsilon}\int\limits_0^{u^\varepsilon} (\nabla\psi_0, \nabla_x \sigma^\varepsilon(x, s))\,ds\,dx +$$

$$+\int\limits_{\Omega^\varepsilon} (\nabla\psi_0, \nabla u^\varepsilon)\cdot\sigma^\varepsilon(x, u^\varepsilon)\,dx - \frac{|\partial F^\varepsilon|}{|\Omega^\varepsilon|}\int\limits_{\Omega^\varepsilon} g^\varepsilon(x, u^\varepsilon)\,dx - 2\int\limits_{\Omega^\varepsilon} f^\varepsilon u^\varepsilon\,dx =:$$

$$=: \int\limits_{\Omega^\varepsilon} L(\nabla u^\varepsilon, u^\varepsilon, x)\,dx.$$

Позначимо $p = (p_1, ..., p_n) := \nabla u^\varepsilon$, тоді

$$L(p, u, x) = \sum_{i=1}^n p_i^2 + 2\int\limits_0^u (\nabla\psi_0, \nabla_x\sigma^\varepsilon(x, s))\,ds + \sigma^\varepsilon(x, u)\sum_{i=1}^n \frac{\partial\psi_0}{\partial x_i}\cdot p_i -$$

$$-\frac{|\partial F^\varepsilon|}{|\Omega^\varepsilon|} g^\varepsilon(x, u) - 2f^\varepsilon u.$$

Для доведення слабкої напівнеперервності знизу функціонала $\Phi^\varepsilon[\cdot]$ досить довести рівномірну опуклість по змінній p його Лагранжіана. З визначення $L(p, u, x)$ маємо

$$\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 L}{\partial p_i \partial p_j}\eta_i\eta_j = 2\sum_{i=1}^n \eta_i^2 = 2|\eta|^2 \quad \forall\, p, \eta \in \mathbb{R}^n,\ x \in \Omega^\varepsilon,$$

тобто Лагранжіан рівномірно опуклий по змінній p для будь-якого $x \in \Omega^\varepsilon$. Отже, функціонал $\Phi^\varepsilon[\cdot]$ слабко напівнеперервний знизу.

Таким чином, функціонал $\Phi^\varepsilon[\cdot]$ коерцитивний і слабко напівнеперервний знизу, тобто має принаймні один мінімізант ([88, гл. 8]). Отже, задача (2.1.1) має принаймні один узагальний розв'язок. Далі доведемо, що розв'язок єдиний.

Припустимо, що задача (2.1.1) має два узагальнені розв'язки $u_1^\varepsilon(x)$, $u_2^\varepsilon(x)$. Тоді для довільної функції $\varphi \in H^1(\Omega^\varepsilon, \partial\Omega)$ внаслідок (2.1.2) будуть справедливі наступні рівності

$$\int\limits_{\Omega^\varepsilon} (\nabla u_1^\varepsilon, \nabla\varphi)\,dx + \int\limits_{\partial F^\varepsilon} \sigma^\varepsilon(x, u_1^\varepsilon)\varphi\,d\Gamma = \int\limits_{\Omega^\varepsilon} f^\varepsilon\varphi\,dx, \tag{2.2.4}$$

$$\int\limits_{\Omega^\varepsilon} (\nabla u_2^\varepsilon, \nabla\varphi)\, dx + \int\limits_{\partial F^\varepsilon} \sigma^\varepsilon(x, u_2^\varepsilon)\varphi\, d\Gamma = \int\limits_{\Omega^\varepsilon} f^\varepsilon \varphi\, dx. \tag{2.2.5}$$

Віднявши від рівності (2.2.4) рівність (2.2.5) і поклавши $\varphi(x) = u_1^\varepsilon(x) - u_2^\varepsilon(x)$, одержуємо

$$\int\limits_{\Omega^\varepsilon} |\nabla u_1^\varepsilon - \nabla u_2^\varepsilon|^2\, dx + \int\limits_{\partial F^\varepsilon} (\sigma^\varepsilon(x, u_1^\varepsilon) - \sigma^\varepsilon(x, u_2^\varepsilon)) \cdot (u_1^\varepsilon - u_2^\varepsilon)\; d\Gamma = 0.$$

Звідси, унаслідок монотонності функції $\sigma^\varepsilon(x, u)$ (властивість a_1) випливає, що

$$u_1^\varepsilon = u_2^\varepsilon \text{ м.в. в } \Omega^\varepsilon.$$

Таким чином, узагальнений розв'язок крайової задачі (2.1.1) єдиний.

Теорема 2.1 доведена. □

2.3 Мезоскопічні характеристики областей Ω^ε

Для визначення ефективних характеристик середовища (тензора провідності $\{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$ і функції поглинання $c(x, u)$, які є коефіцієнтами усередненого рівняння) уведемо мезоскопічні характеристики областей Ω^ε. Це локальні енергетичні характеристики мікроструктури, розглянуті в «мезокубі» $K_h^z = K(z, h)$ (рисунок 2.1) із центром у точці z і ребрами довжиною h, орієнтованими по координатних осях. Префікс «мезо» означає, що розмір куба істотно більший за розмір мікроструктури ε, але істотно менший за розмір області Ω^ε $(0 < \varepsilon \ll h \ll 1)$.

Кількісну характеристику провідності задамо за допомогою функціонала щодо довільного вектора $\ell \in \mathbb{R}^n$

$$T_{h,z}^\varepsilon(\ell) = \inf_{v^\varepsilon} \int\limits_{K_h^z \cap \Omega^\varepsilon} \left\{ |\nabla v^\varepsilon|^2 + h^{-2-\tau} |v^\varepsilon - (x - z, \ell)|^2 \right\} dx, \tag{2.3.1}$$

де нижня грань береться в класі функцій $v^\varepsilon(x) \in H^1(K_h^z \cap \Omega^\varepsilon)$, $\tau \in (0, 2)$ – параметр штрафу.

Твердження 2.1. *Функціонал $T_{h,z}^\varepsilon(\ell)$ є однорідно квадратичним відносно ℓ і може бути представленим у вигляді*

$$T_{h,z}^\varepsilon(\ell) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(z, \varepsilon, h) \ell_i \ell_j, \tag{2.3.2}$$

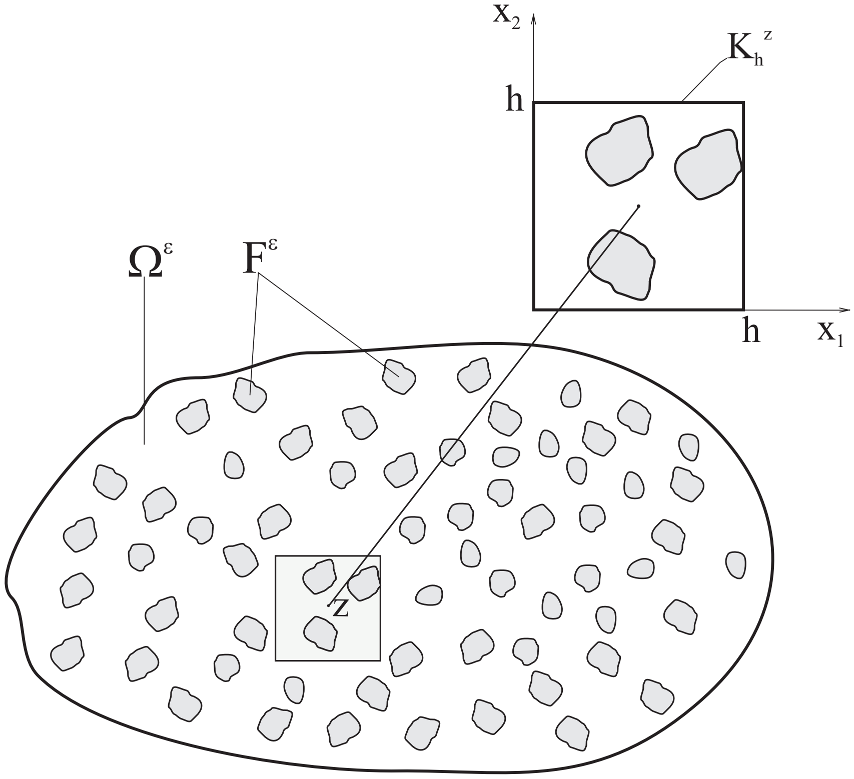


Рисунок 2.1 — Перфорована область Ω^ε і мезокуб K_h^z

де

$$a_{ij}(z,\varepsilon,h) = \\ = \int\limits_{K_h^z\cap\Omega^\varepsilon} \left\{ \left(\nabla v_i^\varepsilon, \nabla v_j^\varepsilon\right) + h^{-2-\tau}[v_i^\varepsilon - (x_i - z_i)][v_j^\varepsilon - (x_j - z_j)] \right\} dx, \qquad (2.3.3)$$

v_i^ε *– мінімізант функціонала* $T_{h,z}^\varepsilon(\ell)$ *при* $\ell = e^i$ *– орту осі* x_i*, що задовольняє оцінці*

$$\max_{x\in K_h^z\cap\Omega^\varepsilon} |v_i^\varepsilon(x)| \leqslant \frac{1}{2}h. \qquad (2.3.4)$$

Доведення. Функція v^ε, на якій досягається нижня грань функціонала в (2.3.1), є розв'язком крайової задачі

$$\begin{cases} -\Delta v^\varepsilon + h^{-2-\tau} v^\varepsilon = h^{-2-\tau}(x - z, \ell), \ x \in (K_h^z \cap \Omega^\varepsilon), \\ \dfrac{\partial v^\varepsilon}{\partial \nu} = 0, \ x \in \partial(K_h^z \cap \Omega^\varepsilon). \end{cases}$$

При будь-якому $\ell \in \mathbb{R}^n$ існує єдиний розв'язок $v^\varepsilon(x)$ цієї задачі. Унаслідок лінійності задачі, $v^\varepsilon(x)$ можна представити у вигляді лінійної комбінації функцій

$v_i^\varepsilon(x)$, що надають мінімум функціоналові $T_{h,z}^\varepsilon(\ell)$ при $\ell = e^i$

$$v^\varepsilon = \sum_{i=1}^{n} v_i^\varepsilon \ell^i. \tag{2.3.5}$$

З (2.3.1) випливає, що функція $v_i^\varepsilon(x)$ задовольняє оцінці (2.3.4).

Підставивши функцію (2.3.5) у функціонал (2.3.1) та перетворивши його, одержуємо

$$T_{h,z}^\varepsilon(\ell) = \sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_{K_h^z \cap \Omega^\varepsilon} \left\{ (\nabla v_i^\varepsilon, \nabla v_j^\varepsilon) + h^{-2-\tau}[v_i^\varepsilon - (x_i - z_i)][v_j^\varepsilon - (x_j - z_j)] \right\} dx\, \ell_i \ell_j.$$

Він однорідно квадратичний відносно ℓ.

Твердження 2.1 доведено. □

Кількісну характеристику поглинання на межі ∂F^ε задамо за допомогою функціонала щодо довільного $s \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} &c(z, s; \varepsilon, h) = \\ &= \inf_{w^\varepsilon} \left[\int\limits_{K_h^z \cap \Omega^\varepsilon} \left\{ |\nabla w^\varepsilon|^2 + h^{-2-\tau} |w^\varepsilon - s|^2 \right\} dx + \int\limits_{K_h^z \cap \partial F^\varepsilon} g^\varepsilon(x, w^\varepsilon) d\Gamma \right], \end{aligned} \tag{2.3.6}$$

де інфінум береться в класі функцій $w^\varepsilon \in H^1(K_h^z \cap \Omega^\varepsilon)$, $\tau \in (0, 2)$ – параметр штрафу, а функція $g^\varepsilon(x, u)$ визначена формулою

$$g^\varepsilon(x, u) := 2 \int\limits_0^u \sigma^\varepsilon(x, s)\, ds. \tag{2.3.7}$$

Справедливо наступне твердження.

Твердження 2.2. *При кожному $s = \hat{s}$ існує єдиний мінімізант w^ε функціонала (2.3.6) в області $K_h^z \cap \Omega^\varepsilon$, і він задовольняє оцінці*

$$|w^\varepsilon(x)| \leqslant |\hat{s}|.$$

Доведення. За допомогою варіаційних методів (див. наприклад доведення Теореми 2.1) можна показати, що існує єдина функція $w^\varepsilon \in H^1(K_h^z \cap \Omega^\varepsilon)$, яка мінімізує функціонал (2.3.6) в області $K_h^z \cap \Omega^\varepsilon$ і є узагальненим розв'язком крайової задачі

$$\begin{cases} -\Delta w^\varepsilon + h^{-2-\tau} w^\varepsilon = h^{-2-\tau}\hat{s}, \ x \in K_h^z \cap \Omega^\varepsilon, \\ \dfrac{\partial w^\varepsilon}{\partial \nu} + \sigma^\varepsilon(x, w^\varepsilon) = 0, \ x \in K_h^z \cap \partial F^\varepsilon, \\ \dfrac{\partial w^\varepsilon}{\partial \nu} = 0, \ x \in \partial K_h^z \cap \Omega^\varepsilon. \end{cases}$$

Доведемо оцінку мінімізанта. Для простоти покладемо $\hat{s} > 0$ і припустимо, що оцінка 1) не виконується. Тоді в області $K_h^z \cap \Omega^\varepsilon$ існує множина E, на якій $w^\varepsilon > \hat{s}$. Побудуємо функцію-зрізку $\hat{w}^\varepsilon$ таку, що $\hat{w}^\varepsilon = \hat{s}$ при $x \in E$ та $\hat{w}^\varepsilon = w^\varepsilon$ при $x \in (K_h^z \cap \Omega^\varepsilon) \setminus E$. Функція $\hat{w}^\varepsilon$ надасть функціоналові (2.3.6) менше значення, ніж функція w^ε, а це суперечить тому, що w^ε – мінімізант цього функціонала.

Твердження 2.2 доведено. □

Визначення 2.3. Мезоскопічними характеристиками областей Ω^ε будемо називати тензор провідності $\{a_{ij}(z, \varepsilon, h)\}_{i,j=1}^n$ – додатньо визначений, симетричний у $\mathbb{R}^n$ тензор, і функцію поглинання $c(z, s; \varepsilon, h)$, задані формулами (2.3.3), (2.3.6).

Дамо нестроге пояснення до цього визначення. Через припущення про сильну зв'язність областей Ω^ε, існують продовження $\tilde{u}^\varepsilon(x)$ на усю область Ω, що мають рівномірно обмежені по ε норми в $H^1(\Omega)$. Не обмежуючи спільності, можна вважати, що функції $\tilde{u}^\varepsilon(x)$ при $\varepsilon \to 0$ збігаються в $L^2(\Omega)$ до деякої досить гладкої функції $u(x)$, яка в малому кубі K_h^z майже лінійна, тобто

$$u(x) = u(z) + (x - z, \nabla u(z)) + O(h^2).$$

Тоді, при досить малих ε для функції $v^\varepsilon(x) = u^\varepsilon(x) - u(z)$ справедлива оцінка

$$\int\limits_{K_h^z \cap \Omega^\varepsilon} |v^\varepsilon - (x - z, \nabla u(z))|^2 \, dx = O(h^{n+4}),$$

і, значить, при будь-якому $\tau < 2$

$$\int\limits_{K_h^z \cap \Omega^\varepsilon} \left\{ |\nabla v^\varepsilon|^2 + h^{-2-\tau} |v^\varepsilon - (x - z, \nabla u(z))|^2 \right\} dx = \int\limits_{K_h^z \cap \Omega^\varepsilon} |\nabla u^\varepsilon|^2 \, dx + o(h^n). \tag{2.3.8}$$

А для функції $w^\varepsilon(x) = u(z)$, маємо

$$\int\limits_{K_h^z \cap \Omega^\varepsilon} \left\{ |\nabla w^\varepsilon|^2 + h^{-2-\tau} |w^\varepsilon - u(z)|^2 \right\} dx + \int\limits_{K_h^z \cap \partial F^\varepsilon} g^\varepsilon(x, w^\varepsilon) d\Gamma = \\ = \int\limits_{K_h^z \cap \partial F^\varepsilon} g^\varepsilon(x, u^\varepsilon) d\Gamma + O(h^{n+1}). \tag{2.3.9}$$

Як відомо, розв'язок $u^\varepsilon(x)$ задачі (2.1.1) мінімізує енергетичний функціонал (2.2.1) у класі функцій $H^1(\Omega^\varepsilon, \partial\Omega)$. Можемо вважати, що функція $u^\varepsilon(x)$ також мінімізує і функціонал

$$\Phi_h^\varepsilon[u^\varepsilon] = \int\limits_{K_h^z \cap \Omega^\varepsilon} |\nabla u^\varepsilon|^2 \, dx + \int\limits_{K_h^z \cap \partial F^\varepsilon} g^\varepsilon(x, u^\varepsilon) \, d\Gamma - 2 \int\limits_{K_h^z \cap \Omega^\varepsilon} f^\varepsilon u^\varepsilon \, dx \tag{2.3.10}$$

у класі функцій $u^\varepsilon(x) \in H^1(K_h^z \cap \Omega^\varepsilon)$, тобто значення функціонала $\Phi_h^\varepsilon[u^\varepsilon]$ є енергією процесів в мезокубі K_h^z. Тоді, зважаючи на оцінки (2.3.8), (2.3.9), для функцій $v^\varepsilon(x) = u^\varepsilon(x) - u(z)$ й $w^\varepsilon(x) = u(z)$ маємо:

$$\Phi_h^\varepsilon[u^\varepsilon] = \int\limits_{K_h^z \cap \Omega^\varepsilon} \left\{ |\nabla v^\varepsilon|^2 + h^{-2-\tau} |v^\varepsilon - (x - z, \nabla u(z))|^2 \right\} dx + \\ + \int\limits_{K_h^z \cap \Omega^\varepsilon} \left\{ |\nabla w^\varepsilon|^2 + h^{-2-\tau} |w^\varepsilon - u(z)|^2 \right\} dx + \int\limits_{K_h^z \cap \partial F^\varepsilon} g^\varepsilon(x, w^\varepsilon) d\Gamma - \\ - 2u(z) \int\limits_{K_h^z \cap \Omega^\varepsilon} f^\varepsilon \, dx + o(h^n).$$

І, значить, функція $v^\varepsilon(x)$ мінімізує функціонал (2.3.1) при $\ell = \nabla u(z)$ і визначає значення $T_{h,z}^\varepsilon(\nabla u(z))$, а функція $w^\varepsilon(x)$ мінімізує функціонал (2.3.6) при $s = u(z)$ і визначає значення $c(z, u(z); \varepsilon, h)$. Таким чином, функціонали $T_{h,z}^\varepsilon(\nabla u(z))$ та $c(z, u(z); \varepsilon, h)$ при обраних мінімізуючих функціях також є локальними енергетичними характеристиками областей Ω^ε, при цьому $T_{h,z}^\varepsilon(\nabla u(z))$ характеризує провідність середовища, а $c(z, u(z); \varepsilon, h)$ – поглинання.

2.4 Рівномірні умови збіжності

2.4.1 Теорема збіжності

Теорема 2.2. *Нехай області Ω^ε є сильно зв'язні й $\exists\tau \in (0, 2)$ при якому рівномірно по $x \in \Omega$ виконуються умови:*

1. $\lim\limits_{h\to 0}\varliminf\limits_{\varepsilon\to 0}\frac{a_{ij}(x,\varepsilon,h)}{h^n} = \lim\limits_{h\to 0}\varlimsup\limits_{\varepsilon\to 0}\frac{a_{ij}(x,\varepsilon,h)}{h^n} = a_{ij}(x)$,
де $a_{ij}(x)$ – кусково-неперервні функції від x та $\{a_{ij}(x)\}_{i,j=1}^n$ – додатньо визначений, симетричний тензор у Ω;

2. $\lim\limits_{h\to 0}\varliminf\limits_{\varepsilon\to 0}\frac{c(x,s;\varepsilon,h)}{h^n} = \lim\limits_{h\to 0}\varlimsup\limits_{\varepsilon\to 0}\frac{c(x,s;\varepsilon,h)}{h^n} = c(x, s),\ \forall s \in \mathbb{R}$,
де функція $c(x, s)$ обмежена по x, диференційована по s та її похідна $c_s(x, s) \equiv \frac{\partial}{\partial s}c(x, s)$ задовольняє умови
$$\forall\, s_1, s_2 \in \mathbb{R} :\ (c_s(x, s_1) - c_s(x, s_2))(s_1 - s_2) \geqslant 0, \tag{2.4.1}$$
$$\forall\, s \in \mathbb{R} :\ c_s(x, s) \leqslant C(1 + |s|^\theta),\ \text{де}\ \theta < \frac{n+2}{n-2}. \tag{2.4.2}$$

3. *Функції $f^\varepsilon(x)$, продовжені нулем на F^ε, збігаються слабко в $L^2(\Omega)$ до функції $f(x)$.*

Тоді послідовність узагальнених розв'язків $\{u^\varepsilon(x)\}_\varepsilon$ задачі (2.1.1) *збігається в $L^p(\Omega^\varepsilon, \Omega)$ $\left(p < \frac{2n}{n-2}\right)$ у сенсі* (1.1.3) *до функції $u(x)$, що є узагальненим розв'язком усередненої задачі* (2.1.3).

Зауваження 2.1. Оскільки мезоскопічні характеристики $a_{ij}(x, \varepsilon, h)$ та $c(x, s; \varepsilon, h)$ залежать від параметра штрафу τ, то граничні функції $a_{ij}(x)$ та $c(x, s)$ формально також повинні залежати від τ. Однак у твердженні Теореми 2.2 говориться, що якщо виконуються умови 1), 2) при деякому $\tau \in (0, 2)$, то розв'язки $u^\varepsilon(x)$ задачі (2.1.1) збігаються до розв'язку $u(x)$ граничної задачі (2.1.3) при будь-якій правій частині $f(x)$. І тоді, $u(x)$ не залежить від τ як границя функцій $u^\varepsilon(x)$, які не залежать від τ.

2.4.2 Допоміжні леми

Доведення Теорем збіжності 2.2, 2.3 проводиться варіаційним методом «мезоскопічних» характеристик, у якому за допомогою функцій, побудованих з використанням мінімізантів функціоналів (2.3.1) та (2.3.6), конструюються апроксимації узагальнених розв'язків $u^\varepsilon(x)$ задачі (2.1.1). Для цього насамперед необхідно довести низку допоміжних лем, що характеризують самі мінімізанти, а також побудовані з їхньою допомогою функції.

Сформулюємо леми, використовувані при доведенні Теореми збіжності 2.2. У цих лемах розглядається «мезокуб» K_h^z із центром у точці z і сторонами довжиною h, паралельними координатним осям, і концентричний з ним куб $K_{h_1}^z$ зі сторонами довжиною $h_1 = h - 2r$ $\left(r = h^{1+\tau/2}\right)$.

Лема 2.2. *Нехай виконується умова 2) Теореми 2.2. Тоді при будь-якому $s = \hat{s}$ послідовність $\{w_h^{z\varepsilon}\}_\varepsilon$ мінімізантів функціонала (2.3.6) і міра множини $B_{h\delta}^{z\varepsilon} = \{x \in K_h^z \cap \Omega^\varepsilon : |w_h^{z\varepsilon} - \hat{s}| \geqslant \delta\}$ задовольняють наступним оцінкам:*

1. $\forall\, \delta > 0 : \varlimsup\limits_{\varepsilon\to 0} mes\{B_{h\delta}^{z\varepsilon}\} < \frac{Ch^{n+2+\tau}}{\delta^2}$;

2. $\varlimsup\limits_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{(K_h^z\setminus K_{h_1}^z)\cap\Omega^\varepsilon} |\nabla w_h^{z\varepsilon}|^2\, dx = o(h^n)$;

3. $\varlimsup\limits_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{(K_h^z\setminus K_{h_1}^z)\cap\Omega^\varepsilon} |w_h^{z\varepsilon} - \hat{s}|^2\, dx = o(h^{n+2+\tau})$;

4. $\varlimsup\limits_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{(K_h^z\setminus K_{h_1}^z)\cap\partial F^\varepsilon} g^\varepsilon(x, w_h^{z\varepsilon})\, d\Gamma = o(h^n)$;

5. $\varlimsup\limits_{\varepsilon\to 0} \left\{ \int\limits_{K_h^z\cap\Omega^\varepsilon} |\nabla w_h^{z\varepsilon}|^2\, dx + \int\limits_{K_h^z\cap\partial F^\varepsilon} g^\varepsilon(x, w_h^{z\varepsilon})\, d\Gamma \right\} \leqslant h^n c(x,\hat{s}) + o(h^n)$.

Доведення. Згідно з (2.3.6) та умовою 2) Теореми 2.2 при досить малих ε $(0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0(h))$ маємо

$$\int\limits_{K_h^z\cap\Omega^\varepsilon} \left\{|\nabla w_h^{z\varepsilon}|^2 + h^{-2-\tau}|w_h^{z\varepsilon} - \hat{s}|^2\right\} dx + \int\limits_{K_h^z\cap\partial F^\varepsilon} g^\varepsilon(x, w_h^{z\varepsilon}) d\Gamma =$$

$$= h^n c(x,\hat{s}) + o(h^n) \leqslant Ch^n.$$

Отже,

$$\int\limits_{K_h^z\cap\Omega^\varepsilon} |\nabla w_h^{z\varepsilon}|^2\,dx + \int\limits_{K_h^z\cap\partial F^\varepsilon} g^\varepsilon(x, w_h^{z\varepsilon})d\Gamma \leqslant h^n c(x,\hat{s}) + o(h^n), \tag{2.4.3}$$

$$\int\limits_{K_h^z\cap\Omega^\varepsilon} |w_h^{z\varepsilon} - \hat{s}|^2\,dx \leqslant Ch^{n+2+\tau}, \tag{2.4.4}$$

крім того, для будь-якого $\delta > 0$

$$mes\{B_{h\delta}^{z\varepsilon}\} < \frac{Ch^{n+2+\tau}}{\delta^2}.$$

Перше твердження леми доведено.

Враховуючи оцінку (2.4.4), при $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0(h)$ одержимо

$$\int\limits_{(K_h^z\setminus K_{h_1}^z)\cap\Omega^\varepsilon} \left\{|\nabla w_h^{z\varepsilon}|^2 + h^{-2-\tau}|w_h^{z\varepsilon} - \hat{s}|^2\right\}dx + \int\limits_{(K_h^z\setminus K_{h_1}^z)\cap\partial F^\varepsilon} g^\varepsilon(x, w_h^{z\varepsilon})d\Gamma =$$

$$= \int\limits_{K_h^z\cap\Omega^\varepsilon} \left\{|\nabla w_h^{z\varepsilon}|^2 + h^{-2-\tau}|w_h^{z\varepsilon} - \hat{s}|^2\right\}dx + \int\limits_{K_h^z\cap\partial F^\varepsilon} g^\varepsilon(x, w_h^{z\varepsilon})d\Gamma -$$

$$- \int\limits_{K_{h_1}^z\cap\Omega^\varepsilon} \left\{|\nabla w_h^{z\varepsilon}|^2 + h_1^{-2-\tau}|w_h^{z\varepsilon} - \hat{s}|^2\right\}dx - \int\limits_{K_{h_1}^z\cap\partial F^\varepsilon} g^\varepsilon(x, w_h^{z\varepsilon})d\Gamma + O(rh^{n-1}).$$

Звідки, відповідно до визначення функціонала $c(x, s; \varepsilon, h)$,

$$\int\limits_{(K_h^z\setminus K_{h_1}^z)\cap\Omega^\varepsilon} \left\{|\nabla w_h^{z\varepsilon}|^2 + h^{-2-\tau}|w_h^{z\varepsilon} - \hat{s}|^2\right\}dx + \int\limits_{(K_h^z\setminus K_{h_1}^z)\cap\partial F^\varepsilon} g^\varepsilon(x, w_h^{z\varepsilon})d\Gamma \leqslant$$

$$\leqslant c(x, s; h, \varepsilon) - c(x, s; h_1, \varepsilon) + O(rh^{n-1}).$$

Тоді, враховуючи, що $r = h^{1+\tau/2} = o(h)$, унаслідок умови 2) Теореми 2.2 одержимо

$$\int\limits_{(K_h^z\setminus K_{h_1}^z)\cap\Omega^\varepsilon} |\nabla w_h^{z\varepsilon}|^2\,dx = o(h^n),\ 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0(h), \tag{2.4.5}$$

$$\int\limits_{(K_h^z\setminus K_{h_1}^z)\cap\Omega^\varepsilon} |w_h^{z\varepsilon} - \hat{s}|^2\,dx = o(h^{n+2+\tau}),\ 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0(h), \tag{2.4.6}$$

$$\int\limits_{(K_h^z\setminus K_{h_1}^z)\cap\partial F^\varepsilon} g^\varepsilon(x, w_h^{z\varepsilon})d\Gamma = o(h^n),\ 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0(h). \tag{2.4.7}$$

Перейшовши до границі при $\varepsilon \to 0$ в (2.4.3), (2.4.5)-(2.4.7), одержимо 2)-5) твердження леми.

Лема 2.2 доведена. $\square$

Лема 2.3. *Нехай виконується умова 2) Теореми 2.2 і функція $w_h^{z\varepsilon}$ мінімізує функціонал (2.3.6) при $s = \hat{s}$ у кубі K_h^z.*

Тоді множина

$$B_h^{z\varepsilon} = \{x \in K_h^z \cap \Omega^\varepsilon : |w_h^{z\varepsilon} - \hat{s}| \geqslant h^{1+\tau/3}\} \tag{2.4.8}$$

і функція

$$\hat{w}_h^{z\varepsilon} = \begin{cases} w_h^{z\varepsilon},\ x \in B_h^{z\varepsilon}, \\ \hat{s} - h^{1+\tau/3},\ \hat{s} \geqslant 0,\ x \in (K_h^z \cap \Omega^\varepsilon) \setminus B_h^{z\varepsilon}, \\ \hat{s} + h^{1+\tau/3},\ \hat{s} \leqslant 0,\ x \in (K_h^z \cap \Omega^\varepsilon) \setminus B_h^{z\varepsilon}. \end{cases} \tag{2.4.9}$$

задовольняють наступним оцінкам

1. $\overline{\lim\limits_{\varepsilon\to 0}}\, mes\, B_h^{z\varepsilon} = o(h^n)$;
2. $\forall\, x \in K_h^z \cap \Omega^\varepsilon : |\hat{w}_h^{z\varepsilon}| \leqslant |\hat{s}|$;
3. $\overline{\lim\limits_{\varepsilon\to 0}} \int\limits_{(K_h^z \setminus K_{h_1}^z)\cap\Omega^\varepsilon} |\nabla \hat{w}_h^{z\varepsilon}|^2\, dx = o(h^n)$;
4. $\overline{\lim\limits_{\varepsilon\to 0}} \int\limits_{(K_h^z \setminus K_{h_1}^z)\cap\Omega^\varepsilon} |\hat{w}_h^{z\varepsilon} - \hat{s}|^2\, dx = o(h^{n+2+\tau})$;
5. $\overline{\lim\limits_{\varepsilon\to 0}} \int\limits_{(K_h^z \setminus K_{h_1}^z)\cap\partial F^\varepsilon} g^\varepsilon(x, \hat{w}_h^{z\varepsilon})\, d\Gamma = o(h^n)$;
6. $\overline{\lim\limits_{\varepsilon\to 0}} \left\{ \int\limits_{K_h^z\cap\Omega^\varepsilon} |\nabla \hat{w}_h^{z\varepsilon}|^2\, dx + \int\limits_{K_h^z\cap\partial F^\varepsilon} g^\varepsilon(x, \hat{w}_h^{z\varepsilon})\, d\Gamma \right\} \leqslant h^n c(x, \hat{s}) + o(h^n)$.

Доведення. Міра множини $B_h^{z\varepsilon}$ через визначення (2.4.8) й оцінку 1) Леми 2.2 задовольняє першому твердженню леми.

Без обмеження спільності, враховуючи, що h мало, будемо вважати, що $\hat{s} \geqslant h^{1+\tau/3} > 0$. Функції $\hat{w}_h^{z\varepsilon}(x)$, $g^\varepsilon(x, \hat{w}_h^{z\varepsilon})$ унаслідок визначень (2.4.9), (2.3.7) і властивостей a_1, a_2 функції $\sigma^\varepsilon(x, u)$ задовольняють нерівностям

$$\begin{aligned} \forall\, x \in K_h^z \cap \Omega^\varepsilon : |\hat{w}_h^{z\varepsilon}(x)| &\leqslant |w_h^{z\varepsilon}(x)|, \\ |\nabla \hat{w}_h^{z\varepsilon}(x)| &\leqslant |\nabla w_h^{z\varepsilon}(x)|, \\ |\hat{w}_h^{z\varepsilon}(x) - \hat{s}| &\leqslant |w_h^{z\varepsilon}(x) - \hat{s}|, \end{aligned}$$

$$\forall\, x \in K_h^z \cap \partial F^\varepsilon:\ 0 \leqslant g^\varepsilon(x, \hat{w}_h^{z\varepsilon}) \leqslant g^\varepsilon(x, w_h^{z\varepsilon}).$$

Із цих нерівностей і тверджень Леми 2.2 слідують оцінки 2)-6) функції $\hat{w}_h^{z\varepsilon}$.

Аналогічно розглядається випадок, коли $\hat{s} < 0$.

Лема 2.3 доведена. □

Лема 2.4. *Нехай в областях Ω^ε виконується умова 1) Теореми 2.2. Тоді послідовність $\{v_{hi}^{z\varepsilon}\}_\varepsilon$ мінімізантів функціонала (2.3.1) в мезокубі K_h^z при $\ell = e^i$ – орту осі x_i $(i = \overline{1,n})$, задовольняє наступним оцінкам:*

1. $\displaystyle\varlimsup_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{(K_h^z \setminus K_{h_1}^z)\cap\Omega^\varepsilon} |\nabla v_{hi}^{z\varepsilon}|^2\,dx = O(h^{n+\tau/2});$
2. $\displaystyle\varlimsup_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{(K_h^z \setminus K_{h_1}^z)\cap\Omega^\varepsilon} |v_{hi}^{z\varepsilon} - (x_i - z_i)|^2\,dx = O(h^{n+2+3\tau/2});$
3. $\displaystyle\varlimsup_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{K_h^z\cap\Omega^\varepsilon} \sum_{i,j=1}^n (\nabla v_{hi}^{z\varepsilon}, \nabla v_{hj}^{z\varepsilon})\ell_i\ell_j\,dx \leqslant h^n \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(z)\ell_i\ell_j + o(h^n).$

Доведення. Нехай $v_{hi}^{z\varepsilon}$ – функція, що мінімізує функціонал (2.3.1) в області $K_h^z \cap \Omega^\varepsilon$ при $\ell = e^i$. Використовуючи визначення функціонала (2.3.1), для області $K_h^z \setminus K_{h_1}^z$ при досить малих $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0(h)$ запишемо

$$\int\limits_{(K_h^z \setminus K_{h_1}^z)\cap\Omega^\varepsilon} \left(|\nabla v_{hi}^{z\varepsilon}|^2 + h^{-2-\tau}|v_{hi}^{z\varepsilon} - (x_i - z_i)|^2\right) \leqslant T_{h,z}^\varepsilon(e^i) - T_{h_1,z}^\varepsilon(e^i) =$$

$$= a_{ii}(z,\varepsilon,h) - a_{ii}(z,\varepsilon,h_1) = O(rh^{n-1}) = O(h^{n+\tau/2}),$$

звідки отримуємо оцінки

$$\int\limits_{(K_h^z \setminus K_{h_1}^z)\cap\Omega^\varepsilon} |\nabla v_{hi}^{z\varepsilon}|^2\,dx = O(h^{n+\tau/2}),\ 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0(h), \tag{2.4.10}$$

$$\int\limits_{(K_h^z \setminus K_{h_1}^z)\cap\Omega^\varepsilon} |v_{hi}^{z\varepsilon} - (x_i - z_i)|^2\,dx = O(h^{n+2+3\tau/2}),\ 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0(h). \tag{2.4.11}$$

Для будь-якого вектора $\ell \in \mathbb{R}^n$ з умови 1) Теореми 2.2 і визначення коефіцієнтів $a_{ij}(z,\varepsilon,h)$ (2.3.3) маємо

$$\int\limits_{K_h^z\cap\Omega^\varepsilon} \sum_{i,j=1}^n (\nabla v_{hi}^{z\varepsilon}, \nabla v_{hj}^{z\varepsilon})\ell_i\ell_j\,dx \leqslant h^n \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(z)\ell_i\ell_j + o(h^n),\ 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0(h). \tag{2.4.12}$$

Оцінки (2.4.11)-(2.4.12) рівномірні по z, що належить будь-якому компакту в Ω. Перейшовши в (2.4.10)-(2.4.12) до границі при $\varepsilon \to 0$, отримуємо твердження леми.

Лема 2.3 доведена. $\square$

Лема 2.5. *Нехай в областях Ω^ε при будь-якому $h > 0$ задані множини B_h^ε такі, що*

$$\varlimsup_{\varepsilon\to 0} mes\, B_h^\varepsilon = o(1),\ h \to 0.$$

Якщо виконується умова 1) Теореми 2.2, тоді існують множини $\hat{B}_h^\varepsilon \subset \Omega^\varepsilon$ і функції $\hat{v}_{hi}^\varepsilon \in H^1(\Omega^\varepsilon)$ $(i = \overline{1,n})$, що задовольняють наступним оцінкам:

1. $B_h^\varepsilon \subset \hat{B}_h^\varepsilon$; $\varlimsup\limits_{\varepsilon\to 0} mes\hat{B}_h^\varepsilon = o(1),\ h \to 0$;

2. $\max\limits_{x\in\Omega^\varepsilon} |\hat{v}_{hi}^\varepsilon - x_i| \leqslant Ch$;

3. $\varlimsup\limits_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\hat{B}_h^\varepsilon} |\nabla \hat{v}_{hi}^\varepsilon|^2\, dx = o(1),\ h \to 0$;

4. *для будь-якої вектор-функції $\ell(x) = (\ell_1(x), ..., \ell_n(x)) \in (C(\overline{\Omega}))^n$*

$$\varlimsup_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\Omega^\varepsilon} \sum_{i,j=1}^n \left(\nabla \hat{v}_{hi}^\varepsilon, \nabla \hat{v}_{hj}^\varepsilon\right) \ell_i(x)\ell_j(x)\, dx \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\ell_i(x)\ell_j(x)\, dx + o(1),\ h \to 0.$$

Доведення. Покриємо область Ω пересічними кубами $K_h^\alpha = K(x^\alpha, h)$, із центрами в точках x^α і сторонами довжиною h, орієнтованими по координатних осях, що утворюють періодичну решітку періодом $h - r$ $(0 < r = h^{1+\tau/2})$. Із цим покриттям зв'яжемо розбиття одиниці $\{\varphi_h^\alpha(x)\}_\alpha$ – набір двічі неперервно диференційовних функцій, що задовольняють умови (Лема 1.1)

$$\begin{gathered} \varphi_h^\alpha(x) = 0, \text{ при } x \notin K_h^\alpha; \varphi_h^\alpha(x) = 1, \text{ при } x \in K_h^\alpha \setminus \bigcup_{\beta\neq\alpha} K_h^\beta; \\ \forall x \in \Omega:\ 0 \leqslant \varphi_h^\alpha(x) \leqslant 1,\ \sum_\alpha \varphi_h^\alpha(x) = 1,\ |D\varphi_h^\alpha(x)| < Cr^{-1}. \end{gathered} \tag{2.4.13}$$

Нехай функції $v_{hi}^{\alpha\varepsilon}$ мінімізують функціонал (2.3.1) при $\ell = e^i$ $(i = \overline{1,n})$ у кубах K_h^α. Розглянемо в області Ω^ε функції

$$v_{hi}^\varepsilon(x) = x_i + \sum_\alpha \left[v_{hi}^{\alpha\varepsilon}(x) - (x_i - x_i^\alpha)\right] \varphi_h^\alpha(x),\ (i = \overline{1,n}), \tag{2.4.14}$$

де покладемо $v_{hi}^{\alpha\varepsilon}(x) = x_i - x_i^\alpha$, якщо куб K_h^α не належить повністю Ω.

Нехай $\ell(x) = \{\ell_1(x), \ell_2(x), ..., \ell_n(x)\}$ – довільна неперервна в $\overline{\Omega}$ вектор-функція. Враховуючи, що

$$\frac{\partial v_{hi}^\varepsilon(x)}{\partial x_j} = \sum_\alpha \frac{\partial v_{hi}^{\alpha\varepsilon}(x)}{\partial x_j}\varphi_h^\alpha(x) + \sum_\alpha [v_{hi}^{\alpha\varepsilon}(x) - (x_i - x_i^\alpha)] \frac{\partial \varphi_h^\alpha(x)}{\partial x_j},$$

з оцінок Леми 2.4 при досить малих $\varepsilon\,(0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0(h))$ та $h \to 0$ отримуємо

$$\int\limits_{\Omega^\varepsilon} \sum_{i,j=1}^n (\nabla v_{hi}^\varepsilon, \nabla v_{hj}^\varepsilon)\ell_i(x)\ell_j(x)\,dx \leqslant \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\ell_i(x)\ell_j(x) + o(1). \qquad (2.4.15)$$

Крім того, відповідно до оцінки (2.3.4) та визначення (2.4.14), маємо

$$\max_{x\in\Omega^\varepsilon} |v_{hi}^\varepsilon - x_i| \leqslant \frac{1}{2}h. \qquad (2.4.16)$$

Покладемо $u_{hi}^\varepsilon = v_{hi}^\varepsilon - x_i$. Тоді з (2.4.15), (2.4.16) випливає, що

$$\max_{x\in\Omega^\varepsilon} |u_{hi}^\varepsilon| \leqslant \frac{1}{2}h \ \text{ і } \ \|u_{hi}^\varepsilon\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)} \leqslant C, \qquad (2.4.17)$$

де C не залежить від ε і h.

Оскільки області Ω^ε задовольняють умові сильної зв'язності (1.1.5), то існує функція $\bar{u}_{hi}^\varepsilon(x) \in H^1(\Omega)$, рівна $u_{hi}^\varepsilon(x)$ при $x \in \Omega^\varepsilon$, яка задовольняє нерівностям (2.4.17).

Далі продовжимо функцію $\bar{u}_{hi}^\varepsilon(x)$ зі збереженням нерівностей (2.4.17) у паралелепіпед $\Pi \supset \Omega$ та апроксимуємо її двічі неперервно диференційованою в Π функцією $\tilde{u}_{hi}^\varepsilon(x)$ такою, що

$$\|\tilde{u}_{hi}^\varepsilon - \bar{u}_{hi}^\varepsilon\|_{H^1(\Pi)} \leqslant \varepsilon,\ \max_{x\in\Pi} |\tilde{u}_{hi}^\varepsilon| \leqslant C_1 h,\ \|\tilde{u}_{hi}^\varepsilon\|_{H^1(\Pi)} \leqslant C_2, \qquad (2.4.18)$$

де C_1, C_2 не залежать від ε і h.

Застосуємо до функції $\tilde{u}_{hi}^\varepsilon(x)$ і множини B_h^ε Лему 1.3 [30, гл. 3]. Відповідно до цієї леми існує функція $\hat{u}_{hi}^\varepsilon(x) \in H^1(\Pi)$ і множина $\hat{B}_h^\varepsilon \subset \Pi$, що задовольняють умови

$$B_h^\varepsilon \subset \hat{B}_h^\varepsilon,\ mes\,\hat{B}_h^\varepsilon \leqslant A m^{|\ln m|^{-1/3}}(m^{|\ln m|^{-2/3}} + |\ln m|^{-1/6}), \qquad (2.4.19)$$

$$\begin{gathered} \hat{u}_{hi}^\varepsilon(x) = \tilde{u}_{hi}^\varepsilon(x),\ x \in \Pi \setminus \hat{B}_h^\varepsilon, \\ \max_{x\in\Pi} |\hat{u}_{hi}^\varepsilon(x)| \leqslant C_1 h,\ \|\hat{u}_{hi}^\varepsilon\|_{H^1(\hat{B}_h^\varepsilon)} \leqslant C_2 A(m^{|\ln m|^{-2/3}} + |\ln m|^{-1/6}), \end{gathered} \qquad (2.4.20)$$

де $m = mes\, B_h^\varepsilon$, $A = \|\tilde{u}_{hi}^\varepsilon\|_{H^1(\Pi)}$, константи C_1, C_2 не залежать від ε.

Вважаючи $\hat{v}_{hi}^\varepsilon = \hat{u}_{hi}^\varepsilon + x_i$ і беручи обмеження множини $\hat{B}_h^\varepsilon \in \Pi$ і функції $\hat{v}_{hi}^\varepsilon(x) \in H^1(\Pi)$ на область Ω^ε (зберігаємо для них позначення), одержуємо множину $\hat{B}_h^\varepsilon \in \Omega^\varepsilon$ і функцію $\hat{v}_{hi}^\varepsilon(x) \in H^1(\Omega^\varepsilon)$, які згідно з (2.4.18)-(2.4.20) задовольняють оцінкам 1)-3) леми.

Перевіримо оцінку 4) леми. Позначимо $\tilde{v}_{hi}^\varepsilon(x) = \tilde{u}_{hi}^\varepsilon(x) + x_i$. Згідно з (2.4.15), (2.4.18), (2.4.20), додатністю підінтегрального виразу та доведеною оценкою 3) леми, для будь-якої вектор-функції $\ell(x) \in (C(\overline{\Omega}))^n$ справедливо

$$\int\limits_{\Omega^\varepsilon} \sum_{i,j=1}^n (\nabla \hat{v}_{hi}^\varepsilon, \nabla \hat{v}_{hj}^\varepsilon)\ell_i(x)\ell_j(x)\,dx = \int\limits_{\Omega^\varepsilon \setminus \hat{B}_h^\varepsilon} \sum_{i,j=1}^n (\nabla \tilde{v}_{hi}^\varepsilon, \nabla \tilde{v}_{hi}^\varepsilon)\ell_i(x)\ell_j(x)\,dx +$$

$$+\int\limits_{\hat{B}_h^\varepsilon} \sum_{i,j=1}^n (\nabla \hat{v}_{hi}^\varepsilon, \nabla \hat{v}_{hi}^\varepsilon)\ell_i(x)\ell_j(x)\,dx \leqslant \int\limits_{\Omega^\varepsilon} \sum_{i,j=1}^n (\nabla \tilde{v}_{hi}^\varepsilon, \nabla \tilde{v}_{hi}^\varepsilon)\ell_i(x)\ell_j(x)\,dx + o(1) =$$

$$= \int\limits_{\Omega^\varepsilon} \sum_{i,j=1}^n (\nabla v_{hi}^\varepsilon, \nabla v_{hi}^\varepsilon)\ell_i(x)\ell_j(x)\,dx + O(\varepsilon^{1/2}) + o(1) \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\ell_i(x)\ell_j(x) + O(\varepsilon^{1/2}) + o(1),\ h \to 0.$$

Переходимо до границі при $\varepsilon \to 0$. Оцінка 4) леми доведена.

Лема 2.4 доведена. □

2.4.3 Доведення Теореми збіжності 2.2

Спочатку намітимо загальну схему доведення для Теорем 2.2, 2.3.

Раніше, при доведенні Теореми 2.1 ми визначили енергетичний функціонал $\Phi^\varepsilon[\cdot]$ (2.2.1) задачі (2.1.1). Узагальнений розв'язок $u^\varepsilon(x)$ задачі (2.1.1) мінімізує цей функціонал у класі функцій $u^\varepsilon(x) \in H^1(\Omega^\varepsilon, \Omega)$.

Визначимо також енергетичний функціонал усередненої задачі (2.1.3)

$$\Phi[u] = \int\limits_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j} dx + \int\limits_{\Omega} c(x,u)\,dx - 2\int\limits_{\Omega} fu\,dx. \tag{2.4.21}$$

Узагальнений розв'язок задачі (2.1.3) мінімізує цей функціонал у класі функцій $u(x) \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$.

Доведення теореми розіб'ємо на кілька кроків.

У пункті 1) ми покажемо, що узагальнені розв'язки $u^\varepsilon(x)$ задачі (2.1.1) можна продовжити на множину F^ε так, що продовжені функції $\tilde{u}^\varepsilon(x)$ будуть рівномірно обмежені по ε у просторі $\mathring{H}^1(\Omega)$, отже, з послідовності $\{\tilde{u}^\varepsilon(x)\}_\varepsilon$ можна виділити слабко збіжну в $\mathring{H}^1(\Omega)$ підпослідовність $\{\varepsilon = \varepsilon_m,\, m = 1, .., \infty\}$, яка внаслідок теорем вкладення збігається сильно в $L^p(\Omega)$ $\left(p < \frac{2n}{n-2}\right)$ до деякої функції $u(x) \in \mathring{H}^1(\Omega)$.

У пунктах 2)-3) ми покажемо, що функція $u(x)$ є мінімізантом функціонала (2.4.21). Це робиться в такий спосіб. У пункті 2) ми вводимо спеціальні тестові функції $w^\varepsilon(x)$, що апроксимують мінімізант функціонала (2.2.1), які будуємо по довільній функції $w(x) \in C_0^2(\Omega)$. Оскільки розв'язок $u^\varepsilon(x)$ задачі (2.1.1) мінімізує функціонал (2.2.1) у $H^1(\Omega^\varepsilon, \partial\Omega)$, то справедлива нерівність

$$\Phi^\varepsilon[u^\varepsilon] \leqslant \Phi^\varepsilon[w^\varepsilon]. \tag{2.4.22}$$

Далі ми показуємо, що при виконанні умов Теореми 2.2

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \Phi^\varepsilon[w^\varepsilon] = \Phi[w], \tag{2.4.23}$$

де $\Phi[\cdot]$ – енергетичний функціонал (2.4.21) усередненої задачі (2.1.3). З (2.4.22), (2.4.23), унаслідок щільності $C_0^2(\Omega)$ у просторі $\mathring{H}^1(\Omega)$, випливає нерівність

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\, \Phi^\varepsilon[u^\varepsilon] \leqslant \Phi[w],\ \forall\, w \in \mathring{H}^1(\Omega). \tag{2.4.24}$$

У пункті 3) ми покажемо, що якщо $\{u^\varepsilon(x)\}_\varepsilon$ збігається слабко в $\mathring{H}^1(\Omega)$ до функції $u(x)$ по деякій підпослідовності $\varepsilon = \varepsilon_m \to 0$, то справедлива зворотна нерівність

$$\underline{\lim}_{\varepsilon=\varepsilon_m\to 0}\ \Phi^\varepsilon[u^\varepsilon] \geqslant \Phi[u]. \tag{2.4.25}$$

З (2.4.24), (2.4.25) випливає, що гранична функція $u(x)$ задовольняє нерівності $\Phi[u] \leqslant \Phi[w]$ для довільної функції $w(x) \in \mathring{H}^1(\Omega)$. Отже, $u(x)$ мінімізує функціонал $\Phi[w]$ у класі $\mathring{H}^1(\Omega)$ і, значить, є узагальненим розв'язком усередненої задачі (2.1.3).

