Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна
Міністерство освіти і науки України

Фізико-технічний інститут низьких температур ім. Б. І. Вєркіна
Національна академія наук України

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

Ігнатович Світлана Юріївна

УДК 517.977

ДИСЕРТАЦІЯ

МЕТОД РЯДІВ ТА ВІЛЬНИХ АЛГЕБР В АНАЛІЗІ НЕЛІНІЙНИХ КЕРОВАНИХ СИСТЕМ

Спеціальність 01.01.01 — «Математичний аналіз»

(Фізико-математичні науки)

Подається на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

____________ С. Ю. Ігнатович

Науковий консультант Скляр Григорій Михайлович, доктор фізико-математичних наук, професор

Харків – 2017

АНОТАЦІЯ

Ігнатович С. Ю. Метод рядів та вільних алгебр в аналізі нелінійних керованих систем. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 — математичний аналіз (Фізико-математичні науки). — Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна Міністерства освіти і науки України; Фізико-технічний інститут низьких температур ім. Б. І. Вєркіна Національної академії наук України, Харків, 2017 р.

У дисертації запропоновано і розвинуто методи аналізу нелінійних керованих систем, основані на зображенні системи у вигляді ряду елементів вільної алгебри і дослідженні структур у цій вільній алгебрі, які породжує система.

У роботі розглядаються нелінійні керовані дійсно-аналітичні системи, лінійні або афінні за керуванням. Для систем, лінійних за керуванням, розглянуто задачу Коші з фіксованою початковою точкою (для зручності — нуль) і розвинення відображення в кінець траєкторії у ряд ітерованих інтегралів. Для систем, афінних за керуванням, розглянуто задачу потрапляння до фіксованої точки спокою (для зручності — нуль) і розвинення відображення до початку траєкторії у ряд нелінійних степеневих моментів.

В обох випадках коефіцієнти рядів є сталими векторами, які містять у собі всю (локальну) інформацію щодо конкретної системи, а функціонали — ітеровані інтеграли або нелінійні степеневі моменти — не залежать від системи і утворюють вільну градуйовану асоціативну алгебру (ми позначаємо її $\mathcal{F}$ у випадку ітерованих інтегралів і $\mathcal{A}$ у випадку нелінійних степеневих моментів). Одна з основних ідей напрямку, що розвивається, полягає в тому, щоб розглядати ці ряди замість систем, аналогічно тому, як ряд Тейлора розглядається замість дійсно-аналітичної функції. Зокрема, заміни змінних у системі зводяться до перетворення рядів, у яких застосовується операція тасуючого добутку у відповідній алгебрі, а градуювання визначається обмеженнями на керування. Щодо афінних за керуванням

систем, у роботі переважно розглядаються системи з одновимірним керуванням, але наведені узагальнення на випадок багатовимірного керування і різних обмежень на керування.

Коефіцієнти ряду породжують лінійне відображення з алгебри до $\mathbb{R}^n$, яке, у свою чергу, індукує певні структури в алгебрі. Зокрема, елементам вільної алгебри Лі $\mathcal{L}$ (в $\mathcal{F}$ або $\mathcal{A}$) відповідають значення дужок Лі векторних полів, які визначають систему, в початковій або кінцевій точці. Центральними об'єктами дослідження є введена в дисертації ядерна підалгебра Лі і односторонній ідеал, який вона породжує. Ядерна підалгебра Лі визначається лінійними залежностями між дужками Лі векторних полів у точці (початковій або кінцевій), а отже, є координатно незалежним об'єктом. Для повністю неголономної системи в $\mathbb{R}^n$ ядерна підалгебра Лі є градуйованою підалгеброю Лі в $\mathcal{L}$ ковимірності n, причому будь-яка градуйована підалгебра Лі ковимірності n є ядерною підалгеброю якоїсь системи.

У дисертації розглянуто абстрактну задачу, до якої зводяться обидва вказаних вище випадки. А саме, у вільній градуйованій асоціативній алгебрі розглянемо формальний ряд з коефіцієнтами з $\mathbb{R}^n$, який задовольняє певні вимоги (що відповідають реалізовності і повній неголономності системи); замінам змінних у системах відповідають перетворення таких рядів. Для цих рядів також виникають ядерна підалгебра Лі і односторонній ідеал. Задача полягає в тому, щоб побудувати однорідний ряд, який теж задовольняє вказаним умовам і (з точністю до перетворення) є головною частиною вихідного ряду. Цей ряд можна вважати абстрактним аналогом однорідної апроксимації керованих систем.

У дисертації доведено, що саме ядерні підалгебри Лі відповідають за однорідну апроксимацію: два ряди мають одну й ту саму однорідну апроксимацію тоді і тільки тоді, коли їх ядерні підалгебри Лі збігаються. У роботі запропоноване безкоординатне означення однорідної апроксимації і отримана повна класифікація однорідних апроксимацій. Перелічені результати спираються на узагальнення теореми Р. Рі про характеризацію елементів алгебри Лі. А саме, доведено, що базис ортогонального доповнення одностороннього ідеалу, який породжений ядерною підалгеброю Лі, утворюють мономи відносно тасуючого добутку від ортопроекцій на це ортогональне доповнення n довільних однорідних елементів з алгебри Лі, лінійна оболонка яких доповнює ядерну підалгебру Лі.

Ці результати застосовано до опису і побудови однорідних апроксимацій нелінійних систем, лінійних або афінних за керуванням. Запропоновані методи побудови однорідних апроксимуючих систем і привілейованих координат (тобто координат, у яких однорідна апроксимуюча система наближає відображення в кінець або до початку траєкторії вихідної системи).

Зокрема, показано, що зображення однорідної апроксимації у вигляді ряду можна отримати без знаходження привілейованих координат, виходячи лише з вигляду ядерної підалгебри Лі, за допомогою ортопроектування: треба взяти n довільних однорідних елементів з алгебри Лі, лінійна оболонка яких доповнює ядерну підалгебру Лі, і знайти їх ортопроекції на ортогональне доповнення до одностороннього ідеалу, який породжений цією ядерною підалгеброю Лі. Більш того, зображення всіх можливих однорідних апроксимацій є однорідними поліномами відносно тасуючого добутку від цих ортопроекцій. Це означає, що однорідна апроксимація є єдиною з точністю до поліноміальної однорідної заміни змінних. Розвинутий підхід дозволяє розв'язати низку близьких задач: отримати повний опис привілейованих координат, розробити методи побудови апроксимуючих систем, дослідити властивості однорідних регулярних систем тощо. Так, отримані критерії реалізовності ряду нелінійних степеневих моментів у вигляді автономної або неавтономної системи, афінної за керуванням, і запропонований метод відновлення такої системи за даним реалізовним рядом.

У дисертації досліджені властивості ядерних підалгебр Лі для регулярних і однорідних систем. Зокрема, показано, що у випадку регулярної системи (такої, що її вектор зросту є сталим в околі) ядерна підалгебра Лі є ідеалом Лі, але може залежати від точки. Показано, що для однорідних систем регулярність еквівалентна тому, що ядерна підалгебра Лі є ідеалом Лі. Крім того, для регулярних однорідних систем показано, як знаходити коефіцієнти ряду ітерованих інтегралів в околі за допомогою перерозкладання ряду в нулі.

Заміни керування в системі, на відміну від заміни координат, змінюють ядерну підалгебру Лі, але не змінюють вектор зросту системи. У дисертації для систем, лінійних за керуванням, отримано опис усіх ядерних підалгебр Лі (або, що те ж саме, однорідних апроксимацій) із заданим вектором зросту. Попутно отримано опис усіх можливих векторів зросту. Ці результати спираються на опис ядерної підалгебри Лі як вільної алгебри, тобто на опис її вільного породжувального базису. У дисертації запропоновані означення A-нормальності і A-простоти вектору зросту. А саме, вектор зросту є A-нормальним, якщо множина всіх ядерних підалгебр Лі з цим вектором зросту розбивається на скінченну кількість класів еквівалентності: ядерні підалгебри Лі з одного класу еквівалентності зводяться одна до одної заміною керування; вектор зросту є A-простим, якщо множина всіх ядерних підалгебр Лі систем, близьких до тих, що мають даний вектор зросту, розбивається на скінченну кількість класів еквівалентності. У роботі даний опис усіх A-нормальних і A-простих векторів зросту для систем з двома керуваннями і описаний метод побудови нормальних форм систем.

Одною з вихідних ідей розвитку методу рядів було дослідження задачі швидкодії в точку спокою для систем, афінних за керуванням. Першим кроком є зведення такої задачі швидкодії до нелінійної min-проблеми моментів Маркова: до відповідного ряду нелінійних степеневих моментів додаються обмеження на керування і умова оптимальності. Дві системи є локально еквівалентними у сенсі швидкодії, якщо (після заміни змінних в одній з них) їх розв'язки, тобто оптимальний час і оптимальне керування, стають асимптотично еквівалентними як функції початкової точки в околі точки спокою. У дисертації досліджено зв'язок однорідної апроксимації і апроксимації в сенсі швидкодії. А саме, наведено умови, за яких однорідна апроксимація локально еквівалентна вихідний системі в сенсі швидкодії. Це дозволяє отримати оптимальні або майже оптимальні керування для нелінійної системи, розв'язуючи значно простішу задачу швидкодії для її однорідної апроксимації. Також досліджено і зворотний зв'язок: наведено умови, за яких системи, що є локально еквівалентними в сенсі швидкодії, мають одну й ту саму однорідну апроксимацію. Зв'язок апроксимації в сенсі швидкодії і однорідної апроксимації досліджений і для систем, лінійних за керуванням.

Крім того, в дисертації розглянуто деякі задачі відображуваності в класі C^1. А саме, для нелінійних керованих систем із класу C^1 з багатовимірним керуванням отримано критерій лінеаризовності за зворотним зв'язком, а також для систем з одновимірним керуванням отримано критерії відображуваності на системи спеціального вигляду — системи з прямим зв'язком. Також для систем одного класу (спряжених до лінійних) отримано повний опис усіх можливих оптимальних за швидкодією керувань. Однорідні системи з розглянутого класу є однорідними апроксимаціями, отже, вони можуть бути використані для побудови оптимальних або майже оптимальних керувань для всіх систем з такою однорідною апроксимацією. Для одної тривимірної нелінійної системи отриманий повний розв'язок задачі швидкодії.

Загалом, у дисертації запропонований і систематично розвинутий підхід, який залучає метод рядів і вільних алгебр до аналізу таких задач нелінійної теорії керування як задача швидкодії, опис і класифікація однорідних апроксимацій, реалізовність і відновлення систем, нормалізація систем тощо.

Усі основні результати наведено з повними доведеннями. Отримані результати мають теоретичний характер. Запропоновані методи можуть бути застосовані для дослідження і розв'язання різноманітних задач оптимізації і оптимального керування.

Ключові слова: нелінійні керовані системи, задача швидкодії, min-проблема моментів Маркова, однорідна апроксимація, ряди ітерованих інтегралів, ряди нелінійних степеневих моментів, вільна асоціативна алгебра, вільна алгебра Лі, спряжений базис, задача реалізовності, вектор зросту, відображуваність у класі C^1.

ABSTRACT

Svitlana Yu. Ignatovych. Method of series and free algebras in the analysis of nonlinear control systems. — Qualification scientific paper, manuscript.

Thesis for a Doctoral Degree in Physics and Mathematics: Speciality 01.01.01 — Mathematical Analysis (Physics and Mathematics). — V. N. Karazin Kharkiv National University, the Ministry of Education and Science of Ukraine; B. I. Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering, National Academy of Sciences of Ukraine, Kharkiv, 2017.

In the thesis, methods of analysis of nonlinear control systems are proposed and developed based on the representation of a system in the form of a series of elements of a free algebra and studying of structures in this free algebra which are generated by the system.

In the work nonlinear real-analytic control-linear and control-affine systems are considered. For control-linear systems, the initial value problem with a fixed starting point (for convenience, it is zero) and an expansion of the end-point map into the series of iterated integrals are considered. For control-affine systems, the steering problem to a fixed equilibrium (for convenience, it is zero) and an expansion of the initial-point map into the series of nonlinear power moments are considered.

In both cases, coefficients of series are constant vectors which contain all the (local) information on a concrete system while functionals — iterated integrals or nonlinear power moments — do not depend on a system and form a free graded associative algebra (we denote it $\mathcal{F}$ in the case of iterated integrals and $\mathcal{A}$ in the case of nonlinear power moments). One of the main ideas in the direction under development is to consider these series instead of systems, analogously to considering of a Taylor series instead of a real-analytic function. In particular, changes of variables in a system are reduced to transformations over a series in which the shuffle product operation in a corresponding algebra is applied while graduation is defined by control constraints. Concerning control-affine systems, in the work mainly systems with one-dimensional control are considered, but generalizations to the multi-dimensional control case and different

control constraints are given.

Coefficients of the series generate a linear map from the algebra to $\mathbb{R}^n$ which, in turn, induces certain structures in the algebra. In particular, values of Lie brackets in the initial or end point of vector fields defining a system correspond to elements of the free Lie algebra $\mathcal{L}$ (in $\mathcal{F}$ or $\mathcal{A}$). The central objects of the study are a core Lie subalgebra and a one-side ideal generated by the core Lie subalgebra, which are introduced in the work. The core Lie subalgebra is defined by linear dependences of Lie brackets of vector fields in the point (initial or end), hence, it is a coordinate-free object. For a completely nonholonomic system in $\mathbb{R}^n$, the core Lie subalgebra is a graded Lie subalgebra in $\mathcal{L}$ of codimension n, and any graded Lie subalgebra of codimension n is a core Lie subalgebra of some system.

In the thesis an abstract problem is considered, to which both mentioned cases are reduced. Namely, in a free graded associative algebra we consider a formal series with coefficients from $\mathbb{R}^n$ which satisfies certain properties (they correspond to the realizability and the complete non-holonomy of a system); transformations of such series correspond to changes of variables in systems. For such series, a core Lie subalgebra and one-sided ideal arise as well. The problem is to build a homogeneous series which also satisfies mentioned conditions and (up to a transformation) is a principal part of the initial series. This series can be regarded as an abstract analogue of a homogeneous approximation of a control system.

It is proved in the thesis that core Lie subalgebras are responsible for the homogeneous approximation: two series have the same homogeneous approximation if and only if their core Lie subalgebras coincide. In the work a coordinate-free definition of a homogeneous approximation is given and a complete classification of homogeneous approximations is obtained. The above results are based on a generalization of R. Ree's theorem on a characterization of Lie elements. Namely, it is proved that a basis of the orthogonal complement of the one-sided ideal generated by the core Lie subalgebra is formed by monomials with respect to the shuffle product of orthoprojections of n arbitrary homogeneous elements from the Lie algebra whose linear span complements the core Lie subalgebra.

These results are applied to a description and construction of homogeneous approximations of nonlinear systems which are linear or affine on control. Methods are proposed for constructing of homogeneous approximating systems and privileged coordinates (that is, coordinates in which a homogeneous approximation approximates the end-point map or the initial-point map of the initial system).

In particular, it is shown that the series representation of a homogeneous approximation can be found without finding privileged coordinates, by the form of the core Lie subalgebra only, using an orthoprojection: one should take n arbitrary homogeneous elements from the Lie algebra whose linear span complements the core Lie subalgebra and find their orthoprojections onto the orthogonal complement to the one-sided ideal generated by the core Lie subalgebra. Moreover, representations of all possible homogeneous approximations are homogeneous polynomials with respect to shuffle product of these orthoprojections. This means that the homogeneous approximation is unique up to polynomial homogeneous change of variables. The developed approach allows solving several close problems: to find complete description of all privileged coordinates, to develop methods of construction of approximating systems, to study properties of homogeneous regular systems etc. So, criteria of realizability of a series of nonlinear power moments as an autonomous or non-autonomous control-affine system are obtained and a method of reconstruction of such a system by a given realizable series is proposed.

In the thesis, properties of core Lie subalgebras for regular and homogeneous systems are studied. In particular, it is shown that in the case of regular system (such that its growth vector is constant in a neighborhood) the core Lie subalgebra is a Lie ideal, but it can depend on a point. It is shown that for homogeneous systems, regularity is equivalent to the fact that the core Lie subalgebra is a Lie ideal. Besides, for regular systems it is shown how to fi- nd coefficients of the series of iterated integrals in a neighborhood by use of re-expansion of the series at the origin.

Changes of a control in the system, unlike changes of coordinates, change the core Lie subalgebra but keep a growth vector of the system. In the thesis, for linear-control systems a description of all core Lie subalgebras (or, what is the same, homogeneous approximations) with a given growth vector is obtained. Besides, a description of all possible growth vectors is obtained. These results are based on a description of the core Lie subalgebra as a free algebra, that is, on a description of its free generating basis. In the thesis, definitions of A-normality and A-simplicity of a growth vector are proposed. Namely, a growth vector is A-normal if the set of all core Lie subalgebras with this growth vector is broken into finite number of equivalence classes: core Lie subalgebras from the same equivalence class are reduced to one another by a change of a control; a growth vector is A-simple if the set of all core Lie subalgebras of systems close to those with this growth vector is broken into finite number of equivalence classes. In the work a description of all A-normal and A-simple growth vectors for systems with two controls are given and a method of constructing normal forms of systems is described.

One of the original ideas of a development of the series method was the study of the time-optimal control problem to the equilibrium for affine-control systems. The first step is reducing such a problem to a nonlinear Markov moment min-problem: constraints on control and the optimality condition are added to a corresponding series of nonlinear power moments. Two systems are locally equivalent in the sense of time optimality if (after a change of variables in one of them) their solutions, that is, the optimal time and the optimal control, become asymptotically equivalent as functions of an initial point in a neighborhood of the equilibrium. In the thesis, a connection of a homogeneous approximation and an approximation in the sense of time optimality is studied. Namely, conditions are given under which a homogeneous approximation is locally equivalent to the initial system in the sense of time optimality. This allows obtaining optimal or almost optimal controls for a nonlinear system by solving much more simple time-optimal control problem for its homogeneous approximation. A converse connection also is studied: conditions are given under which systems which are locally equivalent in the sense of time optimality have the same homogeneous approximation. The connection between approximation in the sense of time optimality and homogeneous approximation is studied also for linear-control systems.

Besides, in the thesis some problems of mappability in the class C^1 are considered. Namely, for nonlinear control systems from the class C^1 with multi-dimensional control a criterion of feedback linearizability is obtained, and for systems with one-dimensional control criteria of mappability onto systems of a special form — feedforward systems are obtained. Also for systems of one special class (dual to linear systems) the set of all possible time optimal controls is completely described. Homogeneous systems from this class are homogeneous approximations; hence, they can be used for construction of optimal or almost optimal controls for all systems with such a homogeneous approximation. For one three-dimensional nonlinear system, a complete solution of the time optimal control problem is obtained.

In general, in the thesis an approach is developed which attracts a method of series and free algebras for analysis of such problems of a nonlinear control theory as the time optimal control problem, description and classification of homogeneous approximations, realizability and reconstruction of systems, normalization etc.

All basic results are given with complete proofs. Obtained results are of theoretical character. Proposed methods can be used for studying and solving various problems of optimization and optimal control.

Key words: nonlinear control systems, time-optimal control problem, Markov moment min-problem, homogeneous approximation, series of iterated integrals, series of nonlinear power moments, free associative algebra, free Lie algebra, dual basis, realizability problem, growth vector, linearizability in the class C^1.

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Наукові праці, в яких опубліковані основні наукові результати дисертації

Публікації у фахових виданнях України:

1. Скляр, Г.М., Ігнатович, С.Ю.: Про класифікацію множин керованості нелінійних систем. Доповіді НАН України, сер. «Матем., прир. та техн. науки» № 6, 24–28 (2001)

2. Игнатович, С.Ю., Бархаев, П.Ю.: Каноническая форма нелинейной управляемой системы и аппроксимирующие градуировки. Вісник Харківського національного університету, сер. «Матем., прикл. матем. і механіка» **602**, 68–76 (2003)

3. Скляр, Г.М., Ігнатович, С.Ю., Бархаєв, П.Ю.: Про асимптотичну класифікацію нелінійних керованих систем в околі точки спокою. Доповіді НАН України, сер. «Матем., прир. та техн. науки» № 12, 28–34 (2004)

4. Игнатович, С.Ю.: Восстановление управляемой системы, являющейся реализацией ряда нелинейных степенных моментов. Вісник Харківського національного університету, сер. «Матем., прикл. матем. і механіка» **645**, 41–52 (2004)

5. Игнатович, С.Ю.: О связи аппроксимации нелинейных систем в смысле быстродействия и их алгебраической аппроксимации. Матем. физика, анализ, геометрия **12**(2), 158–172 (2005)

6. Игнатович, С.Ю.: Об отображаемости нелинейных систем на feedforward системы в классе C^1. Вісник Харківського національного університету, сер. «Матем., прикл. матем. і механіка» **749**, 65–79 (2006)

7. Sklyar, G.M., Ignatovich, S.Yu.: Development of the Markov moment problem approach in the optimal control theory. Methods of Functional Analysis and Topology **13**(4), 386–400 (2007)

8. Ignatovich, S.Yu.: Explicit solution of the time-optimal control problem for one nonlinear three-dimensional system. Вісник Харківського національ-

ного університету ім. В. Н. Каразіна, сер. «Матем., прикл. матем. і механіка» **83**, 21–46 (2016)

9. Ignatovich, S.Yu.: Approximation of autonomous affine control systems in the sense of time optimality and algebraic approximation. Вісник Харківського національного університету ім. В. Н. Каразіна, сер. «Матем., прикл. матем. і механіка» **84**, 9–21 (2016)

Публікації у виданнях, які входять до міжнародних наукометричних баз:

10. Sklyar, G.M., Ignatovich, S.Yu.: Representations of control systems in the Fliess algebra and in the algebra of nonlinear power moments. Syst. Control Lett. **47**, 227–235 (2002) (*Scopus, Web of Science*)

11. Sklyar, G.M., Ignatovich, S.Yu.: Approximation of time-optimal control problems via nonlinear power moment min-problems. SIAM J. Control Optim. **42**, 1325–1346 (2003) (*Scopus, Web of Science*)

12. Sklyar, G.M., Ignatovich, S.Yu.: Determining of various asymptotics of solutions of nonlinear time optimal problems via right ideals in the moment algebra (Problem 3.8). In: Blondel, V.D., Megretski, A. (eds.) Unsolved Problems in Mathematical Systems and Control Theory, pp. 117–121. Princeton University Press, Princeton (2004) (*Scopus*)

13. Sklyar, G.M., Sklyar, K.V., Ignatovich, S.Yu.: On the extension of the Korobov's class of linearizable triangular systems by nonlinear control systems of the class C^1. Syst. Control Lett. **54**, 1097–1108 (2005) (*Scopus, Web of Science*)

14. Sklyar, G.M., Ignatovich, S.Yu.: Description of all privileged coordinates in the homogeneous approximation problem for nonlinear control systems. C. R. Math. Acad. Sci. Paris **344**, 109–114 (2007) (*Scopus, Web of Science*)

15. Sklyar, G.M., Ignatovich, S.Yu.: Fliess series, a generalization of the Ree's theorem, and an algebraic approach to a homogeneous approximation problem. Int. J. Control **81**, 369–378 (2008) (*Scopus, Web of Science*)

16. Ignatovich, S.Yu.: Realizable growth vectors of affine control systems.

J. Dyn. Control Syst. **15**, 557–585 (2009) (*Scopus, Web of Science*)

17. Ignatovich, S.Yu.: Normalization of homogeneous approximations of symmetric affine control systems with two controls. J. Dyn. Control Syst. **17**, 1–48 (2011) (*Scopus, Web of Science*)

18. Sklyar, G.M., Ignatovich, S.Yu.: Free algebras and noncommutative power series in the analysis of nonlinear control systems: an application to approximation problems. Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.) **504**, 1-88 (2014) (*Scopus, Web of Science*)

19. Sklyar, G.M., Ignatovich, S.Yu., Shugaryov, S.E.: Time-optimal control problem for a special class of control systems: optimal controls and approximation in the sense of time optimality. J. Optim. Theory Appl. **165**, 62–77 (2015) (*Scopus, Web of Science*)

20. Sklyar, K.V., Ignatovich, S.Yu.: Linearizability of systems of the class C^1 with multi-dimensional control. Syst. Control Lett. **94**, 92–96 (2016) (*Scopus, Web of Science*)

Публікації у спеціалізованих зарубіжних виданнях:

21. Sklyar, G.M., Ignatovich, S.Yu., Barkhaev, P.Yu.: Algebraic classification of nonlinear steering problems with constraints on control. In: Oyibo, G. (ed.) Advances in Mathematics Research, vol. 6, pp. 37–96. Nova Science Publishers, Inc, New York (2005)

Публікації, які засвідчують апробацію дисертації

Публікації у матеріалах міжнародних наукових конференцій, які входять до міжнародних наукометричних баз:

22. Sklyar, G.M., Ignatovich, S.Yu.: Series method in nonlinear time optimality. In: Proceedings of the 50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference (CDC-ECC), pp. 3836–3841, Orlando, FL, USA, 12-15 December 2011 (*Scopus, Web Of Science*)

23. Sklyar, K.V., Ignatovich, S.Yu., Sklyar, G.M.: Verification of feedback linearizability conditions for control systems of the class C^1. In: Proceedings of

the 25th Mediterranean Conference on Control and Automation (MED), pp. 163–168, Valetta, Malta, 3-6 July 2017 (*Scopus*)

Публікації у матеріалах міжнародних наукових конференцій:

24. Sklyar, G.M., Ignatovich, S.Yu.: A development of the moment method and nonlinear approximation of time-optimal control problem. In: Book of abstracts of International Akhiezer Centenary Conference. Theory of functions and Mathematical Physics, pp. 89–90, Kharkiv, Ukraine, 13-17 August, 2001

25. Скляр, Г.М., Игнатович, С.Ю., Бархаев, П.Ю. Развитие метода моментов в нелинейной задаче быстродействия. In: Международная конференция «Обратные задачи и нелинейные уравнения», тезисы докладов, сс. 81–83, Харків, Україна, 12-16 серпня, 2002

26. Sklyar, G.M., Ignatovich, S.Yu., Barkhaev, P.Yu.: Canonical form of nonlinear control system with different constraints. In: Book of abstracts of the First Karazin Scientific Readings dedicated to the bicentenary of the Karazin Karkiv National University. Mathematical Symposium, pp. 21–22, Kharkiv, Ukraine, 14-16 June, 2004

27. Sklyar, G.M., Ignatovich, S.Yu., Barkhaev, P.Yu.: Classification of nonlinear steering problems with different constraints on control. In: Тезисы докладов 9-й Международной конференции «Устойчивость, управление и динамика твердого тела», сс. 66–67, Донецьк, Україна, 1-6 вересня, 2005

28. Sklyar, G.M., Ignatovich, S.Yu.: Development of the Markov moment problem in the optimal control. In: Book of abstracts of the International Conference «Modern Analysis and Applications» dedicated to the centenary of Mark Krein, pp. 127–128, Odessa, Ukraine, 9-14 April 2007

29. Sklyar, G.M., Ignatovich, S.Yu.: Development of the momrnt approach to the time-optimal control problem for nonlinear systems. In: International conference «Differential Equations and Topology», dedicated to the Centennial Anniversary of L. S. Pontryagin. Book of Abstracts, pp. 292–293, Moscow, Russia, 17-22 June 2008

30. Игнатович, С.Ю.: Свободные алгебры в задаче однородной аппроксимации: как они возникают и как их можно использовать. In: Материалы Школы-конференции «Геометрическая теория управления и анализ на метрических структурах», сс. 16–19, Республіка Алтай, Росія, 25–30 липня, 2014

31. Ignatovich, S.Yu.: Normalization of homogeneous approximations under feedbacks. In: Book of abstracts of the International Conference «Differential Equations and Control Theory» dedicated to the 75-th anniversary of professor Korobov V.I., p. 11, Kharkiv, Ukraine, 26-28 September 2016

32. Sklyar, G.M., Ignatovich, S.Yu.: Free algebras and noncommutative power series in the analysis of nonlinear control systems. In: 2-nd International Conference «Differential Equations and Control Theory». Book of Abstracts, p. 16, Świnoujście, Poland, 27-30 September 2017

ЗМІСТ

ВСТУП

Обґрунтування вибору теми дослідження. У математичній теорії керування, з самого її виникнення в середині XX століття, активно залучалися ідеї і методи з найрізноманітніших розділів математики: аналізу, геометрії, алгебри, теорії динамічних систем, варіаційного числення, комбінаторики тощо. Але якщо для лінійних задач стандартними стали методи лінійної алгебри і функціонального аналізу, то у нелінійній теорії загальновживаними виявилися геометричні методи [4, 57, 87, 93, 117, 149]. Ймовірно, це пов'язано з великою роллю механічних задач у теорії керування і, як наслідок, зі впливом геометричних методів механіки. Проте виявляється, що аналітичні і алгебраїчні підходи у багатьох випадках є не менш ефективними і навіть дозволяють отримати точніші результати. Звичайно, маються на увазі методи не лінійної, а загальної алгебри, які дозволяють до лінійних операцій додати суттєво нелінійні.

У 1987 р. В. І. Коробов і Г. М. Скляр запропонували нову постановку — проблему моментів Маркова на мінімально можливому відрізку (min-проблему моментів Маркова), яка еквівалентна лінійній задачі швидкодії [23, 25, 26, 27]. Вони отримали аналітичне розв'язання степеневої min-проблеми моментів Маркова і довели, що за деяких умов степенева min-проблема наближає загальну min-проблему моментів Маркова. У роботах Г. М. Скляра і С. Ю. Ігнатович був описаний клас нелінійних систем, афінних за керуванням, які наближаються лінійними степеневими min-проблемами моментів в околі точки спокою [34, 126]. Виявилося, що для опису таких систем можна використовувати ряди *нелінійних степеневих моментів*, причому самі нелінійні степеневі моменти утворюють вільну асоціативну алгебру. Виникла гіпотеза, що в загальному випадку систем, афінних за керуванням, наближення (нелінійні) можна досліджувати в термінах цієї алгебри. Окремим питанням було встановлення зв'язку отриманих результатів з відомими результатами щодо однорідної апроксимації для систем, лінійних за керуванням [5, 45, 50, 53, 62, 79].

Використання вільних алгебр для дослідження нелінійних керованих систем веде початок з 1970-80-х років, коли М. Фліс застосував [67, 68, 70] ряди К. Т. Чена [59] для опису траєкторій нелінійних систем, лінійних і афінних за керуванням. Коротко опишемо основну ідею. Якщо розвинути відображення «вхід-вихід» для нелінійної керованої системи, лінійної за керуванням, у ряд *ітерованих інтегралів*, отримуємо можливість вивчати перетворення таких рядів замість перетворення систем. М. Фліс показав, що ітеровані інтеграли є лінійно незалежними функціоналами і їх можна розглядати як елементи вільної асоціативної алгебри. Тоді множення інтегралів відповідає тасуючому добутку в цій алгебрі, і це можна використовувати для побудови відображень рядів. Такий підхід дозволяє долучити до аналізу таких систем добре розвинуту алгебраїчну техніку, перш за все, методи вільних алгебр [110, 120]. Алгебри ітерованих інтегралів активно застосовували П. Кроуч і Ф. Ламнабі-Лагаррік [63], А. О. Аграчов і Р. В. Гамкрелідзе [44], М. Кавскі і Г. Сусман [100], М. Кавскі [18, 96, 97]; останнім часом з'явилися інтерпретації в термінах алгебри Хопфа [73, 75, 78, 98]. На цьому шляху були, зокрема, отримані умови реалізовності рядів у вигляді систем [69, 71], досліджені задачі керованості і оптимального керування [99] та інші, але можливості такого підходу не були використані повною мірою.

Отже, важливою і цікавою була задача систематично розвинути ідеї і методи рядів і вільних алгебр до вивчення нелінійних керованих систем, лінійних або афінних за керуванням. Виявилося, що такий підхід дозволяє отримати вичерпні відповіді на низку важливих питань теорії керування. Зокрема, вдається отримати повну класифікацію однорідних апроксимацій і дослідити зв'язок однорідних апроксимацій систем і апроксимацій у сенсі швидкодії.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконана на кафедрі диференціальних рівнянь та керування механіко-математичного факультету і на кафедрі прикладної математики факультету математики і інформатики Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна в рамках держбюджетних науково-дослідних робіт «Аналітичні методи в теорії диференціальних рівнянь та теорії керування» (0100U003350), «Аналітичні та алгебраїчні методи в теорії диференціальних рівнянь та теорії керування» (0103U004226), «Асимптотичні та алгебраїчні методи в теорії диференціальних рівнянь та теорії керування» (0106U001561), «Аналітичні методи в якісній теорії диференціальних рівнянь та теорії керування» (0109U001456), «Аналітичні методи розв'язання якісних проблем теорії керування і теорії функціонально-диференціальних рівнянь» (0111U010364), «Дослідження якісної поведінки динамічних систем різної природи» (0116U000823).

Мета і завдання дослідження. Основною метою дослідження є створення єдиного підходу до вивчення нелінійних керованих систем, який є розвитком моментного підходу для лінійних систем. Цей підхід спирається на метод рядів і залучає методи вільних алгебр до аналізу нелінійних керованих систем, зокрема, для розв'язання таких задач як побудова і класифікація однорідних апроксимацій лінійних і афінних за керуванням систем, встановлення зв'язку однорідної апроксимації і апроксимації у сенсі швидкодії тощо.

Основними завданнями дослідження є: введення і вивчення підкласу рядів в абстрактній асоціативній алгебрі зі сталими векторними коефіцієнтами, які відповідають рядам ітерованих інтегралів і нелінійних степеневих моментів, вивчення перетворень і однорідних апроксимацій таких рядів, отримання відповідних результатів щодо однорідних апроксимацій нелінійних керованих систем, дослідження зв'язку однорідної апроксимації і апроксимації в сенсі швидкодії, а також дослідження суміжних задач реалізовності, класифікації векторів зросту, відображуваності, швидкодії.

Об'єктом дослідження є нелінійні керовані системи, ряди ітерованих інтегралів і нелінійних степеневих моментів, вільні градуйовані алгебри, що їм відповідають, однорідні апроксимації, задача швидкодії.

Предметом дослідження є структури, що індукує в алгебрах ітерованих інтегралів або нелінійних степеневих моментів керована система, класифікація, методи побудови і властивості однорідних апроксимацій, зв'язок однорідної апроксимації і апроксимації у сенсі швидкодії, умови відображуваності систем, опис оптимальних керувань.

Методи дослідження. У роботі використовуються методи математичного і функціонального аналізу, теорії керування, алгебри.

Наукова новизна отриманих результатів. У дисертаційній роботі отримано такі нові наукові результати:

— запропонований підхід до аналізу локальної поведінки нелінійних систем, лінійних і афінних за керуванням, оснований на вивченні індукованих ними структур в абстрактній вільній асоціативній алгебрі;

— уперше отримано повну класифікацію однорідних апроксимацій систем, лінійних і афінних за керуванням, на основі введених понять ядерної підалгебри Лі і одностороннього ідеалу, що породжені системою; запропоновано методи побудови однорідних апроксимацій;

— уперше отримано повний опис привілейованих координат, запропоновано методи їх побудови;

— вивчений зв'язок між алгеброю ітерованих інтегралів і алгеброю нелінійних степеневих моментів; отримано умови реалізовності ряду нелінійних степеневих моментів у вигляді керованої системи і запропоновано методи побудови відповідних систем;

— уперше встановлено зв'язок однорідної апроксимації і апроксимації у сенсі швидкодії;

— запропоновано метод перерозкладання ряду ітерованих інтегралів в околі для однорідних і регулярних систем;

— уперше отримано повний опис векторів зросту систем, лінійних за керуванням; отримано опис перетворення ядерних підалгебр Лі при заміні керування; введені поняття A-нормальності і A-простоти вектору зросту і отримано повний опис A-нормальних і A-простих векторів зросту для систем з двовимірним керуванням;

— узагальнено критерій лінеаризовності за зворотним зв'язком у класі

C^1 на випадок багатовимірного керування; уперше отримано умови відображуваності на системи з прямим зв'язком у класі C^1;
— уперше отримано повний опис оптимальних за швидкодією керувань для класу систем, спряжених до лінійних.

Практичне значення отриманих результатів. Робота має теоретичний характер. Отримані результати можуть бути застосовані для опису локальної поведінки керованих систем, зокрема, для побудови оптимальних або близьких до оптимальних за швидкодією керувань для нелінійних систем.

Особистий внесок здобувача. Усі результати, що виносяться на захист, одержано автором особисто. З результатів праць, виконаних у співавторстві, на захист виносяться лише положення, одержані автором дисертації самостійно.

Ідеї основних підходів і розроблених конструкцій, які опубліковані в сумісних з науковим консультантом статтях, належать співавторам у рівній мірі. Дисертанту належить суттєвий внесок у доведення основних результатів.

Внесок у статті, опубліковані з іншими співавторами: в роботі [17] дисертанту належать теореми 1 і 3, у роботі [37] — теорема 2, у роботі [140] — пункт 2 (крім теореми 2.1) і пункти 3.1, 3.4, 3.5, 3.8. У роботі [143] дисертанту належить суттєвий внесок у доведення теореми 3. У роботі [144] дисертанту належить суттєвий внесок у доведення теорем 1 і 2; доведення відповідних результатів, сформульованих у пункті 7.1.1 дисертації, винесене в додаток В. У роботі [142] дисертанту належить ідея доведення теореми 2.2 і лем 2.6, 2.8.

Апробація матеріалів дисертації. Основні результати дисертації доповідалися і обговорювалися на таких наукових конференціях і семінарах:

міжнародна конференція «Theory of functions and Mathematical Physics», присвячена 100-річчю з дня народження Н. І. Ахієзера, Харків, Україна, 13-17 серпня 2001 р.;

міжнародна конференція «Обратные задачи и нелинейные уравнения», Харків, Україна, 12-16 серпня 2002 р.;

наукова конференція «First Karazin Scientific Readings dedicated to the bicentenary of the Karazin Karkiv National University. Mathematical Symposium», Харків, Україна, 14-16 червня 2004 р.;

семінар відділу «Functional Analysis and Applications» (керівник А. О. Аграчов), SISSA, Трієст, Італія, 2005 р. і 2009 р.;

міжнародна конференція «Устойчивость, управление и динамика твердого тела», Донецьк, Україна, 2005 р.;

міжнародний семінар «Geometry of vector distributions, differential equations, and variational problems», SISSA, Трієст, Італія, 2006 р.;

міжнародна конференція «Современный анализ и приложения», присвячена 100-річчю з дня народження М. Г. Крейна, Одеса, Україна, 2007 р.;

міжнародна конференція «Дифференциальные уравнения и топология», присвячена 100-річчю з дня народження Л. С. Понтрягіна, Москва, Росія, 2008 р.;

міжнародний семінар «Analysis and Applications», University of Szczecin, Щецин, Польща, 2009 р.;

семінар міжнародної програми «Research-in-Teams program of the Trimester Control and Combinatorics», Мадрид, Іспанія, 2010 р.;

міжнародна конференція «50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference (CDC-ECC)», Орландо, США, 2011 р.;

міжнародний семінар «Analysis, Operator Theory, and Mathematical Physics», Ікстапа, Мексика, 2012 р.;

семінар відділу диференціальних рівнянь Математичного інституту імені В. А. Стеклова (керівник Ілляшенко Ю. С.), Москва, Росія, 2014 р.;

школа-конференція «Геометрическая теория управления и анализ на метрических структурах», Республіка Алтай, Росія, 2014 р.;

міжнародний семінар «Equivalence, Invariants, and Symmetries of Vector Distributions and Related Structures: from Cartan to Tanaka and beyond», Henri Poincaré Institute, Париж, Франція, 2014 р.;

міжнародна конференція «Differential Equations and Control Theory», присвячена 75-річчю професора В. І. Коробова, Харків, Україна, 2016 р.;

міжнародна конференція «25th Mediterranean Conference on Control and Automation (MED)», Валлетта, Мальта, 2017 р.;

міжнародна конференція «Differential Equations and Control Theory», University of Szczecin, Щецин, Польща, 2017 р.;

семінар кафедри диференціальних рівнянь та керування і кафедри прикладної математики, Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна (керівник В. І. Коробов), 2000-2017 р.р.

Публікації. Результати дисертації, винесені на захист, опубліковано у 21 науковій статті [13, 14, 15, 17, 35, 37, 82, 83, 84, 85, 128, 129, 130, 131, 132, 134, 137, 140, 142, 143, 144] і 11 тезах доповідей на наукових конференціях [16, 36, 86, 127, 133, 135, 136, 138, 139, 141, 145].

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається зі вступу, семи розділів, висновків, списку використаних джерел і трьох додатків. Обсяг загального тексту дисертації складає 356 сторінок, з них основного тексту 298 сторінок. Робота ілюстрована 5 рисунками. Список використаних джерел містить 162 найменування.

Подяка. Автор щиро вдячна науковому консультанту професору Григорію Михайловичу Скляру за увагу до роботи, плідні обговорення і постійну підтримку.

РОЗДІЛ 1
ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ І ПОПЕРЕДНІ РЕЗУЛЬТАТИ

У цьому розділі наводиться короткий огляд постановок задач, які мотивують дослідження даної дисертації. Крім того, наводяться означення і формулювання відомих результатів, які використовуються у подальших розділах.

1.1 Задача швидкодії і min-проблема моментів Маркова

1.1.1 Лінійна задача швидкодії і min-проблема моментів Маркова

Нагадаємо деякі відомі факти і наведемо попередні міркування на прикладі лінійних керованих систем. Розглянемо задачу потрапляння лінійної автономної системи з одновимірним керуванням

$$\dot{x} = Ax + bu, \tag{1.1}$$

з довільної початкової точки $x(0) = x^0$ до фіксованої кінцевої точки $x(\theta) = 0$ (тут A — стала $n \times n$-матриця, b — сталий n-вимірний вектор). Ця задача полягає в тому, щоб знайти керування $u = u(t) : [0, \theta] \to \mathbb{R}$, при якому розв'язок $x(t)$ задачі Коші

$$\dot{x} = Ax + bu(t), \quad x(0) = x^0 \tag{1.2}$$

проходить через початок координат у момент часу $t = \theta$, тобто $x(\theta) = 0$. Далі вважатимемо, що система (1.1) є повністю керованою (тобто з будь-якої початкової точки можна потрапити до будь-якої кінцевої); як добре відомо [94], це має місце тоді і тільки тоді, коли ранг матриці Калмана $K = (b, Ab, A^2b, \ldots, A^{n-1}b)$ дорівнює n.

Вимоги щодо керування як функції від t можуть бути різними; у даній дисертації, як правило, вважатимемо, що керування належить простору

$L_\infty[0,\theta]$. Умови потрапляння до початку координат можна отримати, якщо виписати формулу Коші для траєкторії:

$$x(t) = e^{At}x^0 + e^{At}\int_0^t e^{-A\tau}u(\tau)d\tau,$$

звідки, враховуючи умову $x(\theta) = 0$, отримуємо

$$x^0 = -\int_0^\theta e^{-A\tau}bu(\tau)d\tau. \tag{1.3}$$

Позначимо $g(\tau) = -e^{-A\tau}b$, тоді умови потрапляння записуються як *проблема моментів*:

$$x_j^0 = \int_0^\theta g_j(\tau)u(\tau)d\tau, \quad j = 1,\ldots,n. \tag{1.4}$$

Додаючи до моментних рівностей (1.4) обмеження на керування $|u(\tau)| \le 1$, $\tau \in [0,\theta]$, отримаємо $(-1,1)$-*проблему моментів Маркова* [113, 7, 31]:

$$x_j^0 = \int_0^\theta g_j(\tau)u(\tau)d\tau,\ j = 1,\ldots,n, \quad |u(\tau)| \le 1,\ \tau \in [0,\theta].$$

Отже, задача потрапляння до нуля з обмеженим керуванням зводиться до проблеми моментів Маркова.

Додамо ще умову оптимальності, а саме, розглянемо *задачу швидкодії*

$$\dot{x} = Ax + bu,\ x(0) = x^0,\ x(\theta) = 0,\ |u(t)| \le 1, t \in [0,\theta],\ \theta \to \min. \tag{1.5}$$

В. І. Коробов і Г. М. Скляр [23, 26, 27] запропонували зведення задачі швидкодії до нової задачі з теорії моментів — *проблеми моментів Маркова на мінімально можливому відрізку* (або, коротше, *min-проблеми моментів Маркова*)

$$x_j^0 = \int_0^\theta g_j(\tau)u(\tau)d\tau,\ j = 1,\ldots,n, \tag{1.6}$$

$$|u(\tau)| \le 1,\ \tau \in [0,\theta],\ \theta \to \min. \tag{1.7}$$

Детальніше, min-проблема моментів Маркова полягає в тому, щоб для заданого вектора x^0 знайти *найменше можливе* значення $\theta = \theta_{x^0} > 0$, для якого існує функція $u(t) = u_{x^0}(t)$, що задовольняє обмеження $|u_{x^0}(t)| \le 1$,

$t \in [0, \theta_{x^0}]$, і моментні рівності (1.6). Розв'язок min-проблеми моментів — пара (θ_{x^0}, u_{x^0}) — це оптимальний час та оптимальне керування у відповідній задачі швидкодії.

З принципу максимуму Понтрягіна [9, 32] випливає, що оптимальне за швидкодією керування у задачі (1.5) є кусково-сталим і набуває значень ± 1; більш того, воно визначене однозначно. Зазначимо, що того самого висновку можна дійти за допомогою методів проблеми моментів [31].

У випадку *канонічної системи*

$$\dot{x}_1 = u, \ \dot{x}_2 = x_1, \ \ldots, \ \dot{x}_n = x_{n-1}, \tag{1.8}$$

отримуємо *степеневу* min-проблему моментів Маркова

$$x_j^0 = \tfrac{(-1)^j}{(j-1)!} \int_0^\theta \tau^{j-1} u(\tau) d\tau, j = 1, \ldots, n, \ |u(\tau)| \le 1, \tau \in [0, \theta], \ \theta \to \min. \tag{1.9}$$

Для явного знаходження часу швидкодії θ і моментів перемикання оптимального керування $0 < t_1 < \ldots < t_p < \theta$ (де p — кількість перемикань, $0 \le p \le n-1$) отримуємо низку систем поліноміальних рівнянь

$$(-1)^{p+1} \frac{2t_1^j}{j} + (-1)^p \frac{2t_2^j}{j} + \cdots + \frac{2t_p^j}{j} - \frac{\theta^j}{j} = \pm(-1)^j (j-1)! x_j^0, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{1.10}$$

де верхня (нижня) позначка у правій частині відповідає керуванню, що дорівнює -1 $(+1)$ на останній ділянці. Добре відомо, що при $n = 2$ така система припускає явний розв'язок [32], але вже для $n \ge 3$ задача виявляється дуже складною.

Вперше аналітичне розв'язання степеневої min-проблеми моментів Маркова довільного порядку було запропоновано в роботах В. І. Коробова і Г. М. Скляра [23, 24], а далі розвинуто у кількох напрямках: для тригонометричної проблеми моментів [25], для степеневої проблеми моментів з пропусками [101], [28], з парними пропусками [102] та ін.; див. також [103].

Зазначимо, що перше застосування проблеми моментів до задач оптимального керування належить Н. Н. Красовському [29, 30], який запропонував зведення одної лінійної задачі оптимального керування до абстрактної L-проблеми моментів [7]. На можливість застосування проблеми моментів Маркова у задачах керування вказано у книзі М. Г. Крейна і А. А. Нудельмана [31]. Степенева проблема моментів Маркова може бути застосована для дослідження керованості нескінченновимірних коливальних систем [124].

У загальному випадку, якщо у правій частині рівності (1.3) розвинути матрицю $e^{-A\tau}$ в ряд, отримуємо

$$x^0 = \sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{(-1)^{k+1}}{k!} A^k b \int_0^\theta \tau^k u(\tau) d\tau = \sum_{k=0}^{\infty} v_k \int_0^\theta \tau^k u(\tau) d\tau, \tag{1.11}$$

де $v_k = \frac{(-1)^{k+1}}{k!} A^k b$ — сталі векторні коефіцієнти. Ці коефіцієнти не є довільними: вони зв'язані очевидними лінійними залежностями. За заданими коефіцієнтами v_k пара A, b відновлюється однозначно. Очевидно, за умови повної керованості перші n векторів $v_0, \ldots, v_{n-1}$ є лінійно незалежними.

Зауважимо, що

$$\int_0^\theta \tau^k u(\tau) d\tau = \theta^{k+1} \int_0^1 t^k \widehat{u}(t) dt, \text{ де } \widehat{u}(t) = u(\theta t), \ t \in [0,1],$$

причому $\widehat{u}(t)$ пробігає множину $B^1 = \{u \in L_\infty[0,1] : \|u\| \leq 1\}$ тоді і тільки тоді, коли $u(\tau)$ пробігає множину $B^\theta = \{u \in L_\infty[0,\theta] : \|u\| \leq 1\}$. Отже, степеневі моменти мають природний порядок мализни при малих $\theta > 0$, якщо розглядати їх як функціонали на одиничній кулі B^θ простору $L_\infty[0,\theta]$. А саме, можна вважати, що $\int_0^\theta \tau^k u(\tau) d\tau \sim \theta^{k+1}$ при $\theta \to 0$.

Можна показати, що степеневі моменти $\int_0^\theta \tau^k u(\tau) d\tau$ *як лінійні функціонали* від $u(\tau) \in B^\theta$ (при фіксованому $\theta > 0$) лінійно незалежні, а ряд (1.11) є розвиненням за базисом з цих функціоналів лінійного оператора, який переводить керування $u(\tau)$ до початкової точки x^0.

Розглянемо тепер лінійні заміни змінних у системі (1.1) і зауважимо, що вони відповідають лінійним перетворенням рядів. Так, заміна $y = Qx$ зводить систему (1.1) до вигляду

$$\dot{y} = QAQ^{-1} y + Qbu = \widetilde{A} y + \widetilde{b} u,$$

а ряд (1.11) до вигляду

$$y^0 = Qx^0 = \sum_{k=0}^{\infty} Qv_k \int_0^{\theta} \tau^k u(\tau)d\tau = \sum_{k=0}^{\infty} \widetilde{v}_k \int_0^{\theta} \tau^k u(\tau)d\tau.$$

Відзначимо, що для побудування *системи* у нових координатах треба шукати обернену матрицю Q^{-1}, а для знаходження *ряду* — не треба: коефіцієнти $\widetilde{v}_k$ після заміни $y = Qx$ знаходяться за формулою $\widetilde{v}_k = Qv_k$.

Очевидно, що для повністю керованої системи існує така заміна змінних, яка зводить ряд (1.11) до вигляду

$$y_j^0 = (Qx^0)_j = \int_0^{\theta} \tau^{j-1} u(\tau)d\tau + \rho_j(\theta, u), \ \ j = 1, \dots, n, \tag{1.12}$$

де $\rho_j(\theta, u)$ включає тільки моменти порядку мализни вище, ніж j, тобто $\int_0^{\theta} \tau^k u(\tau)d\tau$ при $k \geq j$. Як приклад, для такої заміни можна взяти зворотну до матриці Калмана, $Q = K^{-1}$. Тобто відображення

$$y_j^0 = \int_0^{\theta} \tau^{j-1} u(\tau)d\tau, \ \ j = 1, \dots, n,$$

(яке переводить керування $u(\tau)$ до точки y^0) *наближає* відображення (1.12) при малих θ і при $u \in B^{\theta}$. Ураховуючи (1.9), можемо інтерпретувати це таким чином: кожна повністю керована система вигляду (1.1) наближається канонічною системою (1.8) (з точністю до заміни змінних).

Якщо вихідна система неавтономна,

$$\dot{x} = A(t)x + b(t)u, \tag{1.13}$$

де $A(t)$ і $b(t)$ розкладаються в ряди Тейлора в околі точки $t = 0$, то, міркуючи аналогічно, отримуємо

$$x^0 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \Delta^k b(0) \int_0^{\theta} \tau^k u(\tau)d\tau = \sum_{k=0}^{\infty} v_k \int_0^{\theta} \tau^k u(\tau)d\tau, \tag{1.14}$$

де $\Delta = -A(t) + d/dt$. У цьому випадку коефіцієнти v_k можуть бути довільними; треба лише, щоб виконувалася умова збіжності $\|v_k\| \leq c^k$ для деякої константи $c > 0$. Але тепер система не визначається однозначно коефіцієнтами ряду: наприклад, завжди можна взяти $A(t) \equiv 0$, а вже тоді $b(t)$

відновлюється однозначно. Неважко бачити, що система (1.13) є повністю керованою в околі нуля тоді і тільки тоді, коли $\operatorname{rank}\{v_k\}_{k=0}^{\infty} = n$. Нехай $m_1, \ldots, m_n$ — номери перших n лінійно незалежних векторів із послідовності $\{v_k\}_{k=0}^{\infty}$; тоді заміна $y = Qx$, де $Q = (v_{m_1}, \ldots, v_{m_n})^{-1}$, зводить ряд (1.14) до вигляду

$$y_j^0 = (Qx^0)_j = \int_0^\theta \tau^{m_j} u(\tau) d\tau + \rho_j(\theta, u), \ j = 1, \ldots, n, \tag{1.15}$$

де $\rho_j(\theta, u)$ включає тільки моменти порядку мализни вище, ніж $m_j + 1$.

Ці міркування приводять до наступної ідеї: апроксимацію лінійної керованої системи (1.1) або (1.13) на малому проміжку часу можна описати в термінах ряду степеневих моментів, аналогічно тому, як це зазвичай робиться в аналізі, коли для апроксимації скінченновимірних відображень використовується розвинення у ряд Тейлора.

Виявляється, що така апроксимація у термінах рядів моментів відповідає апроксимації у сенсі швидкодії, або, що те ж саме, апроксимації min-проблем моментів. Детальніше, розглянемо дві min-проблеми моментів (еквівалентно, можна розглядати відповідні задачі швидкодії)

$$s_j = \int_0^\theta g_j(\tau) u(\tau) d\tau, \ j = 1, \ldots, n, \ |u(\tau)| \le 1, \ \tau \in [0, \theta], \ \theta \to \min, \tag{1.16}$$

$$s_j = \int_0^\theta \widetilde{g}_j(\tau) u(\tau) d\tau, \ j = 1, \ldots, n, \ |u(\tau)| \le 1, \ \tau \in [0, \theta], \ \theta \to \min. \tag{1.17}$$

Нехай (θ_s, u_s) і $(\widetilde{\theta}_s, \widetilde{u}_s)$ — розв'язки цих задач відповідно. Min-проблеми моментів (1.16) і (1.17) називаються локально еквівалентними в околі нуля (а відповідні системи — локально еквівалентними у сенсі швидкодії), якщо існує така невироджена матриця Q (для задачі швидкодії це — заміна змінних у першій системі), для якої

$$\frac{\theta_{Qs}}{\widetilde{\theta}_s} \to 1, \ \ \frac{1}{\theta} \int_0^\theta |u_{Qs}(t) - \widetilde{u}_s(t)|\, dt \to 0 \ \text{ при } s \to 0, \ \ \text{де } \theta = \min\{\theta_{Qs}, \widetilde{\theta}_s\}.$$

Іншими словами, min-проблеми моментів є локально еквівалентними в околі нуля, якщо після невиродженого лінійного перетворення одної з них їх розв'язки як функції від s стають еквівалентними при $s \to 0$. Аналогічно, керовані системи є локально еквівалентними у сенсі швидкодії, якщо після невиродженої заміни змінних в одній з них їх розв'язки як функції від початкової точки x^0 стають еквівалентними при $x^0 \to 0$.