У пункті 4) ми покажемо, що усереднена задача (2.1.3) має єдиний узагальнений розв'язок $u(x)$ і тоді вся послідовність продовжених розв'язків $\{\tilde{u}^\varepsilon(x)\}_\varepsilon$ збігається в $L^p(\Omega)$ до функції $u(x)$. Отже послідовність розв'язків $\{u^\varepsilon(x)\}_\varepsilon$ початкової задачі (2.1.1) збігається в $L^p(\Omega^\varepsilon, \Omega)$ до розв'язку $u(x)$ усередненої задачі (2.1.3).

1. Компактність узагальнених розв'язків задачі (2.1.1)**.** Оскільки $\Phi^\varepsilon[u^\varepsilon] \leqslant \Phi^\varepsilon[0] = 0$, то справедлива нерівність

$$0 \leqslant \int\limits_{\Omega^\varepsilon} |\nabla u^\varepsilon|^2 \, dx + \int\limits_{\partial F^\varepsilon} g^\varepsilon(x, u^\varepsilon) \, d\Gamma \leqslant 2 \int\limits_{\Omega^\varepsilon} f^\varepsilon u^\varepsilon \, dx.$$

Через властивості a_1, a_2 функції $\sigma^\varepsilon(x, u)$ маємо $g^\varepsilon(x, u^\varepsilon) \geqslant 0$.

Застосовуючи нерівність Коші-Буняковського і враховуючи невід'ємність функції $g^\varepsilon(x, u^\varepsilon)$, одержуємо

$$\|\nabla u^\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} \leqslant 2 \|f^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)} \|u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)} . \tag{2.4.26}$$

Внаслідок умови продовження (1.1.4) для областей Ω^ε і нерівності Фрідріхса, існує функція $\tilde{u}^\varepsilon(x) \in \mathring{H}^1(\Omega)$ така, що $\tilde{u}^\varepsilon(x) = u^\varepsilon(x)$ при $x \in \Omega^\varepsilon$ та

$$\|u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)} \leqslant \|\tilde{u}^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leqslant C_1 \|\nabla \tilde{u}^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leqslant C_2 \|\nabla u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)} , \tag{2.4.27}$$

де постійні C_1, C_2 не залежать від ε.

З (2.4.26), (2.4.27) і рівномірної по ε обмеженості норм $\|f^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}$ випливає рівномірна обмеженість по ε і слабка компактність у $\mathring{H}^1(\Omega)$ послідовності функцій $\{\tilde{u}^\varepsilon(x)\}_\varepsilon$. Значить, із цієї послідовності можна виділити підпослідовність $\{\varepsilon = \varepsilon_m, \, m = 1, ..., \infty\}$ слабко збіжну в $\mathring{H}^1(\Omega)$, а внаслідок компактності вкладення $\mathring{H}^1(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ $\left(p < \frac{2n}{n-2}\right)$ сильно в $L^p(\Omega)$, до деякої функції $u(x) \in \mathring{H}^1(\Omega)$. Таким чином, підпослідовність $\{u^{\varepsilon_m}(x)\}_m$ збігається в $L^p(\Omega^\varepsilon, \Omega)$ до функції $u(x) \in \mathring{H}^1(\Omega)$. Покажемо, що функція $u(x)$ мінімізує функціонал (2.4.21).

2. Доведення нерівності (2.4.24)**.** Доведемо спочатку виконання нерівності (2.4.24) для довільної функції $w(x) \in C_0^2(\Omega)$.

Покриємо область Ω пересічними кубами $K_h^\alpha = K(x^\alpha, h)$ із центрами в точках x^α і сторонами h, орієнтованими по координатних осях, що утворюють періодичну решітку періодом $h - r$ $(0 < r = h^{1+\tau/2})$. Із цим покриттям зв'яжемо розбиття одиниці $\{\varphi_h^\alpha(x)\}_\alpha$ – набір двічі неперервно диференційованих функцій, що задовольняють умови (2.4.13).

Нехай $\hat{w}_h^{\alpha\varepsilon}$ і $B_h^{\alpha\varepsilon}$ – функції та множини, побудовані в Лемі 2.3 при $\hat{s} = w(x^\alpha)$, $\hat{v}_{hi}^\varepsilon$ і $\hat{B}_h^\varepsilon$ – функції та множини, побудовані в Лемі 2.5 для $B_h^\varepsilon = \bigcup\limits_\alpha B_h^{\alpha\varepsilon}$. Розглянемо функцію

$$w_h^\varepsilon(x) = w(x) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial w(x)}{\partial x_i} \left[\hat{v}_{hi}^\varepsilon(x) - x_i\right] + \sum_\alpha \left[\hat{w}_h^{\alpha\varepsilon}(x) - w(x^\alpha)\right] \varphi_h^\alpha(x). \tag{2.4.28}$$

При досить малих h функція $w_h^\varepsilon(x) \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega^\varepsilon)$, і оскільки розв'язок задачі (2.1.1) $u^\varepsilon(x)$ мінімізує функціонал $\Phi^\varepsilon[u]$ (2.2.1) у класі $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega^\varepsilon)$, то

$$\Phi^\varepsilon[u^\varepsilon] \leqslant \Phi^\varepsilon[w_h^\varepsilon]. \tag{2.4.29}$$

Оцінимо $\Phi^\varepsilon[w_h^\varepsilon]$ зверху. Продиференціюємо функцію $w_h^\varepsilon(x)$

$$\frac{\partial w_h^\varepsilon}{\partial x_j} = \sum_\alpha \frac{\partial \hat{w}_h^{\alpha\varepsilon}}{\partial x_j}\varphi_h^\alpha(x) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial w}{\partial x_i}\frac{\partial \hat{v}_{hi}^\varepsilon}{\partial x_j} + \sum_{k=1}^2 A_k(x), \tag{2.4.30}$$

де

$$A_1(x) = \sum_\alpha \left[\hat{w}_h^{\alpha\varepsilon}(x) - w(x^\alpha)\right] \frac{\partial \varphi_h^\alpha(x)}{\partial x_j}, \quad A_2(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j}[\hat{v}_{hi}^\varepsilon(x) - x_i].$$

Виділені в (2.4.30) доданки дають кінцевий внесок у функціонал $\Phi^\varepsilon[w_h^\varepsilon]$, внески ж від $A_1(x)$, $A_2(x)$ малі через оцінки, отримані у Лемах 2.3, 2.5.

Дійсно, для першого доданку функціонала $\Phi^\varepsilon[w_h^\varepsilon]$ справедлива оцінка

$$\begin{gathered}\int_{\Omega^\varepsilon} |\nabla w_h^\varepsilon|^2\, dx \leqslant \sum_\alpha \int_{K_h^\alpha \cap \Omega^\varepsilon} |\nabla \hat{w}_h^{\alpha\varepsilon}|^2\, dx + \\ + \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega^\varepsilon} \frac{\partial w}{\partial x_i}\frac{\partial w}{\partial x_j}(\nabla \hat{v}_{hi}^\varepsilon, \nabla \hat{v}_{hj}^\varepsilon)\, dx + \sum_\alpha E^\alpha(\varepsilon, h, r).\end{gathered} \tag{2.4.31}$$

Через $E^\alpha(\varepsilon,h,r)$ позначена сума інтегралів по множинах $(K_h^\alpha \backslash K_{h1}^\alpha) \cap \Omega^\varepsilon$ та $K_h^\alpha \cap B_h^{\alpha\varepsilon}$ від квадратичних і лінійних комбінацій функцій $[\hat{w}_h^{\alpha\varepsilon}(x) - w(x^\alpha)]\,\frac{\partial \varphi_h^\alpha(x)}{\partial x_j}$, $[\hat{v}_{hi}^\varepsilon(x) - x_i]$ з обмеженими коефіцієнтами, які залежать від $w(x)$ у квадратичних доданках і від $\frac{\partial \hat{w}_h^{\alpha\varepsilon}}{\partial x_j}\varphi_h^\alpha$ та $\frac{\partial \hat{v}_{hi}^\varepsilon}{\partial x_j}$ у лінійних. При оцінці $E^\alpha(\varepsilon,h,r)$ скористаємося властивостями функцій $\varphi_h^\alpha(x)$ та оцінками, отриманими в Лемах 2.3, 2.5. У результаті одержуємо

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \sum_\alpha E^\alpha(\varepsilon,h,r) = \sum_\alpha o(h^n). \tag{2.4.32}$$

Оцінимо поверхневий інтеграл у $\Phi^\varepsilon[w_h^\varepsilon]$. Для цього перепишемо $w_h^\varepsilon(x)$ у вигляді

$$w_h^\varepsilon(x) = \sum_\alpha \left[\hat{w}_h^{\alpha\varepsilon}(x) + (w(x) - w(x^\alpha))\right] \varphi_h^\alpha(x) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial w(x)}{\partial x_i}\left[\hat{v}_{hi}^\varepsilon(x) - x_i\right].$$

Внаслідок властивостей $a_1 - a_3$ функції $\sigma^\varepsilon(x,u)$ і визначення функції $g^\varepsilon(x,u)$ (2.3.7), одержуємо

$$\int\limits_{\partial F^\varepsilon} g^\varepsilon(x, w_h^\varepsilon)\, d\Gamma \leqslant \sum_\alpha \int\limits_{K_h^\alpha \cap \partial F^\varepsilon} g^\varepsilon(x, w_h^\varepsilon)\, d\Gamma \leqslant \sum_\alpha \left[\int\limits_{K_h^\alpha \cap \partial F^\varepsilon} g^\varepsilon(x, \hat{w}_h^{\alpha\varepsilon})\, d\Gamma + \right.$$

$$\left. + O(h) \int\limits_{K_h^\alpha \cap \partial F^\varepsilon} \hat{\sigma}^\varepsilon(x)\, d\Gamma \right] = \sum_\alpha \left[\int\limits_{K_h^\alpha \cap \partial F^\varepsilon} g^\varepsilon(x, \hat{w}_h^{\alpha\varepsilon})\, d\Gamma + O(h^{n+1}) + O(h)C(\varepsilon) \right] =$$

$$= \sum_\alpha \int\limits_{K_h^\alpha \cap \partial F^\varepsilon} g^\varepsilon(x, \hat{w}_h^{\alpha\varepsilon})\, d\Gamma + O(h) + C(\varepsilon),$$

де $C(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Таким чином, для другого доданка справедлива оцінка

$$\int\limits_{\partial F^\varepsilon} g^\varepsilon(x, w_h^\varepsilon)\, d\Gamma \leqslant \sum_\alpha \int\limits_{K^\alpha \cap \partial F^\varepsilon} g^\varepsilon(x, \hat{w}_h^{\alpha\varepsilon})\, d\Gamma + O(h) + o(1),\ \varepsilon \to 0. \tag{2.4.33}$$

Для третього доданка через умову 3) Теореми 2.2 і оцінки, отримані у Лемах 2.3, 2.5 справедлива оцінка

$$\int\limits_{\Omega^\varepsilon} f^\varepsilon w_h^\varepsilon\, dx = \int\limits_{\Omega^\varepsilon} f^\varepsilon w\, dx + O(h). \tag{2.4.34}$$

З оцінок (2.4.31)-(2.4.34) одержуємо загальну оцінку функціонала $\Phi^\varepsilon[w_h^\varepsilon]$

$$\Phi^\varepsilon[w_h^\varepsilon] \leqslant \sum_\alpha \left[\int\limits_{K^\alpha \cap \Omega^\varepsilon} |\nabla \hat{w}_h^{\alpha\varepsilon}|^2\, dx + \int\limits_{K^\alpha \cap \partial F^\varepsilon} g^\varepsilon(x, \hat{w}_h^{\alpha\varepsilon})\, d\Gamma + E^\alpha(\varepsilon, h, r) \right] +$$

$$+ \sum_{i,j=1}^n \int\limits_{\Omega^\varepsilon} \frac{\partial w}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_j} (\nabla \hat{v}_{hi}^\varepsilon, \nabla \hat{v}_{hj}^\varepsilon)\, dx - 2 \int\limits_{\Omega^\varepsilon} f^\varepsilon w\, dx + O(h) + o(1),\ \varepsilon \to 0.$$

Переходимо до границі при $\varepsilon \to 0$. Враховуючи умови Теореми 2.2 та оцінки, отримані в Лемах 2.3, 2.5, а також (2.4.32), одержуємо

$$\varlimsup_{\varepsilon \to 0} \Phi^\varepsilon[w_h^\varepsilon] \leqslant \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial w}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_j}\, dx + \sum_\alpha \left[c(x, w(x^\alpha)) h^n + o(h^n) \right] -$$

$$-2 \int\limits_\Omega f(x) w(x)\, dx + O(h).$$

Тепер переходимо до границі при $h \to 0$. Враховуючи, що $\alpha = \overline{1, M}$, де $M = O(h^{-n})$, маємо

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\Phi^\varepsilon[w_h^\varepsilon] \leqslant \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\frac{\partial w}{\partial x_i}\frac{\partial w}{\partial x_j}\,dx - \int\limits_\Omega c(x, w(x))\,dx- \\ - 2\int\limits_\Omega f(x)w(x)\,dx.\end{aligned} \tag{2.4.35}$$

Поєднуючи (2.4.29) та (2.4.35), одержуємо

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\Phi^\varepsilon[u^\varepsilon] \leqslant \lim_{h\to 0}\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\Phi^\varepsilon[w_h^\varepsilon] \leqslant \Phi[w],$$

де $\Phi[w]$ – енергетичний функціонал задачі (2.1.3), визначений формулою (2.4.21). Таким чином, для $\forall\, w(x) \in C_0^2(\Omega)$ виконується нерівність (2.4.24), але через щільность $C_0^2(\Omega)$ у $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$, нерівність (2.4.24) справедлива для $\forall\, w(x) \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$.

3. Доведення нерівності (2.4.25)**.** Розглянемо тепер функцію $u(x)$ – слабку границю в $H^1(\Omega)$ продовжених розв'язків $\tilde{u}^\varepsilon(x)$ задачі (2.1.1) по деякій підпослідовності $\{\varepsilon = \varepsilon_m,\ m = 1, ..., \infty\}$. Як випливає з теорем вкладення сліди $\tilde{u}^{\varepsilon_m}(x)$ та $u(x)$ на $\partial\Omega$ зберігаються та дорівнюють 0. Таким чином, функція $u(x) \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$.

Нехай $u_\delta(x) \in C_0^2(\Omega)$ – двічі неперервно диференційована в Ω функція, яка апроксимує функцію $u(x)$ та така, що

$$\|u_\delta - u\|_{H^1(\Omega)} < \delta. \tag{2.4.36}$$

Розглянемо в областях Ω^ε функції

$$\tilde{u}_\delta^\varepsilon(x) = \tilde{u}^\varepsilon(x) + u_\delta(x) - u(x) \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega),$$

$$u_\delta^\varepsilon(x) = \tilde{u}_\delta^\varepsilon(x)|_{\Omega^\varepsilon} = u^\varepsilon(x) + u_\delta(x) - u(x) \in H^1(\Omega^\varepsilon, \partial\Omega),$$

внаслідок (2.4.36) маємо

$$\|\tilde{u}_\delta^\varepsilon - \tilde{u}^\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} < \delta,\ \|u_\delta^\varepsilon - u^\varepsilon\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)} < \delta, \tag{2.4.37}$$

крім того, при $\varepsilon = \varepsilon_m \to 0$

$$\tilde{u}_\delta^\varepsilon(x) \to u_\delta(x) \text{ в } L^2(\Omega),\ u_\delta^\varepsilon(x) \to u_\delta(x) \text{ в } L^2(\Omega^\varepsilon, \Omega). \tag{2.4.38}$$

Визначимо функції

$$v_\delta^\varepsilon(x) = \tilde{u}_\delta^\varepsilon(x) - u_\delta(x) \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega),$$

оскільки при $\varepsilon = \varepsilon_m \to 0$ функції v_δ^ε збігаються до нуля сильно в $L^2(\Omega)$ і слабко в $H^1(\Omega)$, звідси випливає, що $\|v_\delta^\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \leqslant C$ і функції v_δ^ε збігаються до нуля по мірі, тобто існують множини $G^\varepsilon \subset \Omega$ і числа $\beta(\varepsilon)$ такі, що

$$\forall\, x \in \Omega \setminus G^\varepsilon : \ |v_\delta^\varepsilon(x)| < \beta(\varepsilon), \ \lim_{\varepsilon=\varepsilon_m\to 0} \beta(\varepsilon) = 0,$$

$$\lim_{\varepsilon=\varepsilon_m\to 0} mes\{G^\varepsilon\} = 0.$$

Внаслідок Леми 1.4 [30, розділ 3] по функціях v_δ^ε і множинам G^ε, можна побудувати функції $\hat{v}_\delta^\varepsilon \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ і множини $\hat{G}^\varepsilon \subset \Omega$, такі що $\hat{G}^\varepsilon \supset G^\varepsilon$, $\hat{v}_\delta^\varepsilon = v_\delta^\varepsilon$ при $x \in \Omega \setminus \hat{G}^\varepsilon$,

$$\begin{gathered} \lim_{\varepsilon=\varepsilon_m\to 0} mes\{\hat{G}^\varepsilon\} = 0, \ \max_{\Omega} |\hat{v}_\delta^\varepsilon(x)| \leqslant C \max_{\Omega\setminus G^\varepsilon} |v_\delta^\varepsilon(x)| < C\beta(\varepsilon), \\ \lim_{\varepsilon=\varepsilon_m\to 0} \|\hat{v}_\delta^\varepsilon\|_{H^1(\hat{G}^\varepsilon)} = 0. \end{gathered} \tag{2.4.39}$$

За допомогою цих функцій визначимо функції

$$\hat{u}_\delta^\varepsilon(x) = u_\delta(x) + \hat{v}_\delta^\varepsilon(x) \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega). \tag{2.4.40}$$

Розіб'ємо простір R^n на непересічні (у внутрішніх точках) куби $K_h^\alpha = K(x^\alpha, h)$ із центрами в точках x^α та сторонами довжиною h, орієнтованими по координатних осях. Будемо розглядати ті куби K_h^α $(\alpha = \overline{1, N}, N = O(h^n))$, які повністю лежать в області Ω, і на перетині кожного з них з областю Ω^ε розглянемо функцію

$$w_{\delta 1}^{\varepsilon\alpha}(x) = \hat{u}_\delta^\varepsilon(x) - u_\delta(x^\alpha). \tag{2.4.41}$$

Враховуючи, що $u_\delta(x) \in C_0^2(\Omega)$ та (2.4.41), для будь-якого вектора $\ell \in R^n$ і для будь-якого фіксованого числа $\delta > 0$ маємо

$$\int\limits_{K_h^\alpha \cap \Omega^\varepsilon} |w_{\delta 1}^{\varepsilon\alpha}(x) - (x - x^\alpha, \ell)|^2 \, dx \leqslant 3 \int\limits_{K_h^\alpha \cap \Omega^\varepsilon} |\hat{u}_\delta^\varepsilon(x) - u_\delta(x)|^2 \, dx +$$

$$+ 3 \int\limits_{K_h^\alpha \cap \Omega^\varepsilon} \left[(\nabla u_\delta(x^\alpha), x - x^\alpha) - (x - x^\alpha, \ell)\right]^2 \, dx + O(h^{n+4}).$$

Покладемо $\ell = \ell^\alpha = \nabla u_\delta(x^\alpha)$, тоді, враховуючи (2.4.39), (2.4.40), одержуємо

$$\lim_{\varepsilon=\varepsilon_m\to 0} \int\limits_{K_h^\alpha \cap \Omega^\varepsilon} |w_{\delta 1}^{\varepsilon\alpha}(x) - (x - x^\alpha, \ell^\alpha)|^2 \, dx = O(h^{n+4}). \tag{2.4.42}$$

Згідно з визначенням функціонала $T^{\varepsilon}_{h,z}(\ell)$ (2.3.1) та його представленням (2.3.2), при $\ell = \ell^{\alpha} = \nabla u^{\delta}(x^{\alpha})$ маємо

$$\int\limits_{K_h^{\alpha}\cap\Omega^{\varepsilon}} |\nabla w^{\varepsilon\alpha}_{\delta 1}(x)|^2 + h^{-2-\tau}|w^{\varepsilon\alpha}_{1\delta}(x) - (x - x^{\alpha}, \ell^{\alpha})|^2\,dx \geqslant \\ \geqslant \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x^{\alpha},\varepsilon,h)\frac{\partial u_{\delta}}{\partial x_i}(x^{\alpha})\frac{\partial u_{\delta}}{\partial x_j}(x^{\alpha}). \tag{2.4.43}$$

З (2.4.39), (2.4.42), (2.4.43), враховуючи, що $u^{\varepsilon}_{\delta}(x) = \hat{u}^{\varepsilon}_{\delta}(x)$ при $x \in \Omega^{\varepsilon}\setminus G^{\varepsilon}$, $\nabla w^{\varepsilon\alpha}_{\delta 1}(x) = \nabla\hat{u}^{\varepsilon}_{\delta}(x)$ при $x\in\Omega^{\varepsilon}$, при $\varepsilon = \varepsilon_m \to 0$, одержуємо

$$\int\limits_{\Omega^{\varepsilon}\setminus G^{\varepsilon}} |\nabla u^{\varepsilon}_{\delta}(x)|^2\,dx \geqslant \sum_{\alpha}\int\limits_{K_h^{\alpha}\cap\Omega^{\varepsilon}\setminus G^{\varepsilon}} |\nabla u^{\varepsilon}_{\delta}(x)|^2\,dx = \sum_{\alpha}\int\limits_{K_h^{\alpha}\cap\Omega^{\varepsilon}} |\nabla w^{\varepsilon\alpha}_{\delta 1}(x)|^2\,dx - \\ - \int\limits_{\Omega^{\varepsilon}\cap G^{\varepsilon}} |\nabla\hat{u}^{\varepsilon}_{\delta}(x)|^2\,dx \geqslant \sum_{\alpha}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x^{\alpha},\varepsilon,h)\frac{\partial u_{\delta}}{\partial x_i}(x^{\alpha})\frac{\partial u_{\delta}}{\partial x_j}(x^{\alpha}) - O(h^{2-\tau}) - o(1).$$

Таким чином, при $\varepsilon = \varepsilon_m \to 0$

$$\int\limits_{\Omega^{\varepsilon}\setminus G^{\varepsilon}} |\nabla u^{\varepsilon}_{\delta}(x)|^2\,dx \geqslant \\ \geqslant \sum_{\alpha}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x^{\alpha},\varepsilon,h)\frac{\partial u_{\delta}}{\partial x_i}(x^{\alpha})\frac{\partial u_{\delta}}{\partial x_j}(x^{\alpha}) - O(h^{2-\tau}) - o(1). \tag{2.4.44}$$

Тепер на перетині куба K_h^{α} та області Ω^{ε} розглянемо функцію

$$w^{\varepsilon\alpha}_{\delta 2}(x) = u_{\delta}(x^{\alpha}) + u^{\varepsilon}_{\delta}(x) - \hat{u}^{\varepsilon}_{\delta}(x). \tag{2.4.45}$$

Згідно з визначенням функціонала $c(x, s; \varepsilon, h)$ (2.3.6)

$$\sum_{\alpha} c(x^{\alpha}, u_{\delta}(x^{\alpha}); \varepsilon, h) \leqslant \sum_{\alpha}\int\limits_{K_h^{\alpha}\cap\Omega^{\varepsilon}} |\nabla w^{\varepsilon\alpha}_{\delta 2}(x)|^2\,dx + \\ + h^{-\tau-2}\sum_{\alpha}\int\limits_{K_h^{\alpha}\cap\Omega^{\varepsilon}} |w^{\varepsilon\alpha}_{\delta 2} - u_{\delta}(x^{\alpha})|^2\,dx + \sum_{\alpha}\int\limits_{K_h^{\alpha}\cap\partial F^{\varepsilon}} g^{\varepsilon}(x, w^{\varepsilon\alpha}_{\delta 2})\,d\Gamma. \tag{2.4.46}$$

Оцінимо кожен доданок правої частини. Внаслідок визначення функцій $w^{\varepsilon\alpha}_{\delta 2}$

(2.4.45), $\hat{u}^\varepsilon_\delta(x)$ (2.4.40) і (2.4.39) для першого і другого доданків одержуємо

$$\begin{aligned}\sum_\alpha \int\limits_{K_h^\alpha\cap\Omega^\varepsilon} |\nabla w^{\varepsilon\alpha}_{\delta 2}(x)|^2\,dx = \int\limits_{\Omega^\varepsilon\cap\hat{G}^\varepsilon} |\nabla(u^\varepsilon_\delta(x)-\hat{u}^\varepsilon_\delta(x))|^2\,dx =\\ = \int\limits_{\Omega^\varepsilon\cap\hat{G}^\varepsilon} |\nabla u^\varepsilon_\delta(x)|^2\,dx + o(1),\ (\varepsilon=\varepsilon_m\to 0),\end{aligned} \tag{2.4.47}$$

$$\begin{aligned}\sum_\alpha \int\limits_{K_h^\alpha\cap\Omega^\varepsilon} |w^{\varepsilon\alpha}_{\delta 2}-u_\delta(x^\alpha)|^2\,dx = \sum_\alpha \int\limits_{\Omega^\varepsilon\cap\hat{G}^\varepsilon} |u^\varepsilon_\delta(x)-\hat{u}^\varepsilon_\delta(x)|^2\,dx =\\ =o(1),\ (\varepsilon=\varepsilon_m\to 0).\end{aligned} \tag{2.4.48}$$

Оцінимо поверхневий інтеграл. Оскільки внаслідок гладкості функції $u_\delta(x)$ і (2.4.39) $w^{\varepsilon\alpha}_{\delta 2} = u^\varepsilon_\delta(x) - (u_\delta(x) - u_\delta(x^\alpha)) - \hat{v}^\varepsilon_\delta(x) = u^\varepsilon_\delta(x) + O(h)$ при $x\in\Omega^\varepsilon\cap K_h^\alpha$, тоді, враховуючи властивості $a_1 - a_3$ функції $\sigma^\varepsilon(x,u)$, одержуємо

$$\begin{aligned}\sum_\alpha \int\limits_{K_h^\alpha\cap\partial F^\varepsilon} g^\varepsilon(x,w^{\varepsilon\alpha}_{\delta 2})\,d\Gamma = \int\limits_{\partial F^\varepsilon} g^\varepsilon(x,u^\varepsilon_\delta)\,d\Gamma + O(h)\int\limits_{\partial F^\varepsilon} |u^\varepsilon_\delta|^\Theta \hat{\sigma}^\varepsilon(x)\,d\Gamma+\\ + O(h) = \int\limits_{\partial F^\varepsilon} g^\varepsilon(x,u^\varepsilon_\delta)\,d\Gamma + O(h)\|u^\varepsilon_\delta\|^\Theta_{L^\Theta(\Omega,\mu^\varepsilon)} + O(h).\end{aligned}$$

Тут $L^\Theta(\Omega,\mu^\varepsilon)$ простір з мірою $d\mu^\varepsilon = \hat{\sigma}^\varepsilon(x)\,d\Gamma$, $\Theta < \frac{n}{n-2}$. З огляду на властивость a_3 функції $\sigma^\varepsilon(x,u)$ міра $d\mu^\varepsilon$ задовольняє нерівності

$$\int\limits_{\partial F^\varepsilon\cap B(\rho,z)} d\mu^\varepsilon < C_1\rho^n + C_2(\varepsilon)\rho^{n-1},$$

де $C_2(\varepsilon)\to 0$ при $\varepsilon\to 0$. Тоді з узагальненої теореми Соболєва випливає вкладення простору $H^1(\Omega)$ у простір $L^\Theta(\Omega,\mu^\varepsilon)$. Через вкладення, (2.4.37), а також рівномірну обмеженость послідовності продовжених розв'язків задачі (2.1.1) у просторі $H^1(\Omega)$ для функції u^ε_δ та її продовження $\tilde{u}^\varepsilon_\delta$ мають місце нерівності

$$\begin{aligned}\|u^\varepsilon_\delta\|_{L^\Theta(\Omega,\mu^\varepsilon)} = \|\tilde{u}^\varepsilon_\delta\|_{L^\Theta(\Omega,\mu^\varepsilon)} \leqslant C_1\|\tilde{u}^\varepsilon_\delta\|_{H^1(\Omega)} \leqslant\\ \leqslant C_1\left(\|\tilde{u}^\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} + \delta\right) \leqslant C_2.\end{aligned} \tag{2.4.49}$$

Таким чином, для поверхневого інтеграла справедлива оцінка

$$\sum_\alpha \int\limits_{K_h^\alpha\cap\partial F^\varepsilon} g^\varepsilon(x,w^{\varepsilon\alpha}_{\delta 2})\,d\Gamma = \int\limits_{\partial F^\varepsilon} g^\varepsilon(x,u^\varepsilon_\delta)\,d\Gamma + O(h). \tag{2.4.50}$$

Внаслідок (2.4.47), (2.4.48), (2.4.50) з (2.4.46) випливає

$$\sum_{\alpha} c(x^{\alpha}, u_{\delta}(x^{\alpha}); \varepsilon, h) \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_{\Omega^{\varepsilon}\cap\hat{G}^{\varepsilon}} |\nabla u_{\delta}^{\varepsilon}(x)|^2\, dx + \int\limits_{\partial F^{\varepsilon}} g^{\varepsilon}(x, u_{\delta}^{\varepsilon})\, d\Gamma + O(h) + o(1),\ (\varepsilon = \varepsilon_m \to 0). \tag{2.4.51}$$

Таким чином, згідно з (2.4.44), (2.4.51)

$$\Phi^{\varepsilon}[u_{\delta}^{\varepsilon}] = \int\limits_{\Omega^{\varepsilon}} |\nabla u_{\delta}^{\varepsilon}|^2\, dx + \int\limits_{\partial F^{\varepsilon}} g^{\varepsilon}(x, u_{\delta}^{\varepsilon})\, d\Gamma - 2\int\limits_{\Omega^{\varepsilon}} f^{\varepsilon} u_{\delta}^{\varepsilon}\, dx = \int\limits_{\Omega^{\varepsilon}\setminus\hat{G}^{\varepsilon}} |\nabla u_{\delta}^{\varepsilon}|^2\, dx +$$
$$+ \int\limits_{\Omega^{\varepsilon}\cap\hat{G}^{\varepsilon}} |\nabla u_{\delta}^{\varepsilon}|^2\, dx + \int\limits_{\partial F^{\varepsilon}} g^{\varepsilon}(x, u_{\delta}^{\varepsilon})\, d\Gamma - 2\int\limits_{\Omega^{\varepsilon}} f^{\varepsilon} u_{\delta}^{\varepsilon}\, dx \geqslant \sum_{\alpha} c(x^{\alpha}, u_{\delta}(x^{\alpha}); \varepsilon, h) +$$
$$+ \sum_{\alpha}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x^{\alpha}, \varepsilon, h) \frac{\partial u_{\delta}}{\partial x_i}(x^{\alpha}) \frac{\partial u_{\delta}}{\partial x_j}(x^{\alpha}) - 2\int\limits_{\Omega} \tilde{f}^{\varepsilon} \tilde{u}_{\delta}^{\varepsilon}\, dx - O(h) - o(1),\ (\varepsilon = \varepsilon_m \to 0),$$

де $\tilde{f}^{\varepsilon}(x) = \chi^{\varepsilon}(x) f^{\varepsilon}(x)$, $\chi^{\varepsilon}(x)$ – характеристична функція області Ω^{ε}.

Перейдемо в цій нерівності до границі спочатку по $\varepsilon = \varepsilon_m \to 0$, а потім по $h \to 0$ при фіксованому δ. Враховуючи умови Теореми 2.2 і збіжність $u_{\delta}^{\varepsilon}(x)$ до $u_{\delta}(x)$ в $L^2(\Omega)$, одержуємо

$$\varliminf_{\varepsilon=\varepsilon_k \to 0} \Phi^{\varepsilon}[u_{\delta}^{\varepsilon}] \geqslant \Phi[u_{\delta}].$$

Перейдемо тепер до границі по $\delta \to 0$. У правій частині, внаслідок неперервності функціонала $\Phi[u]$ у $H^1(\Omega)$ та (2.4.36), одержуємо $\lim\limits_{\delta\to 0} \Phi[u_{\delta}] = \Phi[u]$. У лівій частині при переході до границі в поверхневому інтегралі знову користуємося узагальненою теоремою Соболєва та нерівністю (2.4.36). У результаті одержуємо необхідну нерівність (2.4.25).

4. Єдиність узагальненого розв'язку усередненої задачі (2.1.3)**.** Доведення проведемо так само, як у Теоремі 2.1. Припустимо, що задача (2.1.3) має два узагальнені розв'язки u_1, u_2. Тоді, використовуючи визначення (2.1.4) для функцій u_1, u_2, віднявши одну рівність від іншої і взявши за тестову функцію $\varphi(x) = u_1(x) - u_2(x)$, одержуємо

$$\int\limits_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial\,(u_1^{\varepsilon} - u_2^{\varepsilon})}{\partial x_i} \frac{\partial\,(u_1^{\varepsilon} - u_2^{\varepsilon})}{\partial x_j}\, dx + \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} \left(c_u(x, u_1) - c_u(x, u_2)\right)(u_1 - u_2)\, d\Gamma = 0.$$

Звідси, внаслідок додатньо визначеності тензора $\{a_{ij}(x)\}_{i,j=1}^n$ і монотонності функції $c_u(x,u)$ випливає, що

$$u_1 = u_2 \text{ м.в. в } \Omega.$$

Таким чином, єдиність узагальненого розв'язку усередненої задачі (2.1.3) доведена.

Теорема 2.2 доведена.

2.5 Інтегральні умови збіжності

2.5.1 Теорема збіжності

Для будь-яких фіксованих ε, h, $s\,(0 < \varepsilon \ll h \ll 1,\, C_1 < s < C_2)$, функції $\frac{a_{ij}(X,\varepsilon,h)}{h^n}$ і $\frac{c(x,s,\varepsilon,h)}{h^n}$ є вимірними, обмеженими функціями від x і має місце наступна теорема.

Теорема 2.3. *Нехай області Ω^ε є сильно зв'язні й $\exists \tau \in (0, 2)$ при якому функції $a_{ij}(x,\varepsilon,h)$ $(i,j = \overline{1,n})$, $c(x,s;\varepsilon,h)$ задовольняють умови:*

1. $\lim\limits_{h\to 0}\overline{\lim\limits_{\varepsilon\to 0}}\int\limits_\Omega \left|\frac{a_{ij}(x,\varepsilon,h)}{h^n} - a_{ij}(x)\right| dx = 0,$
   де $a_{ij}(x)$ – кусково-неперервні функції від x та $\{a_{ij}(x)\}_{i,j=1}^n$ – додатньо визначений, симетричний тензор у Ω;

2. $\lim\limits_{h\to 0}\overline{\lim\limits_{\varepsilon\to 0}}\int\limits_\Omega \left|\frac{c(x,s,\varepsilon,h)}{h^n} - c(x,s)\right| dx = 0,\ \forall s \in \mathbb{R},$
   де функція $c(x,s)$ обмежена по x, диференційована по s та її похідна $c_s(x,s) = \frac{\partial}{\partial s}c(x,s)$ задовольняє умови (2.4.1), (2.4.2).

3. *Функції $f^\varepsilon(x)$, продовжені нулем на F^ε, збігаються слабко в $L^2(\Omega)$ до функції $f(x)$.*

Тоді послідовність узагальнених розв'язків $u^\varepsilon(x)$ задачі (2.1.1) *збігається в $L^p(\Omega^\varepsilon,\Omega)$ $\left(p < \frac{2n}{n-2}\right)$ у сенсі* (1.1.3) *до функції $u(x)$, що є узагальненим розв'язком усередненої задачі* (2.1.3).

2.5.2 Допоміжні леми

Так само як у пункті 2.4.2, сформулюємо низку допоміжних лем, використовуваних при доведенні Теореми збіжності 2.3.

Лема 2.6. *Нехай виконуються умови 1)-2) Теореми 2.3. Тоді існують послідовності* $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\{h'_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\{h''_k = h'_k + (h'_k)^{1+\tau/2}\}_{k=1}^{\infty}$ *такі, що при* $k \to \infty$ ε_k, h'_k, $h''_k \to 0$ *і майже для всіх* $x \in \Omega$*:*

1. $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{a_{ij}(x,\varepsilon_k,h'_k)}{(h'_k)^n} = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{a_{ij}(x,\varepsilon_k,h''_k)}{(h''_k)^n} = a_{ij}(x)$, $i, j = 1, ..., n$;
2. $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{c(x,s,\varepsilon_k,h'_k)}{(h'_k)^n} = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{c(x,s,\varepsilon_k,h''_k)}{(h''_k)^n} = c(x, s)$, $\forall s \in \mathbb{R}$;
3. *для будь-якого* $\mu > 0$ *існує замкнута множина* $\Omega_\mu \subset \Omega$ *така, що* $mes(\Omega \setminus \Omega_\mu) < \mu$ *і твердження леми 1), 2) виконуються рівномірно відносно* $x \in \Omega_\mu$.

Доведення. З умов 1)-2) Теореми 2.3 випливає, що існує монотонна функція $\hat{\varepsilon}(h)$ така, що $\hat{\varepsilon}(h) \to 0$ при $h \to 0$ і при будь-якому $\varepsilon_h < \hat{\varepsilon}(h)$

$$\lim_{h\to 0} \int\limits_{\Omega} \left| \frac{a_{ij}(x, \varepsilon_h, h)}{h^n} - a_{ij}(x) \right| dx = 0;$$
$$\lim_{h\to 0} \int\limits_{\Omega} \left| \frac{c(x, s; \varepsilon_h, h)}{h^n} - c(x, s) \right| dx = 0. \tag{2.5.1}$$

Звідси, внаслідок того, що зі збіжності в середньому випливає збіжність майже всюди по підпослідовності [24, гл. 5], заключаємо, що існує послідовність $\{h'_l\}_{l=1}^{\infty}$ така, що $h'_l \to 0$ при $l \to \infty$ і для майже всіх $x \in \Omega$

$$\lim_{l\to\infty} \frac{a_{ij}(x, \varepsilon_l, h'_l)}{(h'_l)^n} = a_{ij}(x),\ i, j = 1, ..., n;$$
$$\lim_{l\to\infty} \frac{c(x, s, \varepsilon_l, h'_l)}{(h'_l)^n} = c(x, s),\ \forall\, s \in R^1,$$

де $\varepsilon_l = \hat{\varepsilon}(h'_l)$.

Поклавши в (2.5.1) $h = h''_l = h'_l + (h'_l)^{1+\tau/2}$ $(\tau > 0)$, маємо

$$\lim_{l\to\infty} \int\limits_{\Omega} \left| \frac{a_{ij}(x, \varepsilon_l, h''_l)}{(h''_l)^n} - a_{ij}(x) \right| dx = 0;$$
$$\lim_{l\to\infty} \int\limits_{\Omega} \left| \frac{c(x, s; \varepsilon_l, h''_l)}{(h''_l)^n} - c(x, s) \right| dx = 0.$$

Тоді з послідовності $\{h'_l\}$ можна вибрати підпослідовність $\{h'_k\} \subset \{h'_l\}$ і відповідні їй $\{h''_k\} \subset \{h''_l\}$ та $\{\varepsilon_k = \hat{\varepsilon}(h'_k)\}$, для яких справедливі твердження леми 1)-2). Далі, застосовуючи теорему Єгорова [24, гл. 5], одержуємо третє твердження леми.

Лема 2.6 доведена. □

Надалі ми будемо розглядати збіжність по побудованим у Лемі 2.6 послідовностям $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\{h'_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\{h''_k\}_{k=1}^{\infty}$, тому для компактності запису застосовуватимемо наступні позначення:

$$\Pi_k^z := K_{h''_k}^z \setminus K_{h'_k}^z, \quad K_k^z := K_{h''_k}^z, \quad \Omega^k := \Omega^{\varepsilon_k}, \quad \partial F^k := \partial F^{\varepsilon_k},$$
$$g^k(x,u) := g^{\varepsilon_k}(x,u), \quad \sigma^k(x,u) := \sigma^{\varepsilon_k}(x,u), \quad f^k(x) := f^{\varepsilon_k}(x).$$

Лема 2.7. *Нехай виконується умова 1) Теореми 2.3,* $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\{h'_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\{h''_k = h'_k + (h'_k)^{1+\tau/2}\}_{k=1}^{\infty}$, Ω_μ *– послідовності та множина, побудовані в Лемі 2.6, функція* v_k^z *мінімізує функціонал* (2.3.1) *в області* $K_k^z \cap \Omega^k$ *при* $\ell \in \mathbb{R}^n$.

Тоді при будь-якому $\mu > 0$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{(h''_k)^n} \int\limits_{\Pi_k^z \cap \Omega^k} |\nabla v_k^z(x)|^2 \, dx = 0,$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{(h''_k)^{n+2+\tau}} \int\limits_{\Pi_k^z \cap \Omega^k} |v_k^z(x) - (x - z, \ell)|^2 \, dx = 0,$$

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{1}{(h''_k)^n} \int\limits_{K_k^z \cap \Omega^k} \left(\nabla v_{ki}^z, \nabla v_{kj}^z\right) \ell_i \ell_j \, dx \leqslant \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(z) \ell_i \ell_j$$

рівномірно відносно $z \in \Omega_\mu$.

Доведення. Нехай $v_{ki}^z(x)$ – функція, яка мінімізує функціонал (2.3.1) в області $K_k^z \cap \Omega^k$ при $\ell = e^i$ (e^i – орт осі x_i $(i = 1, ..., n)$). Використовуючи визначення функціонала (2.3.1), його представлення (2.3.2) і вираження для коефіцієнтів $a_{ij}(z, \varepsilon, h)$ (2.3.3), одержуємо

$$\frac{1}{(h''_k)^n} \int\limits_{\Pi_k^z \cap \Omega^k} \left(|\nabla v_{ki}^z|^2 + (h''_k)^{-2-\tau} |v_{ki}^z - (x_i - z_i)|^2\right) dx = \frac{a_{ii}(z, \varepsilon_k, h''_k)}{(h''_k)^n} -$$
$$- \frac{1}{(h''_k)^n} \int\limits_{K_{h'_k}^z \cap \Omega^k} \left(|\nabla v_{ki}^z|^2 + (h''_k)^{-2-\tau} |v_{ki}^z - (x_i - z_i)|^2\right) dx \leqslant \frac{a_{ii}(z, \varepsilon_k, h''_k)}{(h''_k)^n} -$$
$$- \frac{(h'_k)^n}{(h''_k)^n} \frac{a_{ii}(z, \varepsilon_k, h'_k)}{(h'_k)^n}.$$

Крім того,

$$\frac{1}{(h''_k)^n}\int\limits_{K^z_k\cap\Omega^k}\left(\nabla v^z_{ki},\nabla v^z_{kj}\right)\ell_i\ell_j\,dx\leqslant\frac{a_{ij}(z,\varepsilon_k,h''_k)}{(h''_k)^n}\ell_i\ell_j.$$

Звідси через твердження 1) Леми 2.6 випливає

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{(h''_k)^n}\int\limits_{\Pi^z_k\cap\Omega^k}|\nabla v^z_{ki}|^2\,dx=0,$$

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{(h''_k)^{n+2+\tau}}\int\limits_{\Pi^z_k\cap\Omega^k}|v^z_{ki}-(x_i-z_i)|^2\,dx=0,$$

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{(h''_k)^n}\int\limits_{K^z_k\cap\Omega^k}\left(\nabla v^z_{ki},\nabla v^z_{kj}\right)\ell_i\ell_j\,dx\leqslant a_{ij}(z)\ell_i\ell_j.$$

рівномірно відносно $z\in\Omega_\mu$. Тоді, зважаючи на $v^z_k=\sum_{i=1}^n v^z_{ki}\ell_i$, $\ell=\sum_{i=1}^n\ell_i e^i$, отримуємо справедливість тверджень леми.

Лема 2.7 доведена. □

Лема 2.8. *Нехай виконується умова 2) Теореми 2.3,* $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^\infty$, $\{h'_k\}_{k=1}^\infty$, $\{h''_k=h'_k+(h'_k)^{1+\tau/2}\}_{k=1}^\infty$, Ω_μ *– послідовності та множина, побудовані в Лемі 2.6 і функція* w^z_k *мінімізує функціонал* (2.3.6) *в області* $K^z_k\cap\Omega^k$ *при* $s=\hat{s}$. *Тоді*
1. для будь-якого $\delta>0$ *міра множини* $B^z_{k\delta}=\{x\in K^z_k\cap\Omega^k:\ |w^z_k-\hat{s}|\geqslant\delta\}$ *задовольняє оцінці*

$$mes\{B^z_{k\delta}\}<\frac{C(h''_k)^{n+2+\tau}}{\delta^2};$$

2. при будь-якому $\mu>0$

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{(h''_k)^n}\int\limits_{\Pi^z_k\cap\Omega^k}|\nabla w^z_k(x)|^2\,dx=0,$$

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{(h''_k)^{n+2+\tau}}\int\limits_{\Pi^z_k\cap\Omega^k}|w^z_k(x)-\hat{s}|^2\,dx=0,$$

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{(h''_k)^n}\int\limits_{\Pi^z_k\cap\partial F^k}g^\varepsilon(x,w^z_k)\,d\Gamma=0,$$

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{(h''_k)^{n+2+\tau}}\int\limits_{K^z_k\cap\Omega^k}|w^z_k-\hat{s}|^2\,dx\leqslant C,$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{(h''_k)^n} \left\{ \int\limits_{K_k^z\cap\Omega^k} |\nabla w_k^z|^2\, dx + \int\limits_{K_k^z\cap\partial F^k} g^k(x, w_k^z)\, d\Gamma \right\} \leqslant c(z, \hat{s})$$

рівномірно відносно $z \in \Omega_\mu$.

Доведення. Використовуючи визначення функціонала (2.3.6), одержуємо

$$\frac{1}{(h''_k)^n} \left[\int\limits_{\Pi_k^z\cap\Omega^k} \left(|\nabla w_k^z|^2 + (h''_k)^{-2-\tau} |w_k^z - \hat{s}|^2 \right) dx + \int\limits_{\Pi_k^z\cap\partial F^k} g^k(x, w_k^z) d\Gamma \right] =$$

$$= \frac{c(z, \hat{s}; \varepsilon_k, h''_k)}{(h''_k)^n} - \frac{1}{(h''_k)^n} \left[\int\limits_{K^z_{h'_k}\cap\Omega^k} \left(|\nabla w_k^z|^2 + (h''_k)^{-2-\tau} |w_k^z - \hat{s}|^2 \right) dx + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{K_{h'_k}\cap\partial F^k} g^k(x, w_k^z)\, \Gamma \right] \leqslant \frac{c(z, \hat{s}; \varepsilon_k, h''_k)}{(h''_k)^n} - \frac{(h'_k)^n}{(h''_k)^n} \cdot \frac{c(z, \hat{s}; \varepsilon_k, h'_k)}{(h'_k)^n}.$$

Перейдемо до границі при $k \to \infty$. Внаслідок невід'ємності всіх підінтегральних функцій і твердження 2) Леми 2.6 граничні рівності пункту 2) виконуються рівномірно відносно $z \in \Omega_\mu$.

Крім того, використовуючи визначення функціонала (2.3.6) і твердження 2) Леми 2.6, при $k \to \infty$ маємо

$$\frac{1}{(h''_k)^n} \left[\int\limits_{K_k^z\cap\Omega^k} \left(|\nabla w_k^z|^2 + (h''_k)^{-2-\tau} |w_k^z - \hat{s}|^2 \right) dx + \int\limits_{K_k^z\cap\partial F^k} g^k(x, w_k^z) d\Gamma \right] =$$

$$= c(z, \hat{s}) + o(1) \leqslant C.$$

Отже,

$$\frac{1}{(h''_k)^n} \left[\int\limits_{K_k^z\cap\Omega^k} |\nabla w_k^z|^2\, dx + \int\limits_{K_k^z\cap\partial F^k} g^k(x, w_k^z) d\Gamma \right] \leqslant c(z, \hat{s}) + o(1),\ k \to \infty$$

та

$$\int\limits_{K_k^z\cap\Omega^k} |w_k^z - \hat{s}|^2\, dx \leqslant C (h''_k)^{n+2+\tau}.$$

Із цих нерівностей випливає справедливість першого твердження леми і граничних нерівностей пункту 2).

Лема 2.8 доведена. $\square$

Лема 2.9. *Нехай виконується умова 2) Теореми 2.3,* $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\{h'_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\{h''_k = h'_k + (h'_k)^{1+\tau/2}\}_{k=1}^{\infty}$, Ω_μ *– послідовності та множина, побудовані в Лемі 2.6 і функція* w_k^z *мінімізує функціонал* (2.3.6) *в області* $K_k^z \cap \Omega^k$ *при* $s = \hat{s}$.

Тоді множина

$$B_k^z = \{x \in K_k^z \cap \Omega^k : |w_k^z - \hat{s}| \geqslant (h''_k)^{1+\tau/3}\} \qquad (2.5.2)$$

і функція

$$\hat{w}_k^z = \begin{cases} w_k^z, \; x \in B_k^z, \\ \hat{s} - (h''_k)^{1+\tau/3}, \; \hat{s} \geqslant 0, \, x \in (K_k^z \cap \Omega^k) \setminus B_k^z, \\ \hat{s} + (h''_k)^{1+\tau/3}, \; \hat{s} \leqslant 0, \, x \in (K_k^z \cap \Omega^k) \setminus B_k^z \end{cases} \qquad (2.5.3)$$

задовольняють наступним властивостям:

1. міра множини B_k^z

$$mes\{B_k^z\} < C(h''_k)^{n+\tau/3};$$

2. при будь-якому $\mu > 0$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{(h''_k)^n} \int\limits_{\Pi_k^z \cap \Omega^k} |\nabla \hat{w}_k^z(x)|^2 \, dx = 0,$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{(h''_k)^{n+2+\tau}} \int\limits_{\Pi_k^z \cap \Omega^k} |\hat{w}_k^z(x) - \hat{s}|^2 \, dx = 0,$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{(h''_k)^n} \int\limits_{\Pi_k^z \cap \partial F^k} g^k(x, \hat{w}_k^z) \, d\Gamma = 0,$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{(h''_k)^{n+2+\tau}} \int\limits_{K_k^z \cap \Omega^k} |\hat{w}_k^z - \hat{s}|^2 \, dx \leqslant C,$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{(h''_k)^n} \left\{ \int\limits_{K_k^z \cap \Omega^k} |\nabla \hat{w}_k^z|^2 \, dx + \int\limits_{K_k^z \cap \partial F^k} g^k(x, \hat{w}_k^z) \, d\Gamma \right\} \leqslant c(z, \hat{s})$$

рівномірно відносно $z \in \Omega_\mu$.

Доведення. Перше твердження леми випливає з висновку 1) Леми 2.8.

Доведемо друге твердження. Не обмежуючи спільності, враховуючи, що h''_k мало, будемо вважати, що $\hat{s} \geqslant (h''_k)^{1+\tau/3} > 0$. Функції $\hat{w}^z_k$, $g^k(x, \hat{w}^z_k)$ внаслідок визначень (2.5.3), (2.3.7) і властивостей a_1, a_2 функції $\sigma^k(x, u)$ при будь-якому $x \in K^z_k \cap \Omega^k$ задовольняють оцінкам

$$|\nabla \hat{w}^z_k(x)|^2 \leqslant |\nabla w^z_k(x)|^2,$$

$$|\hat{w}^z_k(x) - \hat{s}|^2 \leqslant |w^z_k(x) - \hat{s}|^2 + (h''_k)^{2+2\tau/3},$$
$$g^k(x, \hat{w}^z_k) = g^k(x, w^z_k) + O\left((h''_k)^{1+\tau/3}\right).$$

Із цих оцінок і висновків пункту 2) Леми 2.8 випливає друге твердження леми при $\hat{s} > 0$. Аналогічно розглядається випадок, коли $\hat{s} < 0$.