У роботі [27] розвинення (1.15) у випадку $m_j = j - 1$, $j = 1, \ldots, n$, використовується для розв'язання задачі швидкодії для системи (1.13) методом послідовних наближень, на кожному кроці якого розв'язується степенева min-проблема моментів вигляду (1.9). У кандидатській дисертації С. Ю. Ігнатович [12] і роботі [125] показано, що задача швидкодії для системи (1.13) (з дійсно-аналітичними в околі нуля $A(t)$ і $b(t)$) є локально еквівалентною задачі швидкодії для системи

$$\dot{x}_j = t^{m_j} u, \ \ j = 1, \ldots, n,$$

яка, у свою чергу, зводиться до степеневої min-проблеми моментів з пропусками

$$s_j = \int_0^\theta \tau^{m_j} u(\tau) d\tau, \ \ j = 1, \ldots, n,$$

де $m_1, \ldots, m_n$ — номери перших n лінійно незалежних векторів із послідовності $\{(-A(t) + d/dt)^k b(t)|_{t=0}\}_{k=0}^{\infty}$, а також наведені умови, за яких розв'язок задачі швидкодії може бути знайдений методом послідовних наближень.

Отже, основна ідея локального аналізу лінійних систем, викладена в цьому пункті, полягає у наступному: замінити керовану систему рядом степеневих моментів і шукати наближення цього ряду, враховуючи порядок мализни степеневих моментів. У даній дисертації зазначений підхід розвивається для нелінійних керованих систем.

1.1.2 Ряди нелінійних степеневих моментів, min-проблема моментів Маркова і задача швидкодії для систем, афінних за керуванням

Перейдемо до розгляду класу нелінійних керованих систем, які є найближчими до лінійних, — класу афінних за керуванням систем

$$\dot{x} = a(t,x) + b(t,x)u, \quad x \in U(0) \subset \mathbb{R}^n, \; u \in \mathbb{R}, \tag{1.18}$$

де вектор-функції [1] $a(t,x)$, $b(t,x)$ є дійсно-аналітичними в деякому околі нуля. Припустимо, що початок координат є точкою спокою системи, тобто виконується умова $a(t,0) \equiv 0$. Як і раніше, розглянемо задачу потрапляння до початку координат

$$\dot{x} = a(t,x) + b(t,x)u, \; a(t,0) \equiv 0, \; x(0) = x^0, \; x(\theta) = 0. \tag{1.19}$$

Першим кроком в узагальненні ідей, що вказані в пункті 1.1.1, є опис зображення, яке узагальнює формулу (1.3). Подібні зображення добре відомі. Наприклад, їх можна отримати з результатів роботи А. О. Аграчова і Р. В. Гамкрелідзе [2]; схожі зображення були використані для апроксимації вздовж траєкторії в роботі Р. М. Біанхіні і Ж. Стефані [53], для отримання умов швидкодії — в роботі О. І. Третьяка [39], для розв'язання задачі стабілізації — в роботі О. Л. Зуєва [162] та ін. Зображення у формі, яка використовуватиметься в даній дисертації, було отримане і вивчене у кандидатській дисертації С. Ю. Ігнатович [12]; збіжність відповідного ряду обговорювалася також у дисертації П. Ю. Бархаєва [8] та статті [140].

Розглянемо оператори R_a та R_b, які визначаються формулами

$$R_a\phi(t,x) = \phi_t(t,x) + \phi_x(t,x)a(t,x), \quad R_b\phi(t,x) = \phi_x(t,x)b(t,x) \tag{1.20}$$

для довільної аналітичної вектор-функції $\phi(t,x)$, що задана в деякому околі нуля (такі оператори були введені в роботі [70]). Ми використовуємо позначення $\mathrm{ad}^k_{R_a} R_b$ для операторних дужок

$$ad^0_{R_a} R_b = R_b, \quad \mathrm{ad}^{k+1}_{R_a} R_b = [R_a, \mathrm{ad}^k_{R_a} R_b], \; k \geq 0, \tag{1.21}$$

[1] У дисертації терміни «вектор-функція» і «векторне поле» вживаються як синоніми.

де $[\cdot,\cdot]$ означає операторний комутатор, $[R_1, R_2] = R_1R_2 - R_2R_1$.

Нехай, як і раніше, $B^\theta = \{u \in L_\infty[0,\theta] : \|u\| \le 1\}$.

Теорема 1.1. ([12]) *Розглянемо задачу* (1.19), *де* $a(t,x)$, $b(t,x)$ *є дійсно-аналітичними в деякому околі нуля* $(-T_0, T_0) \times U(0) \subset \mathbb{R}^{n+1}$. *Тоді існує таке* $T \in (0, T_0)$, *що для будь-якого* $\theta \in (0,T)$ *і будь-якого* $u \in B^\theta$

$$x^0 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\substack{m_1+\cdots+m_k+k=m \\ k\ge 1,\ m_i\ge 0}} v_{m_1\ldots m_k} \int_0^\theta \int_0^{\tau_1} \cdots \int_0^{\tau_{k-1}} \tau_1^{m_1} \cdots \tau_k^{m_k} u(\tau_1)\cdots u(\tau_k) d\tau_k \cdots d\tau_1, \tag{1.22}$$

причому ряд у правій частині збігається абсолютно і рівномірно відносно $u(t) \in B^\theta$, *де*

$$v_{m_1\ldots m_k} = \frac{(-1)^k}{m_1!\ldots m_k!} \mathrm{ad}_{R_a}^{m_1} R_b \cdots \mathrm{ad}_{R_a}^{m_k} R_b E(x)\Big|_{t=0,x=0} \tag{1.23}$$

є сталими векторними коефіцієнтами.

Інтеграли

$$\xi_{m_1\ldots m_k}(\theta,u) = \int_0^\theta \int_0^{\tau_1} \cdots \int_0^{\tau_{k-1}} \tau_1^{m_1}\tau_2^{m_2} \cdots \tau_k^{m_k} u(\tau_1)u(\tau_2)\cdots u(\tau_k) d\tau_k \cdots d\tau_2 d\tau_1$$

ми називаємо *нелінійними степеневими моментами* функції $u = u(t)$.

Аналогічне зображення має місце і для систем з багатовимірним керуванням [8]

$$\dot{x} = a(t,x) + \sum_{i=1}^{r} b_i(t,x)u_i,\ \ a(t,0) \equiv 0,\ \ x \in U(0) \subset \mathbb{R}^n,\ \ u_1,\ldots,u_r \in \mathbb{R}, \tag{1.24}$$

де $a(t,x)$, $b_1(t,x),\ldots,b_r(t,x)$ дійсно-аналітичні в деякому околі нуля. А саме, існує таке $T \in (0,T_0)$, що для будь-якого $\theta \in (0,T)$ і будь-якого $u \in B^\theta$

$$x^0 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\substack{m_1+\cdots+m_k+k=m \\ 1\le i_1,\ldots,i_k\le r}} v_{m_1\ldots m_k}^{i_1\ldots i_k} \xi_{m_1\ldots m_k}^{i_1\ldots i_k}(\theta,u), \tag{1.25}$$

де $\xi_{m_1\ldots m_k}^{i_1\ldots i_k}(\theta,u)$ є нелінійними степеневими моментами функцій $u_1,\ldots,u_r$,

$$\xi_{m_1\ldots m_k}^{i_1\ldots i_k}(\theta,u) = \int_0^\theta \cdots \int_0^{\tau_{k-1}} \tau_1^{m_1} \cdots \tau_k^{m_k} u_{i_1}(\tau_1)\cdots u_{i_k}(\tau_k) d\tau_k \cdots d\tau_1, \tag{1.26}$$

а $v^{i_1\dots i_k}_{m_1\dots m_k} \in \mathbb{R}^n$ є сталими векторними коефіцієнтами,

$$v^{i_1\dots i_k}_{m_1\dots m_k} = \frac{(-1)^k}{m_1!\dots m_k!} \mathrm{ad}^{m_1}_{R_a} R_{b_{i_1}} \cdots \mathrm{ad}^{m_k}_{R_a} R_{b_{i_k}} E(x)\Big|_{t=0,x=0}, \tag{1.27}$$

причому ряд у правій частині (1.25) збігається абсолютно і рівномірно відносно $u(t) \in B^\theta$.

Повернемось до теореми 1.1 і зазначимо, що рівність (1.22) можна інтерпретувати як нелінійну проблему моментів. Аналогічно лінійному випадку, можна розглянути нелінійну min-проблему моментів Маркова: до моментних рівностей (1.22) додати умови $|u(t)| \leq 1$, $t \in [0, \theta]$, і $\theta \to \min$. Таким чином, нелінійну задачу швидкодії

$$\begin{gathered} \dot{x} = a(t,x) + b(t,x)u, \;\; a(t,0) \equiv 0, \quad x(0) = x^0, \quad x(\theta) = 0, \\ |u(t)| \leq 1, \;\; t \in [0,\theta], \quad \theta \to \min, \end{gathered} \tag{1.28}$$

можна звести до нелінійної min-проблеми моментів. Дамо точне означення.

Означення 1.1. ([12, 34, 126]) *Нехай* $\{v_{m_1\dots m_k} : k \geq 1,\ m_1, \dots, m_k \geq 0\}$ *— задана множина векторів з* $\mathbb{R}^n$. *Нелінійна min-проблема моментів Маркова полягає в тому, щоб для заданого вектора* $s \in \mathbb{R}^n$ *знайти найменше можливе значення* $\theta_s > 0$, *для якого існує функція* $u_s(t)$, *що задовольняє обмеження* $|u_s(t)| \leq 1$, $t \in [0, \theta_s]$, *така, що при* $\theta = \theta_s$ *і* $u(t) = u_s(t)$ *справджується рівність*

$$s = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\substack{m_1+\dots+m_k+k=m \\ k\geq 1,\ m_i \geq 0}} v_{m_1\dots m_k} \xi_{m_1\dots m_k}(\theta, u).$$

Розв'язком min-проблеми моментів називається пара (θ_s, u_s).

Скорочено min-проблема моментів Маркова записується так:

$$s = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\substack{m_1+\dots+m_k+k=m \\ k\geq 1,\ m_i \geq 0}} v_{m_1\dots m_k} \xi_{m_1\dots m_k}(\theta, u), \quad |u(t)| \leq 1, t \in [0, \theta], \quad \theta \to \min. \tag{1.29}$$

Підкреслимо, що в цьому означенні вектори $v_{m_1\dots m_k}$ можуть бути довільними, але ряд у правій частині рівності (1.29) має збігатися.

Зазначимо, що θ_s (якщо існує) визначається однозначно, а функція $u_s(t)$ може бути неєдиною.

Як випливає з теореми Філіпова [40], задача швидкодії (1.28) має розв'язок для всіх x^0 з деякого околу нуля, якщо система (1.18) є локально керованою, тобто з будь-якої точки околу нуля можна потрапити до нуля [40]. Для цього достатньо (але не необхідно), щоб *лінійне наближення* системи (1.18)

$$\dot{x} = a_x(t,0)x + b(t,0)u$$

було повністю кероване.

У дисертації [12] і роботах [34, 126] розглянуте питання про локальну еквівалентність нелінійної min-проблеми моментів лінійній min-проблемі (або, що те ж саме, нелінійної задачі швидкодії лінійній задачі). Наступне означення враховує, що для нелінійних систем оптимальне керування може бути неєдиним.

Означення 1.2. ([12, 34, 126]) *Розглянемо лінійну задачу швидкодії*

$$\dot{x} = A(t)x + b(t)u,\ x(0) = x^0,\ x(\theta) = 0,\ |u(t)| \le 1,\ t \in [0,\theta],\ \theta \to \min; \tag{1.30}$$

нехай $\theta_{x^0}^{Lin}$ позначає оптимальний час, а $u_{x^0}^{Lin}(t)$ — оптимальне керування для (1.30). Розглянемо також нелінійну задачу швидкодії (1.28); нехай θ_{x^0} позначає оптимальний час, а U_{x^0} — множину оптимальних керувань для (1.28). Припустимо, що обидві задачі мають розв'язок у деякому околі нуля.

Ми кажемо, що нелінійна задача швидкодії (1.28) локально еквівалентна лінійній задачі (1.30), якщо існує таке невироджене перетворення околу нуля $Q(x)$ ($Q(0) = 0$, $\det Q_x(0) \neq 0$), для якого

$$\frac{\theta_{Q(x^0)}}{\widetilde{\theta}_{x^0}^{Lin}} \to 1, \quad \sup_{\widetilde{u}(t) \in U_{Q(x^0)}} \frac{1}{\theta} \int_0^{\theta} \left| u_{x^0}^{Lin}(t) - \widetilde{u}(t) \right| dt \to 0 \ \text{ при } x^0 \to 0,$$

де $\theta = \min\{\theta_{Q(s)}, \theta_{x^0}^{Lin}\}$.

Аналогічно можна ввести поняття локальної еквівалентності нелінійної min-проблеми моментів Маркова лінійній min-проблемі.

У дисертації [12] і роботах [34, 126] описаний клас нелінійних систем, для яких задача швидкодії локально еквівалентна лінійній задачі швидкодії.

Теорема 1.2. ([12, 34, 126]) *Задача швидкодії* (1.28) *локально еквівалентна деякій лінійній задачі швидкодії тоді і тільки тоді, коли:*
1) $\operatorname{rank}\{\operatorname{ad}^k_{R_a} R_b E(x)|_{t=0,x=0}\}_{k=0}^{\infty} = n$*;*
2) $[\operatorname{ad}^{m_1}_{R_a} R_b, \cdots [\operatorname{ad}^{m_{j-1}}_{R_a} R_b, \operatorname{ad}^{m_j}_{R_a} R_b]] E(x)|_{t=0,x=0} \in \operatorname{Lin}\{\operatorname{ad}^k_{R_a} R_b E(x)|_{t=0,x=0}\}_{k=0}^{m-2}$*,*
де $m_1 + \cdots + m_j + j = m$*, для будь-яких* $m \geq 1$*,* $j \geq 2$*,* $m_1, \ldots, m_j \geq 0$*.*

Зауважимо, що з умови 1) випливає, що в умові 2) достатньо перевіряти лише скінчену кількість співвідношень.

Можна показати, що за умов теореми 1.2 задача швидкодії (1.28) локально еквівалентна задачі швидкодії для свого лінійного наближення.

Отже, теорема 1.2 описує клас нелінійних задач швидкодії, які наближаються більш простими — лінійними — задачами швидкодії. Очевидно, що умови 1), 2) є досить обмежувальними: наприклад, вони напевне не виконуються, якщо лінійне наближення системи не є повністю керованим. У зв'язку з цим виникає природне питання про повну класифікацію систем у сенсі швидкодії; зокрема, питання про вигляд таких «простіших» нелінійних систем, які наближають довільні нелінійні системи.

У даній дисертації розвиваються методи, за допомогою яких будується повна алгебраїчна класифікація нелінійних керованих систем і досліджується її зв'язок з еквівалентністю у сенсі швидкодії.

1.2 Задача однорідної апроксимації

У частковому випадку, коли $a(t, x) \equiv 0$, системи вигляду (1.24) є лінійними за керуванням. Ми будемо розглядати автономні системи, які записуватимемо у такому вигляді:

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{m} u_i X_i(x), \quad x \in U(0) \subset \mathbb{R}^n,\ u_1, \ldots, u_m \in \mathbb{R}, \tag{1.31}$$

де $X_1(x), \ldots, X_m(x)$ — дійсно-аналітичні векторні поля у деякому околі нуля $U(0) \subset \mathbb{R}^n$. (Точку нуль обрано лише для зручності.) Такі системи мають добре зрозумілий геометричний зміст: векторні поля визначають дійсно-аналітичний розподіл $D(x) = \mathrm{Lin}\{X_1(x), \ldots, X_m(x)\}$, який дотикається довільної траєкторії системи. Ця інтерпретація дозволяє користуватися геометричними методами: так, властивість повної керованості пов'язана з властивістю інтегровності [148, 116], задача швидкодії пов'язана з субрімановою метрикою [1]. Зазначимо, що у класичній геометричній постановці зазвичай вважається, що вимірність розподілу $D(x)$ є сталою, проте для теорії керування характерним є саме випадок, коли ця вимірність залежить від x.

1.2.1 Ряди ітерованих інтегралів

Перш за все, обговоримо отримання явної формули для розв'язку нелінійної задачі Коші

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{m} u_i(t) X_i(x), \quad x(0) = 0, \tag{1.32}$$

або, що те ж саме, для розв'язку інтегрального рівняння

$$x(t) = \int_0^t \sum_{i=1}^{m} u_i(\tau) X_i(x(\tau)) d\tau.$$

Як добре відомо, для запису розв'язку інтегрального рівняння В. Вольтерра [154] запропонував використовувати ряди багатовимірних інтегралів; у подальшому Н. Вінер [157] застосовував такі ряди для явного опису відгуку нелінійних систем (залежності виходу від входу).

У загальному випадку задачі Коші для нелінійного диференціального рівняння

$$\dot{x} = V(t, x), \quad x(0) = 0,$$

розв'язок $x(t)$ може бути поданий у наступному вигляді [2, 4]. Для зручності використаємо позначення $V^t(x) = V(t,x)$ для векторного поля, яке будемо записувати як диференціальний оператор першого порядку: $V^t(x)\varphi(x) = \varphi_x(x)V^t(x)$. Нехай $P^t : U(0) \to \mathbb{R}^n$ позначає потік поля $V^t(x)$. Він може бути записаний у вигляді (формального) операторного ряду, що називається правою експонентою поля $V^t(x)$:

$$P^t = \overrightarrow{\exp}\int_0^t V^\tau d\tau = \mathrm{Id} + \sum_{k=1}^{\infty}\int_0^t\int_0^{\tau_1}\cdots\int_0^{\tau_{k-1}} V^{\tau_k}\cdots V^{\tau_1}d\tau_k\cdots d\tau_2 d\tau_1. \quad (1.33)$$

Таким чином, отримуємо зображення у вигляді ряду для траєкторії $x(t) = P^t(0)$. Можна довести, що цей ряд абсолютно збігається при малих t, якщо векторне поле дійсно-аналітичне в околі нуля.

У частковому випадку задачі Коші (1.32) операторний ряд (1.33) може бути записаний таким чином:

$$P^t = \mathrm{Id} + \sum_{i_1,\dots,i_k} X_{i_k}\cdots X_{i_1}\int_0^t\int_0^{\tau_1}\cdots\int_0^{\tau_{k-1}} u_{i_1}(\tau_1)\cdots u_{i_k}(\tau_k)d\tau_k\cdots d\tau_2 d\tau_1, \quad (1.34)$$

звідки випливає явна формула для траєкторії $x(t) = P^t(0)$. Відзначимо, що ряд (1.34) є операторним, і застосування його до будь-якого перетворення $Q(x)$ дає розв'язок задачі Коші для системи в координатах $y = Q(x)$. Якщо застосувати цей ряд до функції $h(x)$, отримаємо явне зображення для *виходу* $y = h(x)$. Обговорення різних підходів до таких зображень можуть бути знайдені в роботах [56, 67, 72, 76, 107, 2, 3, 146, 63, 65, 155, 151, 100, 75] та інших.

Операторна експонента (1.34) припускає іншу інтерпретацію: цей ряд нагадує формальний степеневий ряд від m некомутуючих змінних відносно добутку — операції інтегрування [59]. На цьому шляху для дослідження розв'язків диференціальних рівнянь можна використовувати алгебраїчні методи, що й було зроблено К. Ченом [59]. М. Фліс [67, 70, 72] запропонував застосувати ряди К. Чена для аналізу систем вигляду (1.31).

Теорема 1.3. (М. Фліс, [70]) *Розглянемо задачу Коші вигляду (1.32), де $X_1, \ldots, X_m$ — дійсно-аналітичні векторні поля в деякому околі нуля $U(0) \subset \mathbb{R}^n$. Тоді існує таке $T > 0$, що розв'язок задачі Коші можна подати у вигляді ряду*

$$x(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{1 \le i_1, \ldots, i_k \le m} c_{i_1 \ldots i_k} \int_0^{\theta} \int_0^{\tau_1} \cdots \int_0^{\tau_{k-1}} u_{i_1}(\tau_1) u_{i_2}(\tau_2) \cdots u_{i_k},(\tau_k) d\tau_k \cdots d\tau_2 d\tau_1, \tag{1.35}$$

який для будь-якого $\theta \in (0, T)$ збігається абсолютно і рівномірно відносно $u \in B^{\theta} = \{u \in L_{\infty}([0, \theta]; \mathbb{R}^m) : \|u\| \le 1\}$, де $c_{i_1 \ldots i_k} = X_{i_k} X_{i_{k-1}} \cdots X_{i_1} E(0)$ є сталими векторними коефіцієнтами ($E(x) = x$ позначає тотожне відображення).

Важлива особливість такого підходу полягає в тому, що в запису ряду ітерованих інтегралів відокремлюються ітеровані інтеграли і сталі векторні коефіцієнти. Ітеровані інтеграли породжують вільну асоціативну алгебру. Зокрема, це дозволяє алгебраїчним шляхом отримати умови реалізовності ряду у вигляді системи [69].

Розглянемо тепер більш детально коефіцієнти $X_{i_k} \cdots X_{i_1}$ операторного ряду (1.34). Множина m дійсно-аналітичних векторних полів $X_1, \ldots, X_m$ породжує асоціативну алгебру диференціальних операторів $F = \sum\limits_{k=1}^{\infty} F^k$, де підпростір F^k є лінійною оболонкою (над $\mathbb{R}$) диференціальних операторів порядку k вигляду $X_{i_k} X_{i_{k-1}} \cdots X_{i_1}$, $1 \le i_1, \ldots, i_k \le m$, а алгебраїчною операцією є композиція.

Нагадаємо, що фільтрація в алгебрі F означає, що існує така послідовність її підпросторів $\{S_q\}_{q=1}^{\infty}$, що $F = \bigcup\limits_{q=1}^{\infty} S_q$, причому $S_{q_1} S_{q_2} \subset S_{q_1+q_2}$ для будь-яких $q_1, q_2 \ge 1$. В алгебрі F диференціальних операторів природна фільтрація задається послідовністю підпросторів $S_q = \sum\limits_{k=1}^{q} F^k$, $q \ge 1$. Зазвичай вважається, що ці оператори діють на множині (гладких або, у нашому випадку, дійсно-аналітичних) функцій, тобто відображень з $U(0) \subset \mathbb{R}^n$ до $\mathbb{R}$. Проте нам зручно визначити їх як оператори, що діють на векторфункціях, тобто на відображеннях з $U(0) \subset \mathbb{R}^n$ до $\mathbb{R}^n$, вважаючи, що така дія є покомпонентною. Зокрема, коефіцієнт ряду (1.35) дорівнює значенню (у початку координат) образу тотожного відображення $E(x) = x$ відповідного диференціального оператора з F. Зазначимо, що за термінологією [50] диференціальні оператори $X_{i_k} X_{i_{k-1}} \cdots X_{i_1}$ називаються *неголономними похідними k-го порядку.*

Розглянемо також фільтровану алгебру Лі L векторних полів, яка породжується множиною $X_1, \ldots, X_m$. Ця алгебра може бути означена як $L = \sum\limits_{k=1}^{\infty} L^k$, де

$$L^1 = \mathrm{Lin}\{X_1, \ldots, X_m\}$$

(лінійна оболонка над $\mathbb{R}$), а підпростори L^k задаються рекурентно як

$$L^{k+1} = [L^1, L^k], \quad k \geq 1,$$

де $[\cdot, \cdot]$ позначає дужки Лі векторних полів, $[X_i, X_j] = X_i X_j - X_j X_i$.

Як було доведено Т. Нагано [116], для дійсно-аналітичних векторних полів орбіти розподілу $D(x) = \mathrm{Lin}\{X_1(x), \ldots, X_m(x)\}$ (тобто точки, у які можна потрапити з деякої фіксованої точки, якщо рухатися вздовж напрямків з розподілу або, що те ж саме, вздовж траєкторій системи (1.31)) є інтегральними підмноговидами розподілу $\{X(x) : X \in L\}$. Зазначимо, що ця властивість не виконується у класі C^∞; узагальнення для C^∞ отримано Г. Сусманом [148], попередні результати були отримані К. Лобрі [109] та ін. (Якщо вимірність $D(x)$ не залежить від x, цей факт випливає з теореми Фробеніуса [42].)

Але частковий випадок, коли орбіта збігається з околом початкової точки, був відомий набагато раніше, починаючи з робіт П. К. Рашевського [33] і В. Чжоу [61] (результат зберігається і в класі C^∞). Детальніше, розглянемо підпростір $\{Y(0) : Y \in L\} \subset \mathbb{R}^n$ — «значення» алгебри Лі векторних полів у початку координат (початок координат обраний лише для зручності). Орбіта початку координат є околом нуля тоді і тільки тоді, коли виконана *умова Рашевського-Чжоу*

$$\{Y(0) : Y \in L\} = \mathbb{R}^n. \tag{1.36}$$

Той факт, що орбіта початку координат є околом нуля, означає, що система (1.31) *локально керована*: з будь-якої точки деякого околу нуля можна потрапити до будь-якої іншої точки цього околу.

Система, що задовольняє умову Рашевського-Чжоу, називається *повністю неголономною* або *системою повного рангу* (ще один англійський еквівалентний термін: bracket generating system). У дисертації розглядаються лише повністю неголономні системи. Зі сказаного вище випливає, що якщо система (1.31) не є повністю неголономною, її можна розглядати як систему на орбіті, що проходить через нуль; система, яку розглядають лише на цій орбіті, вже є повністю неголономною.

Зазначимо, що постановки задач, розглянуті в розділах 2–6 дисертації, можна перенести на дійсно-аналітичні многовиди, але оскільки практично всі наші результати мають локальний характер, ми для зручності вважаємо, що керовані системи задані в деяких околах з $\mathbb{R}^n$.

Зауваження 1.1. *Поряд із задачею Коші* (1.32) *можна розглядати задачу Коші для нестаціонарної системи*

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{m} u_i(t) X_i(t, x), \quad x(0) = 0. \tag{1.37}$$

Теорема 1.3 узагальнюється на такі системи [70]*: має місце таке саме зображення, але коефіцієнти $c_{i_1\ldots i_k}$ визначаються за формулами $c_{i_1\ldots i_k} = R_{i_k} R_{i_{k-1}} \cdots R_{i_1} E(0)\big|_{t=0}$, де оператор R_i діє на довільну вектор-функцію $\phi(t,x)$ за правилом $R_i\phi(t,x) = \phi_t(t,x) + \phi_x(t,x)X_i(t,x)$, $i = 1, \ldots, m$.*

Зауваження 1.2. *Зображення* (1.22) *і аналогічне зображення для системи* (1.24) *можна отримати з зображення, що вказане в зауваженні 1.1; для цього в системі* (1.18) *або* (1.24) *треба ввести ще одне керування $u_{m+1}(t) \equiv 1$ і «обернути» час, щоб перейти від задачі потрапляння в точку до задачі Коші.*

1.2.2 Однорідна апроксимація систем, лінійних за керуванням

Поняття однорідної апроксимації відіграє важливу роль у сучасній теорії керування, воно активно вивчалося протягом останніх десятиліть [5, 45, 79, 62, 53, 50]. Були запропоновані декілька підходів, які надавали як конкретні алгоритми побудови, в тому числі для прикладних задач [80, 50, 51, 60], так і загальні описи [46]. Відомі застосування однорідної апроксимації в різних задачах теорії керування: спостережуваності [115], стійкості гібридних систем [77], ковзного керування [52].

Наведемо деякі означення з роботи А. Белаїша [50].

Зафіксуємо повністю неголономну систему (1.31). Нехай задана дійсно-аналітична функція $f = f(x) : U(0) \to \mathbb{R}$. Число s називається *порядком* функції $f = f(x)$ у точці $x = 0$, якщо

(а) $X_{i_k} X_{i_{k-1}} \cdots X_{i_1} f(0) = 0$ для всіх $k \leq s-1$ і всіх $1 \leq i_1, \ldots, i_k \leq m$,

(б) $X_{j_s} X_{j_{s-1}} \cdots X_{j_1} f(0) \neq 0$ для деякої множини $1 \leq j_1, \ldots, j_s \leq m$.