Лема 2.9 доведена. □

Лема 2.10. *Нехай Ω_μ – підобласть області Ω. Тоді можна побудувати покриття області Ω непересічними кубами K^α_h зі сторонами довжиною h $\left(\alpha = 1, ..., N^k \geqslant \frac{mes\{\Omega\}}{h^n}\right)$, так щоб кількість кубів, центри яких не належать області Ω_μ, задовольняла нерівності*

$$N'_k \leqslant \frac{mes\,\{\Omega \setminus \Omega_\mu\}}{mes\,\{\Omega\}} N_k. \tag{2.5.4}$$

Доведення. Покриємо область Ω непересічними у внутрішніх точках кубами $\tilde{K}^\alpha_h = K(\tilde{x}^\alpha, h)$ із центрами в точках $\tilde{x}^\alpha$ і сторонами рівними h. Позначимо χ^α – характеристичну функцію області $(\Omega \setminus \Omega_\mu) \cap \tilde{K}^\alpha_h$, тоді

$$mes\{\Omega \setminus \Omega_\mu\} = \sum_\alpha \int\limits_{\tilde{K}^\alpha_h} \chi^\alpha(x)\,dx. \tag{2.5.5}$$

За допомогою зсувів сполучимо всі куби $\tilde{K}^\alpha_h$ в один куб K^0_h із центром в 0. Маємо

$$\sum_\alpha \int\limits_{\tilde{K}^\alpha_h} \chi^\alpha(x)\,dx = \sum_\alpha \int\limits_{K^0_h} \chi^\alpha(x - \tilde{x}^\alpha)\,dx = \int\limits_{K^0_h} \sum_\alpha \chi^\alpha(x - \tilde{x}^\alpha)\,dx. \tag{2.5.6}$$

Позначимо

$$\chi(x) = \sum_\alpha \chi^\alpha(x - \tilde{x}^\alpha). \tag{2.5.7}$$

$\chi(x)$ – цілочисельна функція в K_h^0, що визначає кратність покриття точки $x \in K_h^0$ образом множини $\Omega \setminus \Omega_\mu$. Виберемо точку $\hat{x} \in K_h^0$ з найменшою кратністю покриття N'_k. Тоді

$$\int\limits_{K_h^0} \chi(x)\, dx \geqslant N'_k h^n. \tag{2.5.8}$$

Вибираємо за шукані центри кубів K_h^α точки x^α, що є образами точки $\hat{x}$ при зворотних зсувах. Кількість центрів кубів, що потрапили в множину $\Omega \setminus \Omega_\mu$ дорівнює N'_k. Припустимо, що нерівність (2.5.4) не виконується, тоді, враховуючи (2.5.5)-(2.5.8), одержуємо

$$mes\{\Omega \setminus \Omega_\mu\} \geqslant N'_k h^n > \frac{mes\{\Omega \setminus \Omega_\mu\}}{mes\,\{\Omega\}} N_k h^n \geqslant mes\,\{\Omega \setminus \Omega_\mu\}.$$

Отримали протиріччя

$$mes\{\Omega \setminus \Omega_\mu\} > mes\{\Omega \setminus \Omega_\mu\}.$$

Таким чином, справедлива нерівність (2.5.4).

Лема 2.10 доведена. □

Лема 2.11. *Нехай в областях $\Omega^k \subset \Omega$ задані множини B_k такі, що*

$$\lim_{k\to\infty} mes\,\{B_k\} = 0.$$

Якщо виконується умова 1) Теореми 2.3, тоді існують множини $\hat{B}_k \subset \Omega$ і функції $\hat{v}_{ki} \in H^1(\Omega)$ $(i = \overline{1,n})$, що задовольняють наступним властивостям:

1. $B_k \subset \hat{B}_k$, $\lim\limits_{k\to\infty} mes\,\{\hat{B}_k\} = 0$;
2. $\lim\limits_{k\to\infty} \max\limits_{x\in\Omega} |\hat{v}_{ki}(x) - x_i| = 0$;
3. $\lim\limits_{k\to\infty} \int\limits_{\hat{B}_k} |\nabla \hat{v}_{ki}|^2\, dx = 0$;
4. *для будь-якої вектор-функції* $\ell(x) = (\ell_1(x), ..., \ell_n(x)) \in (C(\overline{\Omega}))^n$

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{\Omega^k} \sum_{i,j=1}^n (\nabla \hat{v}_{ki}, \nabla \hat{v}_{kj})\, \ell_i(x)\ell_j(x)\, dx \leqslant \int\limits_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\ell_i(x)\ell_j(x)\, dx.$$

Доведення. Нехай $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\{h'_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\{h''_k = h'_k + (h'_k)^{1+\tau/2}\}_{k=1}^{\infty}$ – послідовності, побудовані в Лемі 2.6. Відповідно до висновку 3) цієї леми для послідовності чисел $\mu_k \to 0$ при $k \to \infty$ побудуємо послідовність множин $\Omega_{\mu_1} \subset \Omega_{\mu_2} \subset ... \subset \Omega_{\mu_k} \subset ... \subset \Omega$ таких, що $mes\{\Omega \setminus \Omega_{\mu_k}\} < \mu_k$.

Покриємо область Ω непересічними кубами $K^{\alpha}_{h_k}$ $\left(\Omega \in \cup_{\alpha} K^{\alpha}_{h_k}\right)$ із центрами в точках x^{α} і сторонами $h_k = \frac{h''_k + h'_k}{2}$, як у Лемі 2.10, тобто кількість кубів, центри яких $x^{\alpha} \notin \Omega_{\mu_k}$ не будуть перевищувати $N'_k < \frac{\mu_k}{(h_k)^n}$. Разом із кубами $K^{\alpha}_{h_k}$ будемо розглядати також куби $K^{\alpha}_{h'_k}$ і $K^{\alpha}_{h''_k}$. По цьому покриттю, як у Лемі 1.1, побудуємо розбиття одиниці $\{\varphi^{\alpha}_k(x)\}_{\alpha}$ – набір двічі неперервно диференційованих функцій, що задовольняють умови

$$\begin{aligned}
&\varphi^{\alpha}_k(x) = 0, \text{ при } x \notin K^{\alpha}_{h''_k};\ \varphi^{\alpha}_k(x) = 1, \text{ при } x \in K^{\alpha}_{h'_k};\\
&\forall x \in \Omega : 0 \leqslant \varphi^{\alpha}_k(x) \leqslant 1,\ \sum_{\alpha} \varphi^{\alpha}_k(x) = 1,\ |D\varphi^{\alpha}_k(x)| < C(h'_k)^{-1-\tau/2}.
\end{aligned} \tag{2.5.9}$$

У кожному кубі $K^{\alpha}_k := K^{\alpha}_{h''_k}$ по Лемі 2.9 побудуємо множину B^{α}_k і по цих множинах побудуємо множину $B_k = \cup_{\alpha} B^{\alpha}_k$, міра якої внаслідок Леми 2.9

$$mes\{B_k\} \leqslant \sum_{\alpha} mes\{B^{\alpha}_k\} < C(h''_k)^{\tau/3}.$$

Множина B_k задовольняє умові леми, будемо використовувати її для подальших побудов.

Нехай функції $v^{\alpha}_{ki}\,(i = \overline{1,n})$ мінімізують функціонал (2.3.1) при $\ell = e^i$ (орт осі x_i) у кубі K^{α}_k, $x^{\alpha} \in \Omega_{\mu_k}$. Тоді

$$\max_{x \in K^{\alpha}_k \cap \Omega^k} |v^{\alpha}_{ki}(x)| \leqslant \frac{1}{2} h''_k \tag{2.5.10}$$

і функції $v^{\alpha}_{ki}\,(i = \overline{1,n})$ задовольняють твердженням Леми 2.7.

Розглянемо в області Ω^k функції

$$v_{ki}(x) = x_i + \sum_{\alpha} [v^{\alpha}_{ki}(x) - (x_i - x^{\alpha}_i)] \cdot \varphi^{\alpha}_k(x),\ (i = \overline{1,n}), \tag{2.5.11}$$

де $\{\varphi^{\alpha}_k(x)\}_{\alpha}$ – розбиття одиниці (2.5.9). Будемо вважати $v^{\alpha}_{ki}(x) = x_i - x^{\alpha}_i$, якщо $x^{\alpha} \in \Omega \setminus \Omega_{\mu_k}$ або куб K^{α}_k не належить повністю області Ω.

Нехай $\ell(x) = \{\ell_1(x), \ell_2(x), ..., \ell_n(x)\}$ – довільна неперервна в $\overline{\Omega}$ векторфункція. Враховуючи, що

$$\frac{\partial v_{ki}(x)}{\partial x_j} = \sum_{\alpha} \frac{\partial v^{\alpha}_{ki}(x)}{\partial x_j} \varphi^{\alpha}_k(x) + \sum_{\alpha} [v^{\alpha}_{ki}(x) - (x_i - x^{\alpha}_i)] \frac{\partial \varphi^{\alpha}_k(x)}{\partial x_j},$$

внаслідок Леми 2.7 і властивостей функції $\varphi_k^\alpha(x)$, при $k \to \infty$ маємо

$$\int\limits_{\Omega^k} \sum_{i,j=1}^n (\nabla v_{ki}, \nabla v_{kj}) \ell_i(x) \ell_k(x)\, dx \leqslant \int\limits_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \ell_i(x) \ell_j(x) + o(1). \tag{2.5.12}$$

Крім того, згідно з (2.5.10), (2.5.11) маємо

$$\max_{x \in \Omega^k} |v_{ki} - x_i| \leqslant \frac{1}{2} h_k''. \tag{2.5.13}$$

Покладемо $u_{ki} = v_{ki} - x_i$. Тоді з (2.5.12), (2.5.13) випливає, що

$$\max_{x \in \Omega^k} |u_{ki}| \leqslant \frac{1}{2} h_k'' \ \text{ та } \ \|u_{ki}\|_{H^1(\Omega^k)} \leqslant C, \tag{2.5.14}$$

де C не залежить від k.

Оскільки області Ω^k задовольняють умові сильної зв'язності (1.1.5), то існує функція $\bar{u}_{ki}(x) \in H^1(\Omega)$, рівна $u_{ki}(x)$ при $x \in \Omega^k$, яка задовольняє нерівностям (2.5.14). Продовжимо її в паралелепіпед $\Pi \supset \Omega$ зі збереженням нерівностей (2.5.14), а потім апроксимуємо двічі неперервно диференційованою в Π функцією $\tilde{u}_{ki}(x)$ такою, що

$$\|\tilde{u}_{ki} - \bar{u}_{ki}\|_{H^1(\Pi)} \leqslant \varepsilon_k, \ \max_{x \in \Pi} |\tilde{u}_{ki}| \leqslant C_1 h_k'', \ \|\tilde{u}_{ki}\|_{H^1(\Pi)} \leqslant C_2, \tag{2.5.15}$$

де C_1, C_2 не залежать від k.

Застосуємо до функції $\tilde{u}_{ki}(x)$ і множини B_k Лему 1.3 [30, гл. 3]. Відповідно до цієї леми існує функція $\hat{u}_{ki}(x) \in H^1(\Pi)$ і множина $\hat{B}_k \subset \Pi$, що задовольняють умови

$$B_k \subset \hat{B}_k, \ mes\,(\hat{B}_k) \leqslant C_1 A m^{2|\ln m|^{-1/3}} \left(m^{|\ln m|^{-2/3}} + |\ln m|^{-1/6} \right), \tag{2.5.16}$$

$$\begin{gathered} \hat{u}_{ki}(x) = \tilde{u}_{ki}(x), \ x \in \Pi \setminus \hat{B}_k, \\ \max_{x \in \Pi} |\hat{u}_{ki}(x)| \leqslant C_2 h_k'', \ \|\hat{u}_{ki}\|_{H^1(\hat{B}_k)} \leqslant C_3 A \left(m^{|\ln m|^{-2/3}} + |\ln m|^{-1/6} \right), \end{gathered} \tag{2.5.17}$$

де $m = mes\,(B_k)$, $A = \|\tilde{u}_{ki}\|_{H^1(\Pi)}$ і константи C_1, C_2, C_3 не залежать від k.

Враховуючи, що $\hat{v}_{ki} = \hat{u}_{ki} + x_i$, та взявши обмеження множини $\hat{B}_k \in \Pi$ і функції $\hat{v}_{ki}(x) \in H^1(\Pi)$ на область Ω (зберігаємо для них позначення), одержимо множину $\hat{B}_k \in \Omega$ і функцію $\hat{v}_{ki}(x) \in H^1(\Omega)$, які внаслідок (2.5.15)-(2.5.17) задовольняють оцінкам 1)-3) леми.

Перевіримо оцінку 4) леми. Позначимо $\tilde{v}_{ki}(x) = \tilde{u}_{ki}(x) + x_i$. Згідно з (2.5.12), (2.5.15), (2.5.17), невід'ємністю підінтегрального виразу та вже доведеною оцінкою 3) леми, для будь-якої вектор-функції $\ell(x) \in (C(\overline{\Omega}))^n$ при $k \to \infty$ справедливо

$$\int\limits_{\Omega^k} \sum_{i,j=1}^{n} (\nabla \hat{v}_{ki}, \nabla \hat{v}_{kj}) \ell_i(x) \ell_j(x)\, dx \leqslant \int\limits_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} (\nabla \hat{v}_{ki}, \nabla \hat{v}_{kj}) \ell_i(x) \ell_j(x)\, dx =$$

$$= \int\limits_{\Omega \setminus \hat{B}_k} \sum_{i,j=1}^{n} (\nabla \tilde{v}_{ki}, \nabla \tilde{v}_{kj}) \ell_i(x) \ell_j(x)\, dx + \int\limits_{\hat{B}_k} \sum_{i,j=1}^{n} (\nabla \hat{v}_{ki}, \nabla \hat{v}_{kj}) \ell_i(x) \ell_j(x)\, dx =$$

$$= \int\limits_{\Omega^k} \sum_{i,j=1}^{n} (\nabla v_{ki}, \nabla v_{kj}) \ell_i(x) \ell_j(x)\, dx + o(1) \leqslant \int\limits_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \ell_i(x) \ell_j(x) + o(1).$$

Оцінка 4) леми доведена.

Лема 2.11 доведена. □

2.5.3 Доведення Теореми збіжності 2.3

Схема доведення Теореми 2.3 така ж сама, як і для Теореми 2.2, але доведення проводиться з урахуванням того, що рівномірна збіжність виконується не в усій області Ω.

1. Компактність узагальнених розв'язків задачі (2.1.1). Як показано в першому пункті доведення Теореми 2.2, послідовність функцій $\{\tilde{u}^{\varepsilon}(x)\}_{\varepsilon}$ рівномірно обмежена по ε і слабко компактна в $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$. Значить, із цієї послідовності можна виділити підпослідовність $\{\varepsilon = \varepsilon_m,\ m = 1, ..., \infty\}$, слабко збіжну в $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$, а внаслідок компактності вкладення $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ $\left(p < \frac{2n}{n-2}\right)$ сильно в $L^p(\Omega)$, до деякої функції $u(x) \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$. Таким чином, підпослідовність $\{u^{\varepsilon_m}(x)\}_m$ збігається в $L^p(\Omega^{\varepsilon}, \Omega)$ до функції $u(x) \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$. Покажемо, що функція $u(x)$ мінімізує функціонал (2.2.1).

2. Доведення нерівності (2.4.24). Нехай $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\{h'_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\{h''_k = h'_k + (h'_k)^{1+\tau/2}\}_{k=1}^{\infty}$ – послідовності, побудовані в Лемі 2.6. Для послідовності чисел $\mu_k = h''_k$, використовуючи висновок 3) Леми 2.6, побудуємо послідовність множин $\Omega_{\mu_1} \subset \Omega_{\mu_2} \subset ... \subset \Omega_{\mu_k} \subset ... \subset \Omega$ таких, що $mes\{\Omega \setminus \Omega_{\mu_k}\} < h''_k$.

Покриємо область Ω непересічними кубами $K^{\alpha}_{h_k}$ $\left(\Omega \in \cup_{\alpha} K^{\alpha}_{h_k}\right)$ із центрами в точках x^{α} і сторонами $h_k = \frac{h''_k + h'_k}{2}$, як у Лемі 2.10. Тоді внаслідок цієї леми, враховуючи, що $mes\{\Omega \setminus \Omega_{\mu_k}\} < h_k''$ і загальна кількість кубів $N_k \sim \frac{mes\{\Omega\}}{h^n}$, кількість кубів, центри яких $x^\alpha \notin \Omega_{\mu_k}$, дорівнює

$$N_k' = O\left((h_k)^{1-n}\right). \tag{2.5.18}$$

Разом з кубами $K_{h_k}^\alpha$ ми будемо розглядати концентричні з ними куби $K_{h_k''}^\alpha$ і $K_{h_k'}^\alpha$.

Позначимо

$$\Lambda_k := \{\alpha \in \{1, ..., N_k\} : \, x^\alpha \in \Omega_{\mu_k}, K_k^\alpha \in \Omega\},$$

$$\Omega^k := \Omega^{\varepsilon_k}, \, F^k := F^{\varepsilon_k}, \, K_k^\alpha := K_{h_k''}^\alpha, \, \Pi_k^\alpha := K_{h_k''}^\alpha \setminus K_{h_k'}^\alpha,$$

$$\Phi^k[u] := \Phi^{\varepsilon_k}[u], \, g^k(x,u) := g^{\varepsilon_k}(x,u), \, \sigma^k(x,u) := \sigma^{\varepsilon_k}(x,u), \, f^k(x) := f^{\varepsilon_k}(x).$$

Нехай $w(x)$ – довільна функція із простору $C_0^2(\Omega)$, $\hat{w}_k^\alpha$; B_k^α – функції та множини, побудовані в Лемі 2.9 при $\hat{s} = w(x^\alpha)$ для кубів K_k^α; $\hat{v}_{ki}\,(i = 1, ..., n)$, $\hat{B}_k$ – функції та множини, побудовані в Лемі 2.11 для множини $B_k = \underset{\alpha}{\cup} B_k^\alpha$; $\{\varphi_k^\alpha(x)\}_\alpha$ – розбиття одиниці (2.5.9), побудоване по кубах $K_{h_k'}^\alpha$, $K_{h_k''}^\alpha$. Будуємо функцію, що апроксимує мінімізант функціонала $\Phi^k[\cdot]$ у вигляді

$$w_k(x) = w(x) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial w(x)}{\partial x_i}\left[\hat{v}_{ki}(x) - x_i\right] + \sum_\alpha \left[\hat{w}_k^\alpha(x) - w(x^\alpha)\right]\varphi_k^\alpha(x), \tag{2.5.19}$$

будемо вважати, що $\hat{w}_k^\alpha(x) = w(x^\alpha)$ при $\alpha \notin \Lambda_k$. Очевидно, що $w_k(x) \in H^1(\Omega^k, \partial\Omega)$.

Підставимо функцію $w_k(x)$ у функціонал (2.2.1)

$$\Phi^k[w_k] = \int\limits_{\Omega^k} |\nabla w_k|^2 \, dx + \int\limits_{\partial F^k} g^k(x, w_k)\, d\Gamma - 2\int\limits_{\Omega^k} f^k w_k \, dx$$

і оцінимо кожен доданок.

Для оцінки першого доданка запишемо похідні функції $w_k(x)$ у вигляді

$$\frac{\partial w_k}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial w}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \hat{v}_{ki}}{\partial x_j} + \sum_{\alpha \in \Lambda_k} \frac{\partial \hat{w}_k^\alpha}{\partial x_j} \cdot \varphi_k^\alpha(x) + \sum_{s=1}^2 A_s(x), \tag{2.5.20}$$

де

$$A_1(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j}[\hat{v}_{ki}(x) - x_i], \; A_2(x) = \sum_{\alpha \in \Lambda_k} \left[\hat{w}_k^\alpha(x) - w(x^\alpha)\right] \frac{\partial \varphi_k^\alpha(x)}{\partial x_j}.$$

Виділені в (2.5.20) доданки дають кінцевий внесок у функціонал $\Phi^k[w_k]$, внески ж від $A_1(x)$, $A_2(x)$ малі. Дійсно,

$$\int\limits_{\Omega^k} |\nabla w_k|^2\,dx \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_{\Omega^k} (\nabla\hat{v}_{ki}, \nabla\hat{v}_{kj}) \frac{\partial w}{\partial x_i}\frac{\partial w}{\partial x_j}\,dx + \sum_{\alpha\in\Lambda_k} \int\limits_{K_k^\alpha\cap\Omega^k} |\nabla\hat{w}_k^\alpha|^2\,dx + \sum_{\alpha\in\Lambda_k} E_k^\alpha. \tag{2.5.21}$$

Тут через E_k^α позначена сума інтегралів по множинах $\Pi_k^\alpha \cap \Omega^k$ та $K_k^\alpha \cap B_k^\alpha$ від квадратичних і лінійних комбінацій функцій $(\hat{v}_{ki} - x_i)$, $[\hat{w}_k^\alpha(x) - w(x^\alpha)] \cdot \frac{\partial\varphi_k^\alpha}{\partial x_j}$ з обмеженими коефіцієнтами, які рівні 1 або залежать від $w \in C_0^2(\Omega)$ у квадратичних доданках і від $\frac{\partial\hat{w}_k^\alpha}{\partial x_j} \cdot \varphi_k^\alpha$ або $\frac{\partial\hat{v}_{ki}}{\partial x_j}$ – у лінійних. При оцінці $\sum E_k^\alpha$ використовуємо властивості функцій φ_k^α і оцінки, отримані в Лемах 2.9, 2.11. Таким чином, маємо

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{\alpha\in\Lambda_k} E_k^\alpha = 0. \tag{2.5.22}$$

Оцінимо другий доданок у функціоналі $\Phi^k[w_k]$. Для цього перепишемо $w_k(x)$ у вигляді

$$w_k(x) = \sum_{\alpha\in\Lambda_k} \left[\hat{w}_k^\alpha(x) + (w(x) - w(x^\alpha))\right] \varphi_k^\alpha(x) + \sum_{\alpha\notin\Lambda_k} w(x)\varphi_k^\alpha(x) +$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial w(x)}{\partial x_i}\,[\hat{v}_{ki}(x) - x_i].$$

З огляду на визначення функції $g^k(x,u)$ (2.3.7), властивості $a_1 - a_3$ функції $\sigma^k(x,u)$, оцінку 2) Леми 2.11 та (2.5.18) одержуємо оцінку другого доданка

$$\int\limits_{\partial F^k} g^k(x, w_k)\,d\Gamma = \sum_{\alpha\in\Lambda_k} \int\limits_{K_k^\alpha\cap\partial F^k} g^k(x, w_k)\,d\Gamma + \sum_{\alpha\notin\Lambda_k} \int\limits_{K_k^\alpha\cap\partial F^k} g^k(x, w_k)\,d\Gamma =$$
$$= \sum_{\alpha\in\Lambda_k} \int\limits_{K_k^\alpha\cap\partial F^k} g^k(x, \hat{w}_k^\alpha)\,d\Gamma + \sum_{\alpha\notin\Lambda_k} \int\limits_{K_k^\alpha\cap\partial F^k} g^k(x, w)\,d\Gamma + O(h_k'') =$$
$$= \sum_{\alpha\in\Lambda_k} \int\limits_{K_k^\alpha\cap\partial F^k} g^k(x, \hat{w}_k^\alpha)\,d\Gamma + O(h_k'') + C(\varepsilon_k),$$

де $C(\varepsilon_k) \to 0$ при $k \to \infty$. Таким чином,

$$\int\limits_{\partial F^k} g^k(x, w_k)\,d\Gamma = \sum_{\alpha\in\Lambda_k} \int\limits_{K_k^\alpha\cap\partial F^k} g^k(x, \hat{w}_k^\alpha)\,d\Gamma + o(1),\ k \to \infty. \tag{2.5.23}$$

Оцінимо третій доданок у функціоналі $\Phi^k[w_k]$. Внаслідок визначення (2.5.19), умови 3) Теореми 2.3 і оцінок, отриманих у Лемах 2.9, 2.11, маємо

$$\int\limits_{\Omega^k} f^k(x)w_k(x)\,dx = \int\limits_{\Omega^k} f^k(x)w(x)\,dx + o(1),\ k\to\infty. \tag{2.5.24}$$

Дійсно,

$$\left|\int\limits_{\Omega^k}\left[\sum_{i=1}^n \frac{\partial w(x)}{\partial x_i}\left(\hat v_{ki}(x)-x_i\right)+\sum_{\alpha\in\Lambda_k}\left(\hat w_k^\alpha(x)-w(x^\alpha)\right)\varphi_k^\alpha(x)\right] f^k(x)\,dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^n \int\limits_{\Omega^k}\left|\frac{\partial w(x)}{\partial x_i}\left(\hat v_{ki}(x)-x_i\right)f^k(x)\right|dx+$$

$$+\sum_{\alpha\in\Lambda_k}\left|\int\limits_{K_k^\alpha\cap\Omega^k}\left(\hat w_k^\alpha(x)-w(x^\alpha)\right)f^k(x)\varphi_k^\alpha(x)\,dx\right| \leqslant O(h_k'')\cdot\|f^k\|_{L^1(\Omega^k)}+$$

$$+\sum_{\alpha\in\Lambda_k}\sqrt{\int\limits_{K_k^\alpha\cap\Omega^k}\left|\hat w_k^\alpha(x)-w(x^\alpha)\right|^2dx}\cdot\sqrt{\int\limits_{K_k^\alpha\cap\Omega^k}\left|f^k(x)\right|^2dx} \leqslant$$

$$\leqslant O(h_k'')\cdot\|f^k\|_{L^1(\Omega^k)}+O\left((h_k'')^{n/2+1+\tau/2}\right)\cdot\|f^k\|_{L^2(\Omega^k)}=o(1),\ k\to\infty.$$

З оцінок (2.5.21)-(2.5.24) одержуємо загальну оцінку функціонала $\Phi^k[w_k]$

$$\Phi^k[w_k]=\sum_{i,j=1}^n\int\limits_{\Omega^k}(\nabla\hat v_{ki},\nabla\hat v_{kj})\frac{\partial w}{\partial x_i}\frac{\partial w}{\partial x_j}\,dx+\sum_{\alpha\in\Lambda_k}\left[\int\limits_{K_k^\alpha\cap\Omega^k}|\nabla\hat w_k^\alpha|^2\,dx+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{K_k^\alpha\cap\partial F^k} g^k(x,\hat w_k^\alpha)\,d\Gamma\right]-2\int\limits_{\Omega^k} f^k w\,dx+o(1),\ k\to\infty.$$

Перейдемо до границі при $k\to\infty$. Враховуючи умови Теореми 2.3 та оцінки, отримані в Лемах 2.9, 2.11, маємо

$$\varlimsup_{k\to\infty}\Phi^k[w_k]\leqslant\int\limits_\Omega\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\frac{\partial w}{\partial x_i}\frac{\partial w}{\partial x_k}\,dx+\int\limits_\Omega c(x,w)\,dx-2\int\limits_\Omega f(x)w(x)\,dx. \tag{2.5.25}$$

Оскільки функція u^ε мінімізує функціонал $\Phi^\varepsilon[\cdot]$ і з будь-якої послідовності $\varepsilon\to 0$ можна вибрати підпослідовність $\{\varepsilon=\varepsilon_k\to 0,\ k=1,...,\infty\}$, для якої вірна нерівність (2.5.25), тоді

$$\varlimsup_{\varepsilon\to 0}\Phi^{\varepsilon}[u^{\varepsilon}]\leqslant\varlimsup_{k\to\infty}\Phi^{k}[w_k]\leqslant\Phi[w],$$

де $\Phi[w]$ – енергетичний функціонал задачі (2.1.3), визначений формулою (2.4.21).

Таким чином, для $\forall\, w(x)\in C_0^2(\Omega)$ виконується нерівність (2.4.24), але через щільність простіру $C_0^2(\Omega)$ у $\mathring{H}^1(\Omega)$ ця нерівність справедлива для $\forall\, w(x)\in \mathring{H}^1(\Omega)$.

3. Доведення нерівності (2.4.25)**.** Розглянемо тепер функцію $u(x)$ – слабку границю в $H^1(\Omega)$ продовжених розв'язків $\tilde{u}^{\varepsilon}(x)$ задачі (2.1.1) по деякій підпослідовності $\{\varepsilon=\varepsilon_m,\, m=1,...,\infty\}$. Як випливає з теорем вкладення, сліди $\tilde{u}^{\varepsilon_m}(x)$ та $u(x)$ на $\partial\Omega$ зберігаються і рівні 0. Таким чином, функція $u(x)\in \mathring{H}^1(\Omega)$.

Для компактності запису введемо наступні позначення

$$u_m(x):=u^{\varepsilon_m}(x),\ \tilde{u}_m(x):=\tilde{u}^{\varepsilon_m}(x),\ \Omega^m:=\Omega^{\varepsilon_m},\ F^m:=F^{\varepsilon_m},\ \Phi^m[u]:=\Phi^{\varepsilon_m}[u],$$
$$g^m(x,u):=g^{\varepsilon_m}(x,u),\ \sigma^m(x,u):=\sigma^{\varepsilon_m}(x,u),\ \hat{\sigma}^m(x):=\hat{\sigma}^{\varepsilon_m}(x),\ f^m(x):=f^{\varepsilon_m}(x).$$

Апроксимуємо функцію $u(x)$ функцією $u^{\delta}(x)\in C_0^2(\Omega)$ такою, що

$$\|u^{\delta}-u\|_{H^1(\Omega)}<\delta. \qquad (2.5.26)$$

В областях Ω^m розглянемо функції

$$\tilde{u}_m^{\delta}(x)=\tilde{u}_m(x)+u^{\delta}(x)-u(x)\in \mathring{H}^1(\Omega),$$

$$u_m^{\delta}(x)=\tilde{u}_m^{\delta}(x)|_{\Omega^m}=u_m(x)+u^{\delta}(x)-u(x)\in H^1(\Omega^m,\partial\Omega),$$

внаслідок (2.5.26) маємо

$$\|\tilde{u}_m^{\delta}-\tilde{u}_m\|_{H^1(\Omega)}<\delta,\ \|u_m^{\delta}-u_m\|_{H^1(\Omega^m)}<\delta, \qquad (2.5.27)$$

крім того, при $m\to\infty$

$$\|\tilde{u}_m^{\delta}-u^{\delta}\|_{L^2(\Omega)}\to 0,\ \|u_m^{\delta}-u^{\delta}\|_{L^2(\Omega^m,\Omega)}\to 0. \qquad (2.5.28)$$

Визначимо функцію

$$v_m^{\delta}(x)=\tilde{u}_m^{\delta}(x)-u^{\delta}(x)\in \mathring{H}^1(\Omega).$$

При $m \to \infty$ функції v_m^δ сильно збігаються до нуля в $L^2(\Omega)$ і слабко в $H^1(\Omega)$, отже, $\|v_m^\delta\|_{H^1(\Omega)} \leqslant C$ і функції $v_m^\delta(x)$ збігаються до нуля по мірі, тобто існують множини $G^m := G^{\varepsilon_m} \subset \Omega$ і числа $\beta_m := \beta(\varepsilon_m)$ такі, що

$$\forall\, x \in \Omega \setminus G^m: \ |v_m^\delta(x)| < \beta_m, \ \lim_{m\to\infty} \beta_m = 0,$$

$$\lim_{m\to\infty} mes\{G^m\} = 0.$$

Внаслідок Леми 1.4 [30, гл. 3] по функціях v_m^δ і множинам G^m можна побудувати функції $\hat{v}_m^\delta \in \mathring{H}^1(\Omega)$ і множини $\hat{G}^m \subset \Omega$ такі, що $\hat{G}^m \supset G^m$, $\hat{v}_m^\delta = v_m^\delta$ при $x \in \Omega \setminus \hat{G}^m$ та

$$\max_{\Omega} |\hat{v}_m^\delta(x)| \leqslant C\beta_m, \ \lim_{m\to\infty} \left\|\hat{v}_m^\delta\right\|_{H^1(\hat{G}^m)} = 0,$$

$$\lim_{m\to\infty} mes\{\hat{G}^m\} = 0.$$

За допомогою цих функцій визначимо функції

$$\hat{u}_m^\delta(x) = u^\delta(x) + \hat{v}_m^\delta(x) \in \mathring{H}^1(\Omega). \tag{2.5.29}$$

Покриємо область Ω непересічними (у внутрішніх точках) кубами $K_m^\alpha = K(x^\alpha, h_m)$, центри x^α і довжини сторін h_m яких виберемо в такий спосіб. Довжину сторони куба визначимо як мінімальне h_m, при якому виконуються нерівності

$$\begin{aligned} &\max_{\Omega} |\hat{v}_m^\delta(x)| < h_m, \ \|\hat{u}_m^\delta - u^\delta\|_{L^2(\Omega)} < h_m^2, \\ &mes\{\hat{G}^m\} < h_m^{2+\tau_1}, \ \|\hat{v}_m^\delta\|_{H^1(\hat{G}^m)} < h_m^{2+\tau_1}, \ \tau_1 > \tau > 0. \end{aligned} \tag{2.5.30}$$

Для послідовності чисел $\mu_m = h_m$, використовуючи твердження 3) Леми 2.6, побудуємо послідовність множин $\Omega_{\mu_1} \subset \Omega_{\mu_2} \subset ... \subset \Omega_{\mu_m} \subset ... \subset \Omega$ таких, що $mes\{\Omega \setminus \Omega_{\mu_m}\} < h_m$. Центри x^α кубів K_m^α виберемо, як у Лемі 2.10, тобто кількість кубів, центри яких $x^\alpha \notin \Omega_{\mu_k}$, повинна бути найменшою. Відповідно до тверджень Леми 2.6 рівності

$$\begin{aligned} &\lim_{m\to\infty} \frac{1}{h_m^n} \left|c(x^\alpha, s; \varepsilon_m, h_m) - c(x^\alpha, s)\cdot h_m^n\right| = 0, \\ &\lim_{m\to\infty} \frac{1}{h_m^n} \left|a_{ij}(x^\alpha, \varepsilon_m, h_m) - a_{ij}(x^\alpha)\cdot h_m^n\right| = 0, \ i,j = 1,...,n \end{aligned} \tag{2.5.31}$$

виконуються рівномірно відносно $x^\alpha \in \Omega_{\mu_m}$.

Позначимо

$$\Lambda_m := \{\alpha \in \{1,...,N_m\}: \ x^\alpha \in \Omega_{\mu_m}, \ K_m^\alpha \in \Omega\}.$$

На перетині кожного з кубів K_m^α з областю Ω^m розглянемо функцію

$$w_{m1}^{\delta\alpha}(x) = \hat{u}_m^\delta(x) - u^\delta(x^\alpha). \tag{2.5.32}$$

Враховуючи то, що $u^\delta(x) \in C_0^2(\Omega)$, для будь-якого вектора $\ell \in \mathbb{R}^n$ і для будь-якого фіксованого числа $\delta > 0$ маємо

$$\int\limits_{K_m^\alpha \cap \Omega^m} |w_{m1}^{\delta\alpha}(x) - (x - x^\alpha, \ell)|^2\, dx \leqslant 3 \int\limits_{K_m^\alpha \cap \Omega^m} |\hat{u}_m^\delta(x) - u^\delta(x)|^2\, dx +$$
$$+ 3 \int\limits_{K_m^\alpha \cap \Omega^m} [(\nabla u^\delta(x^\alpha), x - x^\alpha) - (x - x^\alpha, \ell)]^2\, dx + O(h_m^{n+4}).$$

Поклавши $\ell = \nabla u^\delta(x^\alpha)$ і враховуючи (2.5.30), одержуємо

$$\int\limits_{K_m^\alpha \cap \Omega^m} |w_{m1}^{\delta\alpha}(x) - (\nabla u^\delta(x^\alpha), x - x^\alpha)|^2\, dx = O(h_m^{n+4}). \tag{2.5.33}$$

Згідно з визначенням функціонала $T_{h,z}^\varepsilon(\ell)$ (2.3.1) і його поданням (2.3.2), при $\ell = \nabla u^\delta(x^\alpha)$ маємо

$$\begin{aligned}\int\limits_{K_m^\alpha \cap \Omega^m} |\nabla w_{m1}^{\delta\alpha}(x)|^2 + h^{-2-\tau}|w_{m1}^{\delta\alpha}(x) - (\nabla u^\delta(x^\alpha), x - x^\alpha)|^2\, dx \geqslant \\ \geqslant \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x^\alpha, \varepsilon_m, h_m) \frac{\partial u^\delta}{\partial x_i}(x^\alpha) \frac{\partial u^\delta}{\partial x_j}(x^\alpha).\end{aligned} \tag{2.5.34}$$

З (2.5.29), (2.5.30), (2.5.32)-(2.5.34), враховуючи, що $\alpha = 1, ..., N_m \sim \frac{mes\{\Omega\}}{h_m^n}$, $u_m^\delta(x) = \hat{u}_m^\delta(x)$ при $x \in \Omega^m \setminus \hat{G}^m$ та $\nabla w_{m1}^{\delta\alpha}(x) = \nabla \hat{u}_m^\delta(x)$ при $x \in \Omega^m$, одержуємо

$$\sum_\alpha \int\limits_{K_m^\alpha \cap \Omega^m \setminus \hat{G}^m} |\nabla u_m^\delta(x)|^2\, dx = \sum_\alpha \int\limits_{K_m^\alpha \cap \Omega^m \setminus \hat{G}^m} |\nabla \hat{u}_m^\delta(x)|^2\, dx \geqslant$$
$$\geqslant \sum_\alpha \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x^\alpha, \varepsilon_m, h_m) \frac{\partial u^\delta}{\partial x_i}(x^\alpha) \frac{\partial u^\delta}{\partial x_j}(x^\alpha) - \int\limits_{\Omega^m \cap \hat{G}^m} |\nabla \hat{u}_m^\delta(x)|^2\, dx - O(h_m^{2-\tau}) =$$
$$= \sum_\alpha \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x^\alpha, \varepsilon_m, h_m) \frac{\partial u^\delta}{\partial x_i}(x^\alpha) \frac{\partial u^\delta}{\partial x_j}(x^\alpha) - O(h_m^{2-\tau}).$$

Таким чином,

$$\sum_\alpha \int\limits_{K_m^\alpha \cap \Omega^m \setminus \hat{G}^m} |\nabla u_m^\delta(x)|^2\, dx \geqslant \sum_\alpha \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x^\alpha, \varepsilon_m, h_m) \frac{\partial u^\delta}{\partial x_i}(x^\alpha) \frac{\partial u^\delta}{\partial x_j}(x^\alpha) - O(h_m^{2-\tau}). \tag{2.5.35}$$

Далі на перетині кубів K_m^α і області Ω^m розглянемо функцію

$$w_{m2}^{\delta\alpha}(x) = u^\delta(x^\alpha) + u_m^\delta(x) - \hat{u}_m^\delta(x). \tag{2.5.36}$$

Згідно з визначенням функціонала $c(x, s; \varepsilon, h)$ (2.3.6)

$$\sum_\alpha c(x^\alpha, u^\delta(x^\alpha); \varepsilon_m, h_m) \leqslant \sum_\alpha \int\limits_{K_m^\alpha \cap \Omega^m} |\nabla w_{m2}^{\delta\alpha}|^2 \, dx + $$
$$+ h_m^{-\tau-2} \sum_\alpha \int\limits_{K_m^\alpha \cap \Omega^m} |w_{m2}^{\delta\alpha}(x) - u^\delta(x^\alpha)|^2 \, dx + \sum_\alpha \int\limits_{K_m^\alpha \cap \partial F^m} g^m(x, w_{m2}^{\delta\alpha}) \, d\Gamma. \tag{2.5.37}$$

Розглянемо кожен доданок правої частини. Через нерівність Мінковського, визначення функцій $w_{m2}^{\delta\alpha}$ (2.5.36), $\hat{u}_m^\delta(x)$ (2.5.29) та (2.5.30) для першого і другого доданків одержуємо

$$\sum_\alpha \int\limits_{K_m^\alpha \cap \Omega^m} |\nabla w_{m2}^{\delta\alpha}|^2 \, dx = \int\limits_{\Omega^m \cap \hat{G}^m} |\nabla w_{m2}^{\delta\alpha}|^2 \, dx = \int\limits_{\Omega^m \cap \hat{G}^m} |\nabla (u_m^\delta - u^\delta - \hat{v}_m^\delta)|^2 \, dx \leqslant$$
$$\leqslant \left(\sqrt{\int\limits_{\Omega^m \cap \hat{G}^m} |\nabla u_m^\delta|^2 \, dx} + O\left(h_m^{1+\tau_1/2}\right) \right)^2 = \int\limits_{\Omega^m \cap \hat{G}^m} |\nabla u_m^\delta|^2 \, dx + O\left(h_m^{1+\tau_1/2}\right), \tag{2.5.38}$$

$$\sum_\alpha \int\limits_{K_m^\alpha \cap \Omega^m} |w_{m2}^{\delta\alpha}(x) - u^\delta(x^\alpha)|^2 \, dx = \int\limits_{\Omega^m \cap \hat{G}^m} |u_m^\delta(x) - \hat{u}_m^\delta(x)|^2 \, dx =$$
$$= O(h_m^{2+\tau_1}). \tag{2.5.39}$$

Оцінимо поверхневий інтеграл. Оскільки, внаслідок гладкості функції $u^\delta(x)$ та (2.5.30), маємо $w_{m2}^{\delta\alpha} = u_m^\delta(x) - (u^\delta(x) - u^\delta(x^\alpha)) - \hat{v}_m^\delta(x) = u_m^\delta(x) + O(h_m)$ при $x \in \Omega^m \cap K_m^\alpha$, тоді, враховуючи властивості $a_1 - a_3$ функції $\sigma^m(x, u)$, одержуємо

$$\sum_\alpha \int\limits_{K_m^\alpha \cap \partial F^m} g^m(x, w_{m2}^{\delta\alpha}) \, d\Gamma = \int\limits_{\partial F^m} g^m(x, u_m^\delta) \, d\Gamma + O(h_m) \int\limits_{\partial F^m} |u_m^\delta|^\Theta \cdot \hat{\sigma}^m(x) \, d\Gamma +$$
$$+ O(h_m) = \int\limits_{\partial F^m} g^m(x, u_m^\delta) \, d\Gamma + O(h_m) \cdot \|u_m^\delta\|^\Theta_{L^\Theta(\Omega, \mu^m)} + O(h_m).$$

Тут $L^\Theta(\Omega, \mu^m)$ простір з мірою $d\mu^m = \hat{\sigma}^m(x) \, d\Gamma$, $\Theta < \frac{n}{n-2}$. Через властивость a_3 функції $\sigma^m(x, u)$ міра $d\mu^m$ задовольняє нерівності

$$\int\limits_{\partial F^m \cap B(\rho, z)} d\mu^m < C_1 \rho^n + C_2(\varepsilon_m) \rho^{n-1},$$

де $C_2(\varepsilon_m) \to 0$ при $m \to \infty$. Тоді з узагальненої теореми Соболєва випливає вкладення простору $H^1(\Omega)$ у простір $L^\Theta(\Omega, \mu^m)$. Внаслідок вкладення, а також (2.5.27) і рівномірної обмеженості послідовності продовжених розв'язків задачі (2.1.1) у просторі $H^1(\Omega)$, для функції u_m^δ та її продовження $\tilde{u}_m^\delta$ мають місце нерівності

$$\begin{gathered}\|u_m^\delta\|_{L^\Theta(\Omega,\mu^m)} = \|\tilde{u}_m^\delta\|_{L^\Theta(\Omega,\mu^m)} \leqslant C_1\|\tilde{u}_m^\delta\|_{H^1(\Omega)} \leqslant \\ \leqslant C_1\left(\|\tilde{u}_m\|_{H^1(\Omega)} + \delta\right) \leqslant C_2.\end{gathered} \tag{2.5.40}$$

Таким чином, для поверхневого інтеграла справедлива оцінка

$$\sum_\alpha \int\limits_{K_m^\alpha \cap \partial F^m} g^m(x, w_{m2}^{\delta\alpha})\, d\Gamma = \int\limits_{\partial F^m} g^m(x, u_m^\delta)\, d\Gamma + O(h_m). \tag{2.5.41}$$

Внаслідок (2.5.38)-(2.5.41) з (2.5.37) випливає

$$\begin{gathered}\sum_\alpha c(x^\alpha, u^\delta(x^\alpha); \varepsilon_m, h_m) \leqslant \\ \leqslant \int\limits_{\Omega^m \cap \hat{G}^m} |\nabla u_m^\delta|^2\, dx + \int\limits_{\partial F^m} g^m(x, u_m^\delta)\, d\Gamma + O(h_m^{\tau_1 - \tau}).\end{gathered} \tag{2.5.42}$$

Таким чином, з огляду на отримані оцінки (2.5.35), (2.5.42) і не від'ємність доданків, для функціонала $\Phi^m[\cdot]$ одержуємо

$$\begin{gathered}\Phi^m[u_m^\delta] = \sum_\alpha \int\limits_{K_m^\alpha \cap \Omega^m \setminus \hat{G}^m} |\nabla u_m^\delta|^2\, dx + \int\limits_{\Omega^m \cap \hat{G}^m} |\nabla u_m^\delta|^2\, dx + \int\limits_{\partial F^m} g^m(x, u_m^\delta)\, d\Gamma - \\ - 2\int\limits_{\Omega^m} f^m u_m^\delta\, dx \geqslant \sum_{\alpha \in \Lambda_m} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x^\alpha, \varepsilon_m, h_m) \frac{\partial u^\delta}{\partial x_i}(x^\alpha) \frac{\partial u^\delta}{\partial x_j}(x^\alpha) + \\ + \sum_{\alpha \in \Lambda_m} c(x^\alpha, u^\delta(x^\alpha); \varepsilon_m, h_m) - 2\int\limits_{\Omega^m} f^m u_m^\delta\, dx - O(h_m^{\tau_1 - \tau}).\end{gathered}$$

Внаслідок (2.5.31) та того, що $mes\{\Omega_{\mu_m}\} \to mes\{\Omega\}$ при $m \to \infty$, справедливі рівності

$$\begin{gathered}\lim_{m\to\infty} \sum_{\alpha \in \Lambda_m} c(x^\alpha, u^\delta(x^\alpha); \varepsilon_m, h_m) = \lim_{m\to\infty} \sum_{\alpha \in \Lambda_m} c(x^\alpha, u^\delta(x^\alpha)) h_m^n = \\ = \lim_{m\to\infty} \int\limits_{\Omega_{\mu_m}} c(x, u^\delta)\, dx = \int\limits_\Omega c(x, u^\delta)\, dx.\end{gathered}$$

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{\alpha\in\Lambda_m}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x^\alpha,\varepsilon_m,h_m)\frac{\partial u^\delta}{\partial x_i}(x^\alpha)\frac{\partial u^\delta}{\partial x_j}(x^\alpha)=$$
$$=\lim_{m\to\infty}\sum_{\alpha\in\Lambda_m}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x^\alpha)\frac{\partial u^\delta}{\partial x_i}(x^\alpha)\frac{\partial u^\delta}{\partial x_j}(x^\alpha)h_m^n=$$
$$=\lim_{m\to\infty}\int\limits_{\Omega_{\mu m}}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial u^\delta}{\partial x_i}\frac{\partial u^\delta}{\partial x_j}\,dx=\int\limits_{\Omega}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial u^\delta}{\partial x_i}\frac{\partial u^\delta}{\partial x_j}\,dx,$$

Враховуючи ці рівності, умову 3) Теореми 2.3 та (2.5.28), перейдемо до границі по $m\to\infty$ при фіксованому δ

$$\lim_{m\to\infty}\Phi^m[u_m^\delta]\geqslant\int\limits_{\Omega}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial u^\delta}{\partial x_i}\frac{\partial u^\delta}{\partial x_j}\,dx+\int\limits_{\Omega}c(x,u^\delta)\,dx-2\int\limits_{\Omega}fu^\delta\,dx=\Phi[u^\delta].$$

Перейдемо тепер до границі по $\delta\to 0$. У правій частині, через гладкість функції $u^\delta(x)$ і нерівність (2.5.26), одержуємо $\lim\limits_{\delta\to 0}\Phi[u^\delta]=\Phi[u]$. У лівій частині при переході до границі в поверхневому інтегралі, знову користуємося узагальненою теоремою Соболєва та нерівністю (2.5.26). У результаті одержуємо необхідну нерівність (2.4.25).

З (2.4.24), (2.4.25) випливає, що гранична функція $u(x)$ задовольняє нерівності $\Phi[u]\leqslant\Phi[w]$ для довільної функції $w(x)\in\mathring{H}^1(\Omega)$. Отже, $u(x)$ мінімізує функціонал $\Phi[w]$ у класі $\mathring{H}^1(\Omega)$ і, значить, є узагальненим розв'язком усередненої задачі (2.1.3). Але усереднена задача (2.1.3) має єдиний узагальнений розв'язок, тоді вся послідовність продовжених розв'язків $\{\tilde{u}^\varepsilon(x)\}_\varepsilon$ збігається в $L^p(\Omega)$ до функції $u(x)$. Отже, послідовність розв'язків $\{u^\varepsilon(x)\}_\varepsilon$ початкової задачі (2.1.1) збігається в $L^p(\Omega^\varepsilon,\Omega)$ до розв'язку $u(x)$ усередненої задачі (2.1.3).

Теорема 2.3 доведена.

РОЗДІЛ 3

УСЕРЕДНЕННЯ РІВНЯННЯ СТАЦІОНАРНОЇ ДИФУЗІЇ В ЛОКАЛЬНО-ПЕРІОДИЧНИХ ПОРИСТИХ СЕРЕДОВИЩАХ

Третій розділ присвячений дослідженню крайової задачі, що описує процес стаціонарної дифузії в локально-періодичному пористому середовищі з нелінійним поглинанням на межі. У другому розділі були доведені теореми збіжності та визначений вид усередненого рівняння, коефіцієнти якого є ефективними характеристиками середовища й виражаються через «мезоскопічні» енергетичні характеристики середовища та його межі. Обчислення таких характеристик у загальному випадку – важкорозв'язна задача, але в низці конкретних ситуацій це можна зробити. Метою цього розділу є одержання явних формул для ефективних характеристик локально-періодичного пористого середовища. Результати розділу були опубліковані в [13], [41] і матеріалах міжнародної конференції [98].

3.1 Постановка задачі

У просторі $\mathbb{R}^3$ розглянемо локально-періодичну перфоровану область Ω^ε. Введемо наступні позначення:

$$\Pi = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^3 : |\xi_i| \leqslant \frac{\theta_i}{2}, i = \overline{1,3} \right\}, \quad \Pi^{\pm\delta} = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^3 : |\xi| \leqslant \frac{\theta_i}{2}(1 \pm \delta), i = \overline{1,3} \right\},$$

де δ – довільне мале число ($\delta \ll 1$).

$$\Pi^\varepsilon_{x^\alpha} = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : |x_i - x_i^\alpha| \leqslant \frac{\theta_i \varepsilon}{2}, i = \overline{1,3} \right\} -$$

паралелепіпеди в $\mathbb{R}^3$ із центрами в точках $x^\alpha = \varepsilon \sum\limits_{i=1}^{3} x_i^\alpha e^i$, де $x_i^\alpha = m_i^\alpha \theta_i$ ($m_i^\alpha \in \mathbb{Z}$), і ребрами, орієнтованими по координатних осях. Паралелепіпеди $\Pi^\varepsilon_{x^\alpha}$ утворюють періодичну решітку з періодом $\theta_i \varepsilon$ ($i = \overline{1,3}$).

Нехай F – область в Π із гладкою межею ∂F і центром мас у точці O. Припустимо, що простір $\mathbb{R}^3$ розрізаний на паралелепіпеди $\Pi^\varepsilon_{x^\alpha}$. У кожному паралелепіпеді $\Pi^\varepsilon_{x^\alpha}$, що належить області Ω, знаходиться множина $F^\varepsilon_{x^\alpha}$

$$F^\varepsilon_{x^\alpha} = \varepsilon F_{x^\alpha} + x^\alpha,$$

яка є трансляцією й гомотетичним стисненням F_{x^α}, отриманої із множини F у такий спосіб:

$$F_z = f_z(F),\, \partial F_z = f_z(\partial F), \tag{3.1.1}$$

де $f_z(\xi)$ – дифеоморфізм із $\mathbb{R}^3$ в $\mathbb{R}^3$, що залежить від точки $z \in \Omega$ (як від параметра) так, що $f_0(\xi) = I$ (I – тотожне відображення), $\forall\, z \in \Omega :\ F_z \subset \Pi^{-2\delta}$ та

$$\|f_{z_1} - f_{z_2}\|_{C^1(\Omega)} \leqslant C\,|z_1 - z_2|\,. \tag{3.1.2}$$

Область $\Omega^\varepsilon = \Omega \setminus F^\varepsilon$, де $F^\varepsilon = \cup_\alpha F^\varepsilon_{x^\alpha}$ будемо називати локально-періодичною.

Інше визначення локально-періодичної структури перфорованої області було дано в роботі [62], в якій розглядалася лінійна третя крайова задача.

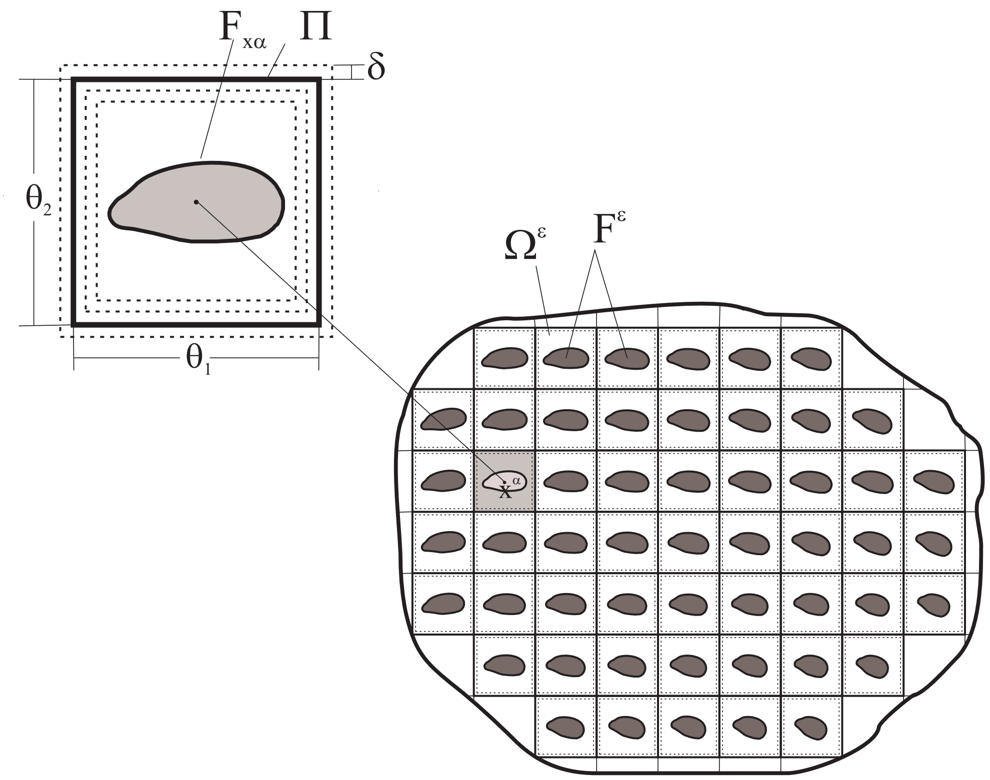


Рисунок 3.1 — Локально-періодична область Ω^ε і комірка Π

В області Ω^ε розглянемо крайову задачу (2.1.1). Припустимо, що функція

$$\sigma^\varepsilon(x, u) = \varepsilon\sigma(x, u),$$

де $\sigma(x, u)$ неперервна по змінній $x \in \Omega^\varepsilon$ і по змінній u задовольняє наступну умову Ліпшиця $\forall\, u_1, u_2 \in \mathbb{R}$ та $\Theta < \frac{n}{n-2}$

$$|\sigma(x, u_1) - \sigma(x, u_2)| \leqslant C(1 + |u_1|^{\Theta-1} + |u_2|^{\Theta-1})|u_1 - u_2|, \tag{3.1.3}$$

а також умови монотонності та пасивного поглинання ($\sigma(x,0)=0$). Очевидно, що при цьому функція $\sigma^\varepsilon(x,u)$ задовольняє властивостям $a_1 - a_3$.

3.2 Ефективні характеристики локально-періодичного пористого середовища

Сформулюємо основний результат цього розділу.

Теорема 3.1. *Нехай області Ω^ε є локально-періодичними, тоді виконуються умови 1), 2) Теореми 2.2 і ефективні характеристики середовища дорівнюють:*
функція поглинання

$$c_u(z,u) = \frac{2|\partial F_z|}{|\Pi|}\sigma(z,u), \tag{3.2.1}$$

тензор провідності $\{a_{ij}(z)\}_{i,j=1}^3$

$$a_{ij}(z) = \delta_{ij}\left(1 - \frac{|F_z|}{|\Pi|}\right) - \frac{1}{|\Pi|}\int\limits_{\Pi\setminus F_z}\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial V_i(\xi,z)}{\partial\xi_k}\frac{\partial V_j(\xi,z)}{\partial\xi_k}\,d\xi, \tag{3.2.2}$$

де $|\partial F_z|$, $|F_z|$, $|\Pi|$ *– площа та об'єм відповідних множин, функція* $V_i(\xi) = V_i(\xi,z)$ $(i=\overline{1,3})$ *є розв'язком наступної «коміркової» задачі:*

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial^2 V_i(\xi)}{\partial\xi_k^2} = 0, \quad \xi\in\Pi\setminus F_z, \\ \displaystyle\frac{\partial V_i(\xi)}{\partial\nu_\xi} = cos(\nu(\xi),e^i), \quad \xi\in\partial F_z, \\ \displaystyle V_i|_{\Gamma_k^+} = V_i|_{\Gamma_k^-}, \quad \frac{\partial V_i}{\partial\xi_k}|_{\Gamma_k^+} = \frac{\partial V_i}{\partial\xi_k}|_{\Gamma_k^-}, \quad k=\overline{1,3}, \\ \displaystyle\int\limits_{\Pi\setminus F_z} V_i(\xi)\,d\xi = 0, \end{cases} \tag{3.2.3}$$

де $\Gamma_k^\pm$ *– протилежні грані в* Π, $\nu=\nu(\xi)$ *– одиничний вектор зовнішньої нормалі до* F_z *у точці* $\xi\in F_z$.

Доведення теореми проводиться в §§3.3, 3.4.

3.3 Допоміжні леми

Сформулюємо леми, які використовуються при доведенні Теореми 3.1.

Лема 3.1. *При досить малих ε існує єдиний розв'язок $v^\varepsilon_\alpha(\xi)$ задачі*

$$\begin{cases} \Delta_\xi v^\varepsilon_\alpha(\xi) = 0, \quad \xi \in \mathbb{R}^3 \setminus F_{x^\alpha}, \\ \dfrac{\partial v^\varepsilon_\alpha(\xi)}{\partial \nu_\xi} + \varepsilon\sigma(x^\alpha + \varepsilon\xi, s + \varepsilon v^\varepsilon_\alpha(\xi)) = 0, \quad \xi \in \partial F_{x^\alpha},\, s \in \mathbb{R}, \\ v^\varepsilon_\alpha(\xi) \to 0 \quad \textit{при} \quad |\xi| \to \infty, \end{cases} \tag{3.3.1}$$

де ν_ξ – одинична нормаль до межі ∂F_{x^α}, зовнішня стосовно області $\mathbb{R}^3 \setminus F_{x^\alpha}$.

Для розв'язку $v^\varepsilon_\alpha(\xi)$ справедливі наступні оцінки:

$$\max_{\xi \in \Pi \setminus F_{x^\alpha}} |v^\varepsilon_\alpha(\xi)| < C\varepsilon, \tag{3.3.2}$$

$$\max_{\xi \in \Pi^{+\delta} \setminus \Pi^{-\delta}} |\nabla v^\varepsilon_\alpha(\xi)| < \frac{C}{\delta}\varepsilon. \tag{3.3.3}$$

Доведення. Розв'язок задачі (3.3.1) будемо шукати у вигляді потенціалу простого шару

$$v^\varepsilon_\alpha(\xi) = \int\limits_{\partial F_{x^\alpha}} \frac{\rho^\varepsilon(\eta)}{|\eta - \xi|}\, d\Gamma_\eta, \quad \xi \in \mathbb{R}^3 \setminus F_{x^\alpha}.$$

Для того щоб функція $v^\varepsilon_\alpha(\xi)$ задовольняла крайовій умові, щільність $\rho^\varepsilon(\xi)$ повинна бути розв'язком інтегрального рівняння ([33, гл. 15])

$$\rho^\varepsilon(\xi) + R\rho^\varepsilon(\xi) = -\frac{1}{2\pi}\psi^\varepsilon(\xi), \quad \xi \in \partial F_{x^\alpha}, \tag{3.3.4}$$

де оператор R, визначений рівністю

$$R\rho^\varepsilon := \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\partial F_{x^\alpha}} \frac{(\eta - \xi, \nu_\eta)}{|\eta - \xi|^3} \rho^\varepsilon(\eta)\, d\Gamma_\eta,$$

діє з простору $C(\partial F_{x^\alpha})$ у простір $C(\partial F_{x^\alpha})$, а функція $\psi^\varepsilon(\xi)$ є розв'язком рівняння

$$\psi^\varepsilon(\xi) = -\varepsilon\sigma(x^\alpha + \varepsilon\xi, s + \varepsilon N\psi^\varepsilon(\xi)). \tag{3.3.5}$$

Тут через N позначений оператор «Neumann to Dirichlet», який нормальній похідній на межі ∂F_{x^α} розв'язку задачі (3.3.1) ставить у відповідність значення самого розв'язку на цій межі. Позначимо оператор

$$A\psi^\varepsilon := -\varepsilon\sigma(x^\alpha + \varepsilon\xi, s + \varepsilon N\psi^\varepsilon)$$

і запишемо рівняння (3.3.5) у вигляді

$$\psi^\varepsilon = A\psi^\varepsilon. \tag{3.3.6}$$

Покажемо, що при малих ε рівняння (3.3.6) має єдиний розв'язок у просторі $C(\partial F_{x^\alpha})$. Насамперед, якщо це рівняння має розв'язок, то внаслідок властивостей функції $\sigma(x,u)$ та обмеженості оператора N він повинен задовольняти нерівності:

$$\|\psi^\varepsilon\|_{C(\partial F_x)} \leqslant C_1\varepsilon\left(1 + s^\Theta + \varepsilon^\Theta\|\psi^\varepsilon\|^\Theta_{C(\partial F_x)}\right),$$

з якої випливає наступна апріорна оцінка

$$\|\psi^\varepsilon\|_{C(\partial F_x)} \leqslant C_2\varepsilon. \tag{3.3.7}$$

Тоді внаслідок обмеженості оператора N, властивостей функції $\sigma(x,u)$ й апріорної оцінки (3.3.7) маємо

$$\begin{aligned}
&\|A\psi_1^\varepsilon - A\psi_2^\varepsilon\|_{C(\partial F_{x^\alpha})} = \varepsilon \max_{\xi\in\partial F_{x^\alpha}} |\sigma(x^\alpha + \varepsilon\xi, s + \varepsilon N\psi_1^\varepsilon) - \sigma(x^\alpha + \varepsilon\xi, s + \varepsilon N\psi_2^\varepsilon)| \leqslant \\
&\leqslant \varepsilon^2 \max_{\xi\in\partial F_{x^\alpha}} \left(1 + |s + \varepsilon N\psi_1^\varepsilon|^{\Theta-1} + |s + \varepsilon N\psi_2^\varepsilon|^{\Theta-1}\right)|N\psi_1^\varepsilon - N\psi_2^\varepsilon| \leqslant \\
&\leqslant C_3\varepsilon^2\|\psi_1^\varepsilon - \psi_2^\varepsilon\|_{C(\partial F_{x^\alpha})},
\end{aligned}$$

звідки випливає, що при малих ε оператор A є стискаючим і, отже, існує єдиний розв'язок рівняння (3.3.6) у просторі $C(\partial F_{x^\alpha})$, що задовольняє оцінці (3.3.7).

Крім того, функція $\psi^\varepsilon(\xi)$ є нормальною похідною розв'язку $v_\alpha^\varepsilon(\xi)$ на межі ∂F_{x^α}, тоді для функції $v_\alpha^\varepsilon(\xi)$ у силу принципу максимуму справедлива оцінка

$$\max_{\xi\in\mathbb{R}^n\setminus F_{x^\alpha}} |v_\alpha^\varepsilon(\xi)| \leqslant \max_{\xi\in\partial F_{x^\alpha}} |v_\alpha^\varepsilon(\xi)| = \|N\psi^\varepsilon(\xi)\|_{C(\partial F_{x^\alpha})} \leqslant C_4\varepsilon.$$

Оцінка (3.3.2) доведена.

Доведемо оцінку (3.3.3). У силу властивостей потенціалу простого шару існує обмежений зворотний оператор $(I+R)^{-1}$, тоді з рівняння (3.3.4) щільність $\rho^\varepsilon(\xi)$ дорівнює

$$\rho^\varepsilon(\xi) = -\frac{1}{2\pi}(I+R)^{-1}\psi^\varepsilon,$$

і для неї в наслідок (3.3.7) справедлива оцінка

$$\|\rho^\varepsilon\|_{C(\partial F_{x^\alpha})} = \frac{1}{2\pi}\|(I+R)^{-1}\psi^\varepsilon\|_{C(\partial F_{x^\alpha})} \leqslant C_5\varepsilon.$$

Тоді при $\xi \in \Pi^{+\delta} \setminus \Pi^{-\delta}$ маємо

$$\left|\frac{\partial v_\alpha^\varepsilon(\xi)}{\partial \xi_i}\right| = \left|\int\limits_{\partial F_{x^\alpha}} \frac{(\eta_i - \xi_i)\rho^\varepsilon(\eta)}{|\eta-\xi|^3}\, d\Gamma_\eta\right| \leqslant \int\limits_{\partial F_{x^\alpha}} \frac{|\rho^\varepsilon(\eta)|}{|\eta-\xi|^2}\, d\Gamma_\eta \leqslant$$
$$\leqslant \frac{C_5\varepsilon}{\delta}\int\limits_{\partial F_{x^\alpha}} \frac{1}{|\eta-\xi|}\, d\Gamma_\eta \leqslant \frac{C_6\varepsilon}{\delta},$$

звідки випливає оцінка (3.3.3).

Лема 3.1 доведена. □

Позначимо через $V_z(\xi) = V(\xi, z)$ – розв'язок задачі (3.2.3) при $F = F_z$ (залежність від $i = 1, 2, 3$ опускаємо). Для функції $V_z(\xi)$ справедлива наступна лема.

Лема 3.2. *Для розв'язку* $V_z(\xi)$ *задачі* (3.2.3) *справедлива оцінка*

$$\left\|D^\lambda V_{z_1} - D^\lambda V_{z_2}\right\|_{C(\Pi\setminus\Pi^{-\delta})} \leqslant C|z_1 - z_2|,\ |\lambda| = 0, 1. \tag{3.3.8}$$

Доведення. Позначимо через $R(\xi)$ Π-періодичний фундаментальний розв'язок рівняння Лапласа в $\mathbb{R}^3$, тобто функцію, яка задовольняє співвідношенням

$$\Delta R(\xi) = -\sum_{m\in\mathbb{Z}^3} \delta(\xi - mh) + \frac{1}{|\Pi|}, \quad R(\xi + h) = R(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^3, \tag{3.3.9}$$

де $m = \{m_1, m_2, m_3\} \in \mathbb{Z}^3$, $m_i \in \mathbb{Z}$, $h = \left\{h_1 e^1, h_2 e^2, h_3 e^3\right\}$, $mh = \sum_{i=1}^3 m_i h_i e^i$, e^i – орт осі ξ_i.

Така функція вивчалася в роботах [49, 50]. Зокрема було показано, що при $\xi \in \Pi$

$$R(\xi) = \frac{1}{4\pi|\xi|} + (B\xi, \xi), \tag{3.3.10}$$

де B – симетрична 3×3 матриця.

За допомогою ядра $R(\xi)$ можна побудувати потенціали простого й подвійного шарів, які внаслідок (3.3.10) мають такі ж властивості, що й відповідні потенціали з н'ютоновим ядром $\dfrac{1}{4\pi|\xi|}$. Ґрунтуючись на цьому, одержимо для розв'язку $V_z(\xi)$ задачі (3.2.3) на $F = F_z$ подання, що приводить до необхідної оцінки (3.3.8).

Для цього продовжимо $V_z(\xi)$ періодично (з паралелепіпедним періодом Π) на весь простір $\mathbb{R}^3$. Отримана функція $\tilde{V}_z(\xi)$ задовольняє співвідношенням

$$\Delta\tilde{V}_z(\xi) = 0, \quad \tilde{V}_z(\xi + h) = \tilde{V}_z(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^3 \setminus \tilde{F}_z, \tag{3.3.11}$$

$$\frac{\partial \tilde{V}_z}{\partial \nu} = \frac{\partial \xi_i}{\partial \nu}, \quad \xi \in \partial \tilde{F}_z, \tag{3.3.12}$$

де $\tilde{F}_z = \bigcup\limits_m (F_z + mh)$, $\partial \tilde{F}_z = \bigcup\limits_m (\partial F_z + mh)$.

Будемо шукати розв'язок $\tilde{V}_z(\xi)$ у вигляді потенціалу простого шару з ядром $R(\xi)$

$$\tilde{V}_z(\xi) = \int\limits_{\partial F_z} R(\xi - \eta)\rho_z(\eta)\, d\Gamma_\eta, \tag{3.3.13}$$

з щільністю $\rho_z(\eta)$ з нульовим середнім

$$\int\limits_{\partial F_z} \rho_z(\eta)\, d\Gamma_\eta = 0.$$

Тоді у силу властивості (3.3.9) ядра $R(\xi)$ виконуються рівності (3.3.11). Нехай функція (3.3.13) задовольняє граничній умові (3.3.12). Враховуючи, що формула для нормальної похідної функції (3.3.13) на ∂F така ж, як для н'ютонова потенціалу простого шару, одержуємо для щільності $\rho_z(\eta)$ інтегральне рівняння

$$\rho_z(\xi) - \int\limits_{\partial F_z} K_z(\xi, \eta)\rho_z(\eta)\, d\Gamma_\eta = \psi_z(\xi),\ \xi \in \partial F_z, \tag{3.3.14}$$

де

$$\begin{gathered} \psi_z(\xi) = -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial \xi_i}{\partial \nu_\xi}, \quad \xi \in \partial F_z, \\ K_z(\xi, \eta) = -2\frac{\partial}{\partial \nu_\xi} R(\xi - \eta) = -2\left(\nabla R(\xi - \eta), \nu_\xi\right), \quad \xi, \eta \in \partial F_z. \end{gathered} \tag{3.3.15}$$

З (3.3.10) випливає, що інтегральний оператор K_z з ядром $K_z(\xi, \eta)$ діє із простору $\hat{C}(\partial F_z)$ (неперервних на ∂F_z функцій з нульовим середнім) у нього ж як цілком неперервний оператор. Права частина рівняння (3.3.14) належить тому ж простору $\hat{C}(\partial F_z)$. Тому розв'язок рівняння (3.3.14) належить $\hat{C}(\partial F_z)$. Існування такого розв'язку випливає з теорем Фредгольма для цілком неперервного оператора K_z, оскільки відповідне однорідне рівняння для сполученого до K_z оператора не має ненульових розв'язків. (Існування такого розв'язку означало б, що існує ненульовий розв'язок задачі Діріхле для рівняння Лапласа в області F_z з нульовою граничною умовою, що суперечить принципу максимума).

Покладемо

$$\begin{aligned}
&\hat{\psi}_z(\xi') := J_z(f_z(\xi'))\psi(f_z(\xi')),\ \xi' \in \partial F,\\
&K_z(\xi', \eta') := J_z(f_z(\xi'))K_z(f_z(\xi'), f_z(\eta'))J_z(f_z(\eta')),\ \xi', \eta' \in \partial F,
\end{aligned} \tag{3.3.16}$$

де $J_z(\xi)$ – якобіан відображення $f_z^{-1}(\xi) : \partial F_z \to \partial F$. Тоді рівняння (3.3.14) для функції $\hat{\rho}_z(\xi') := J_z(f_z(\xi'))\rho_z(f_z(\xi'))$ набуває вигляду

$$\hat{\rho}_z(\xi') - \int\limits_{\partial F} \hat{K}_z(\xi', \eta')\hat{\rho}_z(\eta')\, d\Gamma_{\eta'} = \hat{\psi}_z(\xi'),\ \xi' \in \partial F. \tag{3.3.17}$$

У силу гладкості поверхні ∂F $\left(\partial F \subset C^1\right)$ та (3.1.2), (3.3.15), (3.3.16) справедливі оцінки

$$\left|\hat{K}_z(\xi', \eta') - \hat{K}_0(\xi', \eta')\right| \leqslant \frac{C_1}{|\xi' - \eta'|}|z|, \tag{3.3.18}$$

$$\left|\hat{\psi}_z(\xi') - \hat{\psi}_0(\xi')\right| \leqslant C_2|z|. \tag{3.3.19}$$

Запишемо рівняння (3.3.17) в операторній формі в просторі $\hat{C}(\partial F)$:

$$\hat{\rho}_z - \hat{K}_0\hat{\rho}_z - \hat{\Lambda}_z\hat{\rho}_z = \hat{\psi}_0 + \hat{\delta}_0, \tag{3.3.20}$$

де $\hat{K}_0$, $\hat{\Lambda}_z$ – інтегральні оператори в $\hat{C}(\partial F)$ з ядрами $\hat{K}_0(\xi', \eta')$ та $\hat{\Lambda}_z(\xi', \eta') = \hat{K}_z(\xi', \eta') - \hat{K}_0(\xi', \eta')$, а $\hat{\delta}_0(\xi') = \hat{\psi}_z(\xi') - \hat{\psi}_0(\xi')$. У силу (3.3.18), (3.3.19) норми оператора $\hat{\Lambda}_z$ і вектора $\hat{\delta}_0$ мають оцінки

$$\left\|\hat{\Lambda}_z\right\|_{\hat{C}(\partial F)} \leqslant C_1|z|, \quad \left\|\hat{\delta}_0\right\|_{\hat{C}(\partial F)} \leqslant C_2|z|.$$

Тому з (3.3.20) випливає, що

$$\|\hat{\rho}_z - \hat{\rho}_0\|_{\hat{C}(\partial F)} \leqslant C_3|z|. \tag{3.3.21}$$

Розглянемо тепер відображення $f_{z_1z_2}(\xi) := f_{z_2} \circ f_{z_1}^{-1}(\xi) : \partial F_{z_1} \to \partial F_{z_2}$. У силу (3.1.2) для $f_{z_1z_2}(\xi)$ справедлива оцінка

$$\|f_{z_1z_2} - I\|_{C^1(\Omega)} = \|f_{z_2}f_{z_1}^{-1} - I\|_{C^1(\Omega)} = \|f_{z_2} - f_{z_1}\|_{C^1(\Omega)}\|f_{z_1}^{-1}\|_{C^1(\Omega)} \leqslant C|z_2 - z_1|.$$

Користуючись цією оцінкою та (3.3.21), отримаємо

$$\|\hat{\rho}_{z_2} - \hat{\rho}_{z_1}\|_{\hat{C}(\partial F)} \leqslant C_4|z_2 - z_1|. \tag{3.3.22}$$

Згідно з визначенням функції $\tilde{V}_z(\xi)$ (3.3.13) розв'язок $V_z(\xi)$ задачі (3.2.3) при $\xi \in \Pi \setminus \Pi^{-\delta}$ представим у вигляді

$$V_z(\xi) = \int\limits_{\partial F} R(\xi - f_z(\eta'))\, \hat{\rho}_z(\eta')\, d\Gamma_{\eta'}.$$

Звідси, враховуючи (3.3.10), (3.3.22), одержуємо оцінку (3.3.8), яку шукали.

Лема 3.2 доведена. □

3.4 Доведення Теореми 3.1

Виведення формул (3.2.1) та (3.2.2) засновано на вивченні граничного переходу в умовах 1), 2) Теореми 2.2 і вимагає побудови відповідних апроксимацій мінімізантів функціоналів (2.3.6) при $s \in \mathbb{R}$ та (2.3.1) при $\ell = e^i$ – орту осі $x_i \, (i = \overline{1,3})$ в областях $K_h^z \cap \Omega^\varepsilon$.

Проведемо попередню побудову. Припустимо, що простір $\mathbb{R}^3$ розрізаний на непересічні паралелепіпеди $\Pi_{x^\alpha}^\varepsilon$, побудуємо концентричні з ними паралелепіпеди $\Pi_{x^\alpha}^{\pm\delta\varepsilon} = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : |x_i - x_i^\alpha| \leqslant \dfrac{\theta_i \varepsilon}{2}(1 \pm \delta), i = \overline{1,3} \right\}$ $(0 < \delta \ll 1)$. Із цими паралелепіпедами зв'яжемо розбиття одиниці $\{\varphi_\alpha^\varepsilon(x)\}_\alpha$ – набір двічі неперервно-диференційованих функцій, що задовольняють наступні умови: $\varphi_\alpha^\varepsilon(x) = 1$ при $x \in \Pi_{x^\alpha}^{-\delta\varepsilon}$, $\varphi_\alpha^\varepsilon(x) = 0$ при $x \notin \Pi_{x^\alpha}^{+\delta\varepsilon}$, $\sum\limits_\alpha \varphi_\alpha^\varepsilon(x) = 1$, $|D^\lambda \varphi_\alpha^\varepsilon(x)| \leqslant \dfrac{C}{\varepsilon^{|\lambda|}\delta^{|\lambda|}}$ $(|\lambda| = 0,\, 1,\, 2)$ при $x \in \Omega$. Такі функції розглядалися в Лемі 1.1.

1. Виведення формули (3.2.1)**.** Визначимо функцію

$$v^\varepsilon(x) = s + \varepsilon \sum_\alpha v_\alpha^\varepsilon\left(\frac{x - x^\alpha}{\varepsilon}\right) \varphi_\alpha^\varepsilon(x), \quad x \in \Omega^\varepsilon,\, s \in \mathbb{R}. \tag{3.4.1}$$

де $\{\varphi_\alpha^\varepsilon(x)\}_\alpha$ – розбиття одиниці, описане вище, а функції $v_\alpha^\varepsilon(\xi)$ – розв'язок задачі (3.3.1) для даного s.

Будемо шукати функцію, яка мінімізує функціонал (2.3.6) в області $K_h^z \cap \Omega^\varepsilon$ у вигляді

$$w^\varepsilon(x) = v^\varepsilon(x) + \hat{v}^\varepsilon(x), \tag{3.4.2}$$

де функція $v^\varepsilon(x)$ визначена формулою (3.4.1). Тоді функція $\hat{v}^\varepsilon(x)$ повинна мінімізувати функціонал

$$J[\hat{v}^\varepsilon] = I_0(\varepsilon, h) + I_1(\varepsilon, h) + I_2(\varepsilon, h)$$

у класі функцій $H^1(K_h^z \cap \Omega^\varepsilon)$, де

$$I_0(\varepsilon,h) = \int\limits_{K_h^z\cap\Omega^\varepsilon} \left[|\nabla \hat{v}^\varepsilon(x)|^2 + h^{-2-\tau}|\hat{v}^\varepsilon(x)|^2\right] dx,$$

$$I_1(\varepsilon,h) = -2\int\limits_{K_h^z\cap\Omega^\varepsilon} \left[\Delta v^\varepsilon(x)\hat{v}^\varepsilon(x) - h^{-2-\tau}(v^\varepsilon(x)-s)\hat{v}^\varepsilon(x)\right] dx,$$

$$I_2(\varepsilon,h) = \int\limits_{K_h^z\cap\partial F^\varepsilon} \left[g^\varepsilon(x, v^\varepsilon+\hat{v}^\varepsilon) - g^\varepsilon(x,v^\varepsilon) + 2\frac{\partial v^\varepsilon(x)}{\partial\nu}\hat{v}^\varepsilon(x)\right] d\Gamma.$$

Оскільки $J[\hat{v}^\varepsilon] \leqslant J[0] = 0$, то

$$I_0(\varepsilon,h) \leqslant |I_1(\varepsilon,h)| + |I_2(\varepsilon,h)|. \tag{3.4.3}$$

Оцінимо кожен доданок правої частини цієї нерівності.

З (3.4.1), (3.3.2), (3.3.3) і нерівності Коші-Буняковського одержуємо

$$|I_1(\varepsilon,h)| \leqslant 2\left|\int\limits_{K_h^z\cap\Omega^\varepsilon} \Delta v^\varepsilon \hat{v}^\varepsilon\, dx\right| + 2h^{-2-\tau}\left|\int\limits_{K_h^z\cap\Omega^\varepsilon} (v^\varepsilon - s)\hat{v}^\varepsilon\, dx\right| \leqslant$$
$$\leqslant 2\sqrt{\int\limits_{K_h^z\cap\Omega^\varepsilon} |\Delta v^\varepsilon|^2\, dx}\sqrt{\int\limits_{K_h^z\cap\Omega^\varepsilon} |\hat{v}^\varepsilon|^2\, dx} + 2h^{-2-\tau}\sqrt{\int\limits_{K_h^z\cap\Omega^\varepsilon} |v^\varepsilon - s|^2\, dx}\times$$
$$\times\sqrt{\int\limits_{K_h^z\cap\Omega^\varepsilon} |\hat{v}^\varepsilon|^2\, dx} \leqslant 2h^{1+\tau/2}I_0^{1/2}(\varepsilon,h)\sqrt{\sum_\alpha \int\limits_{\Pi^\varepsilon_{x^\alpha}\setminus\Pi^{-\delta\varepsilon}_{x^\alpha}} |\Delta v^\varepsilon|^2\, dx +}$$
$$+ 2h^{-1-\tau/2}I_0^{1/2}(\varepsilon,h)\sqrt{\sum_\alpha \int\limits_{\Pi^\varepsilon_{x^\alpha}\setminus F^\varepsilon_{x^\alpha}} |v^\varepsilon - s|^2\, dx} \leqslant C_1 I_0^{1/2}(\varepsilon,h)\times$$
$$\times\left(h^{1+\tau/2}\sqrt{\frac{1}{\delta^4}\sum_\alpha mes(\Pi^\varepsilon_{x^\alpha}\setminus\Pi^{-\delta\varepsilon}_{x^\alpha})} + h^{-1-\tau/2}\sqrt{\varepsilon^4\sum_\alpha mes(\Pi^\varepsilon_{x^\alpha}\setminus F^\varepsilon_{x^\alpha})}\right) \leqslant$$
$$\leqslant C_2 I_0^{1/2}(\varepsilon,h)\left(\frac{h^{3/2+1/2+\tau/2}}{\delta^{3/2}} + h^{3/2-1-\tau/2}\varepsilon^2\right).$$

Таким чином, при $\delta = h^{1/3+\tau/6}$ і $0 < \varepsilon \leqslant h^{1/2+3\tau/8}$ маємо

$$|I_1(\varepsilon,h)| \leqslant Ch^{3/2+\tau/4}I_0^{1/2}(\varepsilon,h). \tag{3.4.4}$$

Одержимо оцінку для $I_2(\varepsilon, h)$. У силу Твердження 2.2

$$\forall\, x \in K_h^z \cap \Omega^\varepsilon : \quad |w^\varepsilon(x)| \leqslant |s|.$$

Тоді внаслідок визначень функцій $w^\varepsilon(x)$ (3.4.2), $g^\varepsilon(x, s)$ (2.3.7), властивостей функції $\sigma(x, u)$ та інтегральної теореми про середнє, маємо

$$|I_2(\varepsilon, h)| = \left| \int\limits_{K_h^z \cap \partial F^\varepsilon} \left[g^\varepsilon(x, v^\varepsilon + \hat{v}^\varepsilon) - g^\varepsilon(x, v^\varepsilon) + 2\frac{\partial v^\varepsilon(x)}{\partial \nu} \hat{v}^\varepsilon(x) \right] d\Gamma \right| =$$
$$= 2\varepsilon \left| \int\limits_{K_h^z \cap \partial F^\varepsilon} \left[\int\limits_{v^\varepsilon}^{v^\varepsilon + \hat{v}^\varepsilon} \sigma(x, r)\, dr - \sigma(x, v^\varepsilon)\hat{v}^\varepsilon \right] d\Gamma \right| \leqslant$$
$$\leqslant 2\varepsilon \int\limits_{K_h^z \cap \partial F^\varepsilon} |\sigma(x, v^\varepsilon + \tilde{v}^\varepsilon) - \sigma(x, v^\varepsilon)|\, |\hat{v}^\varepsilon|\, d\Gamma \leqslant$$
$$\leqslant C_1(1 + 2|s|^{\Theta - 1})\varepsilon \int\limits_{K_h^z \cap \partial F^\varepsilon} |\hat{v}^\varepsilon|^2\, d\Gamma = C_2 \varepsilon \int\limits_{K_h^z \cap \partial F^\varepsilon} |\hat{v}^\varepsilon|^2\, d\Gamma.$$

Тут $0 \leqslant \tilde{v}^\varepsilon(x) \leqslant \hat{v}^\varepsilon(x)$ при $\hat{v}^\varepsilon(x) \geqslant 0$ та $\hat{v}^\varepsilon(x) \leqslant \tilde{v}^\varepsilon(x) \leqslant 0$ при $\hat{v}^\varepsilon(x) < 0$.

Для будь-якої функції $\varphi \in H^1(\Omega^\varepsilon)$ справедлива інтегральна нерівність

$$\varepsilon \int\limits_{K_h^z \cap \partial F^\varepsilon} \varphi^2\, d\Gamma_x \leqslant C \left(\int\limits_{K_h^z \cap \Omega^\varepsilon} \varphi^2\, dx + \varepsilon^2 \int\limits_{K_h^z \cap \Omega^\varepsilon} |\nabla_x \varphi|^2\, dx \right). \tag{3.4.5}$$

Дійсно, внаслідок вкладення $H^1(\Pi \setminus F_x) \subset L^2(\partial F_x)$ для будь-якої функції $\varphi \in H^1(\Pi \setminus F_x)$ справедлива нерівність

$$\|\varphi\|^2_{L^2(\partial F_x)} \leqslant C\, \|\varphi\|^2_{H^1(\Pi \setminus F_x)},$$

або

$$\int\limits_{\partial F_x} \varphi^2\, d\Gamma_\xi \leqslant C \left(\int\limits_{\Pi \setminus F_x} \varphi^2\, d\xi + \int\limits_{\Pi \setminus F_x} |\nabla_\xi \varphi|^2\, d\xi \right).$$

Зробимо заміну $\xi = \frac{x - x^\alpha}{\varepsilon}$, підсумуємо по всіх комірках області $K_h^z \cap \Omega^\varepsilon$ та помножимо на ε^3, тоді одержимо нерівність (3.4.5).

Через (3.4.5) при $0 < \varepsilon \leqslant h^{1+\tau/2}$ для $I_2(\varepsilon, h)$ справедлива оцінка

$$|I_2(\varepsilon, h)| \leqslant C h^{2+\tau} I_0(\varepsilon, h). \tag{3.4.6}$$

З (3.4.3), (3.4.4), (3.4.6) при $0 < \varepsilon \leqslant h^{1+\tau/2}$, $\delta = h^{1/3+\tau/6}$ одержуємо оцінку для $I_0(\varepsilon, h)$

$$I_0(\varepsilon, h) = O(h^{3+\tau/2}) = o(h^3).$$

Отже, функція $\hat{v}^\varepsilon$ дає малий внесок у граничну функцію поглинання. Тоді згідно з (3.4.2) функція $v^\varepsilon(x)$ при малих h апроксимує мінімізант $w^\varepsilon(x)$ функціонала (2.3.6) в області $K_h^z \cap \Omega^\varepsilon$.

Підставляємо $w^\varepsilon(x)$ у вигляді (3.4.2) в (2.3.6), враховуючи властивості функції $\sigma(x, u)$, при $0 < \varepsilon \leqslant h^{1+\tau/2}$ та $\delta = h^{1/3+\tau/6}$ одержуємо

$$c(z, s; \varepsilon, h) = \int\limits_{K_h^z \cap \Omega^\varepsilon} \left[|\nabla v^\varepsilon|^2 + h^{-2-\tau}|v^\varepsilon - s|^2\right] dx + \int\limits_{K_h^z \cap \partial F^\varepsilon} g^\varepsilon(x, v^\varepsilon) d\Gamma + o(h^3) =$$

$$= \int\limits_{K_h^z \cap \partial F^\varepsilon} 2\varepsilon \int\limits_0^s \sigma(x, r)\, dr d\Gamma + o(h^3) = \frac{2|\partial F_z| h^3}{|\Pi|} \int\limits_0^s \sigma(z, r)\, dr + o(h^3).$$

Звідси робимо висновок, що умова 2) Теореми 2.2 виконується. Розділивши $c(z, s; \varepsilon, h)$ на h^3 та перейшовши до границі при $h \to 0$, одержимо вираз для функції поглинання (3.2.1).

2. Виведення формули (3.2.2)**.** Розглянемо в області $K_h^z \cap \Omega^\varepsilon$ функції

$$U_i^\varepsilon(x) = (x_i - z_i) - \varepsilon \sum_\alpha \tilde{V}_i \left(\frac{x - x^\alpha}{\varepsilon}, x^\alpha\right) \varphi_\alpha^\varepsilon(x),\ (i = \overline{1, 3}), \tag{3.4.7}$$

де $\tilde{V}_i(\xi, \eta)$ – періодичне продовження розв'язку $V_i(\xi, \eta)$ задачі (3.2.3) на весь простір $\mathbb{R}^3$, а $\{\varphi_\alpha^\varepsilon(x)\}_\alpha$ – розбиття одиниці. Із властивостей функції $\tilde{V}_i(\xi, \eta)$ випливає, що

$$\Delta U_i^\varepsilon(x) =$$

$$= -\varepsilon \sum_\alpha \left[\tilde{V}_i \left(\frac{x - x^\alpha}{\varepsilon}, x^\alpha\right) \Delta \varphi_\alpha^\varepsilon(x) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \tilde{V}_i \left(\frac{x - x^\alpha}{\varepsilon}, x^\alpha\right)}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi_\alpha^\varepsilon(x)}{\partial x_j}\right], \tag{3.4.8}$$

$$x \in K_h^z \cap \Omega^\varepsilon,$$

$$\frac{\partial U_i^\varepsilon}{\partial \nu} = 0,\ x \in \partial F_{x^\alpha}^\varepsilon. \tag{3.4.9}$$

Будемо шукати функцію $w_i^\varepsilon(x)$, яка мінімізує функціонал (2.3.1) при $\ell = e^i$ у вигляді

$$w_i^\varepsilon(x) = U_i^\varepsilon(x) + v_i^\varepsilon(x), \tag{3.4.10}$$

де функція $U_i^\varepsilon(x)$ визначена рівністю (3.4.7), тоді функція $v_i^\varepsilon(x)$ повинна мінімізувати функціонал

$$J[v_i^\varepsilon] = I_0(\varepsilon,h) + I_1(\varepsilon,h) + I_2(\varepsilon,h),$$

у класі функцій $H^1(K_h^z \cap \Omega^\varepsilon)$, де

$$I_0(\varepsilon,h) = \int\limits_{K_h^z\cap\Omega^\varepsilon} \left[|\nabla v_i^\varepsilon|^2 + h^{-2-\tau}|v_i^\varepsilon|^2\right] dx,$$

$$I_1(\varepsilon,h) = 2\int\limits_{K_h^z\cap\Omega^\varepsilon} (\nabla U_i^\varepsilon, \nabla v_i^\varepsilon)\, dx,$$

$$I_2(\varepsilon,h) = 2h^{-2-\tau}\int\limits_{K_h^z\cap\Omega^\varepsilon} (U_i^\varepsilon - (x_i - z_i))v_i^\varepsilon(x)\, dx.$$

Так як $J[v_i^\varepsilon] \leqslant J^\varepsilon[0] = 0$, то має місце нерівність

$$I_0(\varepsilon,h) \leqslant |I_1(\varepsilon,h)| + |I_2(\varepsilon,h)|. \tag{3.4.11}$$

Оцінимо кожен доданок у правій частині.

Внаслідок нерівності Коші-Буняковського, (3.4.7) і визначення $I_0(\varepsilon,h)$ при $0 < \varepsilon \leqslant h^{1+\tau}$ одержимо оцінку $I_2(\varepsilon,h)$

$$\begin{aligned} |I_2(\varepsilon,h)| \leqslant 2h^{-2-\tau}\|U_i^\varepsilon - (x_i - z_i)\|_{L^2(K_h^z\cap\Omega^\varepsilon)}\|v_i^\varepsilon\|_{L^2(K_h^z\cap\Omega^\varepsilon)} \leqslant \\ \leqslant Ch^{\frac{3+\tau}{2}} I_0^{1/2}(\varepsilon,h). \end{aligned} \tag{3.4.12}$$

Оцінимо $I_1(\varepsilon,h)$. Застосувавши інтегрування частинами й рівність (3.4.9), запишемо

$$I_1(\varepsilon,h) = -2\int\limits_{K_h^z\cap\Omega^\varepsilon} \Delta U_i^\varepsilon v_i^\varepsilon\, dx + 2\int\limits_{\partial K_h^z\cap\Omega^\varepsilon} \frac{\partial U_i^\varepsilon}{\partial\nu} v_i^\varepsilon\, d\Gamma. \tag{3.4.13}$$

Внаслідок Леми 3.2 і періодичності $\tilde V_i(\xi,\eta)$ по ξ при $x \in \Pi_{x^\alpha}^{+\delta\varepsilon} \cap \Pi_{x^\beta}^{+\delta\varepsilon}$ справедлива нерівність:

$$\begin{aligned} \left| D_x^\lambda \tilde V_i\left(\frac{x - x^\alpha}{\varepsilon}, x^\alpha\right) - D_x^\lambda \tilde V_i\left(\frac{x - x^\beta}{\varepsilon}, x^\beta\right)\right| \leqslant \\ \leqslant \frac{C}{\varepsilon^{|\lambda|}}|x^\alpha - x^\beta| \leqslant C\varepsilon^{1-|\lambda|},\ |\lambda| = 0,\ 1. \end{aligned} \tag{3.4.14}$$

Використовуючи цю оцінку, рівність (3.4.8) і властивості розбиття одиниці $\{\varphi_\alpha^\varepsilon(x)\}_\alpha$, одержуємо

$$\|\Delta U_i^\varepsilon\|_{L^2(K_h^z\cap\Omega^\varepsilon)} \leqslant Ch\delta^{-3/2}.$$

Звідки, згідно з визначенням $I_0(\varepsilon,h)$, при $\delta \geqslant h^{1/3}$ маємо

$$\left|\int\limits_{K_h^z\cap\Omega^\varepsilon} \Delta U_i^\varepsilon v_i^\varepsilon\,dx\right| \leqslant \|\Delta U_i^\varepsilon\|_{L^2(K_h^z\cap\Omega^\varepsilon)}\|v_i^\varepsilon\|_{L^2(K_h^z\cap\Omega^\varepsilon)} \leqslant$$
$$\leqslant C\delta^{-3/2}h^{2+\tau/2}I_0^{1/2}(\varepsilon,h) \leqslant Ch^{\frac{3+\tau}{2}}I_0^{1/2}(\varepsilon,h). \tag{3.4.15}$$

Внаслідок сильної зв'язності областей Ω^ε функція $v_i^\varepsilon \in H^1(K_h^z\cap\Omega^\varepsilon)$ може бути продовжена до функції $\tilde{v}_i^\varepsilon \in H^1(K_h^z)$ з виконанням нерівності (1.1.5). Крім того, згідно з Лемою 2.1 [31, гл. 4] функція $\tilde{v}_i^\varepsilon(x)$ задовольняє нерівності

$$\int\limits_{\partial K_h^z} |\tilde{v}_i^\varepsilon|^2\,d\Gamma \leqslant 6\left[\varkappa\int\limits_{K_h^z} |\nabla\tilde{v}_i^\varepsilon|^2\,dx + \left(\frac{4}{\varkappa}+\frac{1}{h}\right)\int\limits_{K_h^z} |\tilde{v}_i^\varepsilon|^2\,dx\right]. \tag{3.4.16}$$

Використовуючи нерівності (1.1.5), (3.4.16) при $\varkappa = h^{1+\frac{\tau}{2}}$, одержуємо оцінку поверхневого інтеграла в (3.4.13):

$$\left|\int\limits_{\partial K_h^z\cap\Omega^\varepsilon} \frac{\partial U_i^\varepsilon}{\partial\nu}v_i^\varepsilon\,d\Gamma\right| \leqslant \left[\int\limits_{\partial K_h^z}\left|\frac{\partial U_i^\varepsilon}{\partial\nu}\right|^2\,d\Gamma\right]^{1/2}\left[\int\limits_{\partial K_h^z}|\tilde{v}_i^\varepsilon|^2\,d\Gamma\right]^{1/2} \leqslant$$
$$\leqslant C_1h\left[h^{1+\tau/2}\int\limits_{K_h^z}|\nabla\tilde{v}_i^\varepsilon|^2\,dx + \frac{4+h^{\tau/2}}{h^{1+\tau/2}}\int\limits_{K_h^z}|\tilde{v}_i^\varepsilon|^2\,dx\right]^{1/2} \leqslant$$
$$\leqslant C_1h^{2+\tau/2}\left[\int\limits_{K_h^z}|\nabla\tilde{v}_i^\varepsilon|^2\,dx + \frac{4+h^{\tau/2}}{h^{2+\tau}}\int\limits_{K_h^z}|\tilde{v}_i^\varepsilon|^2\,dx\right]^{1/2} \leqslant$$
$$\leqslant C_2h^{2+\tau/2}\left[\int\limits_{K_h^z\cap\Omega^\varepsilon}|\nabla v_i^\varepsilon|^2\,dx + \frac{4+h^{\tau/2}}{h^{2+\tau}}\int\limits_{K_h^z\cap\Omega^\varepsilon}|v_i^\varepsilon|^2\,dx\right]^{1/2} \leqslant C_3h^{2+\tau/2}I_0^{1/2}(\varepsilon,h).$$

Звідси та з (3.4.13), (3.4.15) маємо

$$|I_1(\varepsilon,h)| \leqslant Ch^{1+\tau/2}I_0^{1/2}(\varepsilon,h). \tag{3.4.17}$$

З (3.4.11), (3.4.12), (3.4.17) при $0<\varepsilon\ll h^{1+\tau}$ одержуємо оцінку для $I_0(\varepsilon,h)$

$$I_0(\varepsilon,h) = \int\limits_{K_h^z\cap\Omega^\varepsilon}\left[|\nabla v_i^\varepsilon|^2 + h^{-2-\tau}|v_i^\varepsilon|^2\right]\,dx \leqslant Ch^{3+\tau} = o(h^3).$$

Отже, функція $v_i^\varepsilon(x)$ дає малий внесок у граничний тензор провідності. Таким чином, згідно з (3.4.10) функція U_i^ε при малих h апроксимує функцію $w_i^\varepsilon(x)$, яка мінімізує функціонал (2.3.1) при $\ell = e^i$.

Обчислимо елементи тензора провідності. Підставимо w_i^ε у вигляді (3.4.10) у формулу для $a_{ij}(z, \varepsilon, h)$ (2.3.3), одержуємо

$$a_{ij}(z,\varepsilon,h) = \sum_\alpha \varepsilon^2 \int\limits_{\Pi^\varepsilon_{x^\alpha}\setminus F^\varepsilon_{x^\alpha}} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{x_i - z_i}{\varepsilon} - \tilde{V}_i\left(\frac{x - x^\alpha}{\varepsilon}, x^\alpha\right)\right) \times$$
$$\times \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{x_j - z_j}{\varepsilon} - \tilde{V}_j\left(\frac{x - x^\alpha}{\varepsilon}, x^\alpha\right)\right) dx + o(h^3),$$

Враховуючи гладкість функцій $\tilde{V}_i(\xi, \eta)$, $a_{ij}(z, \varepsilon, h)$ представляємо у вигляді

$$a_{ij}(z,\varepsilon,h) = \delta_{ij} h^3 \left(1 - \frac{|F_z|}{|\mathit{\Pi}|}\right) - \frac{1}{|\mathit{\Pi}|} \int\limits_{K_h^z} \int\limits_{\mathit{\Pi}\setminus F_z} \left(\frac{\partial V_i(\xi,\eta)}{\partial \xi_j} + \frac{\partial V_j(\xi,\eta)}{\partial \xi_i}\right) d\xi d\eta +$$
$$+ \frac{1}{|\mathit{\Pi}|} \int\limits_{K_h^z} \int\limits_{\mathit{\Pi}\setminus F_z} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial V_i(\xi,\eta)}{\partial \xi_k} \frac{\partial V_j(\xi,\eta)}{\partial \xi_k} d\xi d\eta + o(h^3).$$

Оскільки, застосовуючи інтегрування частинами, формулу Гауса-Остроградського та (3.2.3), можна одержати рівність

$$\int\limits_{\mathit{\Pi}\setminus F_z} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial V_i}{\partial \xi_k} \frac{\partial V_j}{\partial \xi_k} d\xi = \int\limits_{\partial(\mathit{\Pi}\setminus F_z)} V_i \frac{\partial V_j}{\partial \nu} d\Gamma_\xi - \int\limits_{\mathit{\Pi}\setminus F_z} V_i \Delta V_j \, d\xi =$$
$$= - \int\limits_{\partial F_z} V_i \frac{\partial V_j}{\partial \nu} d\Gamma_\xi = \int\limits_{\partial(\mathit{\Pi}\setminus F_z)} V_i cos(\nu, \xi_j) \, d\Gamma_\xi = \int\limits_{\mathit{\Pi}\setminus F_z} \frac{\partial V_i}{\partial \xi_j} d\xi,$$

тоді елементи тензора провідності рівномірно по $\varepsilon < \varepsilon_0(h)$ будуть рівні:

$$a_{ij}(z,\varepsilon,h) = \delta_{ij} h^3 \left(1 - \frac{|F_z|}{|\Pi|}\right) - \frac{1}{|\Pi|} \int\limits_{K_h^z} \int\limits_{\Pi\setminus F_z} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial V_i(\xi,\eta)}{\partial \xi_k} \frac{\partial V_j(\xi,\eta)}{\partial \xi_k} d\xi d\eta + o(h^3).$$

Із цієї рівності робимо висновок, що виконується перша умова Теореми 2.2. Розділивши $a_{ij}(z, \varepsilon, h)$ на h^3 і перейшовши до границі при $h \to 0$, одержимо вираження для граничного тензора провідності (3.2.2).