Припустимо, що у вихідних координатах задовольняється умова $\{Y(0) : Y \in L^k\} = \mathrm{Lin}\{e_{v_{i-1}+1}, \ldots, e_{v_i}\}$, $i = 1, \ldots, p$. Цього можна домогтися шляхом певної лінійної невиродженої заміни змінних у вихідній системі; такі координати називаються *лінійно адаптованими*. Мінімальне число w_i, яке задовольняє умову $e_i \in \{Y(0) : Y \in L^1 + \cdots + L^{w_i}\}$, називається *вагою* координати x_i, $i = 1, \ldots, n$.

Нехай $x_1, \ldots, x_n$ — лінійно адаптовані координати. Вони називаються *привілейованими*, якщо вага кожної координати x_i дорівнює порядку відповідної координатної функції $f_i(x) = x_i$, $i = 1, \ldots, n$. Як доведено в [50], можна побудувати привілейовані координати за допомогою певної поліноміальної заміни змінних.

Поняття порядку можна поширити на векторні поля. Число σ називається *порядком* векторного поля $X(x)$ у точці $x = 0$, якщо

(а) функція Xf має порядок не менше $\sigma + s$ для всіх функцій f порядку s для будь-якого $s \geq 0$, (б) функція Xf_0 має порядок $\sigma + s_0$ для деякої функції f_0 порядку s_0 для деякого $s_0 \geq 0$.

Як показано в [50], векторні поля $X_i(x)$ можна подати як суму $X_i(x) = \sum\limits_{k\geq -1} X_i^k(x)$, де $X_i^k(x)$ має порядок k. Позначимо $\widehat{X}_i(x) = X_i^{(-1)}(x)$, $i = 1,\dots,m$. Система
$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{m} u_i \widehat{X}_i(x)$$
називається *однорідною апроксимацією* системи (1.31). Ця апроксимація є *нільпотентною* в тому сенсі, що алгебра Лі, яка породжується векторними полями $\widehat{X}_1(x),\dots,\widehat{X}_m(x)$, є нільпотентною. У роботі [152] вивчаються нільпотентні неоднорідні апроксимації.

У даній дисертації розвивається техніка, яка дозволяє отримати алгебраїчний опис і повну класифікацію однорідних апроксимацій, а також описати явний метод побудови такої апроксимації.

Як показано в [50], однорідна апроксимація наближає вихідну систему в сенсі субріманової метрики, яка визначається наступним чином: для точок $s^1, s^2 \in U(0)$
$$\rho(s^1,s^2) = \inf \ell(u), \qquad \text{де} \ \ \ell(u) = \int_0^1 \Big(\sum_{i=1}^{m} u_i^2(t)\Big)^{1/2} dt,$$
а інфімум береться за усіма керуваннями $u(t) \in L_2([0,1],\mathbb{R}^m)$, які переводять точку s^1 в точку s^2 за час $\theta = 1$:
$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{m} u_i(t) X_i(x),\ x(0) = s^1,\ x(1) = s^2.$$

Задача однорідної апроксимації досить добре досліджена в літературі і, водночас, вона здається схожою на задачу апроксимації в сенсі швидкодії для афінних за керуванням систем. Виникає природне питання про зв'язок між цими задачами. Зокрема, можна поставити таке конкретне питання: якщо розвинути підхід, пов'язаний з нелінійною min-проблемою моментів, до систем, лінійних за керуванням, чи отримаємо те саме поняття однорідної апроксимації? У даній дисертації дається вичерпна відповідь на це питання на основі розвиненого підходу вільних алгебр. Крім того, уточнюється характер наближення, яке забезпечує однорідна апроксимація.

1.3 Вільні асоціативні алгебри і вільні алгебри Лі

Введемо означення і сформулюємо відомі результати щодо вільних алгебр [20, 110, 120], які використовуються в дисертації.

Розглянемо множину $\{\zeta_i : i \in I\}$ абстрактних елементів, які називаються *літерами*, де I — множина індексів. Ця множина може бути скінченною або нескінченною; в дисертації розглядаються два випадки: коли множина скінченна, $I = \{1, \ldots, m\}$ (алгебра ітерованих інтегралів), і коли вона є зліченною, $I = \{0, 1, 2, \ldots\}$ (алгебра нелінійних степеневих моментів). Рядки літер називаються *словами*; їх зручно позначати $\zeta_{i_1 \ldots i_k} = \zeta_{i_1} \cdots \zeta_{i_k}$. На множині слів введемо операцію конкатенації

$$\zeta_{i_1 \ldots i_k} \cdot \zeta_{j_1 \ldots j_s} = \zeta_{i_1 \ldots i_k j_1 \ldots j_s} \tag{1.38}$$

(далі ми не пишемо позначку для конкатенації). Зауважимо, що ця операція є асоціативною, але некомутативною. Розглянемо множину $\mathfrak{A}$ формальних скінченних лінійних комбінацій слів над $\mathbb{R}$ і розширимо на неї операцію конкатенації за лінійністю. Тоді множина $\mathfrak{A}$ перетворюється на асоціативну алгебру. Іншими словами, $\mathfrak{A}$ є множиною формальних поліномів від незалежних змінних ζ_i, які не комутують. Ця алгебра є вільною; за побудовою, множина слів є базисом $\mathfrak{A}$ як лінійного простору над $\mathbb{R}$.

Припустимо, що кожній літері приписаний деякий порядок — натуральне число $\mathrm{ord}(\zeta_i)$. Цей порядок можна поширити на слова, вважаючи $\mathrm{ord}(\zeta_{i_1 \ldots i_k}) = \mathrm{ord}(\zeta_{i_1}) + \cdots + \mathrm{ord}(\zeta_{i_k})$, тоді він породжує градуювання в алгебрі $\mathfrak{A}$. Нагадаємо, що градуювання в алгебрі означає, що лінійний простір $\mathfrak{A}$ припускає розклад у *пряму* суму

$$\mathfrak{A} = \sum_{m=1}^{\infty} \mathfrak{A}^m, \tag{1.39}$$

де підпростори $\mathfrak{A}^m$ задовольняють умову

$$\mathfrak{A}^{m_1}\mathfrak{A}^{m_2} \subset \mathfrak{A}^{m_1+m_2} \text{ для будь-яких } m_1, m_2 \in I.$$

Для алгебри $\mathfrak{A}$ підпростори $\mathfrak{A}^m$ є такими:

$$\mathfrak{A}^m = \mathrm{Lin}\{\zeta_{i_1\ldots i_k} : \mathrm{ord}(\zeta_{i_1\ldots i_k}) = \mathrm{ord}(\zeta_{i_1}) + \cdots + \mathrm{ord}(\zeta_{i_k}) = m\}. \tag{1.40}$$

Для алгебри ітерованих інтегралів природним є порядок $\mathrm{ord}(\zeta_i) = 1$, а для алгебри нелінійних степеневих моментів — порядок $\mathrm{ord}(\zeta_i) = i + 1$.

Означення градуювання узагальнюється таким чином: нехай S — комутативна напівгрупа з операцією додавання. Алгебра $\mathfrak{A}$ називається градуйованою за допомогою напівгрупи S, якщо лінійний простір $\mathfrak{A}$ припускає розклад у пряму суму $\mathfrak{A} = \sum\limits_{\alpha\in S} \mathfrak{A}^\alpha$, де підпростори $\mathfrak{A}^\alpha$ задовольняють умову $\mathfrak{A}^{\alpha_1}\mathfrak{A}^{\alpha_2} \subset \mathfrak{A}^{\alpha_1+\alpha_2}$ для будь-яких $\alpha_1, \alpha_2 \in S$; тоді градуюванням називається пара $\mu = (S, \{\mathfrak{A}^\alpha\}_{\alpha\in S})$. Широкий клас градуювань, які природно виникають у задачах теорії керування, вивчається в дисертації П. Ю. Бархаєва [8].

Знов розглянемо множину літер $\{\zeta_i : i \in I\}$ і побудуємо алгебру Лі, яку вона породжує. А саме, покладемо

$$\mathfrak{L}_1 = \mathrm{Lin}\{\zeta_i : i \in I\}$$

і визначимо послідовно підпростори $\mathfrak{L}_k \subset \mathfrak{A}$ за рекурентною формулою

$$\mathfrak{L}_k = \mathrm{Lin}\{[\ell_1, \ell_2] : \ell_1 \in \mathfrak{L}_{k_1}, \ell_2 \in \mathfrak{L}_{k_2}, k_1 + k_2 = k\},\ \ k \geq 2,$$

де операція дужок Лі $[\cdot,\cdot]$ визначається як комутатор за допомогою конкатенації:

$$[a_1, a_2] = a_1 a_2 - a_2 a_1. \tag{1.41}$$

Пряма сума підпросторів

$$\mathfrak{L} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathfrak{L}_k \tag{1.42}$$

є вільною алгеброю Лі [19] (над $\mathbb{R}$).

Асоціативна алгебра $\mathfrak{A}$ є універсальною огортуючою для алгебри Лі $\mathfrak{L}$ [19, 120]. У подальшому ми використовуємо добре відомий результат щодо зв'язку цих двох алгебр.

Теорема 1.4. (А. Пуанкаре, Г. Біркгоф, Е. Вітт, [19, 120]). *Нехай* $\{\ell_q : q \in Q\}$ *— повністю впорядкований базис підпростору* $\mathfrak{L}$ *(тобто на множині індексів* Q *заданий повний порядок). Тоді множина*

$$\{\ell_{q_1} \cdots \ell_{q_r} : q_1 \leq \cdots \leq q_r,\ r \geq 1\} \tag{1.43}$$

утворює базис простору $\mathfrak{A}$.

Зауваження 1.3. *За умов теореми 1.4, очевидно, множина*

$$\{\ell_{q_1} \cdots \ell_{q_r} : q_1 \geq \cdots \geq q_r,\ r \geq 1\} \tag{1.44}$$

теж утворює базис $\mathfrak{A}$.

Зв'язок між базисами алгебр $\mathfrak{A}$ та $\mathfrak{L}$ можна уточнити, якщо ввести операцію *тасуючого добутку* [66, 118, 59, 44].

Означення 1.3. *Послідовність* $(j_1, \ldots, j_{k+r})$ *називається тасуючою перестановкою послідовностей* $(1, \ldots, k)$ *і* $(k+1, \ldots, k+r)$*, якщо вона є перестановкою послідовності* $(1, \ldots, k+r)$ *і має таку властивість:*

$$\text{якщо} \quad 1 \leq j_p < j_q \leq k \quad \text{або} \quad k+1 \leq j_p < j_q \leq k+r, \quad \text{то} \quad p < q.$$

Символом $S_{k,r}$ *ми позначаємо множину всіх таких перестановок.*

Означення 1.4. *Тасуючий добуток* ш *в алгебрі* $\mathfrak{A}$ *задається на базисних елементах формулою*

$$\zeta_{i_1 \ldots i_k} \,ш\, \zeta_{i_{k+1} \ldots i_{k+r}} = \sum_{(j_1, \ldots, j_{k+r}) \in S_{k,r}} \zeta_{i_{j_1} \ldots i_{j_{k+r}}}$$

і продовжується на всю алгебру $\mathfrak{A}$ *за лінійністю.*

Назва «тасуючий добуток» пов'язана з комбінаторним змістом цієї операції: доданки в правій частині відповідають усім можливим способам перестановок, що отримуються при перетасуванні двох колод карт, які складено з карт $i_1, \ldots, i_k$ та $i_{k+1}, \ldots, i_{k+r}$, причому порядок карт з однієї й тої самої колоди зберігається. З означення випливає, що тасуючий добуток є комутативним і асоціативним. Нагадаємо інший спосіб введення цієї операції.

Означення 1.5. *Операція тасуючого добутку вводиться рекурентно на множині слів за формулами*

$$\zeta_i \sqcup\!\sqcup \zeta_j = \zeta_i\zeta_j + \zeta_j\zeta_i,$$
$$\zeta_i \sqcup\!\sqcup \zeta_{j_1\dots j_k} = \zeta_{j_1\dots j_k} \sqcup\!\sqcup \zeta_i = \zeta_{ij_1\dots j_k} + \zeta_{j_1}(\zeta_i \sqcup\!\sqcup \zeta_{j_2\dots j_k}),\ \ k \ge 2,$$
$$\zeta_{i_1\dots i_p} \sqcup\!\sqcup \zeta_{j_1\dots j_k} = \zeta_{i_1}(\zeta_{i_2\dots i_p} \sqcup\!\sqcup \zeta_{j_1\dots j_k}) + \zeta_{j_1}(\zeta_{i_1\dots i_p} \sqcup\!\sqcup \zeta_{j_2\dots j_k}),\ \ k,p \ge 2,$$

і продовжується на всю алгебру $\mathfrak{A}$ за лінійністю.

Введемо ще скалярний добуток $\langle\cdot,\cdot\rangle$ в алгебрі $\mathfrak{A}$, вважаючи слова ортонормальними:

$$\langle \zeta_{i_1\dots i_k}, \zeta_{j_1\dots j_s}\rangle = \begin{cases} 1, & \text{якщо } k = s,\ i_q = j_q,\ q = 1,\dots,k, \\ 0 & \text{у супротивному випадку.} \end{cases} \tag{1.45}$$

Виявляється, що між операціями тасуючого добутку і дужок Лі існує такий зв'язок.

Теорема 1.5. (Р. Рі [118]) *Елемент $\ell \in \mathfrak{A}$ належить алгебрі Лі $\mathfrak{L}$ тоді і тільки тоді, коли він є ортогональним тасуючому добутку будь-яких двох елементів з $\mathfrak{A}$, тобто $\langle \ell, a_1 \sqcup\!\sqcup a_2\rangle = 0$ для будь-яких $a_1, a_2 \in \mathfrak{A}$.*

За допомогою операції тасуючого добутку можна отримати явний опис базису, спряженого до базису (1.43) (якщо він існує). Для цього зручно переписати базис (1.43) у такий спосіб:

$$\{\ell_{q_1}^{p_1}\cdots\ell_{q_s}^{p_s} : s \ge 1,\ q_1 < \dots < q_s,\ p_1,\dots,p_s \ge 1\},$$

де ℓ^p позначає добуток $\ell^p = \ell\cdots\ell$ (p разів), і визначити спряжений базис як такий, що задовольняє рівності

$$\langle \ell_{q_1}^{p_1}\cdots\ell_{q_s}^{p_s}, d_{i_1\dots i_r}^{k_1\dots k_r}\rangle = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \ s = r \ \text{ і } \ q_t = i_t,\ p_t = k_t,\ t = 1,\dots,s, \\ 0 & \text{у супротивному випадку.} \end{cases}$$

Обговорення умов існування ортогонального доповнення $\mathfrak{L}$ наведені в [64]. У задачах, що досліджуються далі в дисертації, спряжений базис існує.

Теорема 1.6. (Г. Меленсон, К. Рейтенауер [114]) *Елементи спряженого базису можна знайти за формулами*

$$d_{i_1\dots i_r}^{k_1\dots k_r} = \frac{1}{k_1!\cdots k_r!}\, d_{i_1}^{Ш k_1} \mathbin{Ш} \cdots \mathbin{Ш} d_{i_r}^{Ш k_r},$$

де використано позначення $d_i = d_i^1$, $i \geq 1$, *а* $d^{Ш k}$ *позначає тасуючий добуток* $d^{Ш k} = d \mathbin{Ш} \cdots \mathbin{Ш} d$ *(*k *разів).*

У дисертації ми також використовуємо наступну теорему про виключення [43, 106, 120]. Далі $\mathrm{Lie}\{\mathcal{Q}\}$ позначає вільну алгебру Лі, яка вільно породжується множиною $\mathcal{Q}$.

Теорема 1.7. (А. І. Ширшов [43], М. Лазард [43, 106]) *Розглянемо вільну алгебру Лі* $\mathfrak{L} = \mathrm{Lie}\{\ell_h : h \in M\}$, *де* M *— множина індексів. Тоді для будь-якого* $h_0 \in M$ *має місце наступний прямий розклад:*

$$\mathfrak{L} = \mathrm{Lin}\{\ell_{h_0}\} + \mathrm{Lie}\{\mathrm{ad}^i_{\ell_{h_0}} \ell_h : i \geq 0, h \in M \backslash \{h_0\}\}.$$

У зв'язку з зображенням (1.35) виникає наступна *задача реалізовності* [69, 71, 88, 89, 90, 87, 147]. Припустимо, що заданий набір векторних коефіцієнтів $\{c_{i_1\dots i_k} : k \geq 1, 1 \leq i_1, \dots, i_k \leq m\}$. Задача полягає в тому, щоб з'ясувати, чи існує така система, для якої ці вектори є коефіцієнтами відповідного ряду. Іншими словами: чи існують такі векторні поля $X_1(x), \dots, X_m(x)$, для яких виконуються рівності

$$c_{i_1\dots i_k} = X_{i_k} X_{i_{k-1}} \cdots X_{i_1} E(0),\ k \geq 1,\ 1 \leq i_1, \dots, i_k \leq m. \tag{1.46}$$

Ми сформулюємо частковий випадок відомих умов реалізовності, достатній для даної дисертації.

Для формулювання розглянемо вільну асоціативну алгебру $\mathfrak{A}$ і вільну алгебру Лі $\mathfrak{L}$, які породжені m елементами (тобто $I = \{1, \dots, m\}$). Визначимо лінійне відображення $c : \mathfrak{A} \to \mathbb{R}^n$ за правилом

$$c(\zeta_{i_1\dots i_k}) = c_{i_k\dots i_1},\ k \geq 1,\ 1 \leq i_1, \dots, i_k \leq m.$$

Теорема 1.8. (М. Фліс ([69], Б. Якубчик [88]) *Нехай лінійне відображення* c *задовольняє умову* $c(\mathfrak{L}) = \mathbb{R}^n$. *Задача реалізовності розв'язна (тобто існують дійсно-аналітичні в околі нуля векторні поля, яка задовольняють рівності* (1.46)*) тоді і тільки тоді, коли*

(a) *існують додатні константи* C_1 *і* C_2, *для яких*

$$\|c(\eta_{i_1\dots i_k})\| \le k! C_1 C_2^k \tag{1.47}$$

для всіх $k \ge 1$ *і всіх* $1 \le i_1, \dots, i_k \le m$;

(b) *для будь-якого* $\ell \in \mathfrak{L}$, *що задовольняє рівність* $c(\ell) = 0$, *виконується* $c(y\ell) = 0$ *для всіх* $y \in \mathfrak{A}$.

Більш того, в цьому випадку така система є повністю неголономною і визначається однозначно.

Отже, умови реалізовності складаються з двох частин: з умови обмеженості зросту (a), що гарантує збіжність ряду і дійсну аналітичність шуканих векторних полів, і з алгебраїчної «рангової умови» (b), яка означає, що разом з будь-яким елементом $\ell \in \mathfrak{L}$, який входить до ядра відображення c, до цього ядра входить лівий ідеал, породжений цим елементом.

У даній дисертації послідовно розвивається підхід до нелінійних керованих систем, що використовує властивості вільних алгебр. Відзначимо, що у певному сенсі близькими є дослідження М. Кавскі [75, 96, 97, 98].

1.4 Лінеаризовні системи

Задачі лінеаризовності в класі C^∞ добре досліджена [104, 91, 81, 119, 123], умови лінеаризовності формулюються з використанням дужок Лі. Для систем класу C^1 з одновимірним керуванням такі задачі вивчались у дисертації К. В. Скляр [38]. Зазначимо, що джерелом ідей щодо лінеаризовності в класі C^1 є робота В. І. Коробова [22] про трикутні системи.

1.4.1 Задача лінеаризовності

Система
$$\dot{x} = f(x,u), \quad f(x,u) \in C^1(Q \times \mathbb{R}), \tag{1.48}$$
називається локально лінеаризовною в області Q [38], якщо існує заміна змінних
$$z = F(x) \in C^2(Q), \quad \det F_x(x) \neq 0,\ x \in Q, \tag{1.49}$$
яка зводить цю систему до лінійної повністю керованої системи
$$\dot{z} = \widetilde{A}x + \widetilde{b}u + \widetilde{c}.$$

Неважко показати, що якщо система лінеаризовна, то вона афінна за керуванням, $f(x,u) = a(x) + b(x)u$, де $a(x), b(x) \in C^1(Q)$.

Наступна лема пояснює, як можна працювати з дужками Лі векторних полів класу C^1.

Лема 1.1. [38] *Нехай $\zeta(x), \psi(x) \in C^1(Q)$ — вектор-функції, $F(x) : Q \to F(Q)$ — відображення класу $C^2(Q)$ і $\tilde{\zeta}(z), \tilde{\psi}(z) \in C^1(F(Q))$ — такі вектор-функції, що $\tilde{\zeta}(F(x)) = F_x(x)\zeta(x)$ і $\tilde{\psi}(F(x)) = F_x(x)\psi(x)$. Тоді $F_x(x)[\zeta(x), \psi(x)] = [\tilde{\zeta}(z), \tilde{\psi}(z)]|_{z=F(x)}$.*

З використанням цієї леми можна довести критерій лінеаризовності.

Теорема 1.9. [38] *Система* (1.48) *локально лінеаризовна в області Q тоді і тільки тоді, коли*

(A) $f(x,u) = a(x) + b(x)u$, *де* $a(x), b(x) \in C^1(Q)$;

(B_1) *векторні поля* $\mathrm{ad}_a^k b(x)$, $k = 0, \ldots, n$, *існують і належать* $C^1(Q)$;

(B_2) $\mathrm{rank}\{b(x), \mathrm{ad}_a b(x), \ldots, \mathrm{ad}_a^{n-1} b(x)\} = n$, $x \in Q$;

(B_3) $[\mathrm{ad}_a^k b(x), \mathrm{ad}_a^i b(x)] = 0$, $x \in Q$, *для всіх* $0 \le i, k \le n$;

(B_4) *існує функція* $\varphi(x) : Q \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) \in C^2(Q)$, *для якої*
$$\varphi_x(x)\mathrm{ad}_a^k b(x) = 0,\ k = 0, \ldots, n-2,\ x \in Q, \tag{1.50}$$
$$\varphi_x(x)\mathrm{ad}_a^{n-1} b(x) \neq 0,\ x \in Q. \tag{1.51}$$

Таким чином, дужки Лі можна використовувати для дослідження лінеаризовності систем, причому умови лінеаризовності схожі на відповідні умови для класу C^∞.

1.4.2 Лінеаризовність за зворотним зв'язком

Система (1.48) називається локально лінеаризовною за зворотним зв'язком в області Q, якщо існують заміна змінних (1.49) і заміна керування

$$v = g(x,u) \in C^1(Q \times \mathbb{R}), \quad g(x,\mathbb{R}) = \mathbb{R}, \;\; g_u(x,u) \neq 0, \;\; x \in Q, u \in \mathbb{R}, \tag{1.52}$$

які зводять цю систему до лінійної повністю керованої системи

$$\dot{z} = \widetilde{A}x + \widetilde{b}v.$$

Неважко показати, що в такому випадку $f(x,u) = a(x) + b(x)\phi(x,u)$, де $a(x), b(x) \in C^1(Q)$ і $\phi(x,u) \in C^1(Q \times \mathbb{R})$, $\phi_u(x,u) \neq 0$.

На відміну від лінеаризовних систем, для систем, лінеаризовних за зворотним зв'язком, дужки Лі векторних полів $a(x)$, $b(x)$ *не обов'язково існують*. У дисертації [38] для систем з одновимірним керуванням запропоновано замість них ввести допоміжні векторні поля $\chi^0, \ldots \chi^{n-1}$.

Теорема 1.10. [38] *Система* (1.48) *локально лінеаризовна за зворотним зв'язком в області Q тоді і тільки тоді, коли*
(A) $f(x,u) = a(x) + b(x)\phi(x,u)$, *де* $a(x), b(x) \in C^1(Q)$, $\phi(x,u) \in C^1(Q \times \mathbb{R})$, *причому* $\phi(x,\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ *і* $\phi_u(x,u) \neq 0$, $x \in Q$, $u \in \mathbb{R}$;
(B_1) *існують такі неперервні функції* $\mu_{kj}(x)$, *що векторні поля* $\chi^k(x)$, $k = 0, \ldots, n-1$, *визначені за рекурентною формулою*

$$\chi^0(x) = b(x), \;\; \chi^{k+1}(x) = [a(x), \chi^k(x)] + \sum_{j=0}^{k} \mu_{kj}(x)\chi^j(x), \;\; k = 0, \ldots, n-2,$$

існують і належать класу $C^1(Q)$;
(B_2) $\operatorname{rank}\{\chi^0(x), \ldots, \chi^{n-1}(x)\} = n$, $x \in Q$;

(B$_3$) $[\chi^k(x), \chi^j(x)] = \sum\limits_{i=0}^{k} \eta^i_{kj}(x)\chi^i(x)$ *для всіх* $0 \le j < k \le n-2$, *де* $\eta^i_{kj}(x)$ — *деякі неперервні функції;*

(B$_4$) *існує розв'язок* $\varphi(x)$ *системи*

$$\varphi_x(x)\chi^k(x) = 0,\ k = 0, \ldots, n-2,\ x \in Q, \tag{1.53}$$

який задовольняє умову

$$\varphi_x(x)\chi^{n-1}(x) \ne 0,\ x \in Q, \tag{1.54}$$

причому

$$L_a^{i-1}\varphi(x) \in C^2(Q),\ i = 1, \ldots, n. \tag{1.55}$$

1.4.3 Лінійні системи з багатовимірним керуванням

У даній дисертації результати щодо лінеаризовності за зворотним зв'язком узагальнюються на випадок систем з багатовимірним керуванням. Нагадаємо деякі властивості лінійних систем з багатовимірним керуванням.

Розглянемо повністю керовану лінійну автономну систему

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{1.56}$$

де $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^r$, $r \le n$, причому

$$\mathrm{rank}(B, AB, \ldots, A^{n-1}B) = n,\ \mathrm{rank}(B) = r. \tag{1.57}$$

Як добре відомо [58, 159], для такої системи існує єдиний набір *індексів керованості* $n_1 \ge \cdots \ge n_r \ge 1$, $n_1 + \cdots + n_r = n$, для якого система (1.56) зводиться до канонічної форми вигляду

$$\begin{aligned} &\dot{z}_{\sigma_i+j} = z_{\sigma_i+j+1}, \quad j = 1, \ldots, n_i - 1, \\ &\dot{z}_{\sigma_i+n_i} = v_i,\ i = 1, \ldots, r, \end{aligned} \tag{1.58}$$

за допомогою *лінійної* заміни змінних і керувань, де $\sigma_1 = 0$, $\sigma_i = n_1 + \cdots + n_{i-1}$, $i = 2, \ldots, r$. Індекси $n_1, \ldots, n_r$, що є інваріантними відносно таких замін [159], можна визначити так: нехай

$$w_0 = 0,\ w_j = \mathrm{rank}(B, \ldots, A^{j-1}B),\ j \geq 1, \tag{1.59}$$

тоді

$$n_i = \max\{j : w_j - w_{j-1} \geq i\},\ i = 1, \ldots, r. \tag{1.60}$$

Висновки до розділу 1

У розділі 1 міститься огляд постановок задач, які мотивують дослідження даної дисертації, зокрема, задача швидкодії і її зв'язок з min-проблемою моментів Маркова, задача однорідної апроксимації. Наведені означення та формулювання відомих результатів, які використовуються у подальших розділах, зокрема, зображення систем, які є лінійними або афінними за керуванням, у вигляді рядів ітерованих інтегралів або нелінійних степеневих моментів, а також деякі відомі властивості вільних градуйованих алгебр.

РОЗДІЛ 2

ЗОБРАЖЕННЯ ЛІНІЙНИХ І АФІННИХ ЗА КЕРУВАННЯМ СИСТЕМ У ВИГЛЯДІ РЯДІВ ІТЕРОВАНИХ ІНТЕГРАЛІВ І НЕЛІНІЙНИХ СТЕПЕНЕВИХ МОМЕНТІВ

У даному розділі розглядаються два класи нелінійних керованих систем — системи, лінійні за керуванням, і системи, афінні за керуванням (в околі точки спокою). Для кожного класу вводиться і обговорюється зображення системи у вигляді ряду функціоналів зі сталими векторними коефіцієнтами. Вводяться і обговорюються відповідні вільні алгебри.

Основні результати розділу містяться в роботах [35, 132, 134, 137].

2.1 Системи, лінійні за керуванням, і їх зображення у вигляді ряду ітерованих інтегралів

2.1.1 Відображення в кінець траєкторії і його зображення у вигляді ряду

У цьому підрозділі ми розглядаємо клас систем, лінійних за керуванням, вигляду

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{m} u_i X_i(x), \quad x \in U(0) \subset \mathbb{R}^n, \ u_1, \ldots, u_m \in \mathbb{R}, \tag{2.1}$$

де $X_1(x), \ldots, X_m(x)$ — дійсно-аналітичні векторні поля в деякому околі нуля $U(0) \subset \mathbb{R}^n$ (точка нуль обрана лише для зручності). Далі ми переважно цікавимось поведінкою траєкторій системи (2.1), що починаються в нулі,

$$x(0) = 0. \tag{2.2}$$

Опишемо множину допустимих керувань. Для довільного $\theta > 0$ будемо використовувати позначення $L_\infty([0, \theta]; \mathbb{R}^m)$ для простору вимірних, майже всюди обмежених вектор-функцій $u(t) = (u_1(t), \dots, u_m(t))$, $t \in [0, \theta]$ з нормою $\|u\| = \operatorname*{ess\,sup}_{t\in[0,\theta]} \Big(\sum_{i=1}^{m} u_i^2(t)\Big)^{1/2}$. Нехай B^θ позначає одиничну кулю в цьому просторі:

$$B^\theta = \{u(t){=}(u_1(t), \dots, u_m(t)){\in} L_\infty([0, \theta]; \mathbb{R}^m) : \sum_{i=1}^{m} u_i^2(t) \le 1 \text{ м.в.}, t \in [0, \theta]\}.$$

Ми будемо обирати керування, які належать B^θ.

Нехай числа $\alpha > 0$, $M > 0$ є такими, що $\{x : \|x\| < \alpha\} \subset U(0)$ і $\|X_i(x)\| \le M$, $i = 1, \dots, m$, при $\|x\| < \alpha$. Оберемо $\theta \in (0, T_0)$, де $T_0 = \frac{\alpha}{mM}$. Розглянемо задачу Коші (2.1), (2.2) з довільним керуванням $u \in B^\theta$, $\theta > 0$. За теоремою Каратеодорі [41] існує єдиний розв'язок $x(t) \in U(0)$ цієї задачі на відрізку $t \in [0, \theta]$.

Означення 2.1. *Нехай $x(t; u)$ позначає розв'язок задачі Коші (2.1), (2.2) для будь-якого $\theta \in (0, T_0)$ і $u \in B^\theta$. Відображення $\mathcal{E}_{X_1,\dots,X_m}$, яке переводить пару (θ, u) до кінцевої точки траєкторії, тобто*

$$\mathcal{E}_{X_1,\dots,X_m}(\theta, u) = x(\theta; u),$$

ми називаємо відображенням у кінець траєкторії для системи (2.1) в нулі.

У дисертації ми вивчаємо локальні (при малих θ) властивості цього відображення. Відправною точкою нашого аналізу є теорема 1.3 (М. Фліс, [70]), яка дає опис відображення $\mathcal{E}_{X_1,\dots,X_m}(\theta, u)$ безпосередньо через θ і u, без використання траєкторії $x(t; u)$. А саме, з (1.35) випливає зображення $\mathcal{E}_{X_1,\dots,X_m}(\theta, u)$ у вигляді ряду

$$\mathcal{E}_{X_1,\dots,X_m}(\theta, u) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{1\le i_1,\dots,i_k \le m} c_{i_1\dots i_k} \eta_{i_1\dots i_k}(\theta, u), \tag{2.3}$$

який абсолютно збігається для будь-якого $\theta \in (0, T)$ і будь-якого $u \in B^\theta$ (для деякого $T \in (0, T_0)$), де ітеровані інтеграли $\eta_{i_1\dots i_k}(\theta, u)$ мають вигляд

$$\eta_{i_1\dots i_k}(\theta, u) = \int_0^\theta \int_0^{\tau_1} \cdots \int_0^{\tau_{k-1}} u_{i_1}(\tau_1) u_{i_2}(\tau_2) \cdots u_{i_k}(\tau_k) d\tau_k \cdots d\tau_2 d\tau_1, \tag{2.4}$$

а $c_{i_1\dots i_k}$ є сталими векторними коефіцієнтами, що можуть бути знайдені за формулами

$$c_{i_1\dots i_k} = X_{i_k} X_{i_{k-1}} \cdots X_{i_1} E(0). \tag{2.5}$$

Нагадаємо, що $E(x) = x$ є тотожним відображенням.

Пояснимо детальніше формулу (2.5). Векторні поля X_i у правій частині ми розуміємо як диференціальні оператори першого порядку, що діють на (дійсно-аналітичні) функції як $X_i\phi = \phi_x X_i$. Тоді композиція k таких операторів $X_{i_k} X_{i_{k-1}} \cdots X_{i_1}$ є диференціальним оператором k-го порядку. Тут і далі ми розглядаємо дію таких операторів на вектор-функції, вважаючи цю дію покомпонентною.

Рівність (2.4) означає, що ітеровані інтеграли залежать від θ та u. Далі ми розглядаємо їх як функціонали від u для довільного фіксованого θ. У наступному пункті ми детальніше обговоримо зміст цього поняття.

Міркування щодо отримання зображення (2.3) наведені у додатку Б.1.

Коротко обговоримо зображення (2.3). Права частина включає об'єкти двох типів. Об'єкти першого типу — це сталі коефіцієнти, вектори з $\mathbb{R}^n$ вигляду (2.5). Вони задаються векторними полями $X_1, \dots, X_m$ (точніше, значеннями цих векторних полів і їх похідних в нулі) і залежать від локальних координат. Об'єкти другого типу — це ітеровані інтеграли (2.4). Вони не залежать від системи і є спільними для всіх систем вигляду (2.1). Виявляється, що множина ітерованих інтегралів утворює вільну асоціативну алгебру; ми вводимо її у наступному підрозділі.

2.1.2 Алгебра ітерованих інтегралів

У цьому пункті ми обговорюємо алгебру ітерованих інтегралів і її абстрактний аналог — вільну градуйовану асоціативну алгебру; у нелінійній теорії керування такі алгебри були введені і застосовані М. Флісом [70].

Спочатку наведемо точне означення ітерованих інтегралів.

Означення 2.2. *Нехай задані додатне число $\theta > 0$, натуральне число $k \geq 1$ і натуральні числа $1 \leq i_1, \dots, i_k \leq m$. Ітерованим інтегралом*

$\eta_{i_1\dots i_k}(\theta,\cdot)$ *називається функціонал* $\eta_{i_1\dots i_k}(\theta,\cdot) : B^\theta \to \mathbb{R}$, *що задається формулою* (2.4).

Лінійна оболонка (над $\mathbb{R}$) усіх ітерованих інтегралів з операцією *конкатенації*

$$\eta_{i_1\dots i_k}(\theta,\cdot) \vee \eta_{j_1\dots j_s}(\theta,\cdot) = \eta_{i_1\dots i_k j_1\dots j_s}(\theta,\cdot) \tag{2.6}$$

утворює асоціативну алгебру, причому однократні інтеграли $\eta_i(\theta,\cdot)$, $i = 1,\dots,m$, є генераторами цієї алгебри:

$$\eta_{i_1\dots i_k}(\theta,\cdot) = \eta_{i_1}(\theta,\cdot) \vee \dots \vee \eta_{i_k}(\theta,\cdot). \tag{2.7}$$

Тут ми використали позначку $\vee$ для операції конкатенації, щоб відрізняти її від добутку інтегралів як дійсних чисел (коли конкретна функція $u \in B^\theta$ підставлена до інтегралу).

Далі ми часто будемо мати справу з керуваннями, які задані на різних інтервалах. Для зручності введемо наступне позначення.

Позначення 2.1. *Для будь-якого* $\alpha > 0$ *і будь-якого* $u(t)$, $t \in [0,\beta]$, *позначимо* $u^\alpha(t) = u(\alpha t)$, $t \in [0, \frac{\beta}{\alpha}]$.

Зокрема, для будь-якого $\theta > 0$ маємо $u(t) = u^\theta(\frac{t}{\theta})$, $t \in [0,\theta]$. Беручи це до уваги, перепишемо ітерований інтеграл вигляду (2.4) наступним чином:

$$\eta_{i_1\dots i_k}(\theta,u) = \int_0^\theta \int_0^{\tau_1} \cdots \int_0^{\tau_{k-1}} u_{i_1}(\tau_1)u_{i_2}(\tau_2)\cdots u_{i_k}(\tau_k)d\tau_k\cdots d\tau_2 d\tau_1 =$$
$$= \int_0^\theta \int_0^{\tau_1} \cdots \int_0^{\tau_{k-1}} u^\theta_{i_1}(\tfrac{\tau_1}{\theta})u^\theta_{i_2}(\tfrac{\tau_2}{\theta})\cdots u^\theta_{i_k}(\tfrac{\tau_k}{\theta})d\tau_k\cdots d\tau_2 d\tau_1 =$$
$$= \theta^k \int_0^1 \int_0^{t_1} \cdots \int_0^{t_{k-1}} u^\theta_{i_1}(t_1)u^\theta_{i_2}(t_2)\cdots u^\theta_{i_k}(t_k)dt_k\cdots dt_2 dt_1 = \theta^k \eta_{i_1\dots i_k}(1,u^\theta).$$

Ця рівність виконується для всіх $u \in B^\theta$ або, що те ж саме, для всіх $u^\theta \in B^1$. Іншими словами, для довільних $\theta > 0$ і $u \in B^1$ маємо

$$\eta_{i_1\dots i_k}(\theta, u^{1/\theta}) = \theta^k \eta_{i_1\dots i_k}(1,u).$$

Отже, k дорівнює асимптотичному порядку ітерованого інтеграла $\eta_{i_1\dots i_k}(\theta,u^{1/\theta})$ по θ при $\theta \to 0$ для довільного фіксованого керування $u \in B^1$, такого що $\eta_{i_1\dots i_k}(1,u) \neq 0$.

Означення 2.3. *Ми називаємо k порядком ітерованого інтеграла $\eta_{i_1\dots i_k}(\theta,\cdot)$.*

Це означення відповідає порядку, в якому додаються члени ряду (2.3).

Означення 2.4. *Нехай $\theta > 0$ фіксоване. Розглянемо асоціативну алгебру $\mathcal{F}_\theta$ функціоналів (над $\mathbb{R}$)*

$$\mathcal{F}_\theta = \mathrm{Lin}\{\eta_{i_1\dots i_k}(\theta,\cdot) : \ k \ge 1, \ 1 \le i_1,\dots,i_k \le m\}$$

з операцією (2.6). Ми називаємо $\mathcal{F}_\theta$ алгеброю Фліса або алгеброю ітерованих інтегралів.

Однократні інтеграли $\eta_i(\theta,\cdot)$, $i = 1,\dots,m$ є генераторами $\mathcal{F}_\theta$; це означає, що $\mathcal{F}_\theta$ може бути отримана з цих інтегралів за допомогою операції добутку і лінійних операцій (див. (2.7)).

Крім того, алгебра $\mathcal{F}_\theta$ є фільтрованою: природна фільтрація задається послідовністю підпросторів $S_q = \sum\limits_{k=1}^{q} \mathcal{F}_\theta^k$, $q \ge 1$, де

$$\mathcal{F}_\theta^k = \mathrm{Lin}\{\eta_{i_1\dots i_k}(\theta,\cdot) \ : \ 1 \le i_1,\dots,i_k \le m\}, \qquad k \ge 1.$$

З наступної леми випливає, що алгебра $\mathcal{F}_\theta$ є вільною.

Лема 2.1. ([70]) *Нехай $\theta > 0$ фіксоване. Зафіксуємо довільну скінченну підмножину $M \subset \{(i_1,\dots,i_k) : k \ge 1, 1 \le i_1,\dots,i_k \le m\}$ і припустимо, що*

$$\sum_{(i_1,\dots,i_k)\in M} \alpha_{i_1\dots i_k}\eta_{i_1\dots i_k}(\theta,u) = 0 \tag{2.8}$$

для всіх $u \in B^\theta$, де $\alpha_{i_1\dots i_k} \in \mathbb{R}$. Тоді всі коефіцієнти $\alpha_{i_1\dots i_k}$ дорівнюють нулю.

Як наслідок, для будь-якого $\theta > 0$ алгебра функціоналів $\mathcal{F}_\theta$ є вільною, і зображення

$$\mathcal{F}_\theta = \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{F}_\theta^k \tag{2.9}$$

задає градуювання.

Наслідок 2.1. *Нехай $\theta > 0$ фіксоване. Припустимо, що*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{1 \le i_1, \dots, i_k \le m} \alpha_{i_1 \dots i_k} \eta_{i_1 \dots i_k}(\theta, u) = 0 \tag{2.10}$$

для всіх $u \in B^{\theta}$, де коефіцієнти $\alpha_{i_1 \dots i_k} \in \mathbb{R}$ задовольняють оцінку $|\alpha_{i_1 \dots i_k}| \le C_1 C_2^k k!$, $C_1, C_2 > 0$. Тоді всі коефіцієнти $\alpha_{i_1 \dots i_k}$ дорівнюють нулю.

Як наслідок, зображення $\mathcal{E}_{X_1, \dots, X_m}(\theta, u)$ у вигляді ряду ітерованих інтегралів є єдиним.

Доведення леми 2.1 і наслідку 2.1 наведені у додатку Б.1.

Таким чином, за лемою 2.1, алгебра функціоналів $\mathcal{F}_{\theta}$ є вільною (для будь-якого $\theta > 0$). Це дає підстави розглядати, разом з алгеброю ітерованих інтегралів, *абстрактну* вільну асоціативну алгебру, що породжується m елементами.

Розглянемо множину m абстрактних вільних елементів (літер) і позначимо їх $\eta_1, \dots, \eta_m$. Рядки літер (слова) позначимо $\eta_{i_1 \dots i_k} = \eta_{i_1} \cdots \eta_{i_k}$. На множині слів введемо операцію конкатенації

$$\eta_{i_1 \dots i_k} \cdot \eta_{j_1 \dots j_s} = \eta_{i_1 \dots i_k j_1 \dots j_s}.$$

Нижче ми, як правило, не пишемо позначку для цієї операції.

Усі скінченні лінійні комбінації слів (над $\mathbb{R}$) утворюють вільну асоціативну алгебру з природним градуюванням $\mathcal{F} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathcal{F}^k$, де підпростори $\mathcal{F}^k$ визначаються як лінійні оболонки добутків k літер:

$$\mathcal{F}^k = \mathrm{Lin}\{\eta_{i_1 \dots i_k} = \eta_{i_1} \cdots \eta_{i_k} : \ 1 \le i_1, \dots, i_k \le m\}, \qquad k \ge 1. \tag{2.11}$$

Зазначимо, що це градуювання породжується таким порядком літер: $\mathrm{ord}(\eta_1) = \cdots = \mathrm{ord}(\eta_m) = 1$.

Іншими словами, $\mathcal{F}$ є асоціативною $\mathbb{R}$-алгеброю формальних поліномів від m незалежних змінних, які не комутують. Зауважимо, що алгебра $\mathcal{F}$ є ізоморфною до $\mathcal{F}_{\theta}$ для будь-якого $\theta > 0$.

Беручи до уваги градуйовану структуру, введемо наступне означення.

Означення 2.5. *Ми кажемо, що елемент $a \in \mathcal{F}$ має порядок k, і пишемо* $\mathrm{ord}(a) = k$, *якщо* $a \in \mathcal{F}^k$. *Якщо елемент має порядок, ми кажемо, що він є однорідним.*

Підпростори (2.11) *ми теж називатимемо однорідними.*

Іноді буває зручно доповнити алгебру $\mathcal{F}$ одиничним елементом 1 (порожнім словом) і розглядати алгебру з одиницею

$$\mathcal{F}^e = \mathcal{F} + \mathbb{R},$$

вважаючи, що $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$ для всіх $a \in \mathcal{F}^e$. Далі ми вважатимемо, що $\eta_{i_p \dots i_q} = 1$, якщо $p > q$.

Важливу роль у подальшому аналізі відіграє вільна алгебра Лі $\mathcal{L}$, яка породжується тими самими елементами $\eta_1, \dots, \eta_m$, з операцією, що визначається як комутатор в $\mathcal{F}$, тобто $[\ell_1, \ell_2] = \ell_1\ell_2 - \ell_2\ell_1$ (дужки Лі). Алгебра Лі $\mathcal{L}$ успадковує градуювання $\mathcal{L} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathcal{L}^k$, де $\mathcal{L}^k = \mathcal{L} \cap \mathcal{F}^k$, $k \geq 1$. Деякі властивості алгебр $\mathcal{F}$ і $\mathcal{L}$ вказані у підрозділі 1.3.

Зауваження 2.1. *Далі ми будемо розглядати формальні степеневі ряди елементів з $\mathcal{F}$ над $\mathbb{R}$ або $\mathbb{R}^n$. А саме, якщо сума у виразі $a = \sum \alpha_{i_1 \dots i_k} \eta_{i_1 \dots i_k}$ (де $\alpha_{m_1 \dots m_k} \in \mathbb{R}$ або $\alpha_{m_1 \dots m_k} \in \mathbb{R}^n$) містить нескінченну кількість доданків, ми вважатимемо, що a є формальним степеневим рядом.*

Таким чином, разом із відображенням у кінець траєкторії і його зображенням у вигляді ряду (2.3) ми можемо розглядати його абстрактний аналог — формальний степеневий ряд елементів $\mathcal{F}$ (з коефіцієнтами в $\mathbb{R}^n$) вигляду

$$\mathcal{E}_{X_1, \dots, X_m} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_k \leq m} c_{i_1 \dots i_k} \eta_{i_1 \dots i_k}. \tag{2.12}$$

З наслідку 2.1 випливає, що існує єдиний формальний степеневий ряд (2.12), який відповідає відображенню $\mathcal{E}_{X_1, \dots, X_m}(\theta, u)$, або, що те ж саме, задачі Коші (2.1), (2.2). Нижче буде даний опис усіх таких формальних рядів.

2.1.3 Заміна змінних і тасуючий добуток

Припустимо, що в системі (2.1) зроблено заміну змінних. У цьому підрозділі ми вивчаємо перетворення ряду ітерованих інтегралів (2.3), яке породжується цією заміною змінних.

А саме, припустимо, що ми знаємо зображення для ряду $\mathcal{E}_{X_1,\dots,X_m}$ вигляду (2.3). Коефіцієнти $c_{i_1\dots i_k}$ за наслідком 2.1 можуть бути знайдені через векторні поля $X_1,\dots,X_m$ за формулою (2.5). Але ми тимчасово забудемо про це; у даному міркуванні $c_{i_1\dots i_k}$ — деякі фіксовані вектори.

Нехай $y = Q(x)$ — дійсно-аналітична заміна змінних, задана в деякому околі нуля, така, що $Q(0) = 0$. Тоді в нових координатах вихідна система набуває вигляду

$$\dot y = \sum_{i=1}^{m} u_i Y_i(y), \quad y \in \widetilde{U}(0) \subset \mathbb{R}^n, \tag{2.13}$$

де $Y_i(y) = Q'(x)X_i(x)|_{x=Q^{-1}(y)}$, $i = 1,\dots,m$. Для довільного досить малого $\theta > 0$ і довільного $u \in B^\theta$ отримуємо

$$\mathcal{E}_{Y_1,\dots,Y_m}(\theta,u) = Q(\mathcal{E}_{X_1,\dots,X_m}(\theta,u)).$$

Знайдемо зображення у вигляді ряду відображення $\mathcal{E}_{Y_1,\dots,Y_m}(\theta,u)$ для системи в нових змінних (2.13). Ми зробимо це, не користуючись явним виглядом векторних полів $Y_i(y)$. Розкладемо Q в ряд Тейлора, $Q(x) = \sum\limits_{q=1}^{\infty}\frac{1}{q!}Q^{(q)}(0)x^q$, де для зручності ми використовуємо позначення

$$Q^{(q)}(0)x^q = \sum_{j_1+\dots+j_n=q}\frac{q!}{j_1!\cdots j_n!}\frac{\partial^{j_1+\dots+j_n}Q(0)}{\partial x_1^{j_1}\cdots\partial x_n^{j_n}}\,x_1^{j_1}\cdots x_n^{j_n}. \tag{2.14}$$

Отримуємо наступне зображення:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{Y_1,\dots,Y_m}(\theta,u) &= \sum_{q=1}^{\infty}\frac{1}{q!}Q^{(q)}(0)(\mathcal{E}_{X_1,\dots,X_m}(\theta,u))^q = \\ &= \sum \alpha^{j_1\dots j_n}_{i_1^1\dots i_{k_1}^1\dots i_1^n\dots i_{k_n}^n}(\eta_{i_1^1\dots i_{k_1}^1}(\theta,u))^{j_1}\cdots(\eta_{i_1^n\dots i_{k_n}^n}(\theta,u))^{j_n},\end{aligned} \tag{2.15}$$

де

$$\alpha^{j_1\dots j_n}_{i_1^1\dots i_{k_1}^1\dots i_1^n\dots i_{k_n}^n} = \frac{1}{j_1!\cdots j_n!}\frac{\partial^{j_1+\dots+j_n}Q(0)}{\partial x_1^{j_1}\cdots\partial x_n^{j_n}}\,(c_{i_1^1\dots i_{k_1}^1})_1^{j_1}\cdots(c_{i_1^n\dots i_{k_n}^n})_n^{j_n},$$

$(v)_i$ означає i-ту компоненту вектора $v \in \mathbb{R}^n$, а сума в останньому виразі (2.15) береться по всіх $j_1, \dots, j_n \geq 0$, усіх $k_1, \dots, k_n \geq 1$ та всіх $1 \leq i_1^1, \dots, i_{k_n}^n \leq m$. (Тут ми не обговорюємо збіжність ряду, а цікавимося лише формальними перетвореннями; збіжність остаточного ряду гарантується аналітичністю векторних полів $X_1, \dots, X_m$ і перетворення Q і єдиністю ряду ітерованих інтегралів.)

Тепер ми зобразимо $\mathcal{E}_{Y_1,\dots,Y_m}(\theta, u)$ у вигляді ряду ітерованих інтегралів зі сталими векторними коефіцієнтами. Для цього нам треба виразити добутки ітерованих інтегралів як лінійні комбінації ітерованих інтегралів.

Як приклад, підрахуємо добуток двох ітерованих інтегралів (підкреслимо, що мається на увазі добуток їх як дійсних чисел, а не як елементів алгебри $\mathcal{F}_\theta$). Спочатку зауважимо, що

$$\eta_{p_1\dots p_q}(\theta, u) = \int\limits_{0 \leq \tau_q \leq \dots \leq \tau_1 \leq \theta} \prod_{j=1}^{q} u_{p_j}(\tau_j) d\tau_q \cdots d\tau_1.$$

Отже, маємо:

$$\eta_{i_1\dots i_k}(\theta, u)\, \eta_{i_{k+1}\dots i_{k+r}}(\theta, u) =$$

$$= \int\limits_{0 \leq \tau_k \leq \dots \leq \tau_1 \leq \theta} \prod_{j=1}^{k} u_{i_j}(\tau_j) d\tau_k \cdots d\tau_1 \int\limits_{0 \leq \tau_{k+r} \leq \dots \leq \tau_{k+1} \leq \theta} \prod_{j=k+1}^{r} u_{i_j}(\tau_j) d\tau_{k+r} \cdots d\tau_{k+1}. \tag{2.16}$$

Для того, щоб помножити два інтеграли по областях $0 \leq \tau_k \leq \dots \leq \tau_1 k \leq \theta$ і $0 \leq \tau_{k+r} \leq \dots \leq \tau_{k+1} \leq \theta$, ми мусимо перетасувати дві множини змінних $\{\tau_1, \dots, \tau_k\}$ і $\{\tau_{k+1}, \dots, \tau_{k+r}\}$ усіма можливими способами, зберігаючи внутрішній порядок у кожній множині.

Ця операція відповідає означенню тасуючого добутку. Дійсно, з означення 1.3 випливає, що

$$= \int\limits_{0 \leq \tau_k \leq \dots \leq \tau_1 \leq \theta} \prod_{j=1}^{k} u_{i_j}(\tau_j) d\tau_k \cdots d\tau_1 \int\limits_{0 \leq \tau_{k+r} \leq \dots \leq \tau_{k+1} \leq \theta} \prod_{j=k+1}^{r} u_{i_j}(\tau_j) d\tau_{k+r} \cdots d\tau_{k+1} =$$

$$= \sum_{(j_1,\dots,j_{k+r}) \in S_{k,r}} \int\limits_{0 \leq \tau_{j_{k+r}} \leq \dots \leq \tau_{j_1} \leq \theta} \prod_{q=1}^{k+r} u_{i_{j_q}}(\tau_{j_q}) d\tau_{j_{k+r}} \cdots d\tau_{j_1},$$

отже, з (2.16) випливає

$$\eta_{i_1\dots i_k}(\theta,u)\,\eta_{i_{k+1}\dots i_{k+r}}(\theta,u)=\sum_{(j_1,\dots,j_{k+r})\in S_{k,r}}\eta_{i_{j_1}\dots i_{j_{k+r}}}(\theta,u), \tag{2.17}$$

де $S_{k,r}$ — множина тасуючих перестановок (означення 1.3). За означенням 1.4, тасуючий добуток ш в алгебрі $\mathcal{F}$ задається на базисних елементах формулою

$$\eta_{i_1\dots i_k}\,ш\,\eta_{i_{k+1}\dots i_{k+r}}=\sum_{(j_1,\dots,j_{k+r})\in S_{k,r}}\eta_{i_{j_1}\dots i_{j_{k+r}}}$$

і продовжується на всю алгебру $\mathcal{F}$ за лінійністю.

Таким чином, *добуток ітерованих інтегралів (як чисел) відповідає тасуючому добутку в абстрактній алгебрі*:

$$\eta_{i_1\dots i_k}(\theta,u)\,\eta_{s_1\dots s_r}(\theta,u)=(\eta_{i_1\dots i_k}\,ш\,\eta_{s_1\dots s_r})(\theta,u),$$

де в правій частині мається на увазі, що спочатку знаходиться тасуючий добуток абстрактних елементів $\eta_{i_1\dots i_k}$ і $\eta_{s_1\dots s_r}$ в $\mathcal{F}$, а потім отримані абстрактні елементи $\mathcal{F}$ замінюються відповідними елементами $\mathcal{F}_\theta$. Зазначимо, що для знаходження тасуючого добутку конкретних елементів зручніше користуватися означенням 1.5.

Повернемося до відображення (2.15). Нагадаємо, що зображення $\mathcal{E}_{Y_1,\dots,Y_m}$ у вигляді ряду ітерованих інтегралів є єдиним завдяки наслідку 2.1. Отже, з зауваження 2.1 і формули (2.15) випливає наступний опис формального ряду $\mathcal{E}_{Y_1,\dots,Y_m}$:

$$\mathcal{E}_{Y_1,\dots,Y_m}=Q(\mathcal{E}_{X_1,\dots,X_m})=\sum_{q=1}^{\infty}\frac{1}{q!}Q^{(q)}(0)(\mathcal{E}_{X_1,\dots,X_m})^{ш q}=$$

$$=\sum_{q=1}^{\infty}\sum_{j_1+\dots+j_n=q}\frac{1}{j_1!\cdots j_n!}\frac{\partial^{j_1+\dots+j_n}Q(0)}{\partial x_1^{j_1}\cdots\partial x_n^{j_n}}(\mathcal{E}_{X_1,\dots,X_m})_1^{ш j_1}\,ш\cdots ш\,(\mathcal{E}_{X_1,\dots,X_m})_n^{ш j_n}, \tag{2.18}$$

де тасуючий добуток рядів підраховується поелементно і $a^{ш q}=a\,ш\cdots ш\,a$ (q разів) для $q\geq 1$, $a^{ш 0}=1$. Тут і далі при застосуванні дійсно-аналітичного перетворення до рядів елементів з $\mathcal{F}$ ми вважаємо, що всі поліноми є поліномами відносно тасуючого добутку.