Теорема 3.1 доведена.

РОЗДІЛ 4

УСЕРЕДНЕННЯ РІВНЯННЯ НЕСТАЦІОНАРНОЇ ДИФУЗІЇ В СИЛЬНО ЗВ'ЯЗНИХ ПОРИСТИХ СЕРЕДОВИЩАХ ЗІ ЗНЕСЕННЯМ ЧАСТОК РІДИНОЮ

Четвертий розділ присвячено дослідженню начально-крайової задачі для рівняння нестаціонарної дифузії з переносом часток дифундуючої речовини рідиною в сильно зв'язних перфорованих областях $\Omega^\varepsilon = \Omega \backslash F^\varepsilon$. Тут Ω – обмежена область, а F^ε – замкнута множина типу пористого тіла, поверхня якого має поглинаючу властивість, що описується нелінійною крайовою умовою Робена та залежить від параметра ε так, що при $\varepsilon \to 0$ множина F^ε стає все більш порізаною та розташовується в области Ω все більш щільно. Доведено, що при кожному фіксованому ε існує єдиний розв'язок $u^\varepsilon(x,t)$ початково-крайової задачі. Досліджено асимптотичну поведінку $u^\varepsilon(x,t)$ при $\varepsilon \to 0$ і визначено вид усередненої задачі. Результати цього розділу опубліковані в роботі [91] і матеріалах міжнародної конференції [99].

4.1 Постановка задачі

Нехай Ω – область в $\mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 2)$, обмежена гладкою поверхнею $\partial\Omega$. F^ε – замкнута множина в Ω, що залежить від малого параметра ε так, що при $\varepsilon \to 0$ множина F^ε стає все більш пористою й розташовується все більш щільно в Ω. Припустимо, що межа множини F^ε гладка, а області $\Omega^\varepsilon = \Omega \backslash F^\varepsilon$ задовольняють умови (1.1.1), (1.1.4), а тоді внаслідок Твердження 1.1 і умові сильної зв'язності (1.1.5).

В області $\Omega^\varepsilon \times (0,T)$ розглядається початково-крайова задача:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u^\varepsilon(t,x)}{\partial t} - \Delta u^\varepsilon(t,x) + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} v_i^\varepsilon(x) \dfrac{\partial u^\varepsilon(t,x)}{\partial x_i} = 0 \text{ в } \Omega^\varepsilon \times (0,T), \\ \dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial \nu} + \sigma^\varepsilon(x, u^\varepsilon) = 0 \text{ на } \partial F^\varepsilon \times (0,T), \\ u^\varepsilon(t,x) = 0 \text{ на } \partial\Omega \times (0,T), \\ u^\varepsilon(0,x) = \varphi(x) \text{ в } \Omega^\varepsilon. \end{cases} \tag{4.1.1}$$

Тут $\Delta = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ – оператор Лапласа, ν – одинична нормаль до межі ∂F^ε, зовнішня щодо області Ω^ε; функції $\varphi(x)$, $\sigma^\varepsilon(x,u)$ і вектор-функція $v^\varepsilon(x)$ задані.

Припустимо, що функція $\sigma^\varepsilon(x,u)$ задовольняє умови:

a_1: $\sigma^\varepsilon(x,u) \in L^\infty(\partial\Omega^\varepsilon; C^1(\mathbb{R}))$, $\sigma^\varepsilon(x,0)=0$;

a_2: $0 < \frac{\partial}{\partial u}\sigma^\varepsilon(x,u) \leqslant \hat{\sigma}^\varepsilon(x)$ і функція $\hat{\sigma}^\varepsilon(x)$ така, що для будь-якої кулі $B(\rho,z)$ радіуса ρ із центром у точці $z \in \Omega$

$$\int\limits_{\partial F^\varepsilon \cap B(\rho,z)} \hat{\sigma}^\varepsilon(x) d\Gamma < C_1\rho^n + C_2(\varepsilon)\rho^{n-1},$$

постійна C_1 не залежить від z, ρ, ε, $C_2(\varepsilon)$ не залежить від z, ρ та $C_2(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Щодо функції швидкості знесення часток $v^\varepsilon(x)$ припустимо виконання наступних умов:

b_1: $v^\varepsilon(x) \in (H^1(\Omega^\varepsilon))^n$ і нормальний компонент вектора швидкості $v^\varepsilon_\nu|_{\partial F^\varepsilon} = 0$;

b_2: $div\, v^\varepsilon = 0$, $x \in \Omega^\varepsilon$;

b_3: $\max\limits_{x\in\Omega^\varepsilon} |v_i^\varepsilon(x)| \leqslant C$, де константа C не залежить від ε.

Задача (4.1.1) описує дифузію часток у пористому середовищі з поглинанням на межі перфоруючої множини F^ε і переносом часток цієї множини рідиною, що рухається зі швидкістю $v^\varepsilon(x) = \{v_1^\varepsilon(x), v_2^\varepsilon(x), ..., v_n^\varepsilon(x)\}$.

Тут і далі використовуємо позначення функціональних просторів

$$H^1(\Omega^\varepsilon, \partial\Omega) = \{u \in H^1(\Omega^\varepsilon) : \, u|_{\partial\Omega} = 0\},$$
$$W(0,T;\Omega^\varepsilon,\partial\Omega) = \{u \in L^2(0,T;H^1(\Omega^\varepsilon,\partial\Omega)),\, u_t' \in L^2(0,T;(H^1(\Omega^\varepsilon,\partial\Omega))')\}.$$

Визначення 4.1. Узагальненим розв'язком задачі (4.1.1) будемо називати функцію $u^\varepsilon \in W(0,T;\Omega^\varepsilon,\partial\Omega)$, якщо $u^\varepsilon(0,x) = \varphi(x)$ і для будь-яких функцій $\vartheta(x) \in H^1(\Omega^\varepsilon,\partial\Omega)$ при майже усіх $t \in (0,T)$ виконується наступна інтегральна рівність

$$\langle (u^\varepsilon)_t', \vartheta\rangle + \int\limits_{\Omega^\varepsilon} \left\{ (\nabla u^\varepsilon, \nabla\vartheta) + \sum_{i=1}^n v_i^\varepsilon \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_i}\vartheta \right\} dx + \int\limits_{\partial F^\varepsilon} \sigma^\varepsilon(x,u^\varepsilon)\vartheta \, d\Gamma = 0.$$

Тут $\langle (u^\varepsilon)_t', \vartheta\rangle$ означає дію функціонала $(u^\varepsilon)_t' \in (H^1(\Omega^\varepsilon,\partial\Omega))'$ на елемент $\vartheta(x) \in H^1(\Omega^\varepsilon,\partial\Omega)$.

Зауваження 4.1. Таке визначення коректне при $\varphi(x) \in L^2(\Omega^\varepsilon)$, оскільки відповідно до Твердження 1.2 [115, с. 106] простір $W(0,T;\Omega^\varepsilon,\partial\Omega)$ вкладено в простір $C([0,T];L^2(\Omega^\varepsilon))$, тому рівність $u^\varepsilon(0,x) = \varphi(x)$ має сенс.

4.2 Існування та єдиність узагальненого розв'язку задачі (4.1.1)

Використовуючи операторний метод [115], доведемо наступну теорему. При доведенні використовуємо підхід, розвинений у роботі [106].

Теорема 4.1. *Нехай функція* $\varphi(x) \in H^1(\Omega^\varepsilon,\partial\Omega)$, *функція* $\sigma^\varepsilon(x,u)$ *задовольняє умови* a_1, a_2, *вектор-функція* $v^\varepsilon(x)$ *задовольняє умови* $b_1 - b_3$, *тоді при кожному фіксованому* ε *задача* (4.1.1) *має єдиний узагальнений розв'язок* $u^\varepsilon \in W(0,T;\Omega^\varepsilon,\partial\Omega)$.

Доведення. Визначимо оператор $A : H^1(\Omega^\varepsilon,\partial\Omega) \to (H^1(\Omega^\varepsilon,\partial\Omega))'$ наступним чином

$$\langle Au,\vartheta\rangle = \int\limits_{\Omega^\varepsilon} \left(\nabla u\nabla\vartheta + \sum_{i=1}^{n} v_i^\varepsilon \frac{\partial u}{\partial x_i}\vartheta\right) dx + \int\limits_{\partial F^\varepsilon} \sigma^\varepsilon(x,u)\vartheta\, d\Gamma, \quad u,\vartheta \in H^1(\Omega^\varepsilon,\partial\Omega).$$

Внаслідок Твердження 2.1 [115, гл. III] функція $u^\varepsilon \in W(0,T;\Omega^\varepsilon,\partial\Omega)$ є узагальненим розв'язком задачі (4.1.1), тоді й тільки тоді, коли вона є розв'язком наступної абстрактної задачі Коші

$$\begin{cases} (u^\varepsilon)'_t + Au^\varepsilon = 0 \text{ в } L^2(0,T;(H^1(\Omega^\varepsilon,\partial\Omega))'), \\ u^\varepsilon(0) = \varphi \text{ в } H^1(\Omega^\varepsilon,\partial\Omega). \end{cases} \tag{4.2.1}$$

Оскільки простори $(L^2(0,T;H^1(\Omega^\varepsilon,\partial\Omega)))'$ та $L^2(0,T;(H^1(\Omega^\varepsilon,\partial\Omega))')$ ізоморфні, то оператор $A : H^1(\Omega^\varepsilon,\partial\Omega) \to (H^1(\Omega^\varepsilon,\partial\Omega))'$ породжує свою реалізацію оператор $\mathcal{A} : L^2(0,T;H^1(\Omega^\varepsilon,\partial\Omega)) \to L^2(0,T;(H^1(\Omega^\varepsilon,\partial\Omega))')$, основні властивості якого такі ж самі, як і в оператора A.

Доведемо деякі властивості оператора A. Використовуючи нерівність Коші-Буняковського та властивості функцій $v^\varepsilon(x)$ і $\sigma^\varepsilon(x,u)$, одержимо наступну оцінку

$$|\langle Au^\varepsilon,\vartheta\rangle| \leqslant \left|\int\limits_{\Omega^\varepsilon} \nabla u^\varepsilon\nabla\vartheta\, dx\right| + \sum_{i=1}^{n}\left|\int\limits_{\Omega^\varepsilon} v_i^\varepsilon(x)\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_i}\vartheta\, dx\right| + \left|\int\limits_{\partial F^\varepsilon} \sigma^\varepsilon(x,u^\varepsilon)\vartheta\, d\Gamma\right| \leqslant$$

$$\leqslant \|\nabla u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}\|\nabla\vartheta\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)} + C\sum_{i=1}^{n}\left\|\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_i}\right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}\|\vartheta\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)} + \left|\int\limits_{\partial F^\varepsilon}\hat{\sigma}^\varepsilon(x)u^\varepsilon\vartheta\,d\Gamma\right| \leqslant$$

$$\leqslant (1+C)\|u^\varepsilon\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)}\|\vartheta\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)} + \left|\int\limits_{\partial F^\varepsilon}\hat{\sigma}^\varepsilon(x)^{1/2}u^\varepsilon\hat{\sigma}^\varepsilon(x)^{1/2}\vartheta\,d\Gamma\right| \leqslant$$

$$\leqslant (1+C)\|u^\varepsilon\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)}\|\vartheta\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)} + \|u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega,\mu^\varepsilon)}\|\vartheta\|_{L^2(\Omega,\mu^\varepsilon)},$$

де $L^2(\Omega,\mu^\varepsilon)$ – простір з мірою $d\mu^\varepsilon = \hat{\sigma}^\varepsilon(x)d\Gamma$.

Внаслідок властивості a_2 функції $\sigma^\varepsilon(x,u)$ міра μ^ε задовольняє властивості

$$\int\limits_{\partial F^\varepsilon\cap B(\rho,z)} d\mu^\varepsilon < C_1\rho^n + C_2(\varepsilon)\rho^{n-1},$$

тоді з узагальненої теореми Соболєва (Теорема 1.1) випливає вкладення простору $H^1(\Omega)$ у простір $L^2(\Omega,\mu^\varepsilon)$. Користуючись цією теоремою, а також нерівністю (1.1.5) для областей Ω^ε, остаточно одержимо

$$\|Au^\varepsilon\|_{(H^1(\Omega^\varepsilon,\partial\Omega))'} = \sup_{\|\vartheta\|\leqslant 1}|\langle Au^\varepsilon,\vartheta\rangle| \leqslant \tilde{C}\|u^\varepsilon\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)}.$$

Таким чином, оператор A обмежений.

Внаслідок властивостей функцій $v^\varepsilon(x)$ та $\sigma^\varepsilon(x,u)$ маємо

$$\langle Au - A\vartheta, u-\vartheta\rangle = \int\limits_{\Omega^\varepsilon}|\nabla(u-\vartheta)|^2\,dx + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega^\varepsilon}v_i^\varepsilon(x)\frac{\partial(u-\vartheta)^2}{\partial x_i}\,dx +$$

$$+\int\limits_{\partial F^\varepsilon}(\sigma^\varepsilon(x,u)-\sigma^\varepsilon(x,\vartheta))(u-\vartheta)\,d\Gamma = \int\limits_{\Omega^\varepsilon}|\nabla(u-\vartheta)|^2\,dx +$$

$$+\int\limits_{\partial F^\varepsilon}(\sigma^\varepsilon(x,u)-\sigma^\varepsilon(x,\vartheta))(u-\vartheta)\,d\Gamma \geqslant 0.$$

Отже, оператор A монотонний.

Оператор A хемінеперервний. Дійсно, для будь-яких $u,\vartheta \in H^1(\Omega^\varepsilon,\partial\Omega)$ дійсно-значна функція

$$\langle A(u+t\vartheta),\vartheta\rangle = \int\limits_{\Omega^\varepsilon}\left(\nabla(u+t\vartheta)\nabla\vartheta + \sum_{i=1}^{n}v_i^\varepsilon(x)\frac{\partial(u+t\vartheta)}{\partial x_i}\vartheta\right)dx +$$

$$+\int\limits_{\partial F^\varepsilon}\sigma^\varepsilon(x,u+t\vartheta)\vartheta\,d\Gamma$$

є неперервною по t. Неперервність першого доданка очевидна, другий доданок неперервний по t внаслідок властивостей функції $\sigma^\varepsilon(x,u)$, покажемо це.

$$\left|\int\limits_{\partial F^\varepsilon} \sigma^\varepsilon(x,u+t_1\vartheta)\vartheta\,d\Gamma - \int\limits_{\partial F^\varepsilon} \sigma^\varepsilon(x,u+t_2\vartheta)\vartheta\,d\Gamma\right| = \left|\int\limits_{\partial F^\varepsilon}\int\limits_{u+t_1\vartheta}^{u+t_2\vartheta} \frac{\partial\sigma^\varepsilon(x,s)}{\partial s}\,ds\,\vartheta\,d\Gamma\right| \leqslant$$
$$\leqslant |t_1-t_2|\int\limits_{\partial F^\varepsilon}\hat{\sigma}^\varepsilon(x)\vartheta^2\,d\Gamma = |t_1-t_2|\|\vartheta\|^2_{L^2(\Omega,\mu^\varepsilon)} \leqslant C_1|t_1-t_2|\|\vartheta\|^2_{H^1(\Omega^\varepsilon)} \leqslant C_2|t_1-t_2|.$$

Тоді внаслідок Леми 4.2 [115, с. 122] реалізація $\mathcal{A}: L^2(0,T;H^1(\Omega^\varepsilon,\partial\Omega)) \to L^2(0,T;(H^1(\Omega^\varepsilon,\partial\Omega))')$ також є монотонним, хемінеперервним та обмеженим оператором, а значить, – оператором типу M (Лема 2.1 [115, с. 38]).

Покажемо, що $\mathcal{A}$ коерцитивний оператор. Внаслідок властивостей функцій $v^\varepsilon(x)$, $\sigma^\varepsilon(x,u)$, а також сильної зв'язності областей Ω^ε (1.1.5) для кожної функції $\vartheta \in L^2(0,T;H^1(\Omega^\varepsilon,\partial\Omega))$ та її продовження $\tilde{\vartheta} \in L^2(0,T;\mathring{H}^1(\Omega))$ маємо

$$\langle\mathcal{A}\vartheta,\vartheta\rangle = \int\limits_0^T \langle A\vartheta,\vartheta\rangle\,dt = \int\limits_0^T\int\limits_{\Omega^\varepsilon}|\nabla\vartheta|^2\,dx\,dt + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n\int\limits_0^T\int\limits_{\Omega^\varepsilon} v_i^\varepsilon(x)\frac{\partial\vartheta^2}{\partial x_i}\,dx\,dt+$$
$$+\int\limits_0^T\int\limits_{\partial F^\varepsilon}\sigma^\varepsilon(x,\vartheta)\vartheta\,d\Gamma\,dt = \int\limits_0^T\int\limits_{\Omega^\varepsilon}|\nabla\vartheta|^2\,dx\,dt + \int\limits_0^T\int\limits_{\partial F^\varepsilon}\sigma^\varepsilon(x,\vartheta)\vartheta\,d\Gamma \geqslant$$
$$\geqslant \int\limits_0^T\int\limits_{\Omega^\varepsilon}|\nabla\vartheta|^2\,dx\,dt \geqslant C\int\limits_0^T\int\limits_{\Omega}|\nabla\tilde{\vartheta}|^2\,dx\,dt = C\int\limits_0^T\|\tilde{\vartheta}\|^2_{\mathring{H}^1(\Omega)}\,dt \geqslant$$
$$\geqslant C\int\limits_0^T\|\vartheta\|^2_{H^1(\Omega^\varepsilon,\partial\Omega)}\,dt = C\|\vartheta\|^2_{L^2(0,T;H^1(\Omega^\varepsilon,\partial\Omega))}.$$

Таким чином,
$$\frac{\langle\mathcal{A}\vartheta,\vartheta\rangle}{\|\vartheta\|} \geqslant C\|\vartheta\| \to \infty \text{ при } \|\vartheta\| \to \infty.$$
де $\|\vartheta\| = \|\vartheta\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega^\varepsilon,\partial\Omega))}$. Тобто $\mathcal{A}$ є коерцитивний оператор.

Внаслідок Теореми 4.1 [115, с. 123] задача Коші (4.2.1) має розв'язок. Єдиність цього розв'язку безпосередньо випливає з монотонності оператора A. Дійсно, нехай задача Коші (4.2.1) має два різні розв'язки $u_1^\varepsilon(t)$ та $u_2^\varepsilon(t)$, тоді

$$\frac{d}{dt}\left(u_1^\varepsilon(t)-u_2^\varepsilon(t)\right)^2 = -\langle Au_1^\varepsilon - Au_2^\varepsilon, u_1^\varepsilon - u_2^\varepsilon\rangle \leqslant 0.$$

Звідси, враховуючи що початкові значення $u_1^\varepsilon(0) = u_2^\varepsilon(0)$, робимо висновок, що розв'язки $u_1^\varepsilon(t)$ та $u_2^\varepsilon(t)$ еквівалентні при $t \in (0, T)$.

Таким чином, задача Коші (4.2.1) має єдиний розв'язок, що є також єдиним узагальненим розв'язком початково-крайової задачі (4.1.1).

Теорема 4.1 доведена. $\square$

4.3 Теорема збіжності

Сформулюємо основний результат цього розділу.

Теорема 4.2. *Нехай області Ω^ε є сильно зв'язними, функція $\varphi(x) \in H^2(\Omega) \cap C_0(\Omega)$, вектор-функція $v^\varepsilon(x)$ задовольняє умови $b_1 - b_3$ і послідовність вектор-функцій $\{v^\varepsilon(x)\}_\varepsilon$, продовжених нулем на множину F^ε, при $\varepsilon \to 0$ збігається слабко в $(L^2(\Omega))^n$ до вектор-функції $v(x)$. Крім того, $\exists\, \tau \in (0, 2)$, при якому рівномірно по $x \in \Omega$ виконуються наступні умови:*

1. $\lim\limits_{h\to 0}\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \frac{mes[K(x,h)\cap\Omega^\varepsilon]}{h^n} = b(x),\ \forall\, x \in \Omega,$
   де $b(x)$ – неперервна додатна функція у Ω;

2. $\lim\limits_{h\to 0}\varliminf\limits_{\varepsilon\to 0} \frac{a_{ik}(x,\varepsilon,h)}{h^n} = \lim\limits_{h\to 0}\varlimsup\limits_{\varepsilon\to 0} \frac{a_{ik}(x,\varepsilon,h)}{h^n} = a_{ik}(x),$
   де $a_{ik}(x)$ – неперервні функції в Ω та $\{a_{ik}(x)\}_{i,k=1}^n$ – додатньо-визначений, симетричний тензор в Ω;

3. $\lim\limits_{h\to 0}\varliminf\limits_{\varepsilon\to 0} \frac{c(x,s;\varepsilon,h)}{h^n} = \lim\limits_{h\to 0}\varlimsup\limits_{\varepsilon\to 0} \frac{c(x,s;\varepsilon,h)}{h^n} = c(x,s),\ \forall s \in \mathbb{R},$
   де функція $c(x,s)$ обмежена по x та диференційована по s, і її похідна $c_s(x,s) \equiv \frac{\partial}{\partial s}c(x,s)$ задовольняє умови

$$\forall\, s_1, s_2 \in \mathbb{R} :\ (c_s(x,s_1) - c_s(x,s_2))(s_1 - s_2) \geqslant 0;$$

$$\forall\, s \in \mathbb{R} :\ 0 \leqslant c_s(x,s) \leqslant C.$$

Тоді при майже всіх $t \in (0, T)$ послідовність узагальнених розв'язків задачі (4.1.1) $\{u^\varepsilon(t,x)\}_\varepsilon$ збігається в $L^2(\Omega^\varepsilon, \Omega)$ до функції $u(t,x)$, що є узагальненим розв'язком наступної усередненої задачі:

$$\begin{cases} b(x)\dfrac{\partial u}{\partial t} - \sum\limits_{i,k=1}^{n} \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ik}(x)\dfrac{\partial u}{\partial x_k}\right) + \sum\limits_{i=1}^{n} v_i(x)\dfrac{\partial u}{\partial x_i} + \dfrac{1}{2}c_u(x,u) = 0, \ \text{в } \Omega \times (0,T), \\ u(t,x) = 0, \ \text{на } \partial\Omega \times (0,T), \\ u(0,x) = \varphi(x), \ \text{при } x \in \Omega, \end{cases} \tag{4.3.1}$$

тут $b(x)$ *– об'ємна щільність середовища,* $c_u(x,u) = \frac{\partial}{\partial u}c(x,u)$ *– гранична щільність поглинання,* $a(x)$ *– тензор провідності середовища,* $v(x)$ *– вектор граничної швидкості знесення часток.*

Схема доведення Теореми 4.2 наступна: для похідної розв'язку за часом та доданку, який описує знесення, одержуємо оцінки, які дозволяють звести параболічну задачу до еліптичної з компактним при будь-якому $t \in (0,T)$ вільним членом. До отриманої еліптичної крайової задачі застосовуємо доведену раніше Теорему 2.2.

4.4 Рівномірні по ε оцінки розв'язку $u^\varepsilon(t,x)$

Далі ми припускаємо, що розв'язок задачі (4.1.1) досить гладкий, а саме $u^\varepsilon \in W^\varepsilon := \left\{u^\varepsilon \in L^2(0,T;H^1(\Omega^\varepsilon,\partial\Omega)),\ \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} \in L^2(0,T;H^1(\Omega^\varepsilon,\partial\Omega))\right\}$. Це можна довести, використовуючи стандартні методи підвищення гладкості узагальненого розв'язку (див. наприклад [27]) у припущенні, що задані функції та $\partial\Omega^\varepsilon$ досить гладкі.

Лема 4.1. *Нехай функція* $\varphi(x) \in H^2(\Omega) \cap C_0(\Omega)$*, вектор-функція* $v^\varepsilon(x)$ *задовольняє умови* $b_1 - b_3$*, тоді для розв'язку* $u^\varepsilon(t,x)$ *задачі* (4.1.1) *справедливі наступні оцінки:*

1. $\max\limits_{0<t<T}\left(\|u^\varepsilon(t,x)\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} + \|\nabla_x u^\varepsilon(t,x)\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)}\right) \leqslant C_1,$

2. $\max\limits_{0<t<T}\left\|\frac{\partial u^\varepsilon(t,x)}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} + \int_0^T \left\|\nabla_x \frac{\partial u^\varepsilon(t,x)}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} dt \leqslant C_2,$

3. $\int\limits_0^T \int\limits_{\Omega^\varepsilon} \left(\frac{\partial u^\varepsilon(t+\Delta t,x)}{\partial t} - \frac{\partial u^\varepsilon(t,x)}{\partial t}\right)^2 dx\, dt \leqslant C_3\Delta t,$

де константи C_1, C_2, C_3 *не залежать від* ε.

Доведення. Функція $w^\varepsilon(t,x) = \frac{\partial u^\varepsilon(t,x)}{\partial t}$ є розв'язком наступної початково-крайової задачі:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w^\varepsilon}{\partial t} - \Delta w^\varepsilon + \sum\limits_{i=1}^{n} v_i^\varepsilon(x) \dfrac{\partial w^\varepsilon}{\partial x_i} = 0, \text{ в } \Omega^\varepsilon \times (0,T), \\ \dfrac{\partial w^\varepsilon}{\partial \nu} + \sigma_u^\varepsilon(x,u^\varepsilon) \cdot w^\varepsilon = 0, \text{ на } \partial F^\varepsilon \times (0,T), \\ w^\varepsilon(t,x) = 0, \text{ на } \partial\Omega \times (0,T), \\ w^\varepsilon(0,x) = \Delta\varphi(x) - \sum\limits_{i=1}^{n} v_i^\varepsilon(x) \dfrac{\partial \varphi(x)}{\partial x_i}, \text{ при } x \in \Omega^\varepsilon. \end{cases} \tag{4.4.1}$$

Помножимо рівняння задачі (4.4.1) на w^ε та проінтегруємо по області Ω^ε. За допомогою інтегрування частинами, властивостей $b_1 - b_3$ функції $v^\varepsilon(x)$, крайових і початкових умов одержуємо

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w^\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} + \|\nabla_x w^\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} + \int\limits_{\partial F^\varepsilon} \sigma_u^\varepsilon(x,u^\varepsilon)|w^\varepsilon|^2\, d\Gamma = 0.$$

Проінтегруємо по t і, враховуючи властивість a_2 функції $\sigma^\varepsilon(x,u)$, отримаємо

$$\|w^\varepsilon(t,x)\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} + \int\limits_0^t \|\nabla_x w^\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)}\, dt \leqslant \|w^\varepsilon(0,x)\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)}. \tag{4.4.2}$$

З початкової умови задачі (4.4.1) і властивості b_3 вектор-функції $v^\varepsilon(x)$ одержуємо оцінку для $\|w^\varepsilon(0,x)\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}$:

$$\|w^\varepsilon(0,x)\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)} \leqslant \|\Delta\varphi\|_{L^2(\Omega)} + C\|\nabla\varphi\|_{L^2(\Omega)}. \tag{4.4.3}$$

З (4.4.2), (4.4.3) внаслідок властивостей функції $\varphi(x)$ випливає оцінка 2).

Оцінка 1) випливає з оцінки 2) і нерівності

$$\|\psi(t,x)\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} \leqslant \|\psi(0,x)\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} + 2\int\limits_0^T \left\|\frac{\partial\psi}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} dt, \ \forall\, t \in (0,T).$$

Одержимо оцінку 3). Позначимо

$$\delta w^\varepsilon = w^\varepsilon(t+\Delta t, x) - w^\varepsilon(t,x).$$

Проінтегрував рівняння задачі (4.4.1) по t у межах від t до $t+\Delta t$, маємо

$$\delta w^\varepsilon - \Delta_x \left(\int\limits_t^{t+\Delta t} w^\varepsilon(\tau,x)\, d\tau \right) + \sum_{i=1}^{n} v_i^\varepsilon(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \int\limits_t^{t+\Delta t} w^\varepsilon(\tau,x)\, d\tau = 0.$$

Помножимо цю рівність на δw^ε та проінтегруємо по області Ω^ε. Враховуючи властивості $b_1 - b_3$ вектор-функції $v^\varepsilon(x)$, крайові умови задачі (4.4.1) і застосовуючи інтегрування частинами, одержуємо

$$\|\delta w^\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} + \int\limits_{\partial F^\varepsilon} \left(\int\limits_t^{t+\Delta t} \sigma_u^\varepsilon(x, u^\varepsilon) w^\varepsilon(\tau, x)\, d\tau \right) \delta w^\varepsilon(t,x)\, d\Gamma +$$
$$+ \int\limits_{\Omega^\varepsilon} \left(\int\limits_t^{t+\Delta t} \nabla_x w^\varepsilon(\tau, x)\, d\tau \right) \nabla_x \delta w^\varepsilon(t,x)\, dx - \tag{4.4.4}$$
$$- \sum_{i=1}^n \int\limits_{\Omega^\varepsilon} \left(v_i^\varepsilon(x) \int\limits_t^{t+\Delta t} w^\varepsilon(\tau, x)\, d\tau \frac{\partial}{\partial x_i}(\delta w^\varepsilon(t,x)) \right) dx = 0.$$

З умови сильної зв'язності (1.1.5) випливає, що існує лінійний обмежений оператор продовження $P^\varepsilon : H^1(\Omega^\varepsilon) \to H^1(\Omega)$, уточнимо його визначення. Функція $\vartheta^\varepsilon(x) \in H^1(\Omega^\varepsilon)$ може бути продовжена на всю область Ω так, щоб її продовження $\tilde{\vartheta}^\varepsilon(x) = P^\varepsilon \vartheta^\varepsilon(x)$ задовольняло умови: функція $\tilde{\vartheta}^\varepsilon(x) \in H^1(\Omega)$, $\tilde{\vartheta}^\varepsilon(x) = \vartheta^\varepsilon(x)$ в Ω^ε та

$$\int_{F^\varepsilon} (|\nabla \tilde{\vartheta}^\varepsilon|^2 + |\tilde{\vartheta}^\varepsilon|^2)\, dx = \min_{\psi^\varepsilon = \vartheta^\varepsilon,\, x \in \Omega^\varepsilon} \int_{F^\varepsilon} (|\nabla \psi^\varepsilon|^2 + |\psi^\varepsilon|^2)\, dx.$$

Звідси випливає, що $\tilde{\vartheta}^\varepsilon(x)$ – розв'язок задачі

$$\begin{cases} -\Delta \tilde{\vartheta}^\varepsilon(x) + \tilde{\vartheta}^\varepsilon(x) = 0,\ x \in F^\varepsilon, \\ \ \ \tilde{\vartheta}^\varepsilon(x) = \vartheta^\varepsilon(x),\ x \in \Omega^\varepsilon \cup \partial F^\varepsilon. \end{cases} \tag{4.4.5}$$

Оскільки $u^\varepsilon \in W^\varepsilon$, то при майже всіх $t \in (0,T)$ функція $w^\varepsilon(t,x) = \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} \in H^1(\Omega^\varepsilon)$. Застосовуємо оператор P^ε до функцій $u^\varepsilon(t,x)$, $w^\varepsilon(t,x)$ та одержимо функції $\tilde{u}^\varepsilon(t,x) = P^\varepsilon u^\varepsilon(t,x)$, $\tilde{w}^\varepsilon(t,x) = P^\varepsilon w^\varepsilon(t,x)$. Внаслідок єдиності розв'язку задачі (4.4.5) похідна продовженої функції та продовження похідної співпадають, тобто $\tilde{w}^\varepsilon(t,x) = P^\varepsilon w^\varepsilon(t,x) = \frac{\partial \tilde{u}^\varepsilon}{\partial t}$ та $\widetilde{\delta w^\varepsilon(t,x)} = P^\varepsilon(\delta w^\varepsilon(t,x)) = \delta \tilde{w}^\varepsilon(t,x)$.

Нехай $L^2(\Omega, \mu^\varepsilon)$ простір з мірою $d\mu^\varepsilon = \hat{\sigma}^\varepsilon(x) d\Gamma$. Внаслідок узагальненої теореми Соболєва й нерівності (1.1.5) для будь-якої функції $\vartheta^\varepsilon \in H^1(\Omega^\varepsilon)$ і її продовження $\tilde{\vartheta}^\varepsilon \in H^1(\Omega)$ мають місце нерівності

$$\|\vartheta\|_{L^2(\Omega,\mu^\varepsilon)} = \|\tilde{\vartheta}\|_{L^2(\Omega,\mu^\varepsilon)} \leqslant C_1 \|\tilde{\vartheta}\|_{H^1(\Omega)} \leqslant C_2 \|\vartheta\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)}, \tag{4.4.6}$$

де C_1, C_2 не залежать від ε. Таким чином, з огляду на вищесказане, нерівності (4.4.6) можуть бути застосовані до функцій $w^\varepsilon(t,x)$, $\delta w^\varepsilon(t,x)$ та їх продовжень.

Проінтегруємо рівність (4.4.4) по t у межах від 0 до $T-\Delta$. Застосовуючи нерівності (4.4.6), Коші-Буняковського та властивість b_3 вектор-функції $v^\varepsilon(x)$, маємо

$$\int\limits_0^{T-\Delta} \|\delta w^\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)}\, dt \leqslant \left| \int\limits_0^{T-\Delta} \int\limits_{\partial F^\varepsilon} \left(\int\limits_t^{t+\Delta t} \sigma^\varepsilon_u(x,u^\varepsilon) w^\varepsilon(\tau,x)\, d\tau \right) \delta w^\varepsilon\, d\Gamma\, dt \right| +$$

$$+ \left| \int\limits_0^{T-\Delta} \int\limits_{\Omega^\varepsilon} \left(\int\limits_t^{t+\Delta t} \nabla_x w^\varepsilon(\tau,x)\, d\tau \right) \nabla_x \delta w^\varepsilon(t,x)\, dx\, dt \right| +$$

$$+ \left| \int\limits_0^{T-\Delta} \sum_{i=1}^n \int\limits_{\Omega^\varepsilon} \left(v^\varepsilon_i(x) \int\limits_t^{t+\Delta t} w^\varepsilon(\tau,x)\, d\tau \frac{\partial}{\partial x_i} (\delta w^\varepsilon(t,x)) \right) dx\, dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^{T-\Delta} \int\limits_t^{t+\Delta t} \|w^\varepsilon(\tau,x)\|_{L^2(\Omega,\mu^\varepsilon)} \|\delta w^\varepsilon(t,x)\|_{L^2(\Omega,\mu^\varepsilon)}\, d\tau\, dt + \int\limits_0^{T-\Delta} \int\limits_t^{t+\Delta t} \|\nabla_x w^\varepsilon(\tau,x)\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)} \times$$

$$\times \|\nabla_x \delta w^\varepsilon(t,x)\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}\, d\tau\, dt + C_1 \int\limits_0^{T-\Delta} \int\limits_t^{t+\Delta t} \|w^\varepsilon(\tau,x)\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)} \|\nabla_x \delta w^\varepsilon(t,x)\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}\, d\tau\, dt \leqslant$$

$$\leqslant C_2 \int\limits_0^{T-\Delta} \int\limits_t^{t+\Delta t} \|w^\varepsilon(\tau,x)\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)} \|\delta w^\varepsilon(t,x)\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)}\, d\tau\, dt \leqslant$$

$$\leqslant C_2 \Delta t^{1/2} \left(\int\limits_0^{T-\Delta} \|\delta w^\varepsilon(t,x)\|^2_{H^1(\Omega^\varepsilon)}\, dt \right)^{1/2} \left(\int\limits_0^{T-\Delta} \int\limits_t^{t+\Delta t} \|w^\varepsilon(\tau,x)\|^2_{H^1(\Omega^\varepsilon)}\, d\tau\, dt \right)^{1/2}.$$

Змінюючи порядок інтегрування в другому співмножнику, одержимо

$$\int\limits_0^{T-\Delta} \|\delta w^\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)}\, dt \leqslant C_2 \Delta t \sqrt{\int\limits_0^{T-\Delta} \|\delta w^\varepsilon(t,x)\|^2_{H^1(\Omega^\varepsilon)}\, dt} \sqrt{\int\limits_0^{T} \|w^\varepsilon(\tau,x)\|^2_{H^1(\Omega^\varepsilon)}\, d\tau}.$$

Звідси, за допомогою раніше доведених першої та другої оцінок, одержуємо третю оцінку леми.

Лема 4.1 доведена. □

Лема 4.2. *Нехай при будь-якому ε вектор-функція $v^\varepsilon(x)$ задовольняє умови $b_2 - b_3$ і послідовність вектор-функцій $\{v^\varepsilon(x)\}_\varepsilon$ продовжених нулем на множину F^ε при $\varepsilon \to 0$ збігається слабко в $(L^2(\Omega))^n$ до вектор-функції $v(x)$;*

функція $\vartheta^\varepsilon(x)$ *задовольняє нерівності* $\|\vartheta^\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \leqslant C$, *де* C *не залежить від* ε *і послідовність* $\{\vartheta^\varepsilon(x)\}_\varepsilon$ *при* $\varepsilon \to 0$ *збігається слабко в* $H^1(\Omega)$ *до функції* $\vartheta(x) \in H^1(\Omega)$. *Тоді послідовність функцій* $\{(v^\varepsilon(x), \nabla\vartheta^\varepsilon(x))\}_\varepsilon$ *при* $\varepsilon \to 0$ *збігається слабко в* $L^2(\Omega)$ *до функції* $(v(x), \nabla\vartheta(x))$.

Доведення. Внаслідок властивості b_3 вектор-функції $v^\varepsilon(x)$ і рівномірної обмеженості по ε норм $\vartheta^\varepsilon(x)$ у просторі $H^1(\Omega)$ одержуємо

$$\|(v^\varepsilon, \nabla\vartheta^\varepsilon)\|_{L^2(\Omega)} \leqslant C, \tag{4.4.7}$$

де C не залежить від ε.

Застосуємо лему про компенсовану компактність [35, с. 76]. Внаслідок умов леми та враховуючи, що $rot\nabla\vartheta^\varepsilon(x) = 0$, робимо висновок, що послідовність функцій $\{(v^\varepsilon(x), \nabla\vartheta^\varepsilon(x))\}_\varepsilon$ збігається *слабко в $L^1(\Omega)$ до функції $(v(x), \nabla\vartheta(x))$. Зі *слабкої збіжності послідовності в $L^1(\Omega)$ і рівномірної обмеженості (4.4.7) в $L^2(\Omega)$ випливає [20, с. 174], що $\{(v^\varepsilon(x), \nabla\vartheta^\varepsilon(x))\}_\varepsilon$ збігається слабко в $L^2(\Omega)$ до функції $(v(x), \nabla\vartheta(x))$.

Лема 4.2 доведена. □

Зауваження 4.2. Далі за функцію $\vartheta^\varepsilon(x)$ ми будемо брати продовжені розв'язки $\tilde{u}^\varepsilon(t,x)$ задачі (4.1.1) при будь-якому фіксованому $t \in (0,T)$.

4.5 Доведення Теореми збіжності 4.2

Запишемо початково-крайову задачу (4.1.1) при $\forall\, t \in (0,T)$ у вигляді

$$\begin{cases} \Delta u^\varepsilon(t,x) = f^\varepsilon(t,x) \text{ в } \Omega^\varepsilon, \\ \dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial \nu} + \sigma^\varepsilon(x, u^\varepsilon) = 0 \text{ на } \partial F^\varepsilon, \\ u^\varepsilon(t,x) = 0 \text{ на } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.5.1}$$

де $f^\varepsilon(t,x) = \frac{\partial u^\varepsilon(t,x)}{\partial t} + \sum\limits_{i=1}^{n} v_i^\varepsilon(x) \frac{\partial u^\varepsilon(t,x)}{\partial x_i}$. Щоб застосувати Теорему 2.2, покажемо, що при майже всіх $t \in (0,T)$ послідовність $\{f^\varepsilon(t,x)\}_\varepsilon$ збігається слабко в $L^2(\Omega)$ до деякої функції $f(t,x)$.

Продовжимо функцію $u^\varepsilon(t,x)$ на всю область Ω, використовуючи визначений в (4.4.5) оператор продовження P^ε : $\tilde{u}^\varepsilon(t,x) = P^\varepsilon u^\varepsilon(t,x)$, тоді $\widetilde{\frac{\partial u^\varepsilon(t,x)}{\partial t}} =$

$P^\varepsilon \frac{\partial u^\varepsilon(t,x)}{\partial t} = \frac{\partial \tilde{u}^\varepsilon(t,x)}{\partial t}$ і відповідно до Леми 4.1 продовжені функції $\tilde{u}^\varepsilon(t,x)$, $\frac{\partial \tilde{u}^\varepsilon(t,x)}{\partial t}$ при будь-якому $t \in (0,T)$ задовольняють оцінкам:

$$\max_{0<t<T} \left(\|\tilde{u}^\varepsilon(t,x)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla_x \tilde{u}^\varepsilon(t,x)\|^2_{L^2(\Omega)} \right) \leqslant \tilde{C}_1, \tag{4.5.2}$$

$$\max_{0<t<T} \left\| \frac{\partial \tilde{u}^\varepsilon(t,x)}{\partial t} \right\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^T \left\| \nabla_x \frac{\partial \tilde{u}^\varepsilon(t,x)}{\partial t} \right\|^2_{L^2(\Omega)} dt \leqslant \tilde{C}_2, \tag{4.5.3}$$

$$\int\limits_0^T \int\limits_\Omega \left(\frac{\partial \tilde{u}^\varepsilon(t+\Delta t,x)}{\partial t} - \frac{\partial \tilde{u}^\varepsilon(t,x)}{\partial t} \right)^2 dx\, dt \leqslant \tilde{C}_3 \Delta t, \tag{4.5.4}$$

де константи $\tilde{C}_1$, $\tilde{C}_2$, $\tilde{C}_3$ не залежать від ε.

З (4.5.2), (4.5.3) випливає, що $\tilde{u}^\varepsilon(t,x) \in H^1(\Omega \times (0,T))$ і норма $\|\tilde{u}^\varepsilon(t,x)\|_{H^1(\Omega\times(0,T))} \leqslant C$ рівномірно обмежена по ε. Таким чином, послідовність $\{\tilde{u}^\varepsilon\}_\varepsilon$ слабко компактна в $H^1(\Omega \times (0,T))$ і, отже, з неї можна виділити підпослідовність $\{\varepsilon = \varepsilon_k \to 0,\ k = 1,...,\infty\}$ слабко збіжну в $H^1(\Omega \times (0,T))$, і внаслідок компактності вкладення $H^1(\Omega \times (0,T)) \subset L^2(\Omega \times (0,T))$ сильно в $L^2(\Omega \times (0,T))$, до деякої функції $u(t,x) \in H^1(\Omega \times (0,T))$. Більш того, послідовність $\{\nabla_x \tilde{u}^{\varepsilon_k}\}_{\varepsilon_k}$ збігається слабко в $(L^2(\Omega \times (0,T)))^n$ до вектор-функції $\nabla_x u$.

З оцінки (4.5.3) випливає, що функція $\frac{\partial \tilde{u}^\varepsilon(t,x)}{\partial t} \in L^2(0,T;H^1(\Omega))$ і норма $\|\frac{\partial \tilde{u}^\varepsilon(t,x)}{\partial t}\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \leqslant C$ рівномірно обмежена по ε. Таким чином, послідовність $\{\frac{\partial \tilde{u}^{\varepsilon_k}}{\partial t}\}_{\varepsilon_k}$ слабко компактна в $L^2(0,T;H^1(\Omega))$ і з неї можна виділити підпослідовність $\{\varepsilon_k = \varepsilon_{k_\ell} \to 0,\ \ell = 1,...,\infty\}$, що збігається слабко в $L^2(0,T;H^1(\Omega))$ до функції $\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} \in L^2(0,T;H^1(\Omega))$. Внаслідок компактності вкладення $H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ та оцінки (4.5.4) підпослідовність $\{\frac{\partial \tilde{u}^{\varepsilon_{k_\ell}}}{\partial t}\}$ збігається сильно в $L^2(\Omega \times (0,T))$ [26, с. 225] до функції $\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}$.

І, нарешті, з послідовності $\{\varepsilon_{k_\ell}\}_{k_\ell}$ виберемо підпослідовність чисел $\{\varepsilon_{k_\ell} = \varepsilon_{k_{\ell_m}} \to 0,\ m = 1,...,\infty\}$ таку, що підпослідовність $\{\tilde{u}^{\varepsilon_{k_{\ell_m}}}\}_{\varepsilon_{k_{\ell_m}}}$ збігається сильно в $L^2(\Omega)$ до функції $u(t,x)$, підпослідовність $\{\nabla_x \tilde{u}^{\varepsilon_{k_{\ell_m}}}\}_{\varepsilon_{k_{\ell_m}}}$ збігається слабко в $(L^2(\Omega))^n$ до вектор-функції $\nabla_x u(t,x)$ і підпослідовність $\{\frac{\partial \tilde{u}^{\varepsilon_{k_{\ell_m}}}}{\partial t}\}_{\varepsilon_{k_{\ell_m}}}$ збігається сильно в $L^2(\Omega)$ до функції $\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}$ при майже всіх $t \in (0,T)$ [24, с. 407].

Через умову 1) теореми послідовність характеристичних функцій $\{\chi^\varepsilon(x)\}_\varepsilon$ областей Ω^ε збігається слабко в $L^2(\Omega)$ до функції $b(x)$, й оскільки послідовність функцій $\{\frac{\partial \tilde{u}^\varepsilon}{\partial t}\}_\varepsilon$ по підпослідовності $\{\varepsilon = \varepsilon_{k_{\ell_m}} \to 0\}$ збігається сильно в $L^2(\Omega)$ до функції $\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}$ при майже всіх $t \in (0,T)$, то послідовність $\left\{\chi^\varepsilon(x) \frac{\partial \tilde{u}^\varepsilon(t,x)}{\partial t}\right\}_\varepsilon$ збігається слабко в $L^2(\Omega)$ по підпослідовності $\{\varepsilon = \varepsilon_{k_{\ell_m}} \to 0\}$ до функції $b(x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}$ при майже всіх $t \in (0,T)$.

Таким чином, зважаючи на Лему 4.2, послідовність функцій $\{f^\varepsilon(t,x)\}_\varepsilon$, продовжених нулем на F^ε, збігається слабко в $L^2(\Omega)$ по підпослідовності $\{\varepsilon = \varepsilon_{k_{\ell_m}} \to 0\}$ при майже всіх $t \in (0,T)$ до функції

$$f(t,x) = b(x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + \sum_{i=1}^n v_i(x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x_i}.$$

Далі, застосовуючи Теорему 2.2, укладаємо, що послідовність розв'язків $\{u^\varepsilon(t,x)\}_\varepsilon$ задачі (4.5.1) збігається в $L^2(\Omega^\varepsilon,\Omega)$ по підпослідовності $\{\varepsilon = \varepsilon_{k_{\ell_m}} \to 0\}$ до функції $u(t,x)$, що задовольняє рівнянню та крайовій умові задачі (4.3.1). Крім того, з оцінок (4.5.2), (4.5.3) випливає, що функція $\tilde{u}^\varepsilon(t,x)$ неперервна по t у метриці $L^2(\Omega)$ рівномірно по ε. Враховуючи це, укладаємо, що $u(t,x) \in C(0,T;L^2(\Omega))$. Тобто гранична функція задовольняє рівності $u(0,x) = \varphi(x)$ і є розв'язком усередненої задачі (4.3.1).

Покажемо, що усереднена задача (4.3.1) має єдиний розв'язок. Припустимо, що це не так і задача (4.3.1) має два різні розв'язки $u_1(t,x)$, $u_2(t,x)$, тоді з огляду на умови теореми й властивості $b_1 - b_3$ вектор-функції $v(x)$, маємо

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\int\limits_\Omega b(x)(u_1-u_2)^2\,dx = -2\int\limits_\Omega \sum_{i,k=1}^n a_{ik}(x)\frac{\partial(u_1-u_2)}{\partial x_i}\frac{\partial(u_1-u_2)}{\partial x_k}\,dx-\\
&-\sum_{i=1}^n\int\limits_\Omega v_i(x)\frac{\partial(u_1-u_2)^2}{\partial x_i}\,dx - \int\limits_\Omega (c_u(x,u_1)-c_u(x,u_2))(u_1-u_2)\,dx =\\
&= -2\int\limits_\Omega \sum_{i,k=1}^n a_{ik}(x)\frac{\partial(u_1-u_2)}{\partial x_i}\frac{\partial(u_1-u_2)}{\partial x_k}\,dx-\\
&-\int\limits_\Omega (c_u(x,u_1)-c_u(x,u_2))(u_1-u_2)\,dx \leqslant 0, \quad 0<t<T.
\end{aligned}$$

Звідси, враховуючи що початкові значення $u_1(0,x) = u_2(0,x)$, робимо висновок, що функції $u_1(t,x)$, $u_2(t,x)$ збігаються на $(0,T)$.

Таким чином, уся послідовність розв'язків початкової задачі $\{u^\varepsilon(t,x)\}_\varepsilon$ при майже всіх $t \in (0,T)$ збігається в $L^2(\Omega^\varepsilon,\Omega)$ до функції $u(t,x)$.

Теорема 4.2 доведена.

Зауваження 4.3. Якщо в Теоремі 4.2 замінити рівномірні умови 1)–3) інтегральними:

1. $\lim\limits_{h\to 0}\overline{\lim\limits_{\varepsilon\to 0}}\int\limits_{\Omega}\left|\frac{mes[K(x,h)\cap\Omega^{\varepsilon}]}{h^n}-b(x)\right|\,dx=0,$
   де $b(x)$ – неперервна додатна функція в Ω;

2. $\lim\limits_{h\to 0}\overline{\lim\limits_{\varepsilon\to 0}}\int\limits_{\Omega}\left|\frac{a_{ij}(x,\varepsilon,h)}{h^n}-a_{ij}(x)\right|\,dx=0,$
   де $a_{ij}(x)$ – кусково-неперервні функції від x та $\{a_{ij}(x)\}_{i,j=1}^{n}$ – додатньо визначений, симетричний тензор в Ω;

3. $\lim\limits_{h\to 0}\overline{\lim\limits_{\varepsilon\to 0}}\int\limits_{\Omega}\left|\frac{c(x,s,\varepsilon,h)}{h^n}-c(x,s)\right|\,dx=0,\ \forall s\in\mathbb{R},$
   де функція $c(x,s)$ обмежена по x, диференційована по s та її похідна $c_s(x,s)=\frac{\partial}{\partial s}c(x,s)$ задовольняє умови

$$\forall\, s_1,s_2\in\mathbb{R}:\ (c_s(x,s_1)-c_s(x,s_2))(s_1-s_2)\geqslant 0;$$

$$\forall\, s\in\mathbb{R}:\ 0\leqslant c_s(x,s)\leqslant C,$$

то ми отримаємо теорему, справедливість якої можна довести аналогічним чином з використанням результата Теореми 2.3.

РОЗДІЛ 5

НЕЛІНІЙНА ЗАДАЧА РОБЕНА В ОБЛАСТЯХ ІЗ ДРІБНОЗЕРНИСТОЮ МЕЖЕЮ

П'ятий розділ присвячений вивченню асимптотичної поведінки розв'язку нелінійної задачі Робена в області, заповненої дрібними непересічними включеннями-кулями, діаметр яких істотно менше відстаней між ними. Досліджується залежність асимптотики розв'язку від двох параметрів: параметра α, що характеризує радіус куль, і параметра β, що характеризує силу поглинання їхньої поверхні. Цей розділ складається із двох глав. У першій розглядається задача Робена в області із дрібнозернистою детермінованою межею, тобто при кожному фіксованому ε ми припускаємо, що центри та радіуси куль задані. Друга глава присвячена розгляду областей із дрібнозернистою випадковою межею, у яких розташування куль та їхніх радіусів випадкове й описуються сукупністю кінцевомірних функцій розподілу. Результати цього розділу були опубліковані в роботах [42, 47] і матеріалах міжнародних конференцій [100–102].

5.1 Постановка задачі

Нехай Ω – обмежена область у просторі $\mathbb{R}^3$ із гладкою межею $\partial\Omega$, у якій розташовані включення $B_i^\varepsilon = B(x^{i\varepsilon}, r_i^\varepsilon)$ – непересічні кулі радіусів r_i^ε із центрами в точках $x^{i\varepsilon}$ $(i = 1, ..., N^\varepsilon)$. Малий параметр ε є порядком «середньої» відстані між найближчими кулями й також характеризує розміри куль. Ми припускаємо, що кількість куль $N^\varepsilon = \varepsilon^{-3}$, а їхні радіуси $r_i^\varepsilon = O(\varepsilon^\alpha)$.

В області $\Omega^\varepsilon = \Omega \setminus B^\varepsilon$ $(B^\varepsilon = \cup_{i=1}^{N^\varepsilon} B_i^\varepsilon)$ розглядається крайова задача

$$\begin{cases} -\Delta u^\varepsilon(x) = f^\varepsilon(x),\ x \in \Omega^\varepsilon, \\ \dfrac{\partial u^\varepsilon(x)}{\partial \nu} + \sigma^\varepsilon(x^{i\varepsilon}, u^\varepsilon) = 0,\ x \in \partial B_i^\varepsilon,\ i = 1, ..., N^\varepsilon, \\ u^\varepsilon(x) = 0,\ x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{5.1.1}$$

де $\Delta = \sum\limits_{i=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ – оператор Лапласа, ν – одинична нормаль до межі ∂B^ε, зовнішня щодо області Ω^ε; функція джерел $f^\varepsilon(x) : \Omega^\varepsilon \to \mathbb{R}$, функція щільності поглинання $\sigma^\varepsilon(x, u) : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ задані.

Припустимо, що функція $\sigma^\varepsilon(x,u)$ задовольняє умови:

a_1: $\sigma^\varepsilon(x,u)=\varepsilon^\beta\sigma(x,u)$, де $\beta\in\mathbb{R}$, $\sigma(x,u)\in C(\Omega,C^1(\mathbb{R}))$;

a_2: $\sigma(x,0)=0$;

a_3: $\forall\, x\in\Omega:\ 0<k_1\leqslant\frac{\partial}{\partial u}\sigma(x,u)\leqslant k_2(1+|u|^\theta)$, де $0\leqslant\theta<1$.

Задача (5.1.1) описує процес стаціонарної дифузії часток у перфорованій області Ω^ε, який супроводжується поглинанням на поверхні включень B^ε.

Визначення 5.1. Узагальненим розв'язком задачі (5.1.1) будемо називати функцію $u^\varepsilon(x)\in H^1(\Omega^\varepsilon,\partial\Omega)$, яка задовольняє наступній інтегральній тотожності

$$\int\limits_{\Omega^\varepsilon}(\nabla u^\varepsilon,\nabla v^\varepsilon)\,dx+\sum_{i=1}^{N^\varepsilon}\int\limits_{\partial B_i^\varepsilon}\sigma^\varepsilon(x^{i\varepsilon},u^\varepsilon)v^\varepsilon\,d\Gamma-\int\limits_{\Omega^\varepsilon}f^\varepsilon v^\varepsilon\,dx=0,\quad\forall\, v^\varepsilon(x)\in H^1(\Omega^\varepsilon,\partial\Omega).$$

Як випливає з Теореми 2.1, при кожному фіксованому ε існує єдиний узагальнений розв'язок $u^\varepsilon(x)$ задачі (5.1.1). Основна ціль цього розділу – вивчити асимптотичну поведінку розв'язку $u^\varepsilon(x)$ при $\varepsilon\to0$ і різних значеннях параметрів α, β. Ми покажемо, що за певних умов $u^\varepsilon(x)$ збігається до узагальненого розв'язку $u(x)$ усередненої задачі

$$\begin{cases}-\Delta u(x)+\dfrac{\partial}{\partial u}C(x,u)=F(x)\text{ в }\Omega,\\ u(x)=0\text{ на }\partial\Omega.\end{cases}\tag{5.1.2}$$

5.2 Задача Робена в областях із дрібнозернистою детермінованою межею

5.2.1 Теорема збіжності

Перш ніж сформулювати основний результат цієї глави, визначимо кілька понять.

Розглянемо області Ω^ε з детермінованою межею. Радіуси куль B_i^ε визначимо рівністю

$$r_i^\varepsilon=a_i^\varepsilon\varepsilon^\alpha,\ (i=1,...,N^\varepsilon),\tag{5.2.1}$$

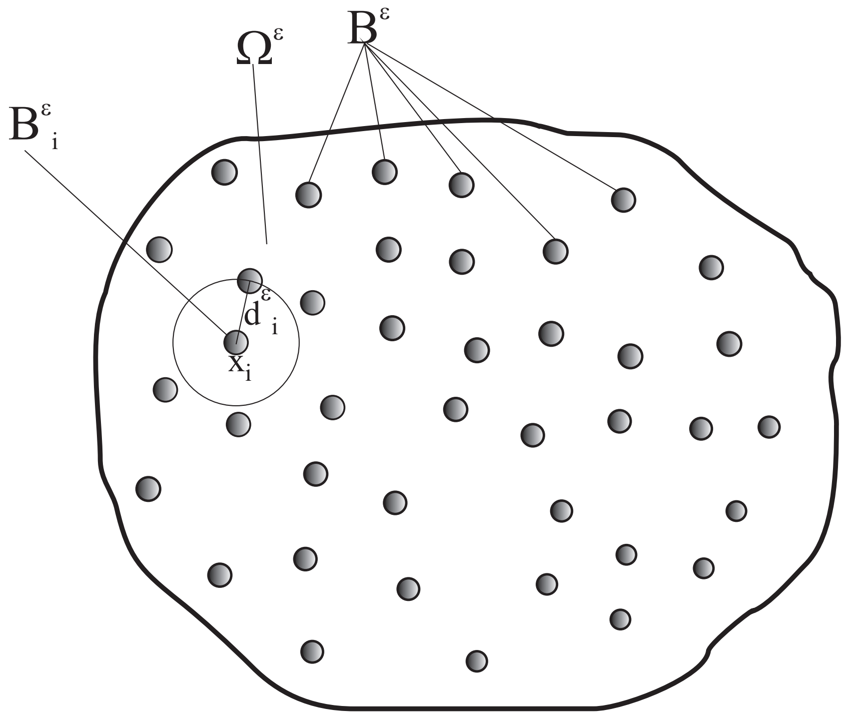


Рисунок 5.1 — Перфорована область Ω^ε та множина B^ε

де параметр $\alpha > 1$, а числа a_i^ε вибираються так, що $0 < a_0 \leqslant a_i^\varepsilon \leqslant A_0 < \infty$ та a_0, A_0 не залежать від ε.

Позначимо

$$d_i^\varepsilon = dist\left(x^{i\varepsilon}, \bigcup_{i \neq j} x^{j\varepsilon} \cup \partial\Omega\right) \tag{5.2.2}$$

відстань від центра i – ої до центра найближчої кулі або до межі $\partial\Omega$;

$$b_i^\varepsilon = \begin{cases} \varepsilon^\beta (r_i^\varepsilon)^2 \text{ при } \beta \geqslant \alpha; \\ r_i^\varepsilon \text{ при } \beta < -\alpha, \end{cases} \tag{5.2.3}$$

числа b_i^ε характеризують порядок малості поглинання кожної кулі при різних значеннях параметрів α, β.

Припустимо, що кулі в області Ω розташовуються так, що виконуються наступні умови:

b_1: $\exists\, \frac{2}{3} < \varkappa_1 < 1 : d_i^\varepsilon \geqslant (r_i^\varepsilon)^{\varkappa_1}$ та $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \max\limits_i d_i^\varepsilon \to 0$;

b_2: $\exists\, \frac{6}{4-\theta} < \varkappa_2 \leqslant 2 : \sum\limits_{i=1}^{N(\varepsilon)} \frac{(b_i^\varepsilon)^{\varkappa_2}}{(d_i^\varepsilon)^{3(\varkappa_2 - 1)}} \leqslant C_b$, де C_b не залежить від ε, $0 \leqslant \theta < 1$.

Враховуючи, що середня відстань між центрами куль B_i^ε має порядок ε, умови b_1, b_2 вимагають, щоб кулі розташовувалися не занадто близько одна до одної. В іншому розташування куль можна вважати довільним (рис. 5.1).

Задача (5.1.1) залежить від двох параметрів: параметра α, що визначає, наскільки малими є включення, і параметра β, що характеризує інтенсивність поглинання їхньої поверхні. Областю зміни параметрів α, β є область $\Lambda_d = \{1 < \alpha < 3,\, 2\alpha + \beta \geqslant 3\} \cup \{\alpha \geqslant 3,\, -\infty < \beta < \infty\}$ (рис. 5.2).

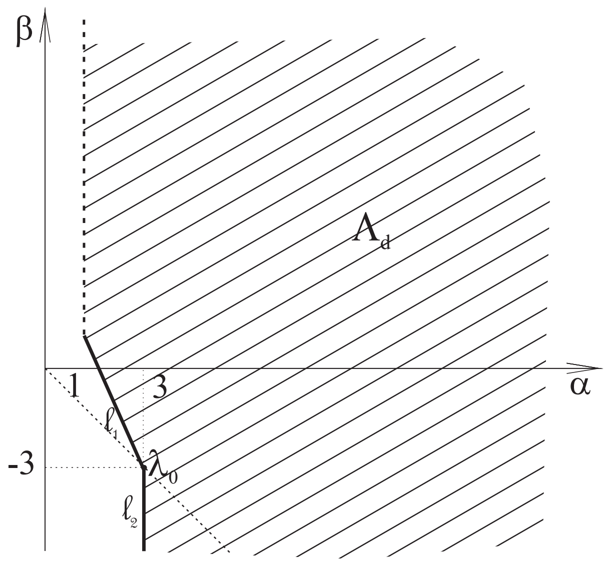


Рисунок 5.2 — Область зміни параметрів α, β – Λ_d

Просторовий розподіл щільності поглинання в області Ω задамо за допомогою узагальненої функції від x, що залежить від параметрів ε, u:

$$C^\varepsilon(x,u) = \sum_{i=1}^{N^\varepsilon} C_i^\varepsilon(u) \cdot \delta(x - x^{i\varepsilon}),\ (\forall\, \varepsilon > 0,\, \forall\, u \in \mathbb{R} :\ C^\varepsilon(x,u) \in \mathscr{D}'(\Omega)), \quad (5.2.4)$$

де $\delta(x)$ – дельта-функція Дірака, а $C_i^\varepsilon(u)$ – функції поглинальної здібності куль, визначені при $(\alpha, \beta) \in \Lambda_d$ рівностями

$$C_i^\varepsilon(u) = \begin{cases} 2\pi (a_i^\varepsilon)^2 g(x^{i\varepsilon}, u)\varepsilon^{2\alpha+\beta} \text{ при } \alpha + \beta > 0; \\ 2\pi a_i^\varepsilon \left[u - V_i^\varepsilon\right]^2 \varepsilon^\alpha + 2\pi (a_i^\varepsilon)^2 g(x^{i\varepsilon}, V_i^\varepsilon)\varepsilon^{2\alpha+\beta} \text{ при } \alpha + \beta = 0; \\ 2\pi a_i^\varepsilon u^2 \varepsilon^\alpha \text{ при } \alpha + \beta < 0. \end{cases} \quad (5.2.5)$$

У цих рівностях

$$g(x,u) = 2\int_0^u \sigma(x,r)\,dr \quad (5.2.6)$$

та $V_i^\varepsilon = V_i^\varepsilon(u)$ – розв'язок рівняння

$$V_i^\varepsilon(u) = u - a_i^\varepsilon \sigma(x^{i\varepsilon}, V_i^\varepsilon). \tag{5.2.7}$$

Основним результатом цієї глави є наступна теорема.

Теорема 5.1. *Нехай області Ω^ε задовольняють умови b_1, b_2 і при $\varepsilon \to 0$:*

1. *узагальнені функції $C^\varepsilon(x,u)$ при $\forall\, u \in \mathbb{R}$ збігаються в слабкій топології простору $\mathscr{D}'(\Omega)$ до функції $C(x,u) \in C(\Omega, C^1(\mathbb{R}))$;*

2. *функції $f^\varepsilon(x)$ продовжені нулем на множину B^ε збігаються слабко в $L^2(\Omega)$ до деякої функції $F(x)$.*

Тоді послідовність узагальнених розв'язків $\{u^\varepsilon(x)\}_\varepsilon$ задачі (5.1.1) *збігається в $L^p(\Omega^\varepsilon, \Omega)$ (при $p < 6$) у сенсі* (1.1.3) *до функції $u(x)$, що є узагальненим розв'язком усередненої задачі* (5.1.2).

Зауваження 5.1. Функція $C(x,u)$ залежить від параметрів α, β, з формул (5.2.4), (5.2.5) і умови 1) теореми випливає, що функція $C(x,u) = 0$ при $(\alpha,\, \beta) \in \Lambda_d \setminus \{\ell_1 \cup \ell_2 \cup \lambda_0\}$ і відмінна від нуля та кінцева на ламаній $\ell_1 \cup \ell_2 \cup \lambda_0$, де $\ell_1 = \{1 < \alpha < 3,\ \beta = 3 - 2\alpha\}$, $\ell_2 = \{\alpha = 3,\ \beta < -\alpha\}$, $\lambda_0 = (3, -3)$.

5.2.2 Доведення Теореми збіжності 5.1

При доведенні теореми використовується метод «квазірозв'язків», розвинений у роботі [55]. Намітимо загальну схему. Визначимо варіаційні постановки початкової та усередненої задач.

Розв'язок $u^\varepsilon(x)$ задачі (5.1.1) мінімізує функціонал

$$\Phi^\varepsilon[w^\varepsilon] = \int\limits_{\Omega^\varepsilon} |\nabla w^\varepsilon|^2\, dx - 2\int\limits_{\Omega^\varepsilon} f^\varepsilon w^\varepsilon\, dx + \varepsilon^\beta \sum_{i=1}^{N^\varepsilon} \int\limits_{\partial B_i^\varepsilon} g(x^{i\varepsilon}, w^\varepsilon)\, d\Gamma \tag{5.2.8}$$

у класі функцій $w^\varepsilon(x) \in H^1(\Omega^\varepsilon, \partial\Omega)$. Тут $g(x^{i\varepsilon}, w^\varepsilon)$ визначається рівністю (5.2.6) та у силу властивостей функції $\sigma(x,u):\ g(x^{i\varepsilon}, w^\varepsilon) \geqslant 0$.

Введемо функціонал усередненої задачі (5.1.2):

$$\Phi[w] = \int\limits_\Omega |\nabla w|^2\, dx - 2\int\limits_\Omega F w\, dx + 2\int\limits_\Omega C(x,w)\, dx, \tag{5.2.9}$$

де функції $C(x,w)$ і $F(x)$ визначені в умовах 1), 2) Теореми 5.1 відповідно. Розв'язок усередненої задачі $u(x)$ мінімізує цей функціонал у класі функцій $w(x) \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$.

Доведення теореми розіб'ємо на кілька кроків.

У пункті 1) ми покажемо, що розв'язок $u^\varepsilon(x)$ задачі (5.1.1) можна продовжити на множину B^ε так, що продовжені розв'язки $\tilde{u}^\varepsilon(x)$ будуть рівномірно обмежені по ε у просторі $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ і, отже, з послідовності $\{\tilde{u}^\varepsilon(x)\}_\varepsilon$ можна виділити слабко збіжну в $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ підпослідовність $\{\varepsilon = \varepsilon_k,\, k = 1,..,\infty\}$, що у силу теорем вкладення збігається сильно в $L^p(\Omega)\,(p < 6)$ до деякої функції $u(x) \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$.

У пунктах 2)-4) ми покажемо, що функція $u(x)$ є мінімізантом функціонала (5.2.9) і, значить, розв'язком усередненої задачі (5.1.2). Це робиться в такий спосіб. У пункті 2) ми вводимо спеціальні тестові функції $w^\varepsilon(x)$, що апроксимують мінімізант функціонала (5.2.8). Вони будуються по довільній функції $w(x) \in C_0^2(\Omega)$ і задовольняють наступним властивостям: $w^\varepsilon(x) \in H^1(\Omega^\varepsilon, \partial\Omega)$, у малих околах куль B_i^ε вони задовольняють рівнянню Лапласа, на поверхні куль крайовій умові й досить далеко від куль $w^\varepsilon(x) = w(x)$. Такі функції ми будемо називати «квазірозв'язками».

Оскільки розв'язки $u^\varepsilon(x)$ задачі (5.1.1) мінімізують функціонал (5.2.8) в $H^1(\Omega^\varepsilon, \partial\Omega)$, то справедлива нерівність

$$\Phi^\varepsilon[u^\varepsilon] \leqslant \Phi^\varepsilon[w^\varepsilon]. \tag{5.2.10}$$

У пункті 3) ми покажемо, що при виконанні умов теореми

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \Phi^\varepsilon[w^\varepsilon] = \Phi[w], \tag{5.2.11}$$

де $\Phi[w]$ – функціонал, визначений у (5.2.9). З (5.2.10), (5.2.11), внаслідок щільності $C_0^2(\Omega)$ у просторі $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ випливає нерівність

$$\varlimsup_{\varepsilon\to 0} \Phi^\varepsilon[u^\varepsilon] \leqslant \Phi[w],\ \forall\, w \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega). \tag{5.2.12}$$

У пункті 4) ми покажемо, що якщо $u^\varepsilon(x)$ збігається слабко в $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ до функції $u(x)$ по підпослідовності $\varepsilon = \varepsilon_k \to 0$, то справедлива нерівність

$$\varliminf_{\varepsilon=\varepsilon_k\to 0} \Phi^\varepsilon[u^\varepsilon] \geqslant \Phi[u]. \tag{5.2.13}$$

З (5.2.12), (5.2.13) випливає, що гранична функція $u(x)$ задовольняє нерівності $\Phi[u] \leqslant \Phi[w]$ для довільної функції $w(x) \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$. Отже, $u(x)$ мінімізує функціонал $\Phi[w]$ у класі $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ і, значить, є розв'язком усередненої задачі (5.1.2).

У пункті 5) ми покажемо, що усереднена задача (5.1.2) має єдиний розв'язок, тоді вся послідовність продовжених розв'язків $\{\tilde{u}^\varepsilon(x)\}_\varepsilon$ збігається сильно в $L^p(\Omega)$ до функції $u(x)$, і, отже, послідовність розв'язків $\{u^\varepsilon(x)\}_\varepsilon$ початкової задачі (5.1.1) збігається в $L^p(\Omega^\varepsilon, \Omega)$ до розв'язку $u(x)$ усередненої задачі (5.1.2).

Попередньо доведемо допоміжну лему.

Лема 5.1. *Нехай виконана умова 1) Теореми 5.1, тоді для будь-якої функції* $w(x) \in C_0^1(\Omega)$ *справедлива рівність*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sum_{i=1}^{N^\varepsilon} C_i^\varepsilon(w(x^{i\varepsilon})) = \int_\Omega C(x, w(x))\, dx. \tag{5.2.14}$$

Доведення. Нехай $K'_\delta \subset K_\delta \subset K''_\delta$ – концентричні куби зі сторонами $\delta' < \delta < \delta''$ відповідно. Розглянемо функції $\varphi_{\delta'}(x)$, $\varphi_{\delta''}(x) \in C_0^\infty(\Omega)$, що задовольняють умови: $0 \leqslant \varphi_{\delta'}(x) \leqslant 1$, $\varphi_{\delta'}(x) = 1$ при $x \in K'_\delta$, $\varphi_{\delta'}(x) = 0$ при $x \notin K_\delta$; $0 \leqslant \varphi_{\delta''}(x) \leqslant 1$, $\varphi_{\delta''}(x) = 1$ при $x \in K_\delta$, $\varphi_{\delta''}(x) = 0$ при $x \notin K''_\delta$.

В силу визначення узагальненої функції $C^\varepsilon(x, u)$ (5.2.4) та додатності функцій $C_i^\varepsilon(u)$ (5.2.5) справедливі нерівності

$$\langle C^\varepsilon(x, u), \varphi_{\delta'}(x)\rangle \leqslant \sum_{x^{i\varepsilon} \in K_\delta} C_i^\varepsilon(u) \leqslant \sum_{x^{i\varepsilon} \in \overline{K}_\delta} C_i^\varepsilon(u) \leqslant \langle C^\varepsilon(x, u), \varphi_{\delta''}(x)\rangle.$$

Перейдемо в них до границі при $\varepsilon \to 0$. Тоді, враховуючи умову 1) Теореми 5.1, одержуємо

$$\int_\Omega C(x, u)\varphi_{\delta'}(x)\, dx \leqslant \varliminf_{\varepsilon \to 0} \sum_{x^{i\varepsilon} \in K_\delta} C_i^\varepsilon(u) \leqslant \varlimsup_{\varepsilon \to 0} \sum_{x^{i\varepsilon} \in \overline{K}_\delta} C_i^\varepsilon(u) \leqslant \int_\Omega C(x, u)\varphi_{\delta''}(x)\, dx.$$

Тепер перейдемо до границі при $\delta' \to \delta$, $\delta'' \to \delta$. З огляду на властивості функцій $\varphi_{\delta'}(x)$, $\varphi_{\delta''}(x)$ робимо висновок, що

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sum_{x^{i\varepsilon} \in K_\delta} C_i^\varepsilon(u) = \lim_{\varepsilon \to 0} \sum_{x^{i\varepsilon} \in \overline{K}_\delta} C_i^\varepsilon(u) = \int_{K_\delta} C(x, u)\, dx. \tag{5.2.15}$$

Розріжемо область Ω на непересічні куби K_δ^j зі сторонами δ, так щоб $supp\, w(x) \in \bigcup\limits_j K_\delta^j$, тоді

$$\sum_{i=1}^{N^\varepsilon} C_i^\varepsilon(w(x^{i\varepsilon})) = \sum_j \sum_{x^{i\varepsilon} \in \overline{K}_\delta^j}{}' C_i^\varepsilon(w(x^{i\varepsilon})), \tag{5.2.16}$$

тут $\sum'$ означає, що $x^{i\varepsilon}$ належить тільки одному $\overline{K}^j_\delta$.

Позначимо $\overline{w}_j$ – середнє значення функції $w(x)$ у кубі $\overline{K}^j_\delta$, тоді, оскільки $w(x) \in C^1_0(\Omega)$, маємо

$$|\overline{w}_j - w(x)| < C\delta, \text{ при } x \in \overline{K}^j_\delta. \tag{5.2.17}$$

З огляду на (5.2.16) запишемо

$$\sum_{i=1}^{N^\varepsilon} C_i^\varepsilon(w(x^{i\varepsilon})) = \sum_j \sum_{x^{i\varepsilon}\in\overline{K}^j_\delta}{}' (C_i^\varepsilon(w(x^{i\varepsilon})) - C_i^\varepsilon(\overline{w}_j)) + \sum_j \sum_{x^{i\varepsilon}\in\overline{K}^j_\delta}{}' C_i^\varepsilon(\overline{w}_j), \tag{5.2.18}$$

Оцінимо перший доданок. З визначення $C_i^\varepsilon(u)$ (5.2.5) і нерівності (5.2.17) випливає

$$\left|\sum_j \sum_{x^{i\varepsilon}\in\overline{K}^j_\delta}{}' (C_i^\varepsilon(w(x^{i\varepsilon})) - C_i^\varepsilon(\overline{w}_j))\right| \leqslant \sum_j \sum_{x^{i\varepsilon}\in\overline{K}^j_\delta}{}' \left|C_i^\varepsilon(w(x^{i\varepsilon})) - C_i^\varepsilon(\overline{w}_j)\right| \leqslant$$
$$\leqslant C\delta \sum_j \sum_{x^{i\varepsilon}\in\overline{K}^j_\delta}{}' b_i^\varepsilon = C\delta \sum_{i=1}^{N^\varepsilon} b_i^\varepsilon.$$

Застосовуючи нерівність Гельдера для значення $\varkappa_2$ з умови b_2 і користуючись цією умовою, маємо

$$\sum_{i=1}^{N^\varepsilon} b_i^\varepsilon \leqslant \left(\sum_{i=1}^{N^\varepsilon} \frac{(b_i^\varepsilon)^{\varkappa_2}}{(d_i^\varepsilon)^{3(\varkappa_2-1)}}\right)^{\frac{1}{\varkappa_2}} \left(\sum_{i=1}^{N^\varepsilon} (d_i^\varepsilon)^3\right)^{\frac{\varkappa_2-1}{\varkappa_2}} \leqslant C_b^{\frac{1}{\varkappa_2}} |\Omega|^{\frac{\varkappa_2-1}{\varkappa_2}}. \tag{5.2.19}$$

Тоді для першого доданка в (5.2.18) справедлива оцінка

$$\left|\sum_j \sum_{x^{i\varepsilon}\in\overline{K}^j_\delta}{}' (C_i^\varepsilon(w(x^{i\varepsilon})) - C_i^\varepsilon(\overline{w}_j))\right| \leqslant \tilde{C}\delta, \tag{5.2.20}$$

де константа $\tilde{C}$ не залежить від ε, δ.

Оцінимо другий доданок у (5.2.18). З (5.2.15) у врахуванням того, що $w(x) \in C^1_0(\Omega)$ та $C(x,u) \in C(\Omega, C^1(\mathbb{R}))$, випливає

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sum_j \sum_{x^{i\varepsilon}\in\overline{K}^j_\delta}{}' C_i^\varepsilon(\overline{w}_j) = \sum_j \int\limits_{K^j_\delta} C(x, \overline{w}_j)\, dx = \int\limits_\Omega C(x, w(x))\, dx + O(\delta). \tag{5.2.21}$$

З (5.2.18), (5.2.20), (5.2.21) одержуємо

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{i=1}^{N^\varepsilon} C_i^\varepsilon(w(x^{i\varepsilon})) = \int\limits_\Omega C(x,w(x))\,dx + O(\delta).$$

Переходимо до границі при $\delta \to 0$ та одержуємо необхідну рівність (5.2.14).

Лема 5.1 доведена. □

1. Компактність мінімізантів функціонала (5.2.8). Оскільки $\Phi^\varepsilon[u^\varepsilon] \leqslant \Phi^\varepsilon[0] = 0$, то при $(\alpha,\beta)\in\Lambda_d$ справедлива нерівність

$$0 \leqslant \int\limits_{\Omega^\varepsilon} |\nabla u^\varepsilon|^2\,dx + \varepsilon^\beta \sum_{i=1}^{N^\varepsilon}\int\limits_{\partial B_i^\varepsilon} g(x^{i\varepsilon},u^\varepsilon)\,d\Gamma \leqslant 2\int\limits_{\Omega^\varepsilon} f^\varepsilon u^\varepsilon\,dx.$$

Звідси через нерівность Коші-Буняковського і невід'ємность функції $g(x,u^\varepsilon)$ одержимо

$$\|\nabla u^\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} \leqslant 2\,\|f^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}\,\|u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}\,. \tag{5.2.22}$$

З умови b_1 випливає, що області Ω^ε задовольняють умові продовження ([45]), тобто функції $u^\varepsilon(x)\in H^1(\Omega^\varepsilon)$ допускають продовження $\tilde u^\varepsilon(x)\in H^1(\Omega)$ на всю область Ω з виконанням нерівності

$$\|\nabla \tilde u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leqslant C_1\,\|\nabla u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}\,, \tag{5.2.23}$$

де константа C_1 не залежить від ε.

З (5.2.22), (5.2.23) і нерівності Фрідріхса одержимо

$$\|\tilde u^\varepsilon\|_{\mathring{H}^1(\Omega)} \leqslant C_3\,\|f^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}\,,$$

звідки, враховуючи збіжність $f^\varepsilon(x)$ до $F(x)$ в $L^2(\Omega)$, маємо

$$\|\tilde u^\varepsilon\|_{\mathring{H}^1(\Omega)} \leqslant \tilde C,$$

де константа $\tilde C$ не залежить від ε. Таким чином, функції $\tilde u^\varepsilon(x)$ рівномірно обмежені по ε в $\mathring{H}^1(\Omega)$. Звідси випливає, що послідовність функцій $\{\tilde u^\varepsilon(x)\}_\varepsilon$ слабко компактна в $\mathring{H}^1(\Omega)$, і, значить, з неї можна виділити підпослідовність $\{\varepsilon=\varepsilon_k,\ k=1,...,\infty\}$, що слабко збігається в $\mathring{H}^1(\Omega)$ та у силу компактності вкладення $\mathring{H}^1(\Omega)\subset L^p(\Omega)\,(p<6)$ сильно в $L^p(\Omega)$ до деякої функції $u(x)\in \mathring{H}^1(\Omega)$. Таким чином, підпослідовність $\{u^{\varepsilon_k}(x)\}_{k=1}^\infty$ збігається в $L^p(\Omega^\varepsilon,\Omega)$ до функції $u(x)\in\mathring{H}^1(\Omega)$.

Покажемо, що функція $u(x)$ мінімізує функціонал (5.2.9).

2. Побудова квазірозв'язків. По довільній функції $w \in C_0^2(\Omega)$ побудуємо наступні функції

$$w^\varepsilon(x) = w_1^\varepsilon(x) - w_2^\varepsilon(x),\ x \in \Omega^\varepsilon, \tag{5.2.24}$$

$$w_1^\varepsilon(x) = w(x) - \sum_{i=1}^{N^\varepsilon}(w(x) - w(x^{i\varepsilon})) \cdot \varphi\left(\frac{r}{4r_i^\varepsilon}\right), \tag{5.2.25}$$

$$w_2^\varepsilon(x) = \sum_{i=1}^{N^\varepsilon} \frac{A_i^\varepsilon}{r} \cdot \varphi\left(\frac{2r}{d_i^\varepsilon}\right), \tag{5.2.26}$$

де $r = |x - x^{i\varepsilon}|$, $\varphi(t)$ – двічі неперервно-диференційована та монотонна на $[0, \infty)$ функція, така що $\varphi(t) = 1$ для $t \leqslant 1/2$ і $\varphi(t) = 0$ для $t \geqslant 1$, числа A_i^ε є розв'язком рівняння

$$A_i^\varepsilon = (a_i^\varepsilon)^2 \varepsilon^{2\alpha+\beta} \sigma\left(x^{i\varepsilon}, w(x^{i\varepsilon}) - \frac{A_i^\varepsilon}{a_i^\varepsilon \varepsilon^\alpha}\right). \tag{5.2.27}$$

Із властивостей функції $\sigma(x, u)$ випливає, що це рівняння має єдиний розв'язок.

Використовуючи властивості функцій $w(x)$, $\varphi(t)$, неважко переконатися, що $w^\varepsilon(x) \in H^1(\Omega^\varepsilon, \partial\Omega)$; при $x \notin \bigcup_{i=1}^{N^\varepsilon} B(x^{i\varepsilon}, d_i^\varepsilon/2)$: $w^\varepsilon(x) = w(x)$; при $x \in \bigcup_{i=1}^{N^\varepsilon} B(x^{i\varepsilon}, 2r_i^\varepsilon)$: $\Delta w^\varepsilon(x) = 0$; при $x \in \partial B_i^\varepsilon$ функція $w^\varepsilon(x)$ задовольняє крайовій умові в (5.1.1). Таким чином, функція $w^\varepsilon(x)$ має всі властивості квазірозв'язків.

Квазірозв'язки можуть бути природно продовжені на множину B^ε:

$$\tilde{w}^\varepsilon(x) = \begin{cases} w^\varepsilon(x),\ x \in \Omega^\varepsilon; \\ w(x^{i\varepsilon}) - \dfrac{A_i^\varepsilon}{r_i^\varepsilon},\ x \in B_i^\varepsilon,\ i = 1, ..., N^\varepsilon, \end{cases} \tag{5.2.28}$$

тобто значення продовженого квазірозв'язку $\tilde{w}^\varepsilon(x)$ усередині кулі B_i^ε $(i = 1, ..., N^\varepsilon)$ постійне та дорівнює значенню на її поверхні ∂B_i^ε, яке позначимо

$$w_i^\varepsilon = w(x^{i\varepsilon}) - \frac{A_i^\varepsilon}{r_i^\varepsilon}. \tag{5.2.29}$$

Внаслідок (5.2.27) w_i^ε є розв'язком рівняння

$$w_i^\varepsilon = w(x^{i\varepsilon}) - \varepsilon^{\alpha+\beta} a_i^\varepsilon \sigma\left(x^{i\varepsilon}, w_i^\varepsilon\right). \tag{5.2.30}$$

Одержимо необхідні надалі оцінки A_i^ε і w_i^ε. У силу властивостей функції $\sigma(x,u)$ рівняння (5.2.30) має єдиний розв'язок, що задовольняє оцінці

$$|w_i^\varepsilon| \leqslant |w(x^{i\varepsilon})| \tag{5.2.31}$$

і може при $(\alpha,\ \beta) \in \Lambda_d$ бути представлений рівностями

$$w_i^\varepsilon = \begin{cases} w(x^{i\varepsilon}) + O(\varepsilon^{\alpha+\beta}) \text{ при } \alpha+\beta>0; \\ V_i^\varepsilon(w(x^{i\varepsilon})) \text{ при } \alpha+\beta=0; \\ \dfrac{w(x^{i\varepsilon})\varepsilon^{-\alpha-\beta}}{a_i^\varepsilon \sigma_u(x_i^\varepsilon,0)} + O(\varepsilon^{-2\alpha-2\beta}) \text{ при } \alpha+\beta<0, \end{cases} \tag{5.2.32}$$

де $V_i^\varepsilon(w(x^{i\varepsilon}))$ – розв'язки рівняння (5.2.7) при $u = w(x^{i\varepsilon})$.

З (5.2.1), (5.2.3), (5.2.27), (5.2.29), (5.2.32) маємо

$$A_i^\varepsilon = \begin{cases} b_i^\varepsilon \sigma(x^{i\varepsilon}, w(x^{i\varepsilon})) + O(\varepsilon^{3\alpha+2\beta}) \text{ при } \alpha+\beta>0; \\ b_i^\varepsilon \sigma(x^{i\varepsilon}, V_i^\varepsilon(w(x^{i\varepsilon}))) \text{ при } \alpha+\beta=0; \\ b_i^\varepsilon w(x^{i\varepsilon}) + O(\varepsilon^{-\beta}) \text{ при } \alpha+\beta<0. \end{cases} \tag{5.2.33}$$

Крім того, з (5.2.29)

$$A_i^\varepsilon = a_i^\varepsilon \varepsilon^\alpha (w(x^{i\varepsilon}) - w_i^\varepsilon). \tag{5.2.34}$$

З (5.2.31), (5.2.33), (5.2.34) внаслідок властивостей функції $\sigma(x,u)$ при всіх $(\alpha,\beta) \in \Lambda_d$ справедливі оцінки

$$\begin{gathered} A_i^\varepsilon = O(\varepsilon^\alpha), \\ |A_i^\varepsilon| \leqslant C b_i^\varepsilon \left(|w(x^{i\varepsilon})| + |w(x^{i\varepsilon})|^{1+\theta}\right). \end{gathered} \tag{5.2.35}$$

Далі, поклавши $C_{1w} = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant N^\varepsilon} C\left(|w(x^{i\varepsilon})| + |w(x^{i\varepsilon})|^{1+\theta}\right)$ і використовуючи оцінку (5.2.19), одержуємо

$$\sum_{i=1}^{N^\varepsilon} |A_i^\varepsilon| \leqslant C_{1w} \sum_{i=1}^{N^\varepsilon} b_i^\varepsilon \leqslant C_{2w}, \tag{5.2.36}$$

константи C_{1w}, C_{2w} не залежать від ε, але залежать від вибору функції $w(x)$.

Для квазірозв'язків справедлива наступна лема.

Лема 5.2. *Послідовність продовжених квазірозв'язків $\{\tilde{w}^\varepsilon(x)\}_\varepsilon$ при $\varepsilon \to 0$ збігається слабко в $H^1(\Omega)$ до функції $w(x)$, при цьому $\{\tilde{w}_1^\varepsilon(x)\}_\varepsilon$ збігається сильно до $w(x)$ і $\{\tilde{w}_2^\varepsilon(x)\}_\varepsilon$ збігається слабко до 0.*

Доведення. Внаслідок (5.2.25), (5.2.28) та оцінок (5.2.35), (5.2.36), маємо

$$\|\tilde{w}_1^\varepsilon - w\|^2_{H^1(\Omega)} \leqslant \sum_{i=1}^{N^\varepsilon} \left[\int\limits_{B(x^{i\varepsilon},4r_i^\varepsilon)} (w(x) - w(x^{i\varepsilon}))^2\, dx + \right.$$

$$+ \int\limits_{B(x^{i\varepsilon},4r_i^\varepsilon)\setminus B(x^{i\varepsilon},2r_i^\varepsilon)} \left(2|w(x) - w(x^{i\varepsilon})| \left(\nabla w(x), \nabla\varphi\left(\frac{r}{4r_i^\varepsilon}\right)\right) + |\nabla w(x)|^2 \right) dx +$$

$$\left. + \int\limits_{B(x^{i\varepsilon},4r_i^\varepsilon)\setminus B(x^{i\varepsilon},2r_i^\varepsilon)} (w(x) - w(x^{i\varepsilon}))^2 \left|\nabla\varphi\left(\frac{r}{4r_i^\varepsilon}\right)\right|^2 dx \right] = O(\varepsilon^{3(\alpha-1)}).$$

Отже,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \|\tilde{w}_1^\varepsilon - w\|_{H^1(\Omega)} = 0,$$

і функції $\tilde{w}_1^\varepsilon(x)$ збігаються сильно до функції $w(x)$ в $H^1(\Omega)$.

З огляду на (5.2.26), (5.2.28), умову b_1 для областей Ω^ε та оцінки (5.2.35), (5.2.36) маємо

$$\|\tilde{w}_2^\varepsilon\|^2_{H^1(\Omega)} \leqslant \sum_{i=1}^{N^\varepsilon} \left[\int\limits_{B_i^\varepsilon} \frac{(A_i^\varepsilon)^2}{(r_i^\varepsilon)^2}\, dx + \int\limits_{B(x^{i\varepsilon},d_i^\varepsilon/2)\setminus B_i^\varepsilon} \frac{(A_i^\varepsilon)^2(r^2+1)}{r^4}\, dx \right] +$$

$$+ \sum_{i=1}^{N^\varepsilon} \int\limits_{B(x^{i\varepsilon},d_i^\varepsilon/2)\setminus B(x^{i\varepsilon},d_i^\varepsilon/4)} \frac{(A_i^\varepsilon)^2}{r^2} \left|\nabla\varphi\left(\frac{2r}{d_i^\varepsilon}\right)\right|^2 dx +$$

$$+ \sum_{i=1}^{N^\varepsilon} \int\limits_{B(x^{i\varepsilon},d_i^\varepsilon/2)\setminus B(x^{i\varepsilon},d_i^\varepsilon/4)} \frac{2(A_i^\varepsilon)^2}{r} \left(\nabla\frac{1}{r}, \nabla\varphi\left(\frac{2r}{d_i^\varepsilon}\right)\right) dx \leqslant 2\pi \sum_{i=1}^{N^\varepsilon} (A_i^\varepsilon)^2 d_i^\varepsilon +$$

$$+ \frac{4\pi}{3} \sum_{i=1}^{N^\varepsilon} (A_i^\varepsilon)^2 r_i^\varepsilon + 4\pi \sum_{i=1}^{N^\varepsilon} \frac{(A_i^\varepsilon)^2}{r_i^\varepsilon} + C \sum_{i=1}^{N^\varepsilon} \frac{(A_i^\varepsilon)^2}{d_i^\varepsilon} \leqslant 8\pi C_{2w} \max_{1\leqslant i\leqslant N^\varepsilon} w(x^{i\varepsilon}) +$$

$$+ O\left(\varepsilon^{\alpha(1-\varkappa_1)}\right) \leqslant \hat{C},$$

де $\hat{C}$ не залежить від ε і, значить, функції $\tilde{w}_2^\varepsilon(x)$ рівномірно обмежені по ε в $H^1(\Omega)$. Крім того, для будь-якої функції $\psi(x) \in C^2(\Omega)$ маємо

$$\left|(\tilde{w}_2^\varepsilon, \psi)_{H^1(\Omega)}\right| \leqslant \sum_{i=1}^{N^\varepsilon} |A_i^\varepsilon| \left[\int\limits_{B(x^{i\varepsilon},d_i^\varepsilon/2)\setminus B(x^{i\varepsilon},d_i^\varepsilon/4)} \frac{1}{r} \left| \left(\nabla\varphi\left(\frac{2r}{d_i^\varepsilon}\right), \nabla\psi\right) \right| dx + \right.$$

$$+\int\limits_{B_i^\varepsilon} \frac{|\psi(x)|}{r_i^\varepsilon}\,dx + \int\limits_{B(x^{i\varepsilon},d_i^\varepsilon/2)\setminus B_i^\varepsilon} \varphi\left(\frac{2r}{d_i^\varepsilon}\right)\left(\frac{|\psi(x)|}{r} + \left|\left(\nabla\frac{1}{r},\nabla\psi\right)\right|\right)dx\Bigg] \leqslant$$
$$\leqslant C_1\varepsilon^{3(\alpha-1)} + C_2 \max_{1\leqslant i\leqslant N^\varepsilon} d_i^\varepsilon,$$

де константи C_1, C_2 не залежать від ε. Перейдемо до границі при $\varepsilon\to 0$. Через умову b_1, одержуємо

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(\tilde{w}_2^\varepsilon,\psi)_{H^1(\Omega)} = 0.$$

Таким чином, функції $\tilde{w}_2^\varepsilon(x)$ рівномірно обмежені по ε і слабко збігаються до 0 на всюди щільній у $H^1(\Omega)$ множині $C^2(\Omega)$ і, значить, функції $\tilde{w}_2^\varepsilon(x)$ слабко збігаються до 0 в просторі $H^1(\Omega)$.

Отже, функції $\tilde{w}^\varepsilon(x) = \tilde{w}_1^\varepsilon(x) + \tilde{w}_2^\varepsilon(x)$ слабко збігаються до функції $w(x)$ у просторі $H^1(\Omega)$.

Лема 5.2 доведена. □

3. Доведення нерівності (5.2.12). Підставимо квазірозв'язок $w^\varepsilon(x)$ (5.2.24) у функціонал (5.2.8) і запишемо його в наступному вигляді

$$\Phi^\varepsilon[w^\varepsilon] = \int\limits_{\Omega^\varepsilon} |\nabla w_1^\varepsilon|^2\,dx - 2\int\limits_{\Omega^\varepsilon}(\nabla w_1^\varepsilon,\nabla w_2^\varepsilon)\,dx + \int\limits_{\Omega^\varepsilon}|\nabla w_2^\varepsilon|^2\,dx -$$
$$-2\int\limits_{\Omega^\varepsilon} f^\varepsilon w^\varepsilon\,dx + \varepsilon^\beta\sum_{i=1}^{N^\varepsilon}\int\limits_{\partial B_i^\varepsilon} g(x^{i\varepsilon},w^\varepsilon)\,d\Gamma. \qquad (5.2.37)$$

Оцінимо третій доданок у (5.2.37). Використовуючи визначення функцій $w_2^\varepsilon(x)$ (5.2.26), оцінки (5.2.35), (5.2.36), умову b_1 для областей Ω^ε і застосовуючи інтегрування частинами по областях $B(x^{i\varepsilon},d_i^\varepsilon/4)\setminus B(x^{i\varepsilon},2r_i^\varepsilon)$ $(i = 1,\dots,N^\varepsilon)$, враховуючи $\Delta w_2^\varepsilon = 0$ у цих областях, одержуємо

$$\int\limits_{\Omega^\varepsilon}|\nabla w_2^\varepsilon|^2\,dx = \sum_{i=1}^{N^\varepsilon}\int\limits_{B(x^{i\varepsilon},d_i^\varepsilon/2)\setminus B_i^\varepsilon}|\nabla w_2^\varepsilon|^2\,dx = \sum_{i=1}^{N^\varepsilon}\Bigg[\int\limits_{\partial B(x^{i\varepsilon},d_i^\varepsilon/4)}\frac{\partial w_2^\varepsilon}{\partial\nu}\cdot w_2^\varepsilon\,d\Gamma +$$
$$+\int\limits_{B(x^{i\varepsilon},d_i^\varepsilon/2)\setminus B(x^{i\varepsilon},d_i^\varepsilon/4)}|\nabla w_2^\varepsilon|^2\,dx + \int\limits_{\partial B_i^\varepsilon}\frac{\partial w_2^\varepsilon}{\partial\nu}\cdot w_2^\varepsilon\,d\Gamma\Bigg] \leqslant C_1\sum_{i=1}^{N^\varepsilon}\frac{(A_i^\varepsilon)^2}{d_i^\varepsilon} + 4\pi\sum_{i=1}^{N^\varepsilon}\frac{(A_i^\varepsilon)^2}{r_i^\varepsilon} \leqslant$$
$$\leqslant 4\pi\sum_{i=1}^{N^\varepsilon}\frac{(A_i^\varepsilon)^2}{r_i^\varepsilon} + O\left(\varepsilon^{(1-\varkappa_1)\alpha}\right) = 4\pi\sum_{i=1}^{N^\varepsilon} a_i^\varepsilon\varepsilon^\alpha(w(x^{i\varepsilon}) - w_i^\varepsilon)^2 + O\left(\varepsilon^{(1-\varkappa_1)\alpha}\right).$$

Внаслідок (5.2.32) при $\varepsilon \to 0$ та $(\alpha, \beta) \in \Lambda_d$ маємо

$$\int\limits_{\Omega^\varepsilon} |\nabla w_2^\varepsilon|^2\,dx = \begin{cases} o(1) \text{ при } \alpha+\beta>0; \\ 4\pi \sum\limits_{i=1}^{N^\varepsilon} a_i^\varepsilon \left(w(x^{i\varepsilon}) - V_i^\varepsilon(w(x^{i\varepsilon}))\right)^2 \varepsilon^\alpha + o(1) \\ \text{ при } \alpha+\beta=0; \\ 4\pi \sum\limits_{i=1}^{N^\varepsilon} a_i^\varepsilon \left(w(x^{i\varepsilon})\right)^2 \varepsilon^\alpha + o(1) \text{ при } \alpha+\beta<0, \end{cases} \tag{5.2.38}$$

тут $V_i^\varepsilon(w(x^{i\varepsilon}))$ – розв'язок рівняння (5.2.7) при $u = w(x^{i\varepsilon})$.

Оцінимо останній доданок у (5.2.37). Оскільки при $x \in \partial B_i^\varepsilon$ значення квазірозв'язків $w^\varepsilon(x) = w_i^\varepsilon$, маємо

$$\varepsilon^\beta \sum_{i=1}^{N^\varepsilon} \int\limits_{\partial B_i^\varepsilon} g(x^{i\varepsilon}, w^\varepsilon(x))\,d\Gamma = \varepsilon^\beta \sum_{i=1}^{N^\varepsilon} \int\limits_{\partial B_i^\varepsilon} g(x^{i\varepsilon}, w_i^\varepsilon)\,d\Gamma = 4\pi \sum_{i=1}^{N^\varepsilon} (a_i^\varepsilon)^2 g(x^{i\varepsilon}, w_i^\varepsilon)\varepsilon^{2\alpha+\beta}.$$

Використовуючи визначення функції $g(x,u)$ (5.2.6) і властивості функції $\sigma(x,s)$, оцінимо $g(x^{i\varepsilon}, w_i^\varepsilon)$ при $\alpha+\beta \neq 0$. У силу (5.2.32) при $\alpha+\beta<0$ значення $w_i^\varepsilon = O(\varepsilon^{-\alpha-\beta})$ малі, тоді

$$g(x^{i\varepsilon}, w_i^\varepsilon) = 2\int\limits_0^{w_i^\varepsilon} \sigma(x^{i\varepsilon}, s)\,ds = 2\int\limits_0^{w_i^\varepsilon} \left(\sigma(x^{i\varepsilon},0) + \sigma_s'(x^{i\varepsilon},0)s + O(s^2)\right)\,ds =$$
$$= \sigma_s'(x^{i\varepsilon},0)\cdot(w_i^\varepsilon)^2 + O((w_i^\varepsilon)^3) = O(\varepsilon^{-2\alpha-2\beta}),$$

при $\alpha+\beta>0$ значення $w_i^\varepsilon = w(x^{i\varepsilon}) + O(\varepsilon^{\alpha+\beta})$, тоді

$$g(x^{i\varepsilon}, w_i^\varepsilon) = g(x^{i\varepsilon}, w(x^{i\varepsilon})) + 2\int\limits_{w(x^{i\varepsilon})}^{w(x^{i\varepsilon})+O(\varepsilon^{\alpha+\beta})} \sigma(x^{i\varepsilon}, s)\,ds = g(x^{i\varepsilon}, w(x^{i\varepsilon})) + O(\varepsilon^{\alpha+\beta}).$$

Таким чином, при $\varepsilon \to 0$ та $(\alpha, \beta) \in \Lambda_d$ маємо

$$\varepsilon^{\beta}\sum_{i=1}^{N^\varepsilon}\int\limits_{\partial B_i^\varepsilon} g(x^{i\varepsilon},w^\varepsilon)\,d\Gamma=\begin{cases} 4\pi\displaystyle\sum_{i=1}^{N^\varepsilon}(a_i^\varepsilon)^2 g\left(x^{i\varepsilon},w(x^{i\varepsilon})\right)\varepsilon^{2\alpha+\beta}+o(1) \\ \text{ при } \alpha+\beta>0; \\ 4\pi\displaystyle\sum_{i=1}^{N^\varepsilon}(a_i^\varepsilon)^2 g\left(x^{i\varepsilon},V_i^\varepsilon(w(x^{i\varepsilon}))\right)\varepsilon^{\alpha} \\ \text{ при } \alpha+\beta=0; \\ o(1) \text{ при } \alpha+\beta<0. \end{cases} \tag{5.2.39}$$

З огляду на формули (5.2.5), (5.2.37) та отримані оцінки (5.2.38), (5.2.39) при малих ε маємо

$$\Phi^\varepsilon[w^\varepsilon]=\int\limits_{\Omega^\varepsilon}|\nabla w_1^\varepsilon|^2\,dx-2\int\limits_{\Omega^\varepsilon}(\nabla w_1^\varepsilon,\nabla w_2^\varepsilon)\,dx-2\int\limits_{\Omega^\varepsilon}f^\varepsilon w^\varepsilon\,dx+2\sum_{i=1}^{N^\varepsilon}C_i^\varepsilon(w(x^{i\varepsilon}))+o(1).$$

Перейдемо до границі при $\varepsilon\to 0$. Оскільки $w(x)\in C_0^2(\Omega)$, через (5.2.4), умови Теореми 5.1, Лем 5.1, 5.2 одержуємо

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\Phi^\varepsilon[w^\varepsilon]=\int\limits_{\Omega}|\nabla w|^2\,dx-2\int\limits_{\Omega}Fw\,dx+2\int\limits_{\Omega}C(x,w)\,dx.$$

Таким чином, для будь-якої функції $w(x)\in C_0^2(\Omega)$ справедлива рівність (5.2.11), де $\Phi[w]$ – функціонал, визначений у (5.2.9). Враховуючи, що простір $C_0^2(\Omega)$ щільний у просторі $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ та $u^\varepsilon(x)$ – мінімізант функціонала Φ^ε, ми переконуємося в справедливості нерівності (5.2.12) для $\forall\, w(x)\in\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$.