Таким чином, за допомогою тасуючого добутку можна знаходити зображення системи у вигляді ряду після заміни змінних прямо з ряду для початкової системи, без знаходження вигляду системи у нових змінних, за допомогою суто алгебраїчної процедури.

Приклад 2.1. Розглянемо систему з двома керуваннями

$$\dot{x}_1 = u_1, \quad \dot{x}_2 = x_1 u_2, \quad \dot{x}_3 = \tfrac{1}{6} x_1^3 u_2, \tag{2.19}$$

тобто $X_1(x) = (1,0,0)^\mathsf{T}$, $X_2(x) = (0, x_1, \frac{1}{6}x_1^3)^\mathsf{T}$. Спочатку знайдемо зображення у вигляді ряду (2.3) для відображення $\mathcal{E}_{X_1,X_2}$. Користуючись спеціальним «трикутним» виглядом системи, ми можемо знайти це зображення явно, інтегруючи рівняння послідовно. Оскільки $x(0) = 0$, отримуємо

$$x_1(\theta) = \int_0^\theta u_1(\tau) d\tau,$$

$$x_2(\theta) = \int_0^\theta u_2(\tau_1) x_1(\tau_1) d\tau_1 = \int_0^\theta u_2(\tau_1) \int_0^{\tau_1} u_1(\tau_2) d\tau_2 d\tau_1 = \int_0^\theta \int_0^{\tau_1} u_2(\tau_1) u_1(\tau_2) d\tau_2 d\tau_1,$$

$$x_3(\theta) = \int_0^\theta u_2(\tau_1) \tfrac{1}{6} x_1^3(\tau_1) d\tau_1 = \int_0^\theta u_2(\tau_1) \tfrac{1}{6} \left(\int_0^{\tau_1} u_1(\tau_2) d\tau_2 \right)^3 d\tau_1 =$$

$$= \int_0^\theta \int_0^{\tau_1} \int_0^{\tau_2} \int_0^{\tau_3} u_2(\tau_1) u_1(\tau_2) u_1(\tau_3) u_1(\tau_4) d\tau_4 d\tau_3 d\tau_2 d\tau_1.$$

Беручи до уваги означення ітерованих інтегралів (2.4), маємо

$$\mathcal{E}_{X_1,X_2} = (\eta_1, \eta_{21}, \eta_{2111})^\mathsf{T}.$$

Або можна легко перевірити, що всі вектори (2.5) дорівнюють нулю, крім $c_1 = e_1$, $c_{21} = e_2$ і $c_{2111} = e_3$.

Тепер продемонструємо, як це зображення перетворюється при заміні змінних. Наприклад, розглянемо

$$y = Q(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 - x_2^2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Зображення у вигляді ряду для системи у нових змінних може бути знайдене явно, без знаходження вигляду самої системи у нових змінних:

$$\mathcal{E}_{Y_1,Y_2} = Q(\mathcal{E}_{X_1,X_2}) = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_{21} - \eta_{21} \sqcup\!\sqcup\, \eta_{21} \\ \eta_{2111} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_{21} - 2\eta_{2121} - 4\eta_{2211} \\ \eta_{2111} \end{pmatrix}.$$

Запишемо систему в нових змінних. Очевидно, $x_1 = y_1$ і $x_3 = y_3$. Знайдемо x_2 з рівняння $y_2 = x_2 - x_2^2$. Оскільки заміна змінних відображає окіл нуля до околу нуля, маємо $x_2 = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 - 4y_2})$. Отже,

$$\begin{aligned} &\dot{y}_1 = u_1, \\ &\dot{y}_2 = y_1 u_2 - 2y_1 u_2 \left(\tfrac{1}{2}(1 - \sqrt{1 - 4y_2})\right) = y_1\sqrt{1 - 4y_2}\, u_2, \\ &\dot{y}_3 = \tfrac{1}{6} y_1^3 u_2, \end{aligned}$$

тобто

$$Y_1(y) = (1, 0, 0)^\mathsf{T},\ Y_2(y) = (0, y_1\sqrt{1 - 4y_2}, \tfrac{1}{6}y_1^3)^\mathsf{T}.$$

Тепер вигляд $\mathcal{E}_{Y_1,Y_2}$ може бути знайдений і за допомогою векторних полів $Y_1(y)$, $Y_2(y)$, проте цей шлях набагато складніший навіть у такому простому прикладі.

Розглянемо іншу заміну змінних:

$$y = Q(x) = \begin{pmatrix} 3x_1^5 - 25x_1^3 + 60x_1 \\ x_1 + x_2 \\ x_1x_2 - x_3 \end{pmatrix}.$$

Оскільки рівняння $y_1 = 3x_1^5 - 25x_1^3 + 60x_1$ не можна розв'язати в радикалах [6], векторні поля $Y_1(y)$, $Y_2(y)$ не можуть бути записані явно (в радикалах). Отже, виникають певні трудноші при знаходженні зображення $\mathcal{E}_{Y_1,Y_2}$ у вигляді ряду за допомогою Y_1, Y_2. Проте, використовуючи явну формулу для $\mathcal{E}_{Y_1,Y_2} = Q(\mathcal{E}_{X_1,X_2})$, ми легко знаходимо

$$\mathcal{E}_{Y_1,Y_2}{=}Q(\mathcal{E}_{X_1,X_2}){=}\begin{pmatrix} 3\eta_1^{\sqcup\!\sqcup 5} - 25\eta_1^{\sqcup\!\sqcup 3} + 60\eta_1 \\ \eta_1 + \eta_{21} \\ \eta_1 \sqcup\!\sqcup\, \eta_{21} - \eta_{2111} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 360\eta_{11111} - 150\eta_{111} + 60\eta_1 \\ \eta_1 + \eta_{21} \\ \eta_{121} + 2\eta_{211} - \eta_{2111} \end{pmatrix}.$$

2.1.4 Зв'язок асоціативної алгебри диференціальних операторів з алгеброю ітерованих інтегралів

Опишемо зв'язок між алгеброю диференціальних операторів F і алгеброю Лі векторних полів L, введеними в пункті 1.2.1 (стор. 43), і вільними алгебрами $\mathcal{F}$ і $\mathcal{L}$. Розглянемо лінійний оператор $H : \mathcal{F} \to F$, що визначений на базисних елементах

$$H(\eta_{i_1 \dots i_k}) = X_{i_k} \cdots X_{i_1}, \quad k \geq 1, \quad 1 \leq i_1, \dots, i_k \leq m. \tag{2.20}$$

Очевидно,

$$H(a_1 a_2) = H(a_2) H(a_1) \ \text{ для будь-яких } \ a_1, a_2 \in \mathcal{F},$$

отже, H є анти-гомоморфізмом. Крім того, H відображає алгебру Лі $\mathcal{L}$ на алгебру Лі L і задовольняє рівність

$$H([\ell_1, \ell_2]) = [H(\ell_2), H(\ell_1)] \ \text{ для будь-яких } \ \ell_1, \ell_2 \in \mathcal{L},$$

тобто обмеження H на $\mathcal{L}$ є анти-гомоморфізмом алгебр Лі $H : \mathcal{L} \to L$.

Розглянемо лінійне відображення $c : \mathcal{F} \to \mathbb{R}^n$, що задається таким чином:

$$c(a) = H(a) E(0), \quad a \in \mathcal{F}.$$

Іншими словами, c задається на базисних елементах $\mathcal{F}$ формулою

$$c(\eta_{i_1 \dots i_k}) = X_{i_k} \cdots X_{i_1} E(0) = c_{i_1 \dots i_k}, \tag{2.21}$$

де $c_{i_1 \dots i_k}$ — векторні коефіцієнти $\eta_{i_1 \dots i_k}$ у ряді (2.3), тобто

$$\mathcal{E}_{X_1, \dots, X_m}(\theta, u) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_k \leq m} c(\eta_{i_1 \dots i_k}) \eta_{i_1 \dots i_k}(\theta, u). \tag{2.22}$$

Умова Рашевського-Чжоу (1.36) набуває вигляду

$$c(\mathcal{L}) = \mathbb{R}^n. \tag{2.23}$$

Нагадаємо, що система (2.1), яка задовольняє умову Рашевського-Чжоу (2.23), називається повністю неголономною. Далі ми розглядатимемо тільки повністю неголономні системи.

Нагадаємо ще два поняття [50].

Означення 2.6. *Мінімальне число p, для якого має місце рівність*

$$\sum_{k=1}^{p} c(\mathcal{L}^k) = \mathbb{R}^n,$$

називається степенем неголономності системи (2.1). *Нехай*

$$v_k = \dim\, c(\mathcal{L}^1 + \cdots + \mathcal{L}^k),\ \ k = 1, \ldots, p. \tag{2.24}$$

Послідовність $v = (v_1, \ldots, v_p)$ називається вектором зросту системи.

Обидва об'єкти — степінь неголономності і вектор зросту — інваріантні відносно замін змінних і, у певному сенсі, описують поведінку системи в околі початку координат. Проте точний опис цієї поведінки є складнішим питанням. Далі ми розвиваємо техніку, яка дозволяє провести такий локальний аналіз.

Лінійне відображення c, введене вище, індукує певні структури у вільній алгебрі Лі $\mathcal{L}$. Наведемо дві найпростіші властивості.

Лема 2.2. $\mathrm{Ker}(c) \cap \mathcal{L}$ *є підалгеброю Лі в* $\mathcal{L}$.

Доведення. Розглянемо $\ell_1, \ell_2 \in \mathrm{Ker}(c) \cap \mathcal{L}$ і позначимо $Y_i = H(\ell_i)$, $i = 1, 2$. Тоді $c(\ell_i) = Y_i(0) = 0$, $i = 1, 2$, звідки випливає

$$c([\ell_1, \ell_2]) = [H(\ell_2), H(\ell_1)]E(0) =$$

$$= Y_2 Y_1 E(0) - Y_1 Y_2 E(0) = Y_1'(x) Y_2(x)|_{x=0} - Y_2'(x) Y_1(x)|_{x=0} = 0.$$

Це означає, що $[\ell_1, \ell_2] \in \mathrm{Ker}(c)$, що й доводить лему. ∎

Лема 2.3. *Якщо* $\ell \in \mathrm{Ker}(c) \cap \mathcal{L}$, *то* $y\ell \in \mathrm{Ker}(c)$ *для будь-якого* $y \in \mathcal{F}$.

Доведення. Достатньо довести це твердження для довільного базисного елемента $y = \eta_{i_1\ldots i_k}$, де $k \geq 1,\ \ 1 \leq i_1, \ldots, i_k \leq m$. Позначимо $Y = H(\ell)$, тоді $Y(0) = 0$, а отже,

$$c(\eta_{i_1\ldots i_k}\ell) = YX_{i_k}\cdots X_{i_1}E(0) = (X_{i_k}\cdots X_{i_1}E(x))'_x Y(x)|_{x=0} = 0,$$

тобто $\eta_{i_1\ldots i_k}\ell \in \mathrm{Ker}(c)$. Лему доведено. ■

Зазначимо, що лема 2.3 встановлює умову реалізовності ряду у вигляді системи (теорема 1.8). Вона означає, що $\mathrm{Ker}(c)$ містить *лівий ідеал*, який породжується $\mathrm{Ker}(c) \cap \mathcal{L}$, тобто

$$\mathrm{Lin}(\mathcal{F}^e(\mathrm{Ker}(c) \cap \mathcal{L})) \subset \mathrm{Ker}(c).$$

У подальшому буде сконструйований лівий ідеал, що породжується системою і враховує градуювання.

2.2 Системи, афінні за керуванням, і їх зображення у вигляді ряду нелінійних степеневих моментів

2.2.1 Відображення до початку траєкторії і його зображення у вигляді ряду

Розглянемо нелінійні системи, афінні за керуванням, вигляду

$$\dot{x} = a(t,x) + b(t,x)u,\ \ a(t,0) \equiv 0, \tag{2.25}$$

де $a(t,x)$ і $b(t,x)$ — аналітичні векторні поля в деякому околі нуля $(-t_0, t_0) \times U(0) \subset \mathbb{R}^{n+1}$; умова $a(t,0) \equiv 0$ означає, що нуль є точкою спокою системи (точка нуль обрана лише для зручності). Розглянемо задачу потрапляння до нуля, тобто

$$\dot{x} = a(t,x) + b(t,x)u, \quad a(t,0) \equiv 0, \quad x(0) = x^0,\ x(\theta) = 0. \tag{2.26}$$

Будемо вважати, що керування обирається з простору $L_\infty[0,\theta]$ та задовольняє обмеження $|u(t)| \leq 1$ м.в., тобто $u \in B^\theta$, де B^θ — одинична куля простору $L_\infty[0,\theta]$.

Зафіксуємо $\theta > 0$ і розглянемо точки x^0 з околу $U(0)$, які можна перевести до нуля за час θ за допомогою деякого керування $u \in B^\theta$. Розглянемо множину всіх таких керувань і введемо на ній відображення $S_{a,b}(\theta, \cdot)$, яке переводить керування $u(t)$ до відповідної початкової точки x^0:

$$S_{a,b}(\theta, u) = x^0. \tag{2.27}$$

Таким чином, $S_{a,b}(\theta, \cdot)$ є відображенням «до початку траєкторії».

Детальніше, нехай числа $\alpha > 0$, $M > 0$ є такими, що $\{x : \|x\| < \alpha\} \subset U(0)$ і $\|a(t, x)\| \leq M$, $\|b(t, x)\| \leq M$ при $|t| < t_0$, $\|x\| < \alpha$. Оберемо $\theta \in (0, T_0)$, де $T_0 = \min\{t_0, \frac{\alpha}{2M}\}$. Підставимо довільне керування $u(t) \in B^\theta$ у систему (2.25) і обернемо час, $\tau = \theta - t$. Розглянемо задачу Коші

$$\tfrac{d}{d\tau} y = -a(\theta - \tau, y) - b(\theta - \tau, y)u(\theta - \tau), \ y(0) = 0. \tag{2.28}$$

За теоремою Каратеодорі [41] існує єдиний розв'язок $y(\tau) \in U(0)$ задачі (2.28) на відрізку $\tau \in [0, \theta]$. Тоді $x(t) = y(\theta - t)$ задовольняє рівності (2.26) з $u = u(t)$ і $x^0 = y(\theta)$. Це означає, що керування $u(t)$ переводить точку $x^0 = y(\theta)$ до нуля за час θ в силу системи (2.25), тобто $S_{a,b}(\theta, u) = y(\theta)$. Таким чином, при $\theta \in (0, T_0)$ відображення $S_{a,b}(\theta, \cdot)$ визначене на одиничній кулі простору $L_\infty[0, \theta]$, тобто $S_{a,b}(\theta, \cdot) : B^\theta \to U(0)$.

Означення 2.7. *Відображення $S_{a,b}$, яке переводить пару (θ, u) до початкової точки траєкторії (2.26), тобто задовольняє рівність (2.27), ми називаємо відображенням до початку траєкторії для системи (2.25) в нулі.*

Теорема 1.1 описує зображення $S_{a,b}$ у вигляді ряду:

$$S_{a,b}(\theta, u) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\substack{m_1 + \cdots + m_k + k = m \\ k \geq 1, \ m_i \geq 0}} v_{m_1 \ldots m_k} \xi_{m_1 \ldots m_k}(\theta, u), \tag{2.29}$$

де $\xi_{m_1 \ldots m_k}(\theta, u)$ є нелінійними степеневими моментами функції $u(t)$

$$\xi_{m_1 \ldots m_k}(\theta, u) = \int_0^\theta \int_0^{\tau_1} \cdots \int_0^{\tau_{k-1}} \tau_1^{m_1} \tau_2^{m_2} \cdots \tau_k^{m_k} u(\tau_1) u(\tau_2) \cdots u(\tau_k) d\tau_k \cdots d\tau_2 d\tau_1, \tag{2.30}$$

а $v_{m_1\ldots m_k} \in \mathbb{R}^n$ є сталими векторами, які визначаються за формулами (1.23), (1.20), (1.21). Більш того, існують константи $C_1, C_2 > 0$, для яких

$$\|v_{m_1\ldots m_k}\| \le k! C_1 C_2^{m_1+\cdots+m_k+k} \tag{2.31}$$

для всіх $k \ge 1$ і всіх $m_1, \ldots, m_k \ge 0$.

Міркування щодо отримання зображення (2.29) наведені у додатку Б.2.

2.2.2 Алгебра нелінійних степеневих моментів

У цьому пункті ми обговорюємо алгебру нелінійних степеневих моментів і її абстрактний аналог — вільну градуйовану асоціативну алгебру. Ці алгебри було введено у [12, 34, 126].

Означення і результати решти цього підрозділу аналогічні відповідним означенням і результатами підрозділу 2.1, тому ми викладаємо їх більш коротко.

Спочатку наведемо точне означення нелінійних степеневих моментів.

Означення 2.8. *Нехай задані додатне число $\theta > 0$, натуральне число $k \ge 1$ і цілі числа $m_1, \ldots, m_k \ge 0$. Нелінійним степеневим моментом $\xi_{m_1\ldots m_k}(\theta, \cdot)$ називається функціонал $\xi_{m_1\ldots m_k}(\theta, \cdot) : B^\theta \to \mathbb{R}$, що задається формулою* (2.30).

Зауважимо, що при $k = 1$ відповідні функціонали насправді є лінійними відносно u, але ми для зручності включаємо їх до множини нелінійних степеневих моментів.

За позначенням 2.1, для довільного $\theta > 0$ маємо $u(t) = u^\theta(\frac{t}{\theta})$. Ураховуючи це, перепишемо інтеграл (2.30) у такому вигляді:

$$\xi_{m_1\ldots m_k}(\theta, u) = \int_0^\theta \int_0^{\tau_1} \cdots \int_0^{\tau_{k-1}} \prod_{j=1}^k \tau_j^{m_j} u(\tau_j) d\tau_k \cdots d\tau_2 d\tau_1 =$$

$$= \theta^{m_1+\cdots+m_k+k} \int_0^\theta \int_0^{\tau_1} \cdots \int_0^{\tau_{k-1}} \prod_{j=1}^k \left(\tfrac{\tau_j}{\theta}\right)^{m_j} u^\theta\left(\tfrac{\tau_j}{\theta}\right) d\left(\tfrac{\tau_k}{\theta}\right) \cdots d\left(\tfrac{\tau_2}{\theta}\right) d\left(\tfrac{\tau_1}{\theta}\right) =$$

$$= \theta^{m_1+\cdots+m_k+k} \int_0^1 \int_0^{t_1} \cdots \int_0^{t_{k-1}} \prod_{j=1}^k t_j^{m_j} u^\theta(t_j) dt_k \cdots dt_2 dt_1 =$$
$$= \theta^{m_1+\cdots+m_k+k} \xi_{m_1\ldots m_k}(1, u^\theta).$$

Ця рівність виконується для всіх $u \in B^\theta$ або, що те ж саме, для всіх $u^\theta \in B^1$. Іншими словами, для довільних $\theta > 0$ і $u \in B^1$ маємо

$$\xi_{m_1\ldots m_k}(\theta, u^{1/\theta}) = \theta^{m_1+\cdots+m_k+k} \xi_{m_1\ldots m_k}(1, u).$$

Отже, число $m = m_1 + \cdots + m_k + k$ дорівнює асимптотичному порядку нелінійного степеневого моменту $\xi_{m_1\ldots m_k}(\theta, u^{1/\theta})$ по θ при $\theta \to 0$ для довільної функції $u \in B^1$, такої що $\xi_{m_1\ldots m_k}(1, u) \neq 0$.

Означення 2.9. *Число $m = m_1 + \cdots + m_k + k$ називається порядком нелінійного степеневого моменту $\xi_{m_1\ldots m_k}(\theta, \cdot)$.*

Це означення відповідає порядку, в якому додаються члени ряду (2.29).

Означення 2.10. *Зафіксуємо довільне $\theta > 0$ і розглянемо асоціативну алгебру $\mathcal{A}_\theta$ функціоналів (над $\mathbb{R}$)*

$$\mathcal{A}_\theta = \mathrm{Lin}\{\xi_{m_1\ldots m_k}(\theta, \cdot) : \ k \geq 1, \ m_1, \ldots, m_k \geq 0\}$$

з операцією конкатенації

$$\xi_{m_1\ldots m_k}(\theta, \cdot) \vee \xi_{j_1\ldots j_s}(\theta, \cdot) = \xi_{m_1\ldots m_k j_1\ldots j_s}(\theta, \cdot). \tag{2.32}$$

Ми називаємо $\mathcal{A}_\theta$ алгеброю нелінійних степеневих моментів.

Зауважимо, що лінійні моменти $\xi_m(\theta, \cdot)$, $m \geq 0$, є генераторами $\mathcal{A}_\theta$.

Як і в пункті 2.1.2, ми використовуємо позначку $\vee$ для алгебраїчної операції в $\mathcal{A}_\theta$, щоб відрізняти її від добутку інтегралів як дійсних чисел.

Означення 2.11. *Якщо елемент алгебри $\mathcal{A}_\theta$ є лінійною комбінацією нелінійних степеневих моментів порядку m, тобто*

$$a = \sum_{\substack{m_1+\cdots+m_k+k=m \\ k\geq 1, \ m_i \geq 0}} \alpha_{m_1\ldots m_k} \xi_{m_1\ldots m_k}(\theta, \cdot),$$

ми будемо казати, що елемент a має порядок m, і писати $\operatorname{ord}(a) = m$. *Елементи, що мають порядок, ми називатимемо однорідними. Також підпростори елементів однакового порядку*

$$\mathcal{A}_\theta^m = \operatorname{Lin}\{\xi_{m_1\dots m_k}(\theta,\cdot)\ :\ m_1+\dots+m_k+k=m\},\ m\geq 1,$$

ми називатимемо однорідними.

Зауважимо, що послідовність підпросторів $S_q = \sum_{m=1}^{q} \mathcal{A}_\theta^m$, $q \geq 1$, задає природну фільтрацію в алгебрі $\mathcal{A}_\theta$.

Наступна лема означає, що алгебра нелінійних степеневих моментів є *вільною* (для будь-якого $\theta > 0$).

Лема 2.4. [12] *Зафіксуємо довільне $\theta > 0$ і довільну скінченну підмножину $M \subset \{(m_1,\dots,m_k) : k\geq 1, m_1,\dots,m_k \geq 0\}$ і припустимо, що*

$$\sum_{(m_1,\dots,m_k)\in M} \alpha_{m_1\dots m_k}\xi_{m_1\dots m_k}(\theta,u) = 0 \tag{2.33}$$

для всіх $u\in B^\theta$, де $\alpha_{m_1\dots m_k}\in\mathbb{R}$. Тоді всі коефіцієнти $\alpha_{m_1\dots m_k}$ дорівнюють нулю.

Як наслідок, для довільного $\theta > 0$ алгебра нелінійних степеневих моментів $\mathcal{A}_\theta$ є вільною, і зображення

$$\mathcal{A}_\theta = \sum_{m=1}^{\infty} \mathcal{A}_\theta^m$$

задає градуювання.

Наслідок 2.2. *Нехай $\theta > 0$ фіксоване. Припустимо, що*

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\substack{m_1+\dots+m_k+k=m\\ k\geq 1,\ m_i\geq 0}} \alpha_{m_1\dots m_k}\xi_{m_1\dots m_k}(\theta,u) = 0 \tag{2.34}$$

для всіх $u\in B^\theta$, де коефіцієнти $\alpha_{m_1\dots m_k}\in\mathbb{R}$ задовольняють оцінку $|\alpha_{m_1\dots m_k}| \leq C_1 C_2^{m_1+\dots+m_k+k} k!$, $C_1, C_2 > 0$. Тоді всі коефіцієнти $\alpha_{m_1\dots m_k}$ дорівнюють нулю.

Як наслідок, зображення $S_{a,b}(\theta,u)$ у вигляді ряду нелінійних степеневих моментів є єдиним.

Доведення леми 2.4 і наслідку 2.2 наведені у додатку Б.2.

Як і у випадку систем, лінійних за керуванням, розглянемо відповідну *абстрактну* вільну асоціативну градуйовану алгебру.

А саме, розглянемо множину абстрактних вільних елементів — літер $\{\xi_m\}_{m=1}^{\infty}$. Слова з цих літер позначимо $\xi_{m_1\ldots m_k} = \xi_{m_1}\cdots\xi_{m_k}$ і введемо операцію конкатенації слів

$$\xi_{m_1\ldots m_k}\xi_{j_1\ldots j_s} = \xi_{m_1\ldots m_k j_1\ldots j_s}.$$

Усі скінченні лінійні комбінації слів (над $\mathbb{R}$) утворюють вільну асоціативну градуйовану алгебру

$$\mathcal{A} = \sum_{m=1}^{\infty} \mathcal{A}^m,$$

де однорідні підпростори $\mathcal{A}^m$, $m \geq 1$, визначаються таким чином:

$$\mathcal{A}^m = \mathrm{Lin}\{\xi_{m_1\ldots m_k} : m_1 + \cdots + m_k + k = m,\ k \geq 1,\ m_1, \ldots, m_k \geq 0\}, \quad (2.35)$$

Зауважимо, що однорідні підпростори *є скінченновимірними.*

Ми кажемо, що елемент $a \in \mathcal{A}$ *має порядок* m, і пишемо $\mathrm{ord}(a) = m$, якщо $a \in \mathcal{A}^m$. Якщо елемент має порядок, ми називаємо його *однорідним.*

Отже, $\mathcal{A}$ є асоціативною $\mathbb{R}$-алгеброю формальних поліномів відносно зліченної множини незалежних змінних, які не комутують. З леми 2.4 випливає, що для довільного $\theta > 0$ алгебри $\mathcal{A}_\theta$ і $\mathcal{A}$ є ізоморфними. Таким чином, алгебру $\mathcal{A}$ теж можна називати *алгеброю нелінійних степеневих моментів.*

Зручно доповнити алгебру $\mathcal{A}$ одиничним елементом 1 (порожнім словом) і розглядати алгебру з одиницею

$$\mathcal{A}^e = \mathcal{A} + \mathbb{R},$$

вважаючи, що $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$ для будь-якого $a \in \mathcal{A}^e$. Далі ми вважатимемо, що $\xi_{i_p\ldots i_q} = 1$, якщо $p > q$.

Розглянемо вільну алгебру Лі $\mathcal{L}$, що породжена тими самими генераторами $\{\xi_m\}_{m=0}^{\infty}$, що й $\mathcal{A}$, з операцією, яка визначається як комутатор в $\mathcal{A}$, тобто $[\ell_1, \ell_2] = \ell_1\ell_2 - \ell_2\ell_1$ (дужки Лі). Алгебра Лі $\mathcal{L}$ успадковує градуювання $\mathcal{L} = \sum\limits_{m=1}^{\infty} \mathcal{L}^m$, де $\mathcal{L}^m = \mathcal{L} \cap \mathcal{A}^m$, $m \geq 1$.

Зауваження 2.2. *Далі ми будемо розглядати формальні степеневі ряди елементів $\mathcal{A}$ над $\mathbb{R}$ або $\mathbb{R}^n$: якщо сума у виразі $a = \sum \alpha_{m_1\ldots m_k}\xi_{m_1\ldots m_k}$ містить нескінченну кількість доданків, ми вважатимемо, що a є формальним степеневим рядом.*

Отже, разом із відображенням $S_{a,b}(\theta, \cdot)$ вигляду (2.29) можна розглядати його абстрактний аналог — формальний степеневий ряд (з коефіцієнтами з $\mathbb{R}^n$) елементів $\mathcal{A}$ вигляду

$$S_{a,b} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\substack{m_1+\cdots+m_k+k=m \\ k\geq 1,\ m_i\geq 0}} v_{m_1\ldots m_k}\xi_{m_1\ldots m_k}. \tag{2.36}$$

У випадку формального ряду можна не вказувати порядок додавання членів; ми робимо це для зручного порівняння з рядом для $S_{a,b}(\theta, \cdot)$.

З леми 2.4 випливає, що існує єдиний формальний степеневий ряд (2.29), який відповідає відображенню $S_{a,b}(\theta, \cdot)$, або, що те ж саме, задачі потрапляння до нуля (2.26).

2.2.3 Заміна змінних і тасуючий добуток

Вивчимо, як перетворюється ряд нелінійних степеневих моментів при заміні змінних. Припустимо, що в системі (2.25) зроблена (аналітична) заміна змінних $y = Q(x)$, де $Q(0) = 0$, і нова система має вигляд

$$\dot{y} = \bar{a}(t, y) + \bar{b}(t, y)u. \tag{2.37}$$

Знайдемо зображення $S_{\bar{a},\bar{b}}(\theta, \cdot)$ у вигляді ряду, не використовуючи вигляд системи у нових координатах і не знаходячи нові коефіцієнти за формулою (1.23), а тільки виконуючи перетворення ряду (2.29). Для зручності будемо користуватися позначенням (2.14). Тоді, очевидно,

$$S_{\bar{a},\bar{b}}(\theta, u) = Q(S_{a,b}(\theta, u)) = \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{q!} Q^{(q)}(0)(S_{a,b}(\theta, u))^q. \tag{2.38}$$

Для подальших перетворень потрібно знаходити степені рядів, а отже, добутки нелінійних степеневих моментів. Як і у випадку ітерованих інтегралів, ця операція відповідає тасуючому добутку в абстрактній алгебрі $\mathcal{A}$ (означення 1.4 і 1.5). А саме, тасуючий добуток задається на базисних елементах наступним чином:

$$\xi_{m_1\dots m_k} ш\, \xi_{j_1\dots j_r} = \xi_{m_1}(\xi_{m_2\dots m_k} ш\, \xi_{j_1\dots j_r}) + \xi_{j_1}(\xi_{m_1\dots m_k} ш\, \xi_{j_2\dots j_r})$$

(за умови, що одиничний елемент 1 — порожнє слово — є одиницею і для цієї операції, тобто $a ш 1 = 1 ш a = a$ для всіх $a \in \mathcal{A}^e$) і продовжується на всю алгебру $\mathcal{A}^e$ за лінійністю.

Отже, відображення $S_{a,b}$ після заміни змінних перетворюється так:

$$S_{\bar{a},\bar{b}} = Q(S_{a,b}) = \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{q!} Q^{(q)}(0)(S_{a,b})^{ш q} =$$

$$= \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{\substack{j_1+\dots+j_n=q \\ j_i \ge 0}} \frac{1}{j_1! \cdots j_n!} \frac{\partial^{j_1+\dots+j_n} Q(0)}{\partial x_1^{j_1} \cdots \partial x_n^{j_n}} (S_{a,b})_1^{ш j_1} ш \cdots ш (S_{a,b})_n^{ш j_n},$$

де тасуючий добуток рядів підраховується поелементно і $a^{ш q}$ позначає тасуючий добуток q екземплярів елемента a.

2.2.4 Зв'язок алгебри диференціальних операторів з алгеброю нелінійних степеневих моментів

На відміну від пункту 2.1.4, де ми розглядали асоціативну алгебру диференціальних операторів і алгебру Лі векторних полів, у даному пункті ми маємо справу з нестаціонарними системами, а отже, з векторними полями, що залежать від t.

Детальніше, до коефіцієнтів ряду (2.29) входять оператори $\mathrm{ad}_{R_a}^m R_b$ при $m \ge 0$ (див. (1.23), (1.20), (1.21)). Неважко показати, що хоча дія R_a включає диференціювання по t, оператор $\mathrm{ad}_{R_a}^m R_b$ включає диференціювання тільки по x і є диференціальним оператором першого порядку, тобто відповідає нестаціонарному векторному полю:

$$\mathrm{ad}_{R_a}^m R_b\phi(t,x) = \phi_x(t,x)\mathrm{ad}_{R_a}^m R_b E(x),\ m \geq 0. \tag{2.39}$$

Дійсно, для $m = 0$ це випливає з означення: $\mathrm{ad}_{R_a}^0 R_b\phi(t,x) = R_b\phi(t,x) = \phi_x(t,x)R_bE(x) = \phi_x(t,x)\mathrm{ad}_{R_a}^0 R_bE(x)$. Нехай (2.39) виконується для деякого m. Позначимо $c(t,x) = \mathrm{ad}_{R_a}^m R_bE(x)$, $R_c\phi_x(t,x) = \phi_x(t,x)c(t,x)$ і будемо опускати аргументи t і x у функцій. З припущення індукції маємо:

$$\mathrm{ad}_{R_a}^{m+1} R_b\phi = [R_a, R_c]\phi = R_aR_c\phi - R_cR_a\phi =$$

$$= R_a(\phi_x c) - R_c(\phi_t + \phi_x a) = (\phi_x c)_t + (\phi_x c)_x a - (\phi_t + \phi_x a)_x c =$$

$$= \phi_x(c_t + c_x a - a_x c) = \phi_x(R_aR_cE - R_cR_aE) = \phi_x[R_a, R_c]E = \phi_x \mathrm{ad}_{R_a}^{m+1} R_bE,$$

що й доводить (2.39) за індукцією.

Введемо алгебру $A = \sum\limits_{m=1}^{\infty} A^m$, де підпростір A^m є лінійною оболонкою (над $\mathbb{R}$) операторів вигляду $\mathrm{ad}_{R_a}^{m_1} R_b \mathrm{ad}_{R_a}^{m_2} R_b \cdots \mathrm{ad}_{R_a}^{m_k} R_b$, $m_1, \ldots, m_k \geq 0$, $m_1 + \cdots + m_k + k = m$, а алгебраїчною операцією є композиція. Очевидно, послідовність підпросторів $\sum\limits_{m=1}^{q} A^m$, $q \geq 1$, задає фільтрацію в A.

Розглянемо фільтровану алгебру Лі L векторних полів, яка породжується множиною $R_{c_m} = \mathrm{ad}_{R_a}^m R_b$, $m \geq 0$ (диференціальних операторів першого порядку або, еквівалентно, векторних полів $c_m(t,x) = \mathrm{ad}_{R_a}^m R_bE(x)$); фільтрація задається підпросторами $\sum\limits_{m=1}^{q} L^m$, $q \geq 1$, де

$$L_m = \mathrm{Lin}\{[\mathrm{ad}_{R_a}^{m_1} R_b, \cdots [\mathrm{ad}_{R_a}^{m_{k-1}} R_b, \mathrm{ad}_{R_a}^{m_k} R_b] \cdots] :\ m_1 + \cdots + m_k + k = m\}.$$

Нехай $H : \mathcal{A} \to A$ позначає лінійний оператор, визначений на базисних елементах за правилом

$$H(\xi_{m_1\ldots m_k}) = \frac{(-1)^k}{m_1! \ldots m_k!}\mathrm{ad}_{R_a}^{m_1} R_b \cdots \mathrm{ad}_{R_a}^{m_k} R_b, \quad k \geq 1, \quad m_1, \ldots, m_k \geq 0. \tag{2.40}$$

Очевидно,

$$H(a_1a_2) = H(a_1)H(a_2) \ \text{ для будь-яких } \ a_1, a_2 \in \mathcal{A},$$

Крім того, H відображає алгебру Лі $\mathcal{L}$ на алгебру Лі L і задовольняє рівність

$$H([\ell_1, \ell_2]) = [H(\ell_1), H(\ell_2)] \text{ для будь-яких } \ell_1, \ell_2 \in \mathcal{L}.$$

Отже, H є гомоморфізмом, а його обмеження на $\mathcal{L}$ є гомоморфізмом алгебр Лі $H : \mathcal{L} \to L$.

Розглянемо лінійне відображення $v : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^n$, що задається так:

$$v(a) = H(a)E(x)\big|_{x=0,t=0}, \quad a \in \mathcal{A}.$$

Ураховуючи (1.23), отримуємо, що v задається на базисних елементах як

$$v(\xi_{m_1\ldots m_k}) = \frac{(-1)^k}{m_1!\ldots m_k!}\mathrm{ad}_{R_a}^{m_1} R_b \cdots \mathrm{ad}_{R_a}^{m_k} R_b E(x)\big|_{x=0,t=0} = v_{m_1\ldots m_k}, \qquad (2.41)$$

де $v_{m_1\ldots m_k}$ — векторні коефіцієнти $\xi_{m_1\ldots m_k}$ у ряді (2.29), тобто

$$S_{a,b}(\theta, u) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\substack{m_1+\cdots+m_k+k=m \\ k\geq 1,\ m_i \geq 0}} v(\xi_{m_1\ldots m_k})\xi_{m_1\ldots m_k}(\theta, u). \qquad (2.42)$$

Для відображення v теж можна сформулювати умову, аналогічну умові Рашевського-Чжоу (1.36):

$$v(\mathcal{L}) = \mathbb{R}^n. \qquad (2.43)$$

Як і у випадку систем, лінійних за керуванням, будемо називати системи, що задовольняють умову (2.43), *повністю неголономними.*

На відміну від систем, лінійних за керуванням, для системи (2.25) виконання цієї умови не обов'язково означає *локальну керованість* (тобто можливість потрапляння з будь-якої точки деякого околу нуля до будь-якої іншої точки цього околу). Наприклад, система $\dot{x}_1 = u$, $\dot{x}_2 = x_1^2$ задовольняє умову (2.43) (в нулі), але очевидно, що точки, з яких можна потрапити до нуля, мають від'ємну другу координату.

Для системи (2.25) виконання умови (2.43) гарантує *локальну досяжність*, тобто за її виконання множина точок, з яких можна потрапити до нуля, має непорожню внутрішність і нуль міститься у замиканні цієї внутрішності [148, 4]. Далі ми будемо розглядати лише системи, що задовольняють умову (2.43).

Аналогічно лемам 2.2 і 2.3, отримуємо наступні твердження.

Лема 2.5. $\mathrm{Ker}(v) \cap \mathcal{L}$ *є підалгеброю Лі в* $\mathcal{L}$.

Лема 2.6. *Якщо* $\ell \in \mathrm{Ker}(v) \cap \mathcal{L}$, *то* $\ell y \in \mathrm{Ker}(v)$ *для будь-якого* $y \in \mathcal{A}$.

У подальшому ми уточнимо вказані властивості відображення v.

2.3 Однорідна апроксимація і апроксимація у сенсі швидкодії

2.3.1 Системи, лінійні за керуванням

Поняття однорідної апроксимації відіграє важливу роль у сучасній теорії керування [5, 62, 79, 80, 50, 45, 53, 46]. Як буде показано далі, його можна ввести безкоординатно, але спочатку розглянемо означення, що використовує спеціальні «привілейовані» координати, в яких дві системи — вихідну і апроксимуючу — можна ефективно порівняти.

Введемо означення однорідної апроксимації в термінах відображення в кінець траєкторії.

Означення 2.12. *Розглянемо повністю неголономну систему* (2.1). *Повністю неголономна система*

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{m} u_i \widehat{X}_i(x), \quad x \in U(0) \subset \mathbb{R}^n, \ u_1, \ldots, u_m \in \mathbb{R}, \tag{2.44}$$

де векторні поля $\widehat{X}_1(x), \ldots, \widehat{X}_m(x)$ *є дійсно-аналітичними в околі* $U(0)$, *називається однорідною апроксимацією системи* (2.1), *якщо*

(a) *її відображення* $\mathcal{E}_{\widehat{X}_1,\ldots,\widehat{X}_m}$ *є однорідним, тобто існує* $\theta_0 > 0$ *і цілі числа* $1 \leq w_1 \leq \cdots \leq w_n$, *для яких*

$$\mathcal{E}_{\widehat{X}_1,\ldots,\widehat{X}_m}(\theta, u^{1/\theta}) = D_\theta(\mathcal{E}_{\widehat{X}_1,\ldots,\widehat{X}_m}(1, u))$$

для будь-якого $\theta \in (0, \theta_0)$ *і будь-якого* $u \in B^1$, *де* D_θ — *дилатація, яка задається як* $D_\theta(x) = (\theta^{w_1} x_1, \ldots, \theta^{w_n} x_n)^{\mathsf{T}}$;

(б) *існує така дійсно-аналітична заміна змінних $y = Q(x)$ у вихідній системі (для якої $Q(0) = 0$, $\det Q'(0) \neq 0$), що $\mathcal{E}_{\widehat{X}_1,\ldots,\widehat{X}_m}$ апроксимує відображення в кінець траєкторії для вихідної системи в нових координатах; а саме, для довільного $u \in B^1$*

$$D_\theta^{-1}\left(Q(\mathcal{E}_{X_1,\ldots,X_m}(\theta, u^{1/\theta})) - \mathcal{E}_{\widehat{X}_1,\ldots,\widehat{X}_m}(\theta, u^{1/\theta}) \right) \to 0 \quad \text{\textit{при}} \quad \theta \to 0.$$

Зазначимо, що якщо система (2.44) задовольняє вимоги пункту (а) при $\theta \in (0, \theta_0)$, то ці ж вимоги виконуються для довільного $\theta > 0$.

Тепер повернемось до означення порядку, ваги і привілейованих координат з підпункту 1.2.2. Зафіксуємо повністю неголономну систему (2.1). Для координатних функцій $f_i(x) = x_i$, $i = 1, \ldots, n$, означення порядку може бути переформульоване за допомогою множини векторів (2.5). А саме, порядок функції $f_i(x) = x_i$ — це найменше число k, для якого $(c_{j_1\ldots j_k})_i \neq 0$ для деяких $1 \leq j_1, \ldots, j_k \leq m$.

Це можна також виразити в термінах зображення (2.3). А саме, порядок функції $f_i(x) = x_i$ — це мінімальний порядок ітерованого інтегралу (2.4), який входить до i-ї компоненти правої частини (2.3) з ненульовим коефіцієнтом.

Координати є лінійно адаптованими, якщо $c(\mathcal{L}^k) = \mathrm{Lin}\{e_{v_{i-1}+1}, \ldots, e_{v_i}\}$, $i = 1, \ldots, p$. Тоді вага координати x_i — це мінімальний порядок w_i однорідного елемента з алгебри Лі $\ell \in \mathcal{L}^{w_i}$, для якого $(c(\ell))_i \neq 0$, $i = 1, \ldots, n$. Зауважимо, що послідовність $\{w_1, \ldots, w_n\}$ одна й та сама для всіх лінійно адаптованих координат.

Координати $y = Q(x)$, згадані в означенні 2.12, є привілейованими; саме у таких координатах апроксимуюча система наближає вихідну.

Отже, однорідна апроксимація — це система, що є простішою за вихідну (однорідною), але для якої відображення в кінець траєкторії є близьким до відображення в кінець траєкторії для вихідної системи при малих θ.

Приклад 2.2. Розглянемо систему

$$\dot{x}_1 = u_1, \ \dot{x}_2 = (1 + x_1)u_2, \ \dot{x}_3 = (\tfrac{1}{2}x_1^2 + x_2)u_2. \tag{2.45}$$

Очевидно, векторні поля $X_1 = (1, 0, 0)^\top$ і $X_2 = (0, 1 + x_1, \frac{1}{2}x_1^2 + x_2)^\top$ породжують нільпотентну алгебру Лі:

$$[X_1, X_2] = (0, 1, x_1)^\top, \ [[X_1, [X_1, X_2]] = -[[X_2, [X_1, X_2]] = (0, 0, 1)^\top,$$

а решта дужок Лі дорівнює нулю. Очевидно, вихідні координати є лінійно адаптованими, а їх ваги дорівнюють $w_1 = w_2 = 1$, $w_3 = 3$. Але $f(x) = x_3$ має порядок 2 завдяки доданку $x_2\frac{\partial}{\partial x_3}$ у X_2, тобто координати не є привілейованими. Цей доданок можна виключити нелінійною заміною змінних $z_1 = x_1$, $z_2 = x_2$, $z_3 = x_3 - \frac{1}{2}x_2^2$. Крім того, доданок $x_1\frac{\partial}{\partial x_2}$ у X_2 має порядок 0, отже, його не треба включати в однорідну апроксимацію. Можна було б припустити, що система без указаних доданків

$$\dot{y}_1 = u_1, \ \dot{y}_2 = u_2, \ \dot{x}_3 = \tfrac{1}{2}y_1^2u_2 \tag{2.46}$$

є однорідною апроксимацією (2.45), але це не так. Дійсно, після вказаної заміни змінних у вихідній системі отримуємо систему

$$\dot{y}_1 = u_1, \ \dot{y}_2 = u_2, \ \dot{x}_3 = (\tfrac{1}{2}y_1^2 - y_1y_2)u_2 \tag{2.47}$$

яка і є однорідною апроксимацією. Наступна більш симетрична система також є однорідною апроксимацією (2.45) (її можна отримати заміною третьої координати $y_3' = y_3 + \frac{1}{2}y_1y_2^2$):

$$\dot{y}_1 = u_1, \ \dot{y}_2 = u_2, \ \dot{x}_3 = \tfrac{1}{2}y_2^2u_1 + \tfrac{1}{2}y_1^2u_2 \tag{2.48}$$

Одною з основних задач дисертації є встановлення зв'язку однорідної апроксимації і апроксимації у сенсі швидкодії. Наведемо точне означення.

Означення 2.13. *Розглянемо дві задачі швидкодії*

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{m} u_i(t)\widehat{X}_i(x), \quad x(0) = 0, \ x(\theta) = s, \ \ \sum_{i=1}^{m} u_i^2(t) \le 1, \quad \theta \to \min, \tag{2.49}$$

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{m} u_i(t)X_i(x), \quad x(0) = 0, \ x(\theta) = s, \ \ \sum_{i=1}^{m} u_i^2(t) \le 1, \quad \theta \to \min, \tag{2.50}$$

де векторні поля $\widehat{X}_1(x), \dots, \widehat{X}_m(x)$ *і* $X_1(x), \dots, X_m(x)$ *дійсно-аналітичні в околі нуля. Припустимо, що існує така відкрита область* $\Omega \subset \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$, $0 \in \overline{\Omega}$, *що задача* (2.49) *має єдиний розв'язок* $(\widehat{\theta}_s^*, \widehat{u}_s^*)$ *для довільного* $s \in \Omega$ *(тобто* $\widehat{\theta}_s^*$ *є оптимальним часом і* $\widehat{u}_s^*(t)$, $t \in [0, \widehat{\theta}_s^*]$ *є оптимальним керуванням для задачі* (2.49)*). Нехай* $\{(\theta_s^*, u_s^*) : u_s^* \in U_s^*\}$ *позначає множину розв'язків* (2.50) *(тобто* U_s^* *— множина всіх оптимальних керувань для задачі* (2.50)*).*

Ми кажемо, що задача швидкодії (2.49) *апроксимує задачу швидкодії* (2.50) *(в області* Ω*), якщо існує таке невироджене перетворення* Q *околу нуля в* $\mathbb{R}^n$, $Q(0) = 0$, *що*

$$\frac{\theta_{Q(s)}^*}{\widehat{\theta}_s^*} \to 1 \quad \text{при} \quad s \to 0, \ s \in \Omega, \tag{2.51}$$

$$\frac{1}{\theta} \int_0^\theta |u_{Q(s)i}^*(t) - \widehat{u}_{si}^*(t)| dt \to 0, \ i = 1, \dots, m, \quad \text{при} \quad s \to 0, \ s \in \Omega, \tag{2.52}$$

для всіх $u_{Q(s)}^* \in U_{Q(s)}^*$, *де* $\theta = \min\{\widehat{\theta}_s^*, \theta_{Q(s)}^*\}$.

Іншими словами, після певної заміни змінних у системі (2.50) при малих $s \in \Omega$ оптимальний час і оптимальні керування в задачах (2.49) і (2.50) стають асимптотично еквівалентними як функції кінцевої точки.

У пункті 4.2.3 буде доведено, що за певних умов задача швидкодії для однорідної апроксимації апроксимує задачу швидкодії для вихідної системи. Це означає, що задачу швидкодії для вихідної системи можна зводити до простішої — однорідної — задачі швидкодії.

2.3.2 Системи, афінні за керуванням

Для систем, афінних за керуванням, можна ввести означення однорідної апроксимації, аналогічне означенню 2.12.

Означення 2.14. *Розглянемо повністю неголономну систему* (2.25). *Повністю неголономна система*

$$\dot{x} = \widehat{a}(t, x) + \widehat{b}(t, x)u, \quad \widehat{a}(t, 0) \equiv 0, \tag{2.53}$$

де векторні поля $\widehat{a}(t,x)$, $\widehat{b}(t,x)$ *є дійсно-аналітичними в околі нуля, називається однорідною апроксимацією системи* (2.25), *якщо*

(а) *її відображення* $S_{\widehat{a},\widehat{b}}$ *є однорідним, тобто існує* $\theta_0 > 0$ *і цілі числа* $1 \le w_1 \le \cdots \le w_n$, *для яких*

$$S_{\widehat{a},\widehat{b}}(\theta, u^{1/\theta}) = D_\theta(S_{\widehat{a},\widehat{b}}(1,u))$$

для будь-якого $\theta \in (0,\theta_0)$ *і будь-якого* $u \in B^1$, *де* D_θ — *дилатація, яка задається як* $D_\theta(z) = (\theta^{w_1} z_1, \ldots, \theta^{w_n} z_n)^{\mathsf{T}}$;

(б) *існує така дійсно-аналітична заміна змінних* $y = Q(x)$ *у вихідній системі (для якої* $Q(0) = 0$, $\det Q'(0) \neq 0$*), що* $S_{\widehat{a},\widehat{b}}$ *апроксимує відображення до початку траєкторії для вихідної системи в нових координатах у такому сенсі: для довільного* $u \in B^1$

$$D_\theta^{-1}\left(Q(S_{a,b}(\theta, u^{1/\theta})) - S_{\widehat{a},\widehat{b}}(\theta, u^{1/\theta})\right) \to 0 \quad \text{при} \quad \theta \to 0.$$

Тобто однорідна апроксимація — це однорідна система, для якої відображення до початку траєкторії є близьким до відображення до початку траєкторії для вихідної системи при малих θ.

Як і у випадку лінійних за керуванням систем, виникає питання про зв'язок цієї апроксимації з апроксимацією у сенсі швидкодії. Це питання буде досліджене у підрозділі 5.2.

Висновки до розділу 2

У розділі 2 розглянуто два класи дійсно-аналітичних нелінійних систем — системи, які є лінійними або афінними за керуванням. Для них отримані та обговорені зображення операторів у кінець або до початку траєкторії у вигляді ряду функціоналів зі сталими векторними коефіцієнтами. Таким чином, у розділі проведений попередній аналіз систем з розглянутих класів, який дозволить у подальшому дослідженні залучити алгебраїчні методи.

Детальніше, у підрозділі 2.1 розглянуто системи, які є лінійними за керуванням. Для дослідження їх локальної поведінки в околі фіксованої точки (початок координат) введений оператор у кінець траєкторії і розглянуто його розвинення в ряд ітерованих інтегралів зі сталими векторними коефіцієнтами, які визначаються системою. Вказано, що ітеровані інтеграли утворюють вільну асоціативну алгебру; вказані деякі властивості коефіцієнтів ряду.

У підрозділі 2.2 розглянуто (нестаціонарні) системи, які є афінними за керуванням. Для дослідження їх локальної поведінки в околі фіксованої точки спокою (початок координат) введений оператор до початку траєкторії і розглянуто його розвинення в ряд нелінійних степеневих моментів зі сталими векторними коефіцієнтами, які визначаються системою. Вказано, що нелінійні степеневі моменти утворюють вільну асоціативну алгебру; вказані деякі властивості коефіцієнтів ряду.

У підрозділі 2.3 наведено означення однорідної апроксимації, яка відіграє основну роль у подальшому, а також введене поняття апроксимації у сенсі швидкодії для систем, лінійних за керуванням.

Основні результати розділу опубліковані у роботах [35, 132, 134, 137].

РОЗДІЛ 3
АЛГЕБРАЇЧНА АПРОКСИМАЦІЯ ФОРМАЛЬНОГО РЯДУ В АБСТРАКТНІЙ АЛГЕБРІ

У розділі 2 було показано, що локальний аналіз нелінійних систем, лінійних або афінних за керуванням, можна звести до дослідження рядів у вільній асоціативній алгебрі. У цьому розділі розглядаються абстрактні аналоги таких рядів. Вивчаються базиси вільної алгебри, які використовують властивості коефіцієнтів ряду. Вводиться поняття однорідної апроксимації ряду. Отриманий опис усіх однорідних апроксимацій і всіх відповідних перетворень.

Основні результати розділу викладені в роботах [129, 132, 134, 82, 137].

У наступних розділах ці результати будуть застосовані до побудови однорідних апроксимацій і привілейованих координат для нелінійних систем, лінійних або афінних за керуванням.

3.1 Формальні ряди, ядерна підалгебра Лі і лівий ідеал

3.1.1 Розклад асоціативної алгебри відносно тасуючого добутку

Повернемось до позначень підрозділу 1.3. А саме, розглянемо множину літер $\{\zeta_i : i \in I\}$, де I — скінченна або зліченна множина; нехай $\zeta_{i_1\dots i_k} = \zeta_{i_1}\cdots\zeta_{i_k}$ позначають слова (рядки літер). Розглянемо вільну алгебру $\mathfrak{A}$ — лінійну оболонку над $\mathbb{R}$ множини слів з операцією конкатенації (1.38). Нехай градуювання (1.39), (1.40) в $\mathfrak{A}$ задається порядком літер $\mathrm{ord}(\zeta_i)$, причому ми вважаємо, що *порядок кожної літери є натуральним числом*, $\mathrm{ord}(\zeta_i) \in \mathbb{N}$. Тоді порядок будь-якого слова $\mathrm{ord}(\zeta_{i_1\dots i_k}) = \mathrm{ord}(\zeta_{i_1}) + \cdots + \mathrm{ord}(\zeta_{i_k})$ теж є натуральним числом.

Далі ми розглядатимемо лише такі градуювання, які задовольняють наступну умову.

Припущення 3.1. *Усі однорідні підпростори*

$$\mathfrak{A}^m = \mathrm{Lin}\{\zeta_{i_1\ldots i_k} : \mathrm{ord}(\zeta_{i_1}) + \cdots + \mathrm{ord}(\zeta_{i_k}) = m\},\ \ m \geq 1,$$

є скінченновимірними.

Зауважимо, що ця умова автоматично виконується для алгебр і градуювань, які відповідають лінійним і афінним системам: якщо $I = \{1, \ldots, m\}$, $\mathrm{ord}(\zeta_i) = 1$ і якщо $I = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathrm{ord}(\zeta_i) = i + 1$.

Зручно доповнити алгебру $\mathfrak{A}$ одиничним елементом 1 (порожнім словом) і розглядати алгебру з одиницею $\mathfrak{A}^e = \mathfrak{A} + \mathbb{R}$, вважаючи, що $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$ для всіх $a \in \mathfrak{A}^e$. Порядок порожнього слова ми вважаємо нульовим, $\mathrm{ord}(1) = 0$.

Далі для зручності домовимось, що $\zeta_{i_p\ldots i_q} = 1$, якщо $p > q$.

Введемо скалярний добуток $\langle\cdot,\cdot\rangle$ в $\mathfrak{A}$ за означенням (1.45). Зауважимо, що за цим означенням однорідні підпростори $\mathfrak{A}^k$ є ортогональними один одному. Далі ми іноді будемо використовувати позначку $\oplus$ для ортогональних сум.