4. Доведення нерівності (5.2.13)**.** Розглянемо тепер функцію $u(x)$ – слабку границю в $H^1(\Omega)$ продовжених розв'язків $\tilde{u}^\varepsilon(x)$ задачі (5.1.1) по підпослідовності $\varepsilon=\varepsilon_k\to 0$. Як випливає з теорем вкладення, сліди $\tilde{u}^\varepsilon(x)$ та $u(x)$ на $\partial\Omega$ збігаються й дорівнюють 0. Таким чином, функція $u(x)\in\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$.

Ми не можемо стверджувати, що функція $u(x)\in C_0^2(\Omega)$ і, отже, не можемо побудувати квазірозв'язки для цієї функції, тому, використовуючи (5.2.24)-(5.2.26), спочатку ми побудуємо квазірозв'язки $u_\delta^\varepsilon(x)$ для функції $u_\delta(x)\in C_0^2(\Omega)$, такої що

$$\|u-u_\delta\|_{H^1(\Omega)}\leqslant\delta \tag{5.2.40}$$

для довільного малого $\delta>0$.

Представимо розв'язок задачі (5.1.1) у формі

$$u^\varepsilon(x) = u_\delta^\varepsilon(x) + \zeta_\delta^\varepsilon(x), \tag{5.2.41}$$

оскільки функції $u^\varepsilon(x), u_\delta^\varepsilon(x) \in H^1(\Omega^\varepsilon, \partial\Omega)$, то $\zeta_\delta^\varepsilon(x) \in H^1(\Omega^\varepsilon, \partial\Omega)$. Продовжимо квазірозв'язки $u_\delta^\varepsilon(x)$ у кулі B_i^ε описаним раніше способом (5.2.28). Продовження функції $\zeta_\delta^\varepsilon(x)$ визначимо відповідно

$$\tilde{\zeta}_\delta^\varepsilon(x) = \tilde{u}^\varepsilon(x) - \tilde{u}_\delta^\varepsilon(x).$$

Оскільки, послідовність продовжених розв'язків $\tilde{u}^\varepsilon(x)$ збігається слабко в $H^1(\Omega)$ до функції $u(x)$ по підпослідовності $\varepsilon = \varepsilon_k \to 0\,(k = 1, ..., \infty)$ і послідовність функцій $\tilde{u}_\delta^\varepsilon(x)$ через Лему 5.2 збігається слабко в $H^1(\Omega)$ до функції $u_\delta(x)$ при $\varepsilon \to 0$, то послідовність функцій $\tilde{\zeta}_\delta^\varepsilon(x)$ збігається слабко в $H^1(\Omega)$ до функції $u(x) - u_\delta(x)$ по підпослідовності $\varepsilon = \varepsilon_k \to 0\,(k = 1, ..., \infty)$.

Підставимо функцію $u^\varepsilon(x)$ (5.2.41) у функціонал (5.2.8) і, користуючись теоремою про середнє для функції $g(x, u)$ на інтервалі $(u_\delta^\varepsilon, u_\delta^\varepsilon + \zeta_\delta^\varepsilon)$, запишемо

$$\Phi^\varepsilon[u^\varepsilon] = \Phi^\varepsilon[u_\delta^\varepsilon] + \int\limits_{\Omega^\varepsilon} |\nabla\zeta_\delta^\varepsilon|^2\,dx + 2\int\limits_{\Omega^\varepsilon} (\nabla u_\delta^\varepsilon, \nabla\zeta_\delta^\varepsilon)\,dx - 2\int\limits_{\Omega^\varepsilon} f^\varepsilon\zeta_\delta^\varepsilon\,dx +$$
$$+ 2\varepsilon^\beta \sum_{i=1}^{N^\varepsilon} \int\limits_{\partial B_i^\varepsilon} \sigma(x^{i\varepsilon}, u_\delta^\varepsilon + \hat{\zeta}_\delta^\varepsilon)\zeta_\delta^\varepsilon\,d\Gamma,$$

де $0 \leqslant \hat{\zeta}_\delta^\varepsilon \leqslant \zeta_\delta^\varepsilon$ при $\zeta_\delta^\varepsilon > 0$ та $\zeta_\delta^\varepsilon \leqslant \hat{\zeta}_\delta^\varepsilon \leqslant 0$ при $\zeta_\delta^\varepsilon < 0$. Далі, враховуючи подання (5.2.24)-(5.2.26) $u_\delta^\varepsilon(x) = u_{\delta1}^\varepsilon(x) + u_{\delta2}^\varepsilon(x)$, за допомогою інтегрування частинами, враховуючи крайові умови, одержуємо

$$\Phi^\varepsilon[u^\varepsilon] = \Phi^\varepsilon[u_\delta^\varepsilon] + \int\limits_{\Omega^\varepsilon} |\nabla\zeta_\delta^\varepsilon|^2\,dx + 2\int\limits_{\Omega^\varepsilon} (\nabla u_{\delta1}^\varepsilon, \nabla\zeta_\delta^\varepsilon)\,dx - 2\int\limits_{\Omega^\varepsilon} \Delta u_{\delta2}^\varepsilon\zeta_\delta^\varepsilon\,dx -$$
$$-2\int\limits_{\Omega^\varepsilon} f^\varepsilon\zeta_\delta^\varepsilon\,dx + 2\varepsilon^\beta \sum_{i=1}^{N^\varepsilon} \int\limits_{\partial B_i^\varepsilon} \Big(\sigma(x^{i\varepsilon}, u_\delta^\varepsilon + \hat{\zeta}_\delta^\varepsilon) - \sigma(x^{i\varepsilon}, u_\delta^\varepsilon)\Big)\,\zeta_\delta^\varepsilon\,d\Gamma.$$

Звідси внаслідок монотонності функції $\sigma(x, u)$ випливає

$$\Phi^\varepsilon[u^\varepsilon] \geqslant \Phi^\varepsilon[u_\delta^\varepsilon] - 2\left|\int\limits_{\Omega^\varepsilon} (\nabla u_{\delta1}^\varepsilon, \nabla\zeta_\delta^\varepsilon)\,dx\right| - 2\left|\int\limits_{\Omega^\varepsilon} \Delta u_{\delta2}^\varepsilon\zeta_\delta^\varepsilon\,dx\right| - 2\left|\int\limits_{\Omega^\varepsilon} f^\varepsilon\zeta_\delta^\varepsilon\,dx\right|. \tag{5.2.42}$$

Оцінимо доданки в правій частині цієї нерівності.

Користуючись нерівностями Коші-Буняковського та (5.2.40) і з огляду на те, що функції $\tilde{u}^{\varepsilon}_{\delta 1}(x)$ збігаються сильно в $H^1(\Omega)$ до функції $u_\delta(x)$ при $\varepsilon \to 0$, $\tilde{\zeta}^{\varepsilon}_{\delta}(x)$ збігаються слабко в $H^1(\Omega)$, і внаслідок компактності вкладення $H^1(\Omega) \subset L^p(\Omega)\,(p < 6)$, сильно в $L^p(\Omega)$, до функції $u(x) - u_\delta(x)$ по підпослідовності $\varepsilon = \varepsilon_k \to 0$ та $f^\varepsilon(x)$, продовжені нулем на множину B^ε, збігаються слабко в $L^2(\Omega)$ до функції $F(x)$, одержуємо

$$\begin{aligned}&\overline{\lim_{\varepsilon=\varepsilon_k\to 0}}\left|\int\limits_{\Omega^\varepsilon}(\nabla u^{\varepsilon}_{\delta 1}, \nabla \zeta^{\varepsilon}_{\delta})\,dx\right| \leqslant \overline{\lim_{\varepsilon=\varepsilon_k\to 0}}\left|\int\limits_{\Omega}(\nabla \tilde{u}^{\varepsilon}_{\delta 1}, \nabla \tilde{\zeta}^{\varepsilon}_{\delta})\,dx\right| = \\ &= \left|\int\limits_{\Omega}(\nabla u_\delta, \nabla(u-u_\delta))\,dx\right| \leqslant \|u_\delta\|_{H^1(\Omega)}\|u-u_\delta\|_{H^1(\Omega)} \leqslant \|u_\delta\|_{H^1(\Omega)}\delta.\end{aligned} \tag{5.2.43}$$

$$\begin{aligned}&\overline{\lim_{\varepsilon=\varepsilon_k\to 0}}\left|\int\limits_{\Omega^\varepsilon} f^\varepsilon\zeta^\varepsilon_\delta\,dx\right| = \overline{\lim_{\varepsilon=\varepsilon_k\to 0}}\left|\int\limits_{\Omega} \tilde{f}^\varepsilon\tilde{\zeta}^\varepsilon_\delta\,dx\right| = \left|\int\limits_{\Omega} f(u-u_\delta)\,dx\right| \leqslant \\ &\leqslant \|f\|_{L^2(\Omega)}\|u-u_\delta\|_{L^2(\Omega)} \leqslant \|f\|_{L^2(\Omega)}\|u-u_\delta\|_{H^1(\Omega)} \leqslant \|f\|_{L^2(\Omega)}\delta.\end{aligned} \tag{5.2.44}$$

Використовуючи властивості функцій $\varphi(t)$, $u_\delta(x)$, умову b_2 для областей Ω^ε і нерівності Коші-Буняковського та Гельдера при значенні $\varkappa_2$ з умови b_2, а також що $|B(x^{i\varepsilon}, d^\varepsilon_i/2)| = \frac{\pi}{6}(d^\varepsilon_i)^3$, одержуємо

$$\begin{aligned}&\left|\int\limits_{\Omega^\varepsilon}\Delta u^\varepsilon_{2\delta}\zeta^\varepsilon_\delta\,dx\right| \leqslant \sum_{i=1}^{N^\varepsilon}\int\limits_{B(x^{i\varepsilon},d^\varepsilon_i/2)\setminus B(x^{i\varepsilon},d^\varepsilon_i/4)}|\Delta u^\varepsilon_{2\delta}\zeta^\varepsilon_\delta|\;dx \leqslant C_1\sum_{i=1}^{N^\varepsilon}\frac{|A^\varepsilon_i[u_\delta]|}{(d^\varepsilon_i)^3}\times \\ &\times\int\limits_{B(x^{i\varepsilon},d^\varepsilon_i/2)\setminus B(x^{i\varepsilon},d^\varepsilon_i/4)}|\zeta^\varepsilon_\delta|\,dx \leqslant C_2\sum_{i=1}^{N^\varepsilon}\frac{|u_\delta(x^{i\varepsilon})|^{1+\theta}b^\varepsilon_i}{(d^\varepsilon_i)^3}\int\limits_{B(x^{i\varepsilon},d^\varepsilon_i/2)}|\tilde{\zeta}^\varepsilon_\delta|\,dx \leqslant \\ &\leqslant C_2\sum_{i=1}^{N^\varepsilon}\frac{|u_\delta(x^{i\varepsilon})|^{1+\theta}b^\varepsilon_i}{(d^\varepsilon_i)^3}|B(x^{i\varepsilon}, d^\varepsilon_i/2)|^{1-1/p_1}\|\tilde{\zeta}^\varepsilon_\delta\|_{L^{p_1}(B(x^{i\varepsilon},d^\varepsilon_i/2))} \leqslant \\ &\leqslant C_3\left(\sum_{i=1}^{N^\varepsilon}\frac{(b^\varepsilon_i)^{\varkappa_2}}{(d^\varepsilon_i)^{3(\varkappa_2-1)}}\right)^{\frac{1}{\varkappa_2}}\left(\sum_{i=1}^{N^\varepsilon}|u_\delta(x^{i\varepsilon})|^{(1+\theta)p_2}(d^\varepsilon_i)^3\right)^{1/p_2}\|\tilde{\zeta}^\varepsilon_\delta\|_{L^{p_1}(\Omega)} \leqslant \\ &\leqslant C_4\|u_\delta\|^{1+\theta}_{L^{(1+\theta)p_2}(\Omega)}\|\tilde{\zeta}^\varepsilon_\delta\|_{L^{p_1}(\Omega)},\end{aligned}$$

де $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{\varkappa_2} = 1$. Через умови a_2, b_2 маємо $\frac{2+\theta}{6} < \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} \leqslant \frac{1}{2}$, і, значить, ми можемо оббрати такі p_1, p_2, щоб $p_1 < 6$ та $(1+\theta)p_2 < 6$. Використовуючи далі той факт, що простір $H^1(\Omega)$ компактно вкладений у простір $L^p(\Omega)$ при $p<6$, одержуємо справедливість наступної оцінки:

$$\varlimsup_{\varepsilon=\varepsilon_k\to 0}\left|\int\limits_{\Omega^\varepsilon}\Delta u^\varepsilon_{2\delta}\zeta^\varepsilon_\delta\,dx\right|\leqslant \tilde{C}\|u_\delta\|^{1+\theta}_{H^1(\Omega)}\varlimsup_{\varepsilon=\varepsilon_k\to 0}\|\tilde{\zeta}^\varepsilon_\delta\|_{L^{p_1}(\Omega)}=\tilde{C}\|u_\delta\|^{1+\theta}_{H^1(\Omega)}\times$$
$$\times\|u-u_\delta\|_{L^{p_1}(\Omega)}\leqslant\tilde{C}\|u_\delta\|^{1+\theta}_{H^1(\Omega)}\|u-u_\delta\|_{H^1(\Omega)}\leqslant\tilde{C}\|u_\delta\|^{1+\theta}_{H^1(\Omega)}\delta. \tag{5.2.45}$$

Перейдемо в нерівності (5.2.42) до границі при $\varepsilon=\varepsilon_k\to 0$. Внаслідок оцінок (5.2.43), (5.2.44), (5.2.45) маємо

$$\varliminf_{\varepsilon=\varepsilon_k\to 0}\Phi^\varepsilon[u^\varepsilon]\geqslant\varliminf_{\varepsilon=\varepsilon_k\to 0}\Phi^\varepsilon[u^\varepsilon_\delta]-2\left(\left(\tilde{C}\|u_\delta\|^\theta_{H^1(\Omega)}+1\right)\|u_\delta\|_{H^1(\Omega)}+\|f\|_{L^2(\Omega)}\right)\delta.$$

Перейдемо в цій нерівності до границі при $\delta\to 0$. Враховуючи неперервність функціонала Φ у $H^1(\Omega)$ і рівність (5.2.11) при $w^\varepsilon=u^\varepsilon_\delta$, $w=u_\delta$, одержуємо

$$\varliminf_{\varepsilon=\varepsilon_k\to 0}\Phi^\varepsilon[u^\varepsilon]\geqslant\lim_{\delta\to 0}\Phi[u_\delta]=\Phi[u].$$

Таким чином, нерівність (5.2.13) доведена.

5. Єдиність розв'язку усередненої задачі (5.1.2). Розгляду вимагають лише випадки, коли параметри (α,β) належать ламаній $\ell_1\cup\lambda_0\cup\ell_2$. Оскільки при $(\alpha,\beta)\in\Lambda_d\setminus\{\ell_1\cup\lambda_0\cup\ell_2\}$: $C(x,u)=0$ $\left(C_u(x,u):=\frac{\partial}{\partial u}C(x,u)=0\right)$, задача (5.1.2) стає задачею Діріхле для рівняння Пуассона.

Будемо розглядати функцію $C^\varepsilon(x,u)$, задану формулою (5.2.4), як узагальнену функцію змінних x, u з $\mathscr{D}'(\Omega\times\mathbb{R})$, що залежить від параметра ε ([9, гл.1]). Розглянемо узагальнену функцію $\tilde{C}^\varepsilon(x,u)\in\mathscr{D}'(\Omega\times\mathbb{R})$: $\tilde{C}^\varepsilon(x,u)=\frac{\partial^2}{\partial^2 u}C^\varepsilon(x,u)=\sum\limits_{i=1}^{N^\varepsilon}\tilde{C}^\varepsilon_i(u)\delta(x-x^{i\varepsilon})$. Внаслідок формул (5.2.5), (5.2.6), (5.2.7) при $(\alpha,\beta)\in\ell_1\cup\lambda_0\cup\ell_2$ маємо

$$\tilde{C}^\varepsilon_i(u)=\begin{cases}4\pi(a^\varepsilon_i)^2\sigma_u(x^{i\varepsilon},u)\varepsilon^3,\ \text{при }(\alpha,\beta)\in\ell_1;\\ \dfrac{4\pi(a^\varepsilon_i)^2\sigma_u(x^{i\varepsilon},V^\varepsilon_i)}{1+a^\varepsilon_i\sigma_u(x^{i\varepsilon},V^\varepsilon_i)}\varepsilon^3,\ \text{при }(\alpha,\beta)\in\lambda_0;\\ 4\pi a^\varepsilon_i\varepsilon^3,\ \text{при }(\alpha,\beta)\in\ell_2.\end{cases} \tag{5.2.46}$$

З умови 1) теореми випливає, що функції $\tilde{C}^\varepsilon(x,u)$ збігаються в слабкій топології $\mathscr{D}'(\Omega)$ до другої похідної $\frac{\partial^2}{\partial u^2}C(x,u)$. Через властивості функції щільності поглинання $\sigma(x,u)$ $(\sigma_u(x,u)\geqslant 0)$ і формули (5.2.46) маємо $\tilde{C}^\varepsilon_i(u)\geqslant 0$. Звідси робимо висновок, що друга похідна $\frac{\partial^2}{\partial u^2}C(x,u) \geqslant 0$ і, отже, справедлива нерівність

$$(C_u(x,u_1) - C_u(x,u_2))\,(u_1 - u_2) \geqslant 0 \;\forall\, u_1,\, u_2 \in \mathbb{R}. \qquad (5.2.47)$$

Припустимо, що існує два різні розв'язки $u_1(x)$ й $u_2(x)$ задачі (5.1.2). Тоді їх різниця $u_1(x) - u_2(x)$ буде задовольняти співвідношенням

$$-\Delta(u_1 - u_2) + (C_u(x,u_1) - C_u(x,u_2)) = 0 \text{ в } \Omega, \qquad (5.2.48)$$

$$u_1 - u_2 = 0 \text{ на } \partial\Omega. \qquad (5.2.49)$$

Помножимо (5.2.48) на $u_1(x) - u_2(x)$ і проінтегруємо по області Ω. Застосовуючи інтегрування частинами та (5.2.49), одержуємо

$$\int\limits_{\Omega} |\nabla(u_1 - u_2)|^2\,dx + \int\limits_{\Omega} (C_u(x,u_1) - C_u(x,u_2))(u_1 - u_2)\,dx = 0.$$

У силу (5.2.47) із цієї рівності випливає, що $u_1(x) = u_2(x)$ при майже всіх $x \in \Omega$ і єдиність розв'язку $u(x)$ усередненої задачі (5.1.2) доведена.

Теорема 5.1 доведена.

5.3 Задача Робена в областях із дрібнозернистою випадковою межею

5.3.1 Теорема збіжності

Перш ніж сформулювати основний результат цієї глави, визначимо кілька понять.

Розглянемо області Ω^ε з випадковою межею, тобто коли розташування куль B_i^ε та їхні радіуси r_i^ε випадкові. Припускаємо, що положення центрів $x^{i\varepsilon}$ куль і величини їх радіусів r_i^ε визначаються набором s-часткових функцій розподілу [48, гл. 2]

$$f_s^\varepsilon(x^1, x^2, ..., x^s; r_1, r_2, ..., r_s):\; (\Omega)^s \times [0,\infty)^s \to [0,\infty)\,(s = 1, 2, ..., N^\varepsilon), \quad (5.3.1)$$

так що ймовірність знаходження центрів і радіусів даної групи s куль в інтервалах $(x^i, x^i + dx^i)$, $(r_i, r_i + dr_i)$ $(i = 1, ..., n)$ дорівнює

$$f_s^\varepsilon(x^1, x^2, ..., x^s; r_1, r_2, ..., r_s)dx^1...dx^s dr_1...dr_s.$$

Ці функції задовольняють умови симетрії, нормалізації та узгодження, відповідно до їх імовірнісної інтерпретації [7]:

$$f_s^\varepsilon(x^1,...,x^k,...,x^l...,x^s;r_1,...,r_k,...,r_l,...,r_s) =$$
$$=f_s^\varepsilon(x^1,...,x^l,...,x^k...,x^s;r_1,...,r_l,...,r_k,...,r_s);$$

$$\int\limits_\Omega\int\limits_0^\infty ... \int\limits_\Omega\int\limits_0^\infty f_s^\varepsilon(x^1,...,x^s;r_1,...,r_s)dr_1dx^1...dr_sdx^s = 1, \quad s=1,...,N^\varepsilon;$$

$$\int\limits_\Omega\int\limits_0^\infty f_s^\varepsilon(x^1,...,x^s;r_1,...,r_s)dr_sdx^s = f_{s-1}^\varepsilon(x^1,...,x^{s-1};r_1,...,r_{s-1}), \quad s=2,...,N^\varepsilon.$$

Оскільки кулі не можуть перетинатися одна з одною і з межею $\partial\Omega$, то ці функції повинні також задовольняти умові

$$f_s^\varepsilon(x^1,...,x^s;r_1,...,r_s) = 0,$$

якщо для деяких $i \neq j$ $(i,j=1,...,s):$ $|x^{i\varepsilon}-x^{j\varepsilon}| < r_i^\varepsilon + r_j^\varepsilon$ або для деякого $i=1,...,s:\ dist(x^{i\varepsilon},\partial\Omega) \leqslant r_i^\varepsilon$.

Одночасткову та двохчасткову функції розподілу f_1^ε, f_2^ε оберемо такими, щоб для них виконувалися умови:

c_1: $f_1^\varepsilon(x;r) = \varepsilon^{-\alpha}f(x;\varepsilon^{-\alpha}r)$,
де параметр $\alpha > 2$, $f(x,r) \in L^\infty(\Omega\times[0,\infty))$ – невід'ємна функція з компактним носієм $\Omega'\times[a_0,A_0]$ в $\Omega\times[0,\infty)$ $(0<a_0<A_0<\infty)$, нормована на 1 в $L^1(\Omega\times[0,\infty))$;

c_2: $f_2^\varepsilon(x^1,x^2;r_1,r_2) = f_1^\varepsilon(x^1;r_1)\cdot f_1^\varepsilon(x^2;r_2) + q^\varepsilon(x^1,x^2;r_1,r_2)$,
де функція $q^\varepsilon(x^1,x^2;r_1,r_2) = -f_1^\varepsilon(x^1;r_1)\cdot f_1^\varepsilon(x^2;r_2)$ при $|x^{i\varepsilon}-x^{j\varepsilon}| < r_i^\varepsilon + r_j^\varepsilon$ і при $\varepsilon \ll 1$ у середньому мала так, що при $\forall\, \varkappa_1,\varkappa_2 \geqslant 0$

$$\int\limits_\Omega\int\limits_0^\infty\int\limits_\Omega\int\limits_0^\infty r_1^{\varkappa_1}r_2^{\varkappa_2}\left|q^\varepsilon(x^1,x^2;r_1,r_2)\right|dr_1dx^1dr_2dx^2 < C\varepsilon^{\alpha(\varkappa_1+\varkappa_2+3)}.$$

Зауваження 5.2. З умови c_1 випливає, що з імовірністю 1 кулі B_i^ε мають радіуси r_i^ε, що задовольняють нерівності $a_0\varepsilon^\alpha \leqslant r_i^\varepsilon \leqslant A_0\varepsilon^\alpha$ $(\alpha>2)$ і не перетинаються із межею $\partial\Omega$. Внаслідок умови c_2 кулі B_i^ε з імовірністю 1 не перетинаються одна з одною, розташовуються на відстанях більших ніж $2A_0\varepsilon^\alpha$ і розподілені майже незалежно. Таким чином, умову c_2 можна вважати аналогом умови ослабленої кореляції [7].

Задача (5.1.1) при випадкових областях також залежить від двох параметрів α, β. Областю зміни параметрів у цьому випадку є область $\Lambda_p = \{2 < \alpha < 3,\ 2\alpha + \beta \geqslant 3\} \cup \{\alpha \geqslant 3,\ -\infty < \beta < \infty\}$ (рис. 5.3).

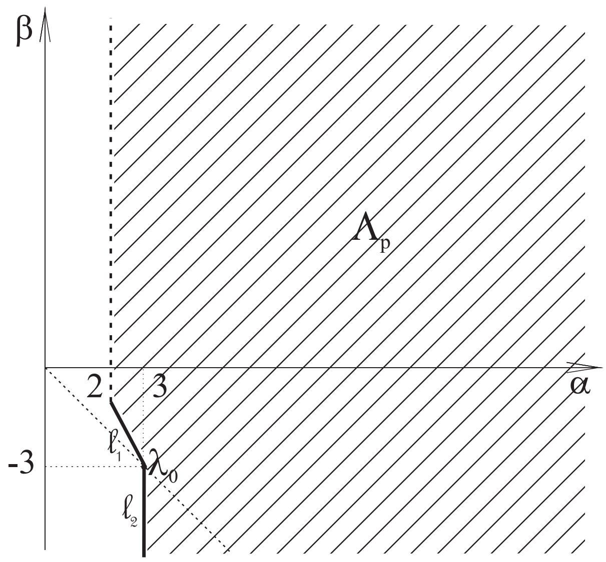


Рисунок 5.3 — Область зміни параметрів α, β – Λ_p

При $\forall\, \varepsilon > 0$ функції розподілу (5.3.1) породжують імовірнісну міру P^ε в імовірнісному просторі $\mathbb{P}^\varepsilon$ ([10]). Точки ω^ε цього простору перебувають у взаємно-однозначній відповідності з випадковими множинами $B(\omega^\varepsilon) = \cup_i B_i^\varepsilon$ в Ω. Для кожної реалізації множини $B(\omega^\varepsilon)$ існує єдиний узагальнений розв'язок $u(x, \omega^\varepsilon)$ задачі (5.1.1) в області $\Omega(\omega^\varepsilon) = \Omega \setminus B(\omega^\varepsilon)$.

Розглянемо в просторі $\mathbb{P}^\varepsilon$ випадкову величину

$$\rho(\omega^\varepsilon) = \int\limits_{\Omega(\omega^\varepsilon)} |u(x, \omega^\varepsilon) - u(x)|^p\, dx, \quad (p < 6), \tag{5.3.2}$$

де $u \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ – деяка гранична (усереднена) функція.

Визначення 5.2. Будемо казати, що випадкова величина $\rho(\omega^\varepsilon)$ збігається до 0 по ймовірності P^ε при $\varepsilon \to 0$, якщо

$$\forall\, \delta > 0 \quad \lim_{\varepsilon \to 0} \mathrm{P}^\varepsilon\{\omega^\varepsilon \in \mathbb{P}^\varepsilon : \rho(\omega^\varepsilon) < \delta\} = 1. \tag{5.3.3}$$

Граничний (при $\varepsilon \to 0$) просторовий розподіл щільності поглинання в області Ω задамо за допомогою функції

$$C(x, u) = \int\limits_0^\infty C_{\alpha\beta}(x, u; r) f(x; r)\, dr, \tag{5.3.4}$$

де $f(x;r)$ – функція з умови c_1, а функції $C_{\alpha\beta}(x,u;r)$ мають наступні визначення залежно від значень параметрів $(\alpha,\,\beta)\in\Lambda_p$

$$C_{\alpha\beta}(x,u;r)=\begin{cases}2\pi r^2 g(x,u) \text{ при } (\alpha,\,\beta)\in\ell_1;\\ 2\pi r\,[u-V]^2+2\pi r^2 g(x,V) \text{ при } (\alpha,\,\beta)=\lambda_0;\\ 2\pi r u^2 \text{ при } (\alpha,\,\beta)\in\ell_2;\\ 0 \text{ при } (\alpha,\,\beta)\in\Lambda_p\setminus(\ell_1\cup\lambda_0\cup\ell_2).\end{cases} \tag{5.3.5}$$

Тут через ℓ_1, ℓ_2, λ_0 позначені окремі ділянки межі області Λ_p: $\ell_1=\{2<\alpha<3,\,\beta=3-2\alpha\}$, $\ell_2=\{\alpha=3,\,\beta<-\alpha\}$, $\lambda_0=(3,-3)$ (рис. 5.3), функція $g(x,u)$ визначена формулою (5.2.6) та $V=V(x,u,r)$ – розв'язок рівняння

$$V=u-r\cdot\sigma(x,V),$$

аналогічного рівнянню (5.2.7) детермінованої моделі.

Основним результатом цієї глави є наступна теорема.

Теорема 5.2. *Нехай функції розподілу f_1^ε, f_2^ε задовольняють умови c_1, c_2. Тоді узагальнений розв'язок $u^\varepsilon(x)$ задачі (5.1.1) є випадковою функцією $u(x,\omega^\varepsilon)$, що при $\varepsilon\to 0$ збігається по ймовірності P^ε (у змісті (5.3.3)) до невипадкової функції $u(x)$ – узагальненого розв'язку крайової задачі (5.1.2), де функція $C(x,u)$ визначена формулою (5.3.4).*

Зауваження 5.3. З (5.3.4)-(5.3.5) і властивостей функції $\sigma(x,s)$ випливає, що $C(x,u)\in L^\infty(\Omega,C^2(\mathbb{R}))$ ($C(x,u)=0$ при $(\alpha,\,\beta)\in\Lambda_p\setminus(\ell_1\cup\lambda_0\cup\ell_2)$ та відмінна від 0 і кінцева на ламаній $\ell_1\cup\lambda_0\cup\ell_2$ (рис. 5.3)). $\frac{\partial^2 C(x,u)}{\partial u^2}\geqslant 0$, тому функція $C_u(x,u)=\frac{\partial}{\partial u}C(x,u)$ задовольняє нерівності

$$(C_u(x,u_2)-C_u(x,u_1))\cdot(u_2-u_1)\geqslant 0,$$

яка гарантує єдиність розв'язку задачі (5.1.2). Цей розв'язок ми будемо називати граничною (усередненої) функцією, вона входить у визначення випадкової величини (5.3.2).

Доведення Теореми 5.2 проводиться методом, розробленим для першої крайової задачі в роботі Є.Я. Хруслова [46] та розвиненим в працях [31, 56, 87] з використанням Теореми 5.1. При доведенні Теореми 5.2 ми в пункті 5.3.2 покажемо, що якщо функції розподілу f_1^ε, f_2^ε задовольняють умови c_1, c_2, тоді умови Теореми 5.1 при $\alpha>2$ виконані «в імовірнісному сенсі». У пункті 5.3.3 ми використовуємо цей факт і Теорему 5.1 при доведенні Теореми 5.2.

5.3.2 Імовірнісний аналог умов Теореми 5.1

Зазначимо, що через c_1 умова b_1 виконується з імовірністю 1.

Покажемо, що умова b_2 виконується по ймовірності. Нехай $\mu : \frac{2}{\alpha} < \mu < 1$ і $T_i^{r^\varepsilon} = B(x^{i\varepsilon}, r^\varepsilon)$ – куля з центром у точці $x^{i\varepsilon}$ радіусом $r^\varepsilon = \varepsilon^{\alpha\mu}$. Очевидно, що при малих ε $B_i^\varepsilon \subset T_i^{r^\varepsilon}$ і, оскільки носій Ω' функції $f(x;r)$ по x компактний в Ω, то кулі $T_i^{r^\varepsilon}$, як і кулі B_i^ε, не перетинаються із межею області $\partial\Omega$.

Розглянемо подію $\mathscr{A}_\mu^\varepsilon$ з імовірнісного простору $\mathbb{P}^\varepsilon$, що полягає в тому, що кулі $T_i^{r^\varepsilon}$ взаємно не перетинаються:

$$\mathscr{A}_\mu^\varepsilon = \{\omega^\varepsilon \in \mathbb{P}^\varepsilon : T_i^{r^\varepsilon} \cap T_j^{r^\varepsilon} = \emptyset, \forall\, i, j = 1, ..., N^\varepsilon, i \neq j\}.$$

Лема 5.3. *Нехай виконані умови Теореми 5.2, тоді*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \mathrm{P}^\varepsilon\{\mathscr{A}_\mu^\varepsilon\} = 1.$$

Доведення. Визначимо подію, протилежну події $\mathscr{A}_\mu^\varepsilon$: $\overline{\mathscr{A}_\mu^\varepsilon} = \mathbb{P}^\varepsilon \setminus \mathscr{A}_\mu^\varepsilon$, вона полягає в тому, що хоча б одна пара куль має перетинання, тобто $\exists\, i, j : i \neq j$, $T_i^{r^\varepsilon} \cap T_j^{r^\varepsilon} \neq \emptyset$. Тоді

$$\mathrm{P}^\varepsilon(\mathscr{A}_\mu^\varepsilon) = 1 - \mathrm{P}^\varepsilon(\overline{\mathscr{A}_\mu^\varepsilon}) \tag{5.3.6}$$

$$\mathrm{P}^\varepsilon(\overline{\mathscr{A}_\mu^\varepsilon}) = \sum_{i=1, j=i+1}^{N^\varepsilon} \int\limits_\Omega \int\limits_0^\infty \int\limits_{T_i^{2r^\varepsilon}} \int\limits_0^\infty f_2^\varepsilon(x^i, x^j; r_i, r_j)\, dr_j dx^j dr_i dx^i =$$

$$= \frac{N^\varepsilon(N^\varepsilon - 1)}{2} \int\limits_\Omega \int\limits_0^\infty \int\limits_{T_1^{2r^\varepsilon}} \int\limits_0^\infty f_2^\varepsilon(x^1, x^2; r_1, r_2)\, dr_2 dx^2 dr_1 dx^1.$$

Оскільки $N^\varepsilon = \varepsilon^{-3}$ і $mes\left(T_1^{2r^\varepsilon} \setminus T_1^{r_1^\varepsilon + r_2^\varepsilon}\right) = O\left(\varepsilon^{3\mu\alpha}\right)$ із цієї рівності та умов c_1, c_2 одержуємо

$$\mathrm{P}^\varepsilon(\overline{\mathscr{A}_\mu^\varepsilon}) = \frac{\varepsilon^{-6}}{2} \int\limits_\Omega \int\limits_0^\infty f_1^\varepsilon(x^1; r_1) \left(\int\limits_{T_1^{2r^\varepsilon} \setminus T_1^{r_1^\varepsilon + r_2^\varepsilon}} \int\limits_0^\infty f_1^\varepsilon(x^2; r_2)\, dr_2 dx^2 \right) dr_1 dx^1 +$$

$$+ \frac{\varepsilon^{-6}}{2} \int\limits_\Omega \int\limits_0^\infty \int\limits_{T_1^{2r^\varepsilon} \setminus T_1^{r_1^\varepsilon + r_2^\varepsilon}} \int\limits_0^\infty q^\varepsilon(x^1, x^2; r_1, r_2)\, dr_2 dx^2 dr_1 dx^1 = O\left(\varepsilon^{3\mu\alpha - 6}\right) + O\left(\varepsilon^{3\alpha - 6}\right).$$

Враховуючи, що $\alpha > 2$ та $\mu\alpha > 2$, з отриманої нерівності і (5.3.6) одержуємо твердження леми.

Лема 5.3 доведена. $\square$

Наслідок 5.1. *Нехай виконані умови Теореми 5.2 і в умові* $b_1 : \frac{2}{\alpha} < \varkappa_1 < 1$, *тоді*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \mathrm{P}^\varepsilon\{\omega^\varepsilon \in \mathbb{P}^\varepsilon : d_i^\varepsilon \geqslant (r_i^\varepsilon)^{\varkappa_1}, i = 1, ..., N^\varepsilon\} = 1.$$

Розглянемо далі умову b_2. Визначимо випадкову величину

$$\zeta_\varkappa^\varepsilon(\omega^\varepsilon) = \sum_{i=1}^{N^\varepsilon} \frac{(b_i^\varepsilon)^\varkappa}{(d_i^\varepsilon)^{3(\varkappa-1)}},$$

де d_i^ε визначена в (5.2.2), b_i^ε визначена в (5.2.3).

Лема 5.4. *Нехай виконані умови Теореми 5.2 і* $\frac{6}{4-\theta} < \varkappa < 2\,(0 \leqslant \theta < 1)$, *тоді*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \mathrm{P}^\varepsilon\{\omega^\varepsilon \in \mathbb{P}^\varepsilon : \zeta_\varkappa^\varepsilon(\omega^\varepsilon) \leqslant N\} \geqslant 1 - \frac{C(\varkappa)}{N},$$

де N – довільне додатне число й константа C не залежить від N.

Доведення. З визначення d_i^ε (5.2.2) випливає, що

$$\zeta_\varkappa^\varepsilon(\omega^\varepsilon) \leqslant \zeta_{1\varkappa}^\varepsilon(\omega^\varepsilon) + \zeta_{2\varkappa}^\varepsilon(\omega^\varepsilon),$$

де

$$\zeta_{1\varkappa}^\varepsilon(\omega^\varepsilon) = \sum_{i=1}^{N^\varepsilon} \frac{(b_i^\varepsilon)^\varkappa}{[\rho(x^{i\varepsilon}, \partial\Omega)]^{3(\varkappa-1)}}, \quad \zeta_{2\varkappa}^\varepsilon(\omega^\varepsilon) = \sum_{i=1}^{N^\varepsilon} \frac{(b_i^\varepsilon)^\varkappa}{\min\limits_{i\neq j} |x^{i\varepsilon} - x^{j\varepsilon}|^{3(\varkappa-1)}}.$$

У силу нерівності Чебишова ([48, с. 68]) одержуємо

$$\begin{gathered}\mathrm{P}^\varepsilon\{\omega^\varepsilon \in \mathbb{P}^\varepsilon : \zeta_\varkappa^\varepsilon(\omega^\varepsilon) \leqslant N\} \geqslant \mathrm{P}^\varepsilon\{\omega^\varepsilon \in \mathbb{P}^\varepsilon : \sum_{i=1}^{2} \zeta_{i\varkappa}^\varepsilon(\omega^\varepsilon) \leqslant N\} \geqslant \\ \geqslant 1 - \frac{\mathrm{M}\left(\sum\limits_{i=1}^{2} \zeta_{i\varkappa}^\varepsilon\right)}{N} = 1 - \frac{\mathrm{M}\,(\zeta_{1\varkappa}^\varepsilon)}{N} - \frac{\mathrm{M}\,(\zeta_{2\varkappa}^\varepsilon)}{N},\end{gathered} \tag{5.3.7}$$

тут N – довільне додатне число й $\mathrm{M}(\cdot)$ – математичне сподівання випадкової величини.

Оцінимо математичне сподівання випадкової величини $\zeta_{1\varkappa}^{\varepsilon}(\omega^{\varepsilon})$. У силу властивості c_1 функції розподілу $f_1^{\varepsilon}(x;r)$ маємо

$$\begin{aligned} \mathrm{M}\,(\zeta_{1\varkappa}^{\varepsilon}) &= \sum_{i=1}^{N^{\varepsilon}} \int\limits_{\Omega} \int\limits_{0}^{\infty} \frac{(b^{\varepsilon}(r))^{\varkappa} \cdot f_1^{\varepsilon}(x;r)}{[\rho(x,\partial\Omega)]^{3(\varkappa-1)}}\, dr\, dx = \\ &= N^{\varepsilon} \int\limits_{\Omega'} \int\limits_{a_0}^{A_0} \frac{(b^{\varepsilon}(\varepsilon^{\alpha}\hat{r}))^{\varkappa} \cdot f(x;\hat{r})}{[\rho(x,\partial\Omega)]^{3(\varkappa-1)}}\, d\hat{r}\, dx, \end{aligned} \tag{5.3.8}$$

де $\Omega' \subset \Omega$ – компактний носій функції $f(x;r)$ по змінній x і функція $b^{\varepsilon}(r)$ визначена формулою

$$b^{\varepsilon}(r) = \begin{cases} \varepsilon^{\beta} r^2 \text{ при } (\alpha,\, \beta) \in \Lambda_p \cap \{\beta \geqslant -\alpha\}; \\ r \text{ при } (\alpha,\, \beta) \in \Lambda_p \cap \{\beta < -\alpha\}. \end{cases}$$

Позначимо

$$\eta(\alpha,\beta) = \begin{cases} \beta + 2\alpha \text{ при } (\alpha,\, \beta) \in \Lambda_p \cap \{\beta \geqslant -\alpha\}; \\ \alpha \text{ при } (\alpha,\, \beta) \in \Lambda_p \cap \{\beta < -\alpha\}, \end{cases} \tag{5.3.9}$$

тоді $\forall\, r$ з огляду на властивість b_1, справедлива оцінка

$$b^{\varepsilon}(r) \leqslant C\varepsilon^{\eta}. \tag{5.3.10}$$

Оскільки $\Omega' \subset\subset \Omega$, то існує додатна константа ρ_0, така що $\forall\, x \in \Omega'$: $\rho(x,\partial\Omega) \geqslant \rho_0 > 0$. Отже, з (5.3.8) одержуємо

$$\mathrm{M}\,(\zeta_{1\varkappa}^{\varepsilon}) \leqslant C\varepsilon^{\varkappa\eta-3}$$

і тому що для будь-яких α, $\beta \in \Lambda_p$ $\eta \geqslant 3$. Тоді

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \mathrm{M}\,(\zeta_{1\varkappa}^{\varepsilon}) = 0. \tag{5.3.11}$$

Далі оцінимо математичне сподівання випадкової величини $\zeta_{2\varkappa}^{\varepsilon}(\omega^{\varepsilon})$. Для будь-яких точок $x^{i\varepsilon}$, $x^{j\varepsilon} \in \Omega$ справедлива нерівність

$$\frac{1}{\min\limits_{i\neq j} |x^{i\varepsilon} - x^{j\varepsilon}|^{3(\varkappa-1)}} < \varepsilon^{3(1-\varkappa)} + \sum_{i\neq j} \frac{\chi^{\varepsilon}\left(|x^{i\varepsilon} - x^{j\varepsilon}|\right)}{|x^{i\varepsilon} - x^{j\varepsilon}|^{3(\varkappa-1)}}.$$

Тут $\chi^{\varepsilon}(t)$ – характеристична функція відрізка $[0,\varepsilon]$. Використовуючи цю нерівність, властивості c_1, c_2 функцій розподілу, оцінку (5.3.10) і позначивши j_i –

номер кулі найближчої до i-ої кулі, одержуємо

$$\mathrm{M}\,(\zeta_{2\varkappa}^{\varepsilon})=\int\limits_{\Omega}\int\limits_{0}^{\infty}...\int\limits_{\Omega}\int\limits_{0}^{\infty}\left[\sum_{i=1}^{N^{\varepsilon}}\frac{(b^{\varepsilon}(r_i))^{\varkappa}}{\min\limits_{i\neq j}|x^i-x^j|^{3(\varkappa-1)}}\right]\cdot f_{N^{\varepsilon}}^{\varepsilon}(x^1,...,r_{N^{\varepsilon}})\,dr_1...dx^{N^{\varepsilon}}=$$

$$=\sum_{i=1}^{N^{\varepsilon}}\int\limits_{\Omega}\int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{\Omega}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{(b^{\varepsilon}(r_i))^{\varkappa}f_2^{\varepsilon}(x^i,x^{j_i};r_i,r_{j_i})}{|x^i-x^{j_i}|^{3(\varkappa-1)}}\,dr_idx^idr_{j_i}dx^{j_i}=$$

$$=\sum_{i=1}^{N^{\varepsilon}}\int\limits_{\Omega}\int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{\Omega}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{(b^{\varepsilon}(r_i))^{\varkappa}f_1^{\varepsilon}(x^i;r_i)f_1^{\varepsilon}(x^{j_i};r_{j_i})}{|x^i-x^{j_i}|^{3(\varkappa-1)}}\,dr_idx^idr_{j_i}dx^{j_i}+$$

$$+\sum_{i=1}^{N^{\varepsilon}}\int\limits_{\Omega}\int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{\Omega}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{(b^{\varepsilon}(r_i))^{\varkappa}\cdot q^{\varepsilon}(x^i,x^{j_i};r_i,r_{j_i})}{|x^i-x^{j_i}|^{3(\varkappa-1)}}\,dr_idx^idr_{j_i}dx^{j_i}<C_1N^{\varepsilon}\varepsilon^{3(1-\varkappa)}\varepsilon^{\varkappa\eta}+$$

$$+\sum_{i=1}^{N^{\varepsilon}}\sum_{j\neq i}\int\limits_{\Omega}\int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{\Omega}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{(b^{\varepsilon}(r_i))^{\varkappa}\chi^{\varepsilon}\left(|x^i-x^j|\right)f_1^{\varepsilon}(x^i;r_i)f_1^{\varepsilon}(x^j;r_j)}{|x^i-x^j|^{3(\varkappa-1)}}\,dr_idx^idr_jdx^j+$$

$$+C_2N^{\varepsilon}\varepsilon^{\eta\varkappa}\varepsilon^{3\alpha(1-\varkappa)}\varepsilon^{3\alpha}\leqslant C_1\varepsilon^{\varkappa(\eta-3)}+C_2\varepsilon^{\eta\varkappa-3+3\alpha(2-\varkappa)}+$$

$$+N^{\varepsilon}(N^{\varepsilon}-1)\int\limits_{\Omega}\int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{T_1^{\varepsilon}\backslash T_1^{r_1^{\varepsilon}+r_2^{\varepsilon}}}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{(b^{\varepsilon}(r_1))^{\varkappa}\,f_1^{\varepsilon}(x^1;r_1)\,f_1^{\varepsilon}(x^2;r_2)}{|x^1-x^2|^{3(\varkappa-1)}}\,dr_2dx^2dr_1dx^1\leqslant$$

$$\leqslant C_1\varepsilon^{\varkappa(\eta-3)}+C_2\varepsilon^{\eta\varkappa-3+3\alpha(2-\varkappa)}+C_3\varepsilon^{\varkappa\eta-6}\int\limits_{2a_0\varepsilon^{\alpha}}^{\varepsilon}\frac{r^2}{r^{3(\varkappa-1)}}\,dr<\left(C_1+\frac{C_3}{6-3\varkappa}\right)\varepsilon^{\varkappa(\eta-3)}+$$

$$+C_2\varepsilon^{\eta\varkappa-3+3\alpha(2-\varkappa)}\leqslant C(\varkappa)\left(\varepsilon^{\varkappa(\eta-3)}+\varepsilon^{\eta\varkappa-3+3\alpha(2-\varkappa)}\right).$$

Тут $C(\varkappa)=\max\left(C_1+\frac{C_3}{6-3\varkappa},C_2\right)$, $\eta=\eta(\alpha,\beta)$ визначена в (5.3.9) і, тому що $\eta(\alpha,\beta)\geqslant 3$, одержуємо остаточну оцінку для $\mathrm{M}\,(\zeta_{2\varkappa}^{\varepsilon})$

$$\varlimsup_{\varepsilon\to 0}\mathrm{M}\,(\zeta_{2\varkappa}^{\varepsilon})\leqslant C(\varkappa). \qquad (5.3.12)$$

Твердження леми випливає з (5.3.7), (5.3.11) та (5.3.12).

Лема 5.4 доведена. □

Нехай $\varphi(x)$ – довільна функція із простору $C_0^1(\Omega)$. Визначимо випадкову величину

$$\zeta_\varphi^\varepsilon(\omega^\varepsilon) = \int\limits_\Omega C^\varepsilon(x, \varphi(x); \omega^\varepsilon)\, dx,$$

де функція $C^\varepsilon(x, u; \omega^\varepsilon)$ визначена формулою (5.2.4) при $(\alpha,\, \beta) \in \Lambda_p$ і розподілі куль ω^ε.

Лема 5.5. *Нехай виконані умови Теореми 5.2, тоді* $\forall\, \delta > 0$, $\forall\, \varphi(x) \in C_0^1(\Omega)$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \mathrm{P}^\varepsilon \left\{ \omega^\varepsilon \in \mathbb{P}^\varepsilon : \left| \zeta_\varphi^\varepsilon(\omega^\varepsilon) - \int\limits_\Omega C(x, \varphi(x))\, dx \right| < \delta \right\} = 1,$$

де функція $C(x, u)$ *визначена в* (5.3.4).

Доведення. У силу нерівності Чебишова ([48, с.238])

$$\mathrm{P}^\varepsilon \left\{ \omega^\varepsilon \in \mathbb{P}^\varepsilon : \left| \zeta_\varphi^\varepsilon(\omega^\varepsilon) - \mathrm{M}\left(\zeta_\varphi^\varepsilon\right) \right| < \delta \right\} \geqslant 1 - \frac{\mathrm{D}\left(\zeta_\varphi^\varepsilon\right)}{\delta^2}, \tag{5.3.13}$$

тут $\mathrm{M}\left(\zeta_\varphi^\varepsilon\right)$ та $\mathrm{D}\left(\zeta_\varphi^\varepsilon\right)$ – математичне сподівання та дисперсія випадкової величини $\zeta_\varphi^\varepsilon(\omega^\varepsilon)$.

Використовуючи (5.3.5), (5.2.4), (5.2.5), представимо випадкову величину $\zeta_\varphi^\varepsilon(\omega^\varepsilon)$ у вигляді

$$\begin{aligned} \zeta_\varphi^\varepsilon(\omega^\varepsilon) = &\sum_{i=1}^{N^\varepsilon} C_i^\varepsilon(\varphi(x^{i\varepsilon})) = \sum_{i=1}^{N^\varepsilon} C_{\alpha\beta}(x^{i\varepsilon}, \varphi(x^{i\varepsilon}); a_i^\varepsilon)\varepsilon^3 = \\ &= \sum_{i=1}^{N^\varepsilon} C_{\alpha\beta}(x^{i\varepsilon}, \varphi(x^{i\varepsilon}); \varepsilon^{-\alpha} r_i^\varepsilon)\varepsilon^3, \end{aligned}$$

де r_i^ε – радіуси, а $x^{i\varepsilon}$ – центри куль B_i^ε при розподілі ω^ε. Використовуючи це подання і те, що $N^\varepsilon = \varepsilon^{-3}$, запишемо

$$\mathrm{M}\left(\zeta_\varphi^\varepsilon\right) = \varepsilon^3 \int\limits_\Omega \int\limits_0^\infty ... \int\limits_\Omega \int\limits_0^\infty \sum_{i=1}^{N^\varepsilon} C_{\alpha\beta}(x^i, \varphi(x^i); \varepsilon^{-\alpha} r_i) f_{N^\varepsilon}^\varepsilon(x^1, ..., r_{N^\varepsilon})\, dr_1 ... dx^{N^\varepsilon} =$$

$$= \sum_{i=1}^{N^\varepsilon} \varepsilon^3 \int\limits_\Omega \int\limits_0^\infty C_{\alpha\beta}(x^i, \varphi(x^i); \varepsilon^{-\alpha} r_i) \times$$

$$\times \left(\int\limits_{\Omega} ... \int\limits_{0}^{\infty} f^{\varepsilon}_{N^{\varepsilon}}(x^1, ..., r_{N^{\varepsilon}}) dr_1 ... dx^{i-1} dr_{i+1} ... dx^{N^{\varepsilon}} \right) dr_i dx^i =$$

$$= \int\limits_{\Omega} \int\limits_{0}^{\infty} C_{\alpha\beta}(x, \varphi(x); \varepsilon^{-\alpha} r) f^{\varepsilon}_1(x; r)\, dr dx =$$

$$= \int\limits_{\Omega} \int\limits_{0}^{\infty} C_{\alpha\beta}(x, \varphi(x); \varepsilon^{-\alpha} r) f(x; \varepsilon^{-\alpha} r)\, \varepsilon^{-\alpha} dr dx = \int\limits_{\Omega} \int\limits_{0}^{\infty} C_{\alpha\beta}(x, \varphi(x); a) f(x; a)\, da\, dx.$$

У силу визначення функції $C(x, u)$ (5.3.4) маємо

$$\mathrm{M} \left(\zeta^{\varepsilon}_{\varphi} \right) = \int\limits_{\Omega} C(x, \varphi(x))\, dx := C_{\varphi}. \tag{5.3.14}$$

Тепер подібним способом, використовуючи отриману тотожність (5.3.14), оцінимо дисперсію:

$$\mathrm{D} \left(\zeta^{\varepsilon}_{\varphi} \right) = \mathrm{M} \left[\left(\zeta^{\varepsilon}_{\varphi} - \mathrm{M} \left(\zeta^{\varepsilon}_{\varphi} \right) \right)^2 \right] = \mathrm{M} \left[\left(\sum_{i=1}^{N^{\varepsilon}} C_{\alpha\beta}(x^i, \varphi(x^i); \varepsilon^{-\alpha} r_i) \varepsilon^3 - C_{\varphi} \right)^2 \right] =$$

$$= \int\limits_{\Omega} \int\limits_{0}^{\infty} ... \int\limits_{\Omega} \int\limits_{0}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{N^{\varepsilon}} C_{\alpha\beta}(x^i, \varphi(x^i); \varepsilon^{-\alpha} r_i) \varepsilon^3 - C_{\varphi} \right)^2 f^{\varepsilon}_{N^{\varepsilon}}(x^1, ..., r_{N^{\varepsilon}})\, dr_1 ... dx^{N^{\varepsilon}} =$$

$$= \int\limits_{\Omega} \int\limits_{0}^{\infty} ... \int\limits_{\Omega} \int\limits_{0}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{N^{\varepsilon}} \left(C_{\alpha\beta}(x^i, \varphi(x^i); \varepsilon^{-\alpha} r_i) - C_{\varphi} \right) \varepsilon^3 \right)^2 f^{\varepsilon}_{N^{\varepsilon}}(x^1, ..., r_{N^{\varepsilon}})\, dr_1 ... dx^{N^{\varepsilon}} =$$

$$= \varepsilon^6 \sum_{i=1}^{N^{\varepsilon}} \int\limits_{\Omega} \int\limits_{0}^{\infty} \left(C_{\alpha\beta}(x^i, \varphi(x^i); \varepsilon^{-\alpha} r_i) - C_{\varphi} \right)^2 f^{\varepsilon}_1(x^i; r_i)\, dr_i dx^i +$$

$$+ \varepsilon^6 \sum_{i,j=1, i \neq j}^{N^{\varepsilon}} \int\limits_{\Omega} \int\limits_{0}^{\infty} \int\limits_{\Omega} \int\limits_{0}^{\infty} \left(C_{\alpha\beta}(x^i, \varphi(x^i); \varepsilon^{-\alpha} r_i) - C_{\varphi} \right) \left(C_{\alpha\beta}(x^j, \varphi(x^j); \varepsilon^{-\alpha} r_j) - C_{\varphi} \right) \times$$

$$\times f^{\varepsilon}_2(x^i, x^j; r_i, r_j)\, dr_i dx^i dr_j dx^j = \varepsilon^3 \int\limits_{\Omega} \int\limits_{0}^{\infty} \left(C_{\alpha\beta}(x, \varphi(x); \varepsilon^{-\alpha} r) - C_{\varphi} \right)^2 f^{\varepsilon}_1(x; r)\, dr dx +$$

$$+ (1 - \varepsilon^3) \int\limits_{\Omega} \int\limits_{0}^{\infty} \int\limits_{\Omega} \int\limits_{0}^{\infty} \left(C_{\alpha\beta}(x^1, \varphi(x^1); \varepsilon^{-\alpha} r_1) - C_{\varphi} \right) \left(C_{\alpha\beta}(x^2, \varphi(x^2); \varepsilon^{-\alpha} r_2) - C_{\varphi} \right) \times$$

$$\times f^{\varepsilon}_1(x^1; r_1) f^{\varepsilon}_1(x^2; r_2)\, dr_1 dx^1 dr_2 dx^2 + (1 - \varepsilon^3) \times$$

$$\times \int\limits_{\Omega}\int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{\Omega}\int\limits_{0}^{\infty} \left(C_{\alpha\beta}(x^1,\varphi(x^1);\varepsilon^{-\alpha}r_1)-C_{\varphi}\right)\left(C_{\alpha\beta}(x^2,\varphi(x^2);\varepsilon^{-\alpha}r_2)-C_{\varphi}\right)\times$$

$$\times\, q^{\varepsilon}(x^1,x^2;r_1,r_2)\,dr_1dx^1dr_2dx^2 \leqslant \varepsilon^3\int\limits_{\Omega}\int\limits_{0}^{\infty}\left(C_{\alpha\beta}(x,\varphi(x);a)-C_{\varphi}\right)^2 f(x;a)\,da\,dx+$$

$$+\,(1-\varepsilon^3)\left(\int\limits_{\Omega}\int\limits_{0}^{\infty}\left(C_{\alpha\beta}(x,\varphi(x);a)-C_{\varphi}\right)f(x;a)\,da\,dx\right)^2+C\varepsilon^{3\alpha}=$$

$$=\varepsilon^3\int\limits_{\Omega}\int\limits_{0}^{\infty}\left(C_{\alpha\beta}(x,\varphi(x);a)-C_{\varphi}\right)^2 f(x;a)\,da\,dx+C\varepsilon^{3\alpha}.$$

Отже,

$$\mathrm{D}\left(\zeta^{\varepsilon}_{\varphi}\right)=O\left(\varepsilon^3\right). \tag{5.3.15}$$

З (5.3.13), (5.3.14) й (5.3.15) одержуємо справедливість твердження леми.

Лема 5.5 доведена. □

5.3.3 Доведення Теореми 5.2

Визначимо наступні події в імовірнісному просторі $\mathbb{P}^{\varepsilon}$:

$$\mathscr{A}_1^{\varepsilon}=\left\{\omega^{\varepsilon}\in\mathbb{P}^{\varepsilon}:\, a_0\varepsilon^{\alpha}\leqslant r_i^{\varepsilon}\leqslant A_0\varepsilon^{\alpha}\quad(\alpha>2);\, i=1,...,N^{\varepsilon}\right\};$$

$$\mathscr{A}_2^{\varepsilon}=\left\{\omega^{\varepsilon}\in\mathbb{P}^{\varepsilon}:\, d_i^{\varepsilon}\geqslant (r_i^{\varepsilon})^{\varkappa_1}\quad\left(\frac{2}{\alpha}<\varkappa_1<1\right);\, i=1,...,N^{\varepsilon}\right\};$$

$$\mathscr{A}_3^{\varepsilon}(N)=\left\{\omega^{\varepsilon}\in\mathbb{P}^{\varepsilon}:\,\sum_{i=1}^{N^{\varepsilon}}\frac{(b_i^{\varepsilon})^{\varkappa_2}}{(d_i^{\varepsilon})^{3(\varkappa_2-1)}}<N\quad\left(\frac{6}{4-\theta}<\varkappa_2<2,\,0\leqslant\theta<1\right)\right\};$$

$$\mathscr{A}_4^{\varepsilon}(j,m)=\left\{\omega^{\varepsilon}\in\mathbb{P}^{\varepsilon}:\,\left|\int\limits_{\Omega}c^{\varepsilon}(x,\varphi_j(x);\omega^{\varepsilon})\,dx-\int\limits_{\Omega}c(x,\varphi_j(x))\,dx\right|<\frac{1}{m}\right\},\ m\in\mathbb{N},$$

тут $\{\varphi_j(x)\}$ – послідовність функцій, щільна в просторі $C_0^1(\Omega)$;

$$\mathscr{A}_5^{\varepsilon}(\delta)=\left\{\omega^{\varepsilon}\in\mathbb{P}^{\varepsilon}:\rho(\omega^{\varepsilon})>\delta\quad(\delta>0)\right\}.$$

У силу умов теореми

$$\mathrm{P}^{\varepsilon}\{\mathscr{A}_1^{\varepsilon}\}=1. \tag{5.3.16}$$

Далі доведення поведемо від противного. Припустимо, що висновок Теореми 5.1 помилковий, тоді існують числа $\delta > 0$, $0 < \mu < 1$ і послідовність $\{\varepsilon = \varepsilon_k,\ k = 1, ..., \infty\}$, такі що

$$\varliminf_{\varepsilon=\varepsilon_k \to 0} \mathrm{P}^\varepsilon\{\mathscr{A}_5^\varepsilon(\delta)\} > \mu. \tag{5.3.17}$$

З іншого боку, через Наслідок 5.1 і Леми 5.4, 5.5, для будь-яких $j, m \in \mathbb{N}$ та $N > 0$ існує константа $C(\varkappa_2)$ і значення $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\mu, j, m, N)$ такі, що для будь-яких $\varepsilon < \varepsilon_0$ будуть справедливі нерівності

$$\begin{aligned}
&\mathrm{P}^\varepsilon\{\mathscr{A}_2^\varepsilon\} \geqslant 1 - \frac{\mu}{4};\\
&\mathrm{P}^\varepsilon\{\mathscr{A}_3^\varepsilon(N)\} \geqslant 1 - \frac{C(\varkappa_2)}{N};\\
&\mathrm{P}^\varepsilon\{\mathscr{A}_4^\varepsilon(j,m)\} \geqslant 1 - \frac{\mu}{4 \cdot 2^{j+m}}.
\end{aligned} \tag{5.3.18}$$

Для довільного k виберемо j_k та m_k так, щоб нерівності (5.3.18) виконувалися для ε_k ($m_k \to \infty$, $j_k \to \infty$ при $k \to \infty$), отже, вони будуть виконуватися і для будь-яких $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_k$, $m = 1, ..., m_k$, $j = 1, ..., j_k$. Далі покладемо $N = \frac{4C(\varkappa_2)}{\mu}$, визначимо і спростимо, використовуючи (5.3.16), подію

$$\begin{aligned}
\mathscr{A}^{\varepsilon_k} &= \mathscr{A}_1^{\varepsilon_k} \bigcap \mathscr{A}_2^{\varepsilon_k} \bigcap \mathscr{A}_3^{\varepsilon_k}(N) \bigcap \left[\bigcap_{m=1}^{m_k} \bigcap_{j=1}^{j_k} \mathscr{A}_4^{\varepsilon_k}(j_k, m_k)\right] \bigcap \mathscr{A}_5^{\varepsilon_k} = \\
&= \mathscr{A}_2^{\varepsilon_k} \bigcap \mathscr{A}_3^{\varepsilon_k}(N) \bigcap \left[\bigcap_{m=1}^{m_k} \bigcap_{j=1}^{j_k} \mathscr{A}_4^{\varepsilon_k}(j_k, m_k)\right] \bigcap \mathscr{A}_5^{\varepsilon_k}.
\end{aligned}$$

Для будь-якого k подія $\mathscr{A}^{\varepsilon_k}$ не порожня. Дійсно, оцінимо ймовірність протилежної події, використовуючи нерівності (5.3.17), (5.3.18)

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}^\varepsilon\left\{\overline{\mathscr{A}^{\varepsilon_k}}\right\} &= \mathrm{P}^\varepsilon\left\{\overline{\mathscr{A}_2^{\varepsilon_k}} \bigcup \overline{\mathscr{A}_3^{\varepsilon_k}}(N) \bigcup \left[\bigcup_{m=1}^{m_k} \bigcup_{j=1}^{j_k} \overline{\mathscr{A}_4^{\varepsilon_k}}(j_k, m_k)\right]\right\} \leqslant \\
&\leqslant \frac{\mu}{4} + \frac{\mu}{4} + \frac{\mu}{4} \sum_{j,m=1}^{\infty} \frac{1}{2^{j+m}} = \frac{3\mu}{4},
\end{aligned}$$

тоді

$$\mathrm{P}^\varepsilon\left\{\mathscr{A}^{\varepsilon_k}\right\} \geqslant 1 - \frac{3\mu}{4}.$$

Значить, існують точки ω^ε імовірнісного простору $\mathbb{P}^\varepsilon$, що задовольняють події $\mathscr{A}^{\varepsilon_k}$.

Оберемо будь-яку точку $\omega^\varepsilon \in \mathscr{A}^{\varepsilon_k}$ і розглянемо відповідний їй розподіл куль $B^\varepsilon(\omega^\varepsilon)$ в області Ω. Значення $\rho(\omega^\varepsilon)$ (5.3.2) визначається з використанням розв'язків $u^\varepsilon(x)$ і $u(x)$ задач (5.1.1), (5.1.2). З визначення події $\mathscr{A}^{\varepsilon_k}$ випливає, що всі умови Теореми 5.1 виконані, але висновок теореми помилковий. Отримане протиріччя й доводить Теорему 5.2.

Теорема 5.2 доведена.

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі досліджено асимптотичну поведінку (при $\varepsilon \to 0$) узагальнених розв'язків крайової й початково-крайової задач для рівнянь стаціонарної й нестаціонарної дифузії в сильно перфорованих областях з нелінійною крайовою умовою типу Робена на межі перфоруючої множини.

Основними новими результатами роботи є:

1. Досліджено крайову задачу для оператора Лапласа з нелінійною крайовою умовою типу Робена в перфорованих сильно зв'язних областях довільного виду. Доведено, що при кожному фіксованому ε існує єдиний розвязок $u^\varepsilon(x)$ крайової задачі, досліджено асимптотичну поведінку розв'язків $u^\varepsilon(x)$ при $\varepsilon \to 0$, встановлено рівномірні та інтегральні умови збіжності й отримано усереднене рівняння, що описує головний член асимптотики.

2. Для областей локально-періодичної структури доведено виконання умов збіжності та отримано явні формули для ефективних характеристик середовища – тензора провідності й функції поглинання, які є коефіцієнтами усередненого рівняння.

3. Досліджено початково-крайову задачу для рівняння нестаціонарної дифузії зі знесенням часток дифундуючої речовини рідиною в перфорованих сильно зв'язних областях довільного виду з нелінійною крайовою умовою типу Робена на межі. Доведено, що при кожному фіксованому ε існує єдиний розвязок $u^\varepsilon(t,x)$ початково-крайової задачі, досліджено асимптотичну поведінку розв'язків $u^\varepsilon(t,x)$ при $\varepsilon \to 0$, встановлено умови збіжності й отримано усереднене рівняння, що описує головний член асимптотики.

4. Досліджено асимптотичну поведінку розв'язків крайової задачі для оператора Лапласа з нелінійною крайовою умовою типу Робена в областях з дрібнозернистою межею при довільному розподілі перфоруючої множини, що складається із часток-куль. Установлено умови збіжності та виведено усереднене рівняння.

5. Досліджено асимптотичну поведінку розв'язків крайової задачі для оператора Лапласа з нелінійною крайовою умовою типу Робена в областях з дрібнозернистою випадковою межею, у яких центри куль та їх радіуси випадкові й описуються сукупністю s-часткових функцій розподілу. Доведено, що розв'язок задачі збігається за ймовірністю до розв'язку усередненого рівняння, для

коефіцієнтів якого отримані явні формули, що виражаються через функції розподілу.

Отримані результати можуть бути використані в подальших дослідженнях задач теорії усереднення. Побудовані макроскопічні моделі для локально-періодичних областей та областей з «малої» перфорацією можуть бути використані в прикладних задачах і програмах для знаходження наближених розв'язків задач стаціонарної дифузії в пористих середовищах з поглинанням на поверхні порожнин або часток.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. *Бахвалов Н.С.* Усреднённые характеристики тел с периодической структурой / Н.С. Бахвалов // Доклады АН СССР. – 1974. – Т. 218, № 5. – С. 1046-1048.
2. *Бахвалов Н.С.* Осреднение процессов в периодических средах. Математические задачи механики композитных материалов / Н.С. Бахвалов, Г.Н. Панасенко. – М.: Наука, 1984. – 352 с.
3. *Беляев А.Г.* Усреднение в перфорированной области с осциллирующим третьим краевым условием / А.Г. Беляев, А.Л. Пятницкий, Г.А. Чечкин // Матем. сб. – 2001. – Т. 192, № 7. – С. 3-20.
4. *Берлянд Л.В.* Осреднение уравнений линейной теории упругости в областях с мелкозернистой границей / Л.В. Берлянд // Теор.функ., функ.ан. и их прилож. – 1983. – № 40. – С. 16-23.
5. *Берлянд Л.В.* Усреднение краевых задач для дифференциальных операторов высших порядков в областях с пустотами / Л.В. Берлянд, И.Ю. Чудинович // Доклады АН СССР. – 1983. – 272, № 4. – С. 777-780.
6. *Берлянд Л.В.* Осреднение уравнения диффузии в пористой среде со слабым поглощением / Л.В. Берлянд, М.В. Гончаренко // Теор.функ., функ.ан. и их прилож. – 1989. – № 52. – С. 113–122.
7. *Боголюбов Н.Н.* Избранные труды в трёх томах. Том 2 / Н.Н. Боголюбов. – К.: Наукова думка, 1970. – 522 с.
8. *Боголюбов Н.Н.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний / Н.Н. Боголюбов, Ю.А. Митропольский. – М.: Наука, 1974. – 410 с.
9. *Владимиров В.С.* Обобщённые функции в математической физике / В.С. Владимиров. – М.: Наука, 1979. – 320 с.
10. *Гихман И.И.* Теория вероятностей и математическая статистика / И.И. Гихман, А.В. Скороход, М.И. Ядренко. – К.: Вища школа, 1973. – 408 с.
11. *Гончаренко М.В.* Усредненная модель колебаний увлажненной упругой среды / М.В. Гончаренко, Е.Я. Хруслов // Укр.матем.журн. – 2010. – Т. 62, № 10. – С. 1309–1329.
12. *Гончаренко М.В.* Усреднённая модель диффузии в пористой среде с не-

линейным поглощением на границе / М.В. Гончаренко, Л.А. Хилькова // Укр.матем.журн. – 2015. – Т. 67, № 9. – С. 1201–1216.

13. *Гончаренко М.В.* Усредненная модель диффузии в локально периодической пористой среде с нелинейным поглощением на границе / М.В. Гончаренко, Л.А. Хилькова // Доповіді НАНУ. – 2016. – № 6. – С. 15-19.
14. *Дубровин Б.А.* Современная геометрия. Методы и приложения / Б.А. Дубровин, С.П. Новиков, А.Т. Фоменко. – М.: Наука, 1986. – 760 с.
15. *Жиков В.В.* Усреднение и G-сходимость дифференциальных операторов / В.В. Жиков, С.М. Козлов, О.А. Олейник, Ха Тьен Нгоан // УМН. – 1979. – т. 34, № 5. – С. 65-133.
16. *Жиков В.В.* О G-сходимости параболических операторов / В.В. Жиков, С.М. Козлов, О.А. Олейник // УМН. – 1981. – т. 36, № 1. – С. 11-58.
17. *Жиков В.В.* Усреднение функционалов вариационного исчисления и теории упругости / В.В. Жиков // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1986. – т. 50, № 4. – С. 675–710.
18. *Жиков В.В.* Усреднение дифференциальных операторов / В.В. Жиков, С.М. Козлов, О.А. Олейник. – М.: Физматлит, 1993. – 464 с.
19. *Жиков В.В.* Введение в теорию двухмасштабной сходимости / В.В. Жиков, Г.А. Иосифьян // Труды сем. им. Петровского. – 2013. – т. 29. – С. 281-332.
20. *Иосида К.* Функциональный анализ / К. Иосида. – М.: Мир, 1967. – 624 с.
21. *Ковалевский А. А.* О G-сходимости нелинейных эллиптических операторов, связанных с задачей Дирихле в переменных областях / А. А. Ковалевский // Укр.матем.журн. – 1993. – т. 45, № 7 – С. 948-962.
22. *Ковалевский А. А.* G-сходимость и усреднение нелинейных эллиптических операторов дивергентного вида с переменной областью определения / А. А. Ковалевский // Изв. РАН. Сер. матем. – 1994. – т. 58, № 3 – С. 3-35.
23. *Ковалевский А. А.* G-компактность последовательностей нелинейных операторов задач Дирихле в переменной областью определения / А. А. Ковалевский // Изв. РАН. Сер. матем. – 1996. – т. 60, № 1 – С. 133-164.
24. *Колмогоров А.Н.* Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. – М.: Физматлит, 2004. – 572 с.
25. *Крылов Н.М.* Введение в нелинейную механику / Н.М. Крылов, Н.Н. Боголюбов. – К.: Изд-во АН УССР, 1937. – 352 с.

26. *Ладыженская О.А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости / О.А. Ладыженская. – М.: Наука, 1970. – 288 с.
27. *Ладыжевская О.А.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа / О.А. Ладыжевская, В.А. Солонников, Н.Н. Уральцева. – М.: Наука, 1967. – 736 с.
28. *Мазъя В.Г.* Пространства С. Л. Соболева / В.Г. Мазья. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1985.-416 с.
29. *Марченко В.А.* Краевые задачи с мелкозернистой границей / В.А. Марченко, Е.Я. Хруслов // Матем. сб. – 1964. – 65 (107). – С. 458-472.
30. *Марченко В.А.* Краевые задачи в областях с мелкозернистой границей / В.А. Марченко, Е.Я. Хруслов. – К.: Наукова думка, 1974. – 278 с.
31. *Марченко В.А.* Усреднённые модели микронеоднородных сред / В.А. Марченко, Е.Я. Хруслов. – К.: Наукова думка, 2005. – 551 с.
32. *Митропольский Ю.А.* Метод усреднения в нелинейной механике / Ю.А. Митропольский. – К.: Наукова думка, 1971. – 440 с.
33. *Михлин С.Г.* Линейные уравнения в частных производных / С.Г. Михлин. – М.: Высшая школа, 1977. – 431 с.
34. *Олейник О.А.* Математические задачи теории сильно неоднородных упругих сред / О.А. Олейник, Г.А. Иосифьян, А.С. Шамаев. – М.: Изд-во МГУ, 1990. – 311 с.
35. *Пятницкий А.Л.* Усреднение. Методы и приложения / А.Л. Пятницкий, Г.А. Чечкин, А.С. Шамаев. – Новосибирск:«Тамара Рожковская», 2007. – 264 с.
36. *Скрыпник И.В.* Методы исследования нелинейных эллиптических граничных задач / И.В. Скрыпник. – М.: Наука, 1990. – 448 с.
37. *Скрыпник И.В.* Асимптотическое разложение решений квазилинейных параболических задач в перфорированных областях / И.В. Скрыпник. // Укр.матем.журн. – 1993. – т. 45, № 11. – С. 1542-1566.
38. *Санчес-Паленсия Э.* Неоднородные среды и теория колебаний / Э. Санчес-Паленсия. – М.: Мир, 1984. – 472 с.
39. *Тихонов А.Н.* Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – М.: Наука, 1972. – 735 с.
40. *Фенченко В.Н.* Асимптотика потенциала электростатического поля в областях с мелкозернистой границей / В.Н. Фенченко // Исследования по теории операторов и их приложения: Сб. науч. трудов ФТИНТ АНУ. – К.:

Наукова думка, 1979. – С. 129–147.

41. *Хилькова Л.А.* О гладкой зависимости решения „ячеечной“ краевой задачи Неймана от параметров области / Л.А. Хилькова // Доповіді НАНУ. – 2014. – № 4. – С. 32-36.

42. *Хилькова Л.А.* Усреднение уравнения диффузии в областях с мелкозернистой границей с нелинейным граничным условием типа Робена / Л.А. Хилькова. // Вісник ХНУ, Серія «Матем., прикладна матем. і механіка». – 2016. – т. 84. – С. 93-111.

43. *Хількова Л.О.* Усереднена модель дифузії в сильно зв'язному пористому середовищі з нелінійним поглинанням на межі // International Conference of Young Mathematicians, Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, June 3–6, 2015. Book of abstracts. – 2015. – с. 173.

44. *Хількова Л.О.* Інтегральні умови збіжності розв'язку нелінійної задачі Робена в сильно перфорованих областях // International Conference of Young Mathematicians dedicated to the 100th Anniversary of Academician of National Academy of Sciences of Ukraine, Professor Yu. O. Mitropolskiy (1917–2008), Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, June 7–10, 2017. Book of abstracts. – 2017. – с. 104.

45. *Хруслов Е.Я.* Асимптотическое поведение решений второй краевой задачи при измельчении границы области / Е.Я. Хруслов // Матем. сб. – 1978. – т. 106(148), № 4(8). – С. 604-621.

46. *Хруслов Е.Я.* Задача Дирихле в области со случайной границей / Е.Я. Хруслов // Вестник ХГУ, серия матем. и механика. – 1970. – т. 34. – С. 14–37.

47. *Хруслов Е.Я.* Нелинейная задача Робена в областях с мелкозернистой случайной границей / Е.Я. Хруслов, Л.А. Хилькова // Доповіді НАНУ. – 2017. – № 9. – С. 3-8.

48. *Ширяев А.Н.* Вероятность-1 / А.Н. Ширяев. – М.: МЦНМО, 2004. – 520 с.

49. *Щербина В.А.* Краевые задачи с три-периодическим решением для уравнения Лапласа в R^3 / В.А. Щербина // Теор.функ., функ.ан. и их прилож. – 1986. – № 46. – С. 132-139.

50. *Щербина В.А.* Фундаментальные решения 3-х мерных ячеечных задач для некоторых уравнений математической физики / В.А. Щербина // Журн.выч.матем. и матем.физ. – 1989. – т. 29, № 2. – С. 298-304.

51. *Acerbi E.* An extension theorem from connected sets, and homogenization in

general periodic domains / E. Acerbi, V. Chiado Piat, G. Dal Maso, D. Percivale // Nonlinear Anal., Theory, Methods Appl. – 1992. – Vol. 18, No. 5. – P. 481-496.

52. *Allaire G.* Homogenization and Two-Scale Convergence / G. Allaire // SIAM J. Math. Anal. – 1992. – Vol. 23, No.6. – P. 1482-1518.

53. *Allaire G.* Upscaling nonlinear adsorption in periodic porous media – homogenization approach / G. Allaire, H. Hutridurga // Appl. Anal. –2015. – P. 1-35.

54. *Bensoussan A.* Asymptotic analysis for periodic structures / A. Bensoussan, J. Lions, G. Papanicolaou. – Amsterdam, New York, Oxford: North-Holland publishing Co., 1978. – xxiv+698 p.

55. *Berlyand L.V.* Competition between the surface and the boundary layer energies in a Ginzburg-Landau model of a liquid crystal composite / L.V. Berlyand, E.Ya. Khruslov // Asymptot. Anal. – 2002. – Vol. 29. – P. 185-219.

56. *Berlyand L.V.* Ginzburg-Landau model of a liquid crystal with random inclusions / L.V. Berlyand, E.Ya. Khruslov // J. Math. Phys. – 2005. – No 46. – P. 095107 (1-15).

57. *Braides A.* Γ-convergence for beginners / A. Braides. – Oxford: University Press, 2002. – 230 p.

58. *Brillard A.* Boundary homogenization in perforated domains for adsorption problems with an advection term / A. Brillard, D. Gómez, M. Lobo, E. Pérez, T.A. Shaposhnikova // Appl. Anal. – 2016. – P. 1-17.

59. *Cabarrubias B.* Existence and Uniqueness for a Quasilinear Elliptic Problem With Nonlinear Robin Condition / B. Cabarrubias, P. Donato // Carpathian J. Math. – 2011. – Vol. 27, No. 2. – P. 173-184.

60. *Cabarrubias B.* Homogenization of a quasilinear elliptic problem with nonlinear Robin boundary condition / B. Cabarrubias, P. Donato // Appl. Anal. – 2012. – Vol. 91, No. 6. – P. 1111-1127.

61. *Calmuschi B.* Upscaling of Chemical Reactive Flows in Porous Media / B. Calmuschi, C. Timofte // «Caius Iacob» Conference on Fluid Mechanics & Texnical Applications, Bucharest, Romania, 2005. – P. 1-9.

62. *Chechkin G.A.* Homogenization of Boundary-Value Problem in a Locally Periodic Perforated Domain / G.A. Chechkin, A.L. Piatnitski // Appl. Anal. – 1999. – Vol. 71 (1-4). – P. 215–235.

63. *Chourabi I.* Homogenization of elliptic problems with quadratic growth

and nonhomogenous Robin conditions in perforated domains / I. Chourabi, P. Donato // Chin. Ann. Math. – 2016. – 37B, No. 6. – P. 833–852.

64. *Cioranescu D.* Homogenization in Open Sets with Holes / D. Cioranescu , J. Paulin // J. Math. Anal. Appl. – 1979. – 71. – P. 590-607.

65. *Cioranescu D.* Homogénéisation du problème de Neumann non homogène dans des ouverts perforés / D. Cioranescu, P. Donato // Asymptot. Anal. – 1988. – 1. – P. 115-138.

66. *Cioranescu D.* On Robin problems in perforated domains / D. Cioranescu, P. Donato // Math. Sci. Appl. – 1997. – No. 9. – P. 123-135.

67. *Cioranescu D.* Un terme étrange venu d'ailleurs / D. Cioranescu, F. Murat // Nonlinear Part. Differ. Equ. Appl., Collége de France Seminar. – Paris, 1979/1980. – Vol. II. – P. 98-138.

68. *Cioranescu D.* Un terme étrange venu d'ailleurs II / D. Cioranescu, F. Murat // Nonlinear Part. Differ. Equ. Appl., Collége de France Seminar. – Paris, 1980/1981. – Vol. III. – P. 154-178.

69. *Cioranescu D.* Homogenization of reticulated structures / D. Cioranescu, J. Saint Jean Paulin // Appl. Math. Sci., Vol. 136. – Verlag, New York, Berlin, Heidelberg: Springer, 1999. – xvi+346 p.

70. *Cioranescu D.* Periodic unfolding and homogenization / D. Cioranescu, A. Damlamian, G. Griso // Comptes Rendus de l'Académie des Sciences Paris, Series I. – 2002. – 335. – P. 99-104.

71. *Cioranescu D.* The periodic unfolding method in perforated domains / D. Cioranescu, P. Donato, R. Zaki // Portugaliae Math. – 2006. – Vol. 63, No.4. – P. 467-496.

72. *Cioranescu D.* Asymptotic behaviour of elliptic problems in perforated domains with nonlinear boundary conditions / D. Cioranescu, P. Donato, R. Zaki // Asymptot. Anal. – 2007. – 53. – P. 209-235.

73. *Cioranescu D.* The Periodic Unfolding Method in Homogenization / D. Cioranescu, A. Damlamian, G. Griso // SIAM J. Math. Anal. – 2008 – Vol. 40, No. 4. – P. 1585-1620.

74. *Cioranescu D.* Homogenization of elliptic problems in perforated domains with mixed boundary conditions / D. Cioranescu, O. Hammounda // Romanian J. Pure Appl. Math. – 2008. – Vol. 53, No. 5-6. – P. 389-406.

75. *Conca C.* Effective Chemical Processes in Porous Media / C. Conca, J. Diaz, C. Timofte // Math. Models Methods Appl. Sci. – 2003. – Vol. 13, No. 10. –

P. 1437-1462.

76. *Conca C.* Homogenization in chemical reactive floes/ C. Conca, J. Diaz, A. Linan, C. Timofte // Electron. J. Differ. Equ. – 2004. – No.40. – P. 1-22.
77. *Conca C.* Homogenization results for chemical reactive flows through porous media / C. Conca, J. Diaz, A. Linan, C. Timofte // New Trends in Continuum Mechanics. – 2005. – P. 99-107.
78. *Damlamian A.* An elementary introduction to periodic unfolding / A. Damlamian // GAKUTO Int. Series Math. Sci. Appl. – 2005. – 24. – P. 119-136.
79. *Dal Maso G.* An introduction to Γ-convergence / G. Dal Maso. – Boston: Birkhauser, 1993. – xiv+340 p.
80. *De Giorgi E.* Sulla convergenza degli integrali dell'energia per operatori ellittici del secondo ordine / E. De Giorgi, S. Spagnolo // Boll. Un. Mat. Ital. – 1973. – Vol. 8, No. 4. – P. 391-411.
81. *De Giorgi E.* Su un tipo di convergenza variazionale / E. De Giorgi, T. Franzoni // Atti. Accd. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. – 1975. – Vol. 58, No. 8. – P. 842-850.
82. *De Maio U.* Asymptotic Approximation forthe Solution to the Robin Problem in a Thick Multi-Level Junction / U. De Maio, T. Durante, T.A. Mel'nyk // Math. Models Methods Appl. Sci. – 2005. – Vol. 15, No. 12. – P. 1897-1921.
83. *Diaz J.* Two problems in homogenization of porous media / J. Diaz. // Extracta Mathematica. – 1999. – No. 14. – P. 141-155.
84. *Diaz J.* The Effectiveness Factor of Reaction-Diffusion Equations: Homogenization and Existence of Optimal Pellet Shapes / J. Diaz, D. Gómez-Castro, C. Timofte // JEPE. – 2016. – Vol. 2. – P. 119-129.
85. *Diaz J.* The Effectiveness Factor of Reaction-Diffusion Equations: Homogenization and Existence of Optimal Pellet Shapes / J. Diaz, D. Gómez-Castro, T.A. Shaposhnikova, M.N. Zubova // Electron. J. Differ. Equ. – 2017. – No. 178. – P. 1–25.
86. *Donato P.* Existence and uniqueness results for a class of singular elliptic problems in perforated domains / P. Donato, S. Monsurro, F. Raimondi // Ricerche di Matematica. – 2016. – August. – P. 1-28.
87. *Egorova I.E.* Asymptotic behavior of the solutions of the second boundary value problem in domains with random thin gaps / I.E. Egorova, E.Ya. Khruslov // J. Soviet Math. – 1990. – Vol. 52, No. 5. – P. 3412–3421.

88. *Evans L.C.* Partial Differential Equations. Graduate Studies in Mathematics / L.C. Evans. – Providence: AMS, 1998. – Vol. 19. – 662 p.
89. *Gómez D.* On homogenization of nonlinear Robin type boundary conditions for cavities along manifolds and associated spectral problems / D. Gómez, E. Pérez, T.A. Shaposhnikova // Asymptot. Anal. – 2012. – Vol. 80. – P. 289–322 .
90. *Goncharenko M.* The asymptotic behaviour of the third boundary-value problem solutions in domains with fine-grained boundaries / M. Goncharenko //Math. Sci. Appl. – 1997. – No. 9. – P. 203-213.
91. *Goncharenko M.* Homogenized Model of Non-Stationary Diffusion in Porous Media with the Drift / M. Goncharenko, L. Khilkova // J. Math. Phys. Anal. Geom. – 2017. – Vol. 13, No. 2. – P. 154-172.
92. *Hornung U.* Diffusion, Convection, Adsorption and Reaction of Chemicals in Porous Media / U. Hornung, W. Jäger // J. Differ. Equ. – 1991. – No. 92. – P. 199-225.
93. *Hornung U.* Homogenization and Porous Media / U. Hornung. – New York: Springer, 1997. – 280 p.
94. *Jäger W.* On Homogenization of Solutions of Boundary Value Problem for the Laplace Equation in Partially Perforated Domain with the Third Boundary Type Condition on the Boundary of Cavities / W. Jäger, O.A. Oleinik, A.S. Shamaev // Trudy Mosk. Math. Soc. – 1997. – Vol. 58. – P. 187–223.
95. *Jäger W.* Homogenization Limit for the Diffusion Equation with Nonlinear Flux Condition on the Boundary of Very Thin Holes Periodically Distributed in a Domain, in Case of a Critical Size / W. Jäger, M. Neuss-Radu, T.A. Shaposhnikova // Dokl. Math. – 2010. – Vol. 82, No. 2. – P. 736-740.
96. *Kaizu S.* The Poisson equation with semilinear boundary conditions in domains with liny holes / S. Kaizu // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA. Math. – 1989. – Vol. 36. – P. 43-86.
97. *Khilkova L.* Homogenized model of diffusion in porous media with nonlinear absorption at the boundary // II International Conference "Analysis and mathematical physics", Kharkiv, June 16-20, 2014. Book of abstracts. – 2014. – P. 32-33.
98. *Khilkova L.* Homogenized conductivity tenzor and absorption function for a locally periodic porous medium // III International Conference "Analysis and mathematical physics", Kharkiv, June 15-19, 2015. Book of abstracts. – 2015. –

P. 25-26.

99. *Khilkova L.* Homogenized model of non-stationary diffusion in porous media with the drift // IV International Conference “Analysis and mathematical physics”, Kharkiv, June 13-17, 2016. Book of abstracts. – 2016. – P. 22.
100. *Khilkova L.* The study of the asymptotic behavior of the third boundary value problem solutions in domains with fine-grained boundaries // 5th International Conference for Young Scientists on Differential Equations and Applications dedicated to Ya. B. Lopatynsky, Kyiv, Ukraine, November 9-11, 2016. Book of abstracts. – 2016. – P. 75-76.
101. *Khilkova L.* Homogenization of the diffusion equation in domains with the fine-grained boundary with the nonlinear boundary Robin condition // V International Conference “Analysis and mathematical physics” dedicated to Vladimir A. Marchenko's 95th birthday and the centennial anniversary of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kharkiv, June 19-24, 2017. Book of abstracts. – 2017. – P. 36-37.
102. *Khilkova L.* Robin's nonlinear problem in domains with a fine-grained random boundary // International Conference Differential Equations, Mathematical Physics and Applications, Cherkasy, October 17-19, 2017. Book of abstracts. – 2017. – P. 64-65.
103. *Khruslov E.Ya.* Integral conditions for convergence of solutions of non-linear Robin's problem in strongly perforated domains / E.Ya. Khruslov, L.O. Khilkova, M.V. Goncharenko // J. Math. Phys. Anal. Geom. – 2017. – vol. 13, No.3. – P. 1-31.
104. *Lions J.L.* Asymptotic expansions in perforated media with a periodic structure / J.L. Lions // Rocky Mountain J. Math. – 1980. – Vol. 10, No.1. – P. 125-140.
105. *Mel'nyk T.A.* Asymptotic analysis of a boundary-value problem with the nonlinean multiphase interactions in a perforated domain / T.A. Mel'nyk, O.A. Sivak // Укр. матем. журн. – 2009. – Т. 61, № 4. – С. 494-512.
106. *Mel'nyk T.A.* Asymptotic analysis of a parabolic semilinear problem with nonlinear boundary multiphase interactions in a perforated domain / T.A. Mel'nyk , O.A. Sivak // J. Math. Sci. – 2010. – Vol. 164, No. 3. – P. 1-27.
107. *Mel'nyk T.A.* Asymptotic approximations for solutions to quasilinear and linear parabolic problems with different perturbed boundary conditions in

perforated domains / T.A. Mel'nyk , O.A. Sivak // J. Math. Sci. – 2011. – Vol. 177, No. 1. – C. 50-70.

108. *Mel'nyk T.A.* Asymptotic approximations for solutions to quasilinear and linear elliptic problems with different perturbed boundary conditions in perforated domains / T.A. Mel'nyk , O.A. Sivak // Asymptot. Anal. – 2011. – 75. – P. 79-92.

109. *Murat F.* Compacité par compensation / F. Murat // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, Cl. Sci. Fis. Mat. – 1978. – Vol. 5. – P. 481-507.

110. *Nguetseng G.* General Convergence Result for a Functional Related to the Theory of Homogenization. / G. Nguetseng // SIAM J. Math. Anal. – 1989. – Vol. 20, No. 3. – P. 608-623.

111. *Oleinik O.A.* On the homogenization of the Poisson equation in partially perforated domains with arbitrarydensity of cavities and mixed type conditions ontheir boundary / O.A. Oleinik, T.A. Shaposhnikova // Rendiconti Lincei. Matematica e Applicazioni. – 1996. – Serie 9, Vol. 7, No. 3. – P. 129–146.

112. *Pérez M.E.* A Homogenization Problem in a Domain Perforated by Tiny Isoperimetric Holes with Nonlinear Robin Type Boundary Conditions / M.E. Pérez, M.N. Zubova, T.A. Shaposhnikova // Dokl. Math. – 2014. – Vol. 90, No. 1. – P. 489-494.

113. *Piatnitski A.* Homogenization of boundary value problems for monotone operators in perforated domains with rapidly oscillating boundary conditions of Fourier type / A. Piatnitski, V. Rybalko // J. Math. Sci. – 2011. – Vol. 177, No. 1. – P. 109-140.

114. *Pankov A.* G-Convergence and Homogenization of Nonlinear Partial Differential Operators / A. Pankov. – Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publishers, 1997. - vii+250 p.

115. *Showalter R.E.* Monotone Operators in Banach Space and NonlinearPartial Differential Equations / R.E. Showalter. – Providence: AMS, 1997. – xiv+278 p.

116. *Spagnolo S.* Convergence in energy for elliptic operators / S. Spagnolo // Numerical solution of partial differential equations, III. – New York: Academical Press, 1976. – P. 469-498.

117. *Tartar L.* Problèmes d'homogénéization dans les équations aux dérivées partielles. In: H-convergence Ed. F. Murat / L. Tartar. – Université d'Alger, 1978.

118. *Tartar L.* Topics in nonlinear analysis / L. Tartar. – Orsay: Université de Paris-Sud, Dép. de mathématique, 1978. – ii+271 p.
119. *Tartar L.* The General Theory of Homogenization. A Personalized Introduction / L. Tartar. – Heidelberg, Dordrecht, London, New York: Springer, 2009. – xxii+470 p.
120. *Timofte C.* Homogenization in Nonlinear Chemical Reactive Flows // Proceedings of the 9th WSEAS International Conference on Applied Mathematics, Istambul, Turkey, May 27-29, 2006. – P. 250-255.
121. *Timofte C.* On the asymptotic behaviour of some elliptic problems in perforated domains / C. Timofte, N. Cotfas, G. Pavel // Romanian Rep. Phys. – 2012. – Vol. 64, No. 1. – P. 5-14.
122. *Zubova M.N.* Homogenization of boundary value problems in perforated domains with the third boundary condition and the resulting change in the character of the nonlinearity in the problem / M.N. Zubova, T.A. Shaposhnikova // Differ. Equ. – 2011. – Vol. 47, No. 1. – P. 78-90.
123. *Zubova M.N.* Homogenization of the Boundary Value Problem for the Laplace Operator in a Perforated Domain with a Rapidly Oscillating Nonhomogeneous Robin-Type Condition on the Boundary of Holes in the Critical Case / M.N. Zubova, T.A. Shaposhnikova // Dokl. Math. – 2017. – Vol. 96, No. 1. – P. 344–347.

ДОДАТОК А. СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ ТА ВІДОМОСТІ ПРО АПРОБАЦІЮ РЕЗУЛЬТАТІВ ДИСЕРТАЦІЇ

Наукові праці, в яких опубліковані основні наукові результати дисертації

Публікації у фахових виданнях України:

1. *Хилькова Л.А.* О гладкой зависимости решения «ячеечной» краевой задачи Неймана от параметров области / Л.А. Хилькова // Доповіді НАНУ. – 2014. – № 4. – С. 32-36.

2. *Гончаренко М.В.* Усреднённая модель диффузии в пористой среде с нелинейным поглощением на границе / М.В. Гончаренко, Л.А. Хилькова // Укр.матем.журн. – 2015. – Т. 67, № 9. – С. 1201–1216 (Scopus, Web of Science).

3. *Гончаренко М.В.* Усредненная модель диффузии в локально периодической пористой среде с нелинейным поглощением на границе / М.В. Гончаренко, Л.А. Хилькова // Доповіді НАНУ. – 2016. – № 6. – С. 15-19.

4. *Хилькова Л.А.* Усреднение уравнения диффузии в областях с мелкозернистой границей с нелинейным граничным условием типа Робена / Л.А. Хилькова. // Вісник ХНУ, Серія «Матем., прикладна матем. і механіка». – 2016. – т. 84. – С. 93-111.

5. *Goncharenko M.* Homogenized Model of Non-Stationary Diffusion in Porous Media with the Drift / M. Goncharenko, L. Khilkova // J. Math. Phys. Anal. Geom. – 2017. – Vol. 13, No. 2. – P. 154-172 (Scopus, Web of Science).

6. *Khruslov E.Ya.* Integral conditions for convergence of solutions of non-linear Robin's problem in strongly perforated domains / E.Ya. Khruslov, L.O. Khilkova, M.V. Goncharenko // J. Math. Phys. Anal. Geom.- 2017.- vol.13, No.3.- P.1-31 (Scopus, Web of Science).

7. *Хруслов Е.Я.* Нелинейная задача Робена в областях с мелкозернистой случайной границей / Е.Я. Хруслов, Л.А. Хилькова // Доповіді НАНУ. – 2017. – № 9. – С. 3-8.

Публікації, які засвядчують апробацію дисертації

Публікації у матеріалах міжнародних наукових конференцій:

8. *Khilkova L.* Homogenized model of diffusion in porous media with nonli-

near absorption at the boundary // II International Conference "Analysis and mathematical physics", Kharkiv, June 16-20, 2014. Book of abstracts. – P. 32-33.

9. *Хількова Л.О.* Усереднена модель дифузії в сильно зв'язному пористому середовищі з нелінійним поглинанням на межі // International Conference of Young Mathematicians, Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, June 3–6, 2015. Book of abstracts. – c. 173.

10. *Khilkova L.* Homogenized conductivity tenzor and absorption function for a locally periodic porous medium // III International Conference "Analysis and mathematical physics", Kharkiv, June 15-19, 2015. Book of abstracts. – P. 25-26.

11. *Khilkova L.* Homogenized model of non-stationary diffusion in porous media with the drift // IV International Conference "Analysis and mathematical physics", Kharkiv, June 13-17, 2016. Book of abstracts. – P. 22.

12. *Khilkova L.* The study of the asymptotic behavior of the third boundary value problem solutions in domains with fine-grained boundaries // 5th International Conference on Differential Equations and Applications dedicated to Ya. B. Lopatynsky, Kyiv, Ukraine, November 9-11, 2016. Book of abstracts. – P. 75-76.

13. *Хількова Л.О.* Інтегральні умови збіжності розв'язку нелінійної задачі Робена в сильно перфорованих областях // International Conference of Young Mathematicians dedicated to the 100th Anniversary of NAS of Ukraine, Professor Yu. O. Mitropolskiy, Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, June 7–10, 2017. Book of abstracts. – c. 104.

14. *Khilkova L.* Homogenization of the diffusion equation in domains with the fine-grained boundary with the nonlinear boundary Robin condition // V International Conference "Analysis and mathematical physics" dedicated to Vladimir A. Marchenko's 95th birthday and the centennial anniversary of NAS of Ukraine, Kharkiv, June 19-24, 2017. Book of abstracts. – P. 36-37.

15. *Khilkova L.* Robin's nonlinear problem in domains with a fine-grained random boundary // International Conference Differential Equations, Math.Physics and Applications, Cherkasy, October 17-19, 2017. Book of abstracts. – P. 64-65.

Відомості про апробацію результатів дисертації

Основні результати дисертації доповідалися та обговорювалися на наступних наукових конференціях та семінарах:

1. II International Conference "Analysis and mathematical physics", Kharkiv, June 16-20, 2014 (форма участі: доповідь).

2. International Conference of Young Mathematicians, Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, June 3–6, 2015 (форма участі: доповідь).

3. III International Conference "Analysis and mathematical physics", Kharkiv, June 15-19, 2015 (форма участі: доповідь).

4. IV International Conference "Analysis and mathematical physics", Kharkiv, June 13-17, 2016 (форма участі: доповідь).

5. 5th International Conference on Differential Equations and Applications dedicated to Ya. B. Lopatynsky, Kyiv, Ukraine, November 9-11, 2016 (форма участі: доповідь).

6.International Conference of Young Mathematicians dedicated to the 100th Anniversary of NAS of Ukraine, Professor Yu. O. Mitropolskiy, Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, June 7–10, 2017 (форма участі: заочна).

7. V International Conference "Analysis and mathematical physics" dedicated to Vladimir A. Marchenko's 95th birthday and the centennial anniversary of NAS of Ukraine, Kharkiv, June 19-24, 2017 (форма участі: стендова доповідь).

8. International Conference Differential Equations, Math.Physics and Applications, Cherkasy, October 17-19, 2017 (форма участі: доповідь).

9. Науковий семінар відділу диференціальних рівнянь і геометрії Фізико-технічного інституту низьких температур ім. Б.І. Вєркіна НАН України (керівник: академік НАН України, д.ф.-м.н., професор Є.Я. Хруслов), 15 квітня 2015 р., Харків, Україна (форма участі: доповідь).

10. Науковий семінар кафедри математичної фізики механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченко «Асимптотичні та аналітичні методи для задач математичної фізики» (керівники: д.ф.-м.н., професор Т.А. Мельник, д.ф.-м.н., професор В.Г. Самойленко), 14 грудня 2017 р., Київ, Україна (форма участі: доповідь).

11. Науковий семінар відділу нелінійного аналізу і рівнянь математичної фізики Інституту прикладної математики і механіки НАН України, (керівник: д.ф.-м.н., І.І. Скрипнік), 22 січня 2018 р., Слов'янськ, Україна (форма участі: доповідь).

12. Науковий семінар відділу диференціальних рівнянь і геометрії Фізико-технічного інституту низьких температур ім. Б.І. Вєркіна НАН України (керівник: академік НАН України, д.ф.-м.н., професор Є.Я. Хруслов), 7 лютого 2018 р., Харків, Україна (форма участі: доповідь).