Розглянемо тасуючий добуток в алгебрі $\mathfrak{A}$ (означення 1.5). Продовжимо його на алгебру $\mathfrak{A}^e$, вважаючи, що $1 ш a = a ш 1 = a$ для довільного $a \in \mathfrak{A}^e$. Тоді означення 1.5 можна переформулювати так.

Означення 3.1. *Тасуючий добуток* ш *в алгебрі* $\mathfrak{A}$ *задається на базисних елементах рекурентною формулою*

$$\zeta_{i_1\ldots i_k} ш \zeta_{j_1\ldots j_r} = (\zeta_{i_1\ldots i_{k-1}} ш \zeta_{j_1\ldots j_r})\,\zeta_{i_k} + (\zeta_{i_1\ldots i_k} ш \zeta_{j_1\ldots j_{r-1}})\,\zeta_{j_r},\ \ k, r \geq 1, \quad (3.1)$$

або, що те ж саме,

$$\zeta_{i_1\ldots i_k} ш \zeta_{j_1\ldots j_r} = \zeta_{i_1}(\zeta_{i_2\ldots i_k} ш \zeta_{j_1\ldots j_r}) + \zeta_{j_1}(\zeta_{i_1\ldots i_k} ш \zeta_{j_2\ldots j_r}),\ \ k, r \geq 1, \quad (3.2)$$

і продовжується на всю алгебру $\mathfrak{A}$ *за лінійністю.*

Ці формули припускають узагальнення, яке можна отримати з означення 1.4.

Лема 3.1. *Для будь-якого $0 \le s \le k + r$ виконуються рівності*

$$\zeta_{i_1\dots i_k} ш\, \zeta_{j_1\dots j_r} = \sum_{\substack{0\le q\le k,\ 0\le t\le r\\ q+t=s}} (\zeta_{i_1\dots i_q} ш\, \zeta_{j_1\dots j_t})(\zeta_{i_{q+1}\dots i_k} ш\, \zeta_{j_{t+1}\dots j_r}). \tag{3.3}$$

(При $s = 0$ або $s = k+r$ немає чого доводити, а при $s = 1$ або $s = k+r-1$ отримуємо означення 3.1.)

Далі ми скористаємось іншим твердженням, яке враховує градуювання і яке теж можна отримати з означення 1.4.

Лема 3.2. *Нехай* $\mathrm{ord}(\zeta_{i_1\dots i_k}) + \mathrm{ord}(\zeta_{j_1\dots j_r}) = m$. *Тоді для будь-якого* $1 \le s \le m-1$ *виконуються рівності*

$$\zeta_{i_1\dots i_k} ш\, \zeta_{j_1\dots j_r} = \sum_{\substack{\mathrm{ord}(\zeta_{i_1\dots i_q}\zeta_{j_1\dots j_t})=s\\ 0\le q\le k,\ 0\le t\le r}} (\zeta_{i_1\dots i_q} ш\, \zeta_{j_1\dots j_t})(\zeta_{i_{q+1}\dots i_k} ш\, \zeta_{j_{t+1}\dots j_r}) + z, \tag{3.4}$$

де $\langle z, ab\rangle = 0$ *для будь-яких* $a \in \mathfrak{A}^s, b \in \mathfrak{A}^{m-s}$.

Зазначимо, що при $\mathrm{ord}(\zeta_i) = 1$ отримуємо лему 3.1. (У цьому випадку $\mathrm{Lin}\{ab : a \in \mathfrak{A}^s, b \in \mathfrak{A}^{m-s}\} = \mathfrak{A}^m$, тому автоматично $z = 0$.)

Розглянемо вільну алгебру Лі (1.42), яка породжена тими самими елементами $\{\zeta_i : i \in I\}$, з операцією дужок Лі (1.41). Зазначимо, що алгебра Лі $\mathfrak{L}$ успадковує градуювання від алгебри $\mathfrak{A}$, отже,

$$\mathfrak{L} = \sum_{m=1}^{\infty} \mathfrak{L}^m, \quad \text{де} \quad \mathfrak{L}^m = \mathfrak{L} \cap \mathfrak{A}^m, \ m \ge 1.$$

Зазначимо, що у загальному випадку однорідні підпростори $\mathfrak{L}^m$ не збігаються з підпросторами $\mathfrak{L}_k$ з означення (1.42) (але це так, якщо $\mathrm{ord}(\zeta_i) = 1$).

За теоремою Р. Рі 1.5, елемент $\ell \in \mathfrak{A}$ належить алгебрі Лі $\mathfrak{L}$ тоді і тільки тоді, коли він є ортогональним тасуючому добутку будь-яких двох елементів з $\mathfrak{A}$, тобто $\langle \ell, a_1 ш\, a_2\rangle = 0$ для будь-яких $a_1, a_2 \in \mathfrak{A}$. Іншими словами,

$$\mathfrak{L} = (\mathfrak{A} ш\, \mathfrak{A})^{\perp},$$

де позначка $^\perp$ означає ортогональне доповнення. Оскільки однорідні підпростори $\mathfrak{A}^m$ є скінченновимірними (за припущенням 3.1) і ортогональними один одному, для будь-якого підпростору маємо розклад

$$\mathfrak{A}^m = \mathfrak{L}^m \oplus \mathrm{Lin}\left\{\mathfrak{A}^i ш \mathfrak{A}^{m-i} : i = 1, \dots, m-1\right\}, \quad m \geq 1. \tag{3.5}$$

Отже,

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{L} \oplus \mathrm{Lin}\{\mathfrak{A} ш \mathfrak{A}\}. \tag{3.6}$$

Неважко довести по індукції, користуючись (3.5), що для будь-якого $m \geq 1$

$$\mathfrak{A}^m = \mathfrak{L}^m \oplus \mathrm{Lin}\left\{\mathfrak{L}^{i_1} ш \cdots ш \mathfrak{L}^{i_q} : q \geq 2,\ i_1 + \cdots + i_q = m,\ i_1, \dots, i_q \geq 1\right\}.$$

Зручно записувати цей розклад у вигляді

$$\mathfrak{A}^m = \mathfrak{L}^m \oplus (\mathfrak{L}^{sh} \cap \mathfrak{A}^m), \quad m \geq 1, \tag{3.7}$$

де

$$\mathfrak{L}^{sh} = \mathrm{Lin}\{z_1 ш \cdots ш z_q : q \geq 2,\ z_1, \dots, z_q \in \mathfrak{L}\},$$

або, коротше,

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{L} \oplus \mathfrak{L}^{sh}. \tag{3.8}$$

3.1.2 Клас формальних рядів, що визначаються системами

Ми будемо розглядати формальні ряди в алгебрі $\mathfrak{A}$ вигляду

$$\mathcal{Z}_g = \sum_{k \geq 1, i_1, \dots, i_k \in I} g_{i_1 \dots i_k} \zeta_{i_1 \dots i_k}, \tag{3.9}$$

де $g_{i_1 \dots i_k} \in \mathbb{R}^n$ — сталі вектори. Для опису формального ряду зручно ввести лінійне відображення $g : \mathfrak{A} \to \mathbb{R}^n$, яке задається на словах формулою

$$g(\zeta_{i_1 \dots i_k}) = g_{i_1 \dots i_k},\ k \geq 1,\ i_1, \dots, i_k \in I. \tag{3.10}$$

(Можна поширити це відображення на $\mathfrak{A}^e$, вважаючи $g(1) = 0$.)

Оскільки нас будуть цікавити лише ряди, які відповідають керованим системам, ми будемо розглядати відображення g, що задовольняють певні умови.

Припущення 3.2. *Лінійне відображення $g : \mathfrak{A} \to \mathbb{R}^n$ задовольняє такі умови:*

1) $g(\mathfrak{L}) = \mathbb{R}^n$*;*

2) якщо $g(\ell) = 0$ *для деякого* $\ell \in \mathfrak{L}$*, то* $g(z\ell) = 0$ *для всіх* $z \in \mathfrak{A}$*.*

Вимога 1 виражає умову Рашевського-Чжоу ((2.23), (2.43)), а вимога 2 — умову реалізовності ряду у вигляді системи (див. леми 2.3, 2.6). Зазначимо, що у випадку афінних за керуванням систем (розділ 5) замість добутку $z\ell$ треба розглядати добуток ℓz (зауваження 5.1).

3.1.3 Ядерна підалгебра Лі

Розглянемо підпростори $\mathfrak{L}$ вигляду

$$\mathcal{P}^k = \{\ell \in \mathfrak{L}^k : g(\ell) \in g(\mathfrak{L}^1 + \cdots + \mathfrak{L}^{k-1})\}, \ k \geq 1, \tag{3.11}$$

де при $k = 1$ мається на увазі $\mathcal{P}^1 = \{\ell \in \mathfrak{L}^1 : g(\ell) = 0\}$, і нехай

$$\mathfrak{L}_g = \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{P}^k. \tag{3.12}$$

Лема 3.3. $\mathfrak{L}_g \subset \mathfrak{L}$ *є градуйованою підалгеброю Лі.*

Доведення. Достатньо довести, що дужки Лі двох однорідних елементів з $\mathfrak{L}_g$ належать $\mathfrak{L}_g$. Нехай $\ell_1, \ell_2 \in \mathfrak{L}_g$ — однорідні елементи, тобто $\ell_i \in \mathcal{P}^{k_i}$, де $k_i = \operatorname{ord}(\ell_i)$, $i = 1, 2$. Тоді $g(\ell_i) \in g(\mathfrak{L}^1 + \cdots + \mathfrak{L}^{k_i - 1})$. Це означає, що існують два такі елементи $\ell'_i \in \mathfrak{L}^1 + \cdots + \mathfrak{L}^{k_i-1}$, $i = 1, 2$, що $g(\ell_i) = g(\ell'_i)$, тобто $g(\ell_i - \ell'_i) = 0$, $i = 1, 2$. За умовою 2 припущення 3.2,

$$g([\ell_1 - \ell'_1, \ell_2 - \ell'_2]) = g((\ell_1 - \ell'_1)(\ell_2 - \ell'_2)) - g((\ell_2 - \ell'_2)(\ell_1 - \ell'_1)) = 0.$$

Отже,

$$g([\ell_1, \ell_2]) = g([\ell_1 - \ell'_1, \ell_2 - \ell'_2]) + g([\ell'_1, \ell_2] + [\ell_1, \ell'_2] - [\ell'_1, \ell'_2]) =$$

$$= g([\ell'_1, \ell_2] + [\ell_1, \ell'_2] - [\ell'_1, \ell'_2]) \in g(\mathfrak{L}^1 + \cdots + \mathfrak{L}^{k_1+k_2-1}),$$

тобто $[\ell_1, \ell_2] \in \mathcal{P}^{k_1+k_2} \subset \mathfrak{L}_g$. Звідси випливає, що $\mathfrak{L}_g$ є підалгеброю Лі. Залишається зауважити, що $\mathfrak{L}_g$ є градуйованою за означенням. ■

Наступне поняття є одним з центральних понять дисертації.

Означення 3.2. *Ми називаємо $\mathfrak{L}_g$ ядерною підалгеброю Лі, що відповідає ряду* (3.9) *або, що те ж саме, відображенню g вигляду* (3.10).

Пояснимо назву «ядерна підалгебра Лі». По-перше, зауважимо, що відображення $g : \mathfrak{L} \to \mathbb{R}^n$ індукує фільтрацію в $\mathbb{R}^n$:

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{i=1}^{p} g(\mathfrak{L}^1 + \cdots + \mathfrak{L}^i),$$

де p — найменше натуральне число, для якого

$$\sum_{k=1}^{p} g(\mathfrak{L}^k) = \mathbb{R}^n \tag{3.13}$$

(його існування випливає з вимоги 1 припущення 3.2). Введемо відповідне градуювання в $\mathbb{R}^n$. А саме, розглянемо фактор-простори

$$[g(\mathfrak{L}^1)] = g(\mathfrak{L}^1), \quad [g(\mathfrak{L}^i)] = g(\mathfrak{L}^i)/g(\mathfrak{L}^1 + \cdots + \mathfrak{L}^{i-1}),\ i = 2, \ldots, p,$$

тоді пряма сума

$$V^n = [g(\mathfrak{L}^1)] + \cdots + [g(\mathfrak{L}^p)]$$

задає градуйований лінійний простір, ізоморфний фільтрованому простору $\mathbb{R}^n$. Розглянемо індуковане лінійне відображення $G : \mathfrak{L} \to V^n$, яке для $\ell \in \mathfrak{L}^i$ визначається як $G(\ell) = [g(\ell)]$ при $i = 1, \ldots, p$ і $G(\ell) = 0$ при $i \geq p + 1$. Тоді $\mathfrak{L}_g$ дорівнює ядру G, тобто $\mathfrak{L}_g = \mathrm{Ker}(G)$.

З цього випливає, що $\mathrm{Im}(G) = V^n$ ізоморфний $\mathfrak{L}/\mathrm{Ker}(G)$. Зокрема, отримуємо наступну лему.

Лема 3.4. *Підпростір $\mathfrak{L}_g$ має ковимірність n у просторі $\mathfrak{L}$.*

Доведення. Наведемо доведення, що не використовує подані вище міркування.

Для будь-якого $k \geq 1$ розкладемо $\mathfrak{L}^k$ у пряму суму $\mathfrak{L}^k = \mathcal{P}^k + \mathcal{M}^k$, де підпростір $\mathcal{M}^k$ — довільне доповнення $\mathcal{P}^k$ до $\mathfrak{L}^k$. Зауважимо, що $\mathcal{M}^k = \{0\}$ для всіх $k \geq p+1$, де p визначається (3.13). Отже, $\mathfrak{L}$ розкладається у пряму суму

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_g + \sum_{i=1}^{p} \mathcal{M}^i.$$

За означенням, $g(\mathcal{P}^k) \subset g(\sum\limits_{i=1}^{k-1} \mathfrak{L}^i)$. По індукції легко довести, що

$$g(\sum_{i=1}^{k} \mathfrak{L}^i) = g(\sum_{i=1}^{k} \mathcal{M}^i) \quad \text{i} \quad \dim g(\sum_{i=1}^{k} \mathcal{M}^i) = \sum_{i=1}^{k} \dim g(\mathcal{M}^i) \quad \text{при} \quad k \geq 1,$$

а отже, за умовою 1 припущення 3.2, $\sum\limits_{i=1}^{p} \dim g(\mathcal{M}^i) = \dim g(\mathfrak{L}) = n$. Крім того, з означення $\mathcal{P}^k$ і $\mathcal{M}^k$ випливає, що

$$\dim g(\mathcal{M}^k) = \dim \mathcal{M}^k \quad \text{при} \quad k \geq 1,$$

а отже,

$$\operatorname{codim} \mathfrak{L}_g = \sum_{i=1}^{p} \mathcal{M}^i = \sum_{i=1}^{p} \dim g(\mathcal{M}^i) = n.$$

■

Наслідок 3.1. *Якщо однорідні елементи $\ell_1, \ldots, \ell_n \in \mathfrak{L}$ є такими, що*

$$\mathfrak{L} = \operatorname{Lin}\{\ell_1, \ldots, \ell_n\} + \mathfrak{L}_g, \tag{3.14}$$

то вектори $g(\ell_1), \ldots, g(\ell_n)$ лінійно незалежні.

Доведення. За лемою 3.4, $\operatorname{codim} \mathfrak{L}_g = n$. Отже, сума в розкладі (3.14) пряма і елементи $\ell_1, \ldots, \ell_n$ лінійно незалежні. Без обмеження загальності вважатимемо, що $\operatorname{ord}(\ell_1) \leq \cdots \leq \operatorname{ord}(\ell_n)$. Припустимо, що вектори $g(\ell_1), \ldots, g(\ell_n)$ є лінійно залежними. Тоді для деякого $1 \leq k \leq n$ маємо $g(\ell_k) = \sum\limits_{i=1}^{k-1} \alpha_i g(\ell_i)$, де $\alpha_i \in \mathbb{R}$ (при $k = 1$ це означає, що $g(\ell_1) = 0$). Нехай $1 \leq q \leq k$ — таке число, для якого $\operatorname{ord}(\ell_k) = \cdots = \operatorname{ord}(\ell_{k-q+1}) > \operatorname{ord}(\ell_{k-q})$ (при $q = k$ це означає, що $\operatorname{ord}(\ell_k) = \operatorname{ord}(\ell_1)$). Розглянемо однорідний елемент $\ell = \ell_k - \sum\limits_{j=2}^{q} \alpha_{k-j+1} \ell_{k-j+1}$, позначимо $r = \operatorname{ord}(\ell)$. Оскільки $\ell_1, \ldots, \ell_n$

лінійно незалежні, $\ell \neq 0$. Але $g(\ell) = \sum_{i=1}^{k-q} \alpha_i g(\ell_i)$, отже, $\ell \in \mathcal{P}^r \subset \mathfrak{L}_g$, що суперечить тому, що сума в (3.14) є прямою. ■

3.1.4 Лівий ідеал, що породжений рядом

Наступне поняття є одним з основних понять дисертації.

Означення 3.3. *Підпростір*

$$\mathfrak{J}_g = \mathrm{Lin}\{\mathfrak{A}^e\,\mathfrak{L}_g\} = \mathrm{Lin}\{y\ell : \, y \in \mathfrak{A}^e, \, \ell \in \mathfrak{L}_g\}$$

називається лівим ідеалом, що відповідає ряду (3.9) *або, що те ж саме, відображенню g вигляду* (3.10).

За означенням лівий ідеал є градуйованим, тобто

$$\mathfrak{J}_g = \sum_{k=1}^{\infty} (\mathfrak{J}_g \cap \mathfrak{A}^k). \tag{3.15}$$

Лема 3.5. *Якщо $a \in \mathfrak{J}_g \cap \mathfrak{A}^k$, то $g(a) \in g(\mathfrak{A}^1 + \cdots + \mathfrak{A}^{k-1})$.*

Доведення. Достатньо розглянути елементи вигляду $a = z\ell$, де $\ell \in \mathcal{P}^s = \mathfrak{L}_g \cap \mathfrak{A}^s$ і $z \in \mathfrak{A}^{k-s}$ для довільного $1 \leq s \leq k$. Оскільки $\ell \in \mathcal{P}^s$, існує такий елемент $\ell' \in \mathfrak{L}^1 + \cdots + \mathfrak{L}^{s-1}$, для якого $g(\ell - \ell') = 0$. (При $s = 1$ отримуємо $\ell' = 0$.) Отже, за умовою 2 припущення 3.2, $g(z(\ell - \ell')) = 0$, звідки випливає $g(a) = g(z\ell) = g(z\ell') \in g(\mathfrak{A}^1 + \cdots + \mathfrak{A}^{k-1})$. ■

Зауважимо, що для $a \in \mathfrak{J}_g \cap \mathfrak{A}^1$ отримуємо $g(a) = 0$.

3.1.5 Однорідна апроксимація ряду

Розглянемо формальний ряд (3.9), який задається лінійним відображенням $g : \mathfrak{A} \to \mathbb{R}^n$. Розглянемо формальне перетворення

$$y = Q(x) = \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{q!} Q^{(q)}(0) x^q = \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{j_1+\cdots+j_n=q} \frac{1}{j_1! \cdots j_n!} \frac{\partial^{j_1+\cdots+j_n} Q(0)}{\partial x_1^{j_1} \cdots \partial x_n^{j_n}} x_1^{j_1} \cdots x_n^{j_n} \tag{3.16}$$

і застосуємо його до ряду $\mathcal{Z}_g = \mathcal{Z} = (\mathcal{Z}_1, \dots, \mathcal{Z}_n)^\mathsf{T}$, вважаючи, що всі добутки є тасуючими:

$$Q(\mathcal{Z}) = \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{j_1+\dots+j_n=q} \frac{1}{j_1! \cdots j_n!} \frac{\partial^{j_1+\dots+j_n} Q(0)}{\partial x_1^{j_1} \cdots \partial x_n^{j_n}} \mathcal{Z}_1^{\text{ш} j_1} \,\text{ш} \cdots \text{ш}\, \mathcal{Z}_n^{\text{ш} j_n}. \tag{3.17}$$

Зазначимо, що такі перетворення ряду відповідають замінам змінних у нелінійній системі, див. (2.18).

Зауваження 3.1. *З припущення 3.1 випливає, що для знаходження доданків ряду у правій частині* (3.17) *заданого порядку треба виконати скінченну кількість дій.*

Наступне означення описує абстрактний аналог поняття однорідної апроксимації нелінійних керованих систем.

Означення 3.4. *Нехай заданий ряд $\mathcal{Z}_g$ вигляду* (3.9)*, який задовольняє припущення 3.2. Ми кажемо, що ряд $\mathcal{Z}_{\widehat{g}}$ (такого ж вигляду) є однорідною апроксимацією ряду $\mathcal{Z}_g$ (а відповідне відображення $\widehat{g}$ є однорідною апроксимацією відображення g), якщо:*

1) $(\mathcal{Z}_{\widehat{g}})_i \in \mathfrak{A}^{w_i}$, *де* $w_1 \le \dots \le w_n$;

2) існує перетворення $y = Q(x)$ *вигляду* (3.16), $\det Q'(0) \neq 0$, *для якого*

$$(Q(\mathcal{Z}_g))_i = (\mathcal{Z}_{\widehat{g}})_i + \rho_i, \;\; i = 1, \dots, n,$$

де $\rho_i \in \sum\limits_{k=w_i+1}^{\infty} \mathfrak{A}^k$, $i = 1, \dots, n$;

3) $\widehat{g}(\mathfrak{L}) = \mathbb{R}^n$.

Ми називаємо перетворення $y = Q(x)$ апроксимуючим перетворенням ряду $\mathcal{Z}_g$.

Властивість 1 означає однорідність, а властивість 2 — апроксимацію. Властивість 3 означає невиродженість апроксимації (для керованих систем ця вимога перетворюється на умову Рашевського-Чжоу). Зокрема, апроксимація $\mathcal{Z}_{\widehat{g}}$ задовольняє умову 1 припущення 3.2. Далі ми покажемо, що вона також задовольняє умову 2 припущення 3.2 (наслідок 3.7).

Зазначимо, що апроксимуюче перетворення є абстрактним аналогом привілейованих координат.

У цьому розділі розвивається підхід, що дозволяє побудувати і класифікувати однорідні апроксимації рядів і описати усі можливі апроксимуючі перетворення $y = Q(x)$.

3.2 Базиси в асоціативній алгебрі

3.2.1 Базис лівого ідеалу

За лемою 3.4, ядерна підалгебра Лі $\mathfrak{L}_g$ має ковимірність n в $\mathfrak{L}$. Зафіксуємо *довільну* множину $\{\ell_1, \ldots, \ell_n\}$ однорідних елементів $\mathfrak{L}$, що задовольняє умову

$$\mathfrak{L} = \mathrm{Lin}\{\ell_1, \ldots, \ell_n\} + \mathfrak{L}_g. \tag{3.18}$$

За лемою 3.4, ця сума є прямою. Не обмежуючи загальності, припустимо

$$\mathrm{ord}(\ell_i) \le \mathrm{ord}(\ell_j) \ \text{ при } \ 1 \le i < j \le n. \tag{3.19}$$

Зауважимо, що *порядки* елементів $\ell_1, \ldots, \ell_n$ визначені однозначно, оскільки кількість таких елементів порядку $k \ge 1$ дорівнює $\dim(\mathfrak{L}^k) - \dim(\mathcal{P}^k)$.

Нехай $\{\ell_j\}_{j=n+1}^{\infty}$ — однорідний базис $\mathfrak{L}_g$, тоді $\{\ell_j\}_{j=1}^{\infty}$ є однорідним базисом $\mathfrak{L}$.

Тепер ми скористаємося теоремою Пуанкаре-Біркгофа-Вітта 1.4, за якою множина

$$\{\ell_{j_1} \cdots \ell_{j_r} : 1 \le j_1 \le \cdots \le j_r, \ r \ge 1\} \tag{3.20}$$

утворює базис $\mathfrak{A}$.

Лема 3.6. *Множина*

$$\{\ell_{j_1} \cdots \ell_{j_r} : n+1 \le j_1 \le \cdots \le j_r, \ r \ge 1\} \tag{3.21}$$

утворює базис підалгебри

$$N = \mathrm{Lin}\{\ell_{i_1} \cdots \ell_{i_k} : i_1, \ldots, i_k \ge n+1, \ k \ge 1\}. \tag{3.22}$$

Доведення. Спочатку доведемо, що будь-який елемент вигляду

$$x = \ell_{q_1} \cdots \ell_{q_s}, \quad \text{де} \quad q_1, \ldots, q_s \geq n+1,$$

дорівнює лінійній комбінації елементів (3.21).

Для $s = 1$ це очевидно. Припустимо, що $s \geq 2$, і введемо наступне означення. Скажемо, що $\ell_{q_{p_1}}$ і $\ell_{q_{p_2}}$ *утворюють інверсію в* x, якщо $p_1 < p_2$ і $q_{p_1} > q_{p_2}$. Нехай d — кількість інверсій в елементі x; тоді, очевидно, $d \leq \frac{s(s-1)}{2}$. Скажемо, що пара (s, d) є *індексом* елемента x.

Якщо індекс x дорівнює $(s, 0)$, то x належить множині (3.21). Нехай індекс x дорівнює (s, d) з $d > 0$, тоді для деякого $1 \leq i \leq s-1$ маємо $q_i > q_{i+1}$. Тоді

$$\ell_{q_i}\ell_{q_{i+1}} = [\ell_{q_i}, \ell_{q_{i+1}}] + \ell_{q_{i+1}}\ell_{q_i}.$$

За означенням, $q_i \geq n+1$ і $q_{i+1} \geq n+1$, отже, елементи ℓ_{q_i} і $\ell_{q_{i+1}}$ належать підалгебрі Лі $\mathfrak{L}_g$, звідки випливає, що $[\ell_{q_i}, \ell_{q_{i+1}}] \in \mathfrak{L}_g$. Таким чином, $[\ell_{q_i}, \ell_{q_{i+1}}]$ можна подати як лінійну комбінацію елементів ℓ_j з $j \geq n+1$, тобто

$$\ell_{q_i}\ell_{q_{i+1}} = \sum_{j \geq n+1} \beta_j \ell_j + \ell_{q_{i+1}}\ell_{q_i}, \quad \beta_j \in \mathbb{R}.$$

Позначаючи

$$y_j = \ell_{q_1} \cdots \ell_{q_{i-1}} \ell_j \, \ell_{q_{i+2}} \cdots \ell_{q_s}, \quad z = \ell_{q_1} \cdots \ell_{q_{i-1}} \ell_{q_{i+1}} \ell_{q_i} \ell_{q_{i+2}} \cdots \ell_{q_s},$$

отримуємо

$$x = \sum_{j \geq n+1} \beta_j y_j + z,$$

де y_j і z належать (3.22) і, крім того, індекс y_j дорівнює $(s-1, d_j)$, а індекс z дорівнює $(s, d-1)$. Отже, ми подали x як лінійну комбінацію елементів з (3.22), кожний з яких має менший індекс (у лексикографічному порядку), ніж x. Очевидно, після скінченної кількості таких кроків елемент x буде подано як лінійну комбінацію елементів з (3.22), індекс кожного з яких дорівнює $(k_i, 0)$, $k_i \geq 1$, тобто усі вони належать множині (3.21).

Таким чином, будь-який елемент (3.22) є лінійною комбінацією елементів (3.21). З іншого боку, елементи (3.21) є лінійно незалежними, оскільки вони входять до базису (3.20). Отже, вони утворюють базис N. ∎

Наслідок 3.2. *Множина*

$$\{\ell_{j_1}\cdots\ell_{j_r} : 1 \le j_1 \le \cdots \le j_r,\ r \ge 1,\ j_r \ge n+1\} \tag{3.23}$$

утворює базис лівого ідеалу $\mathfrak{J}_g$.

Доведення. Достатньо довести, що будь-який елемент $a = z\ell_i$, де $z \in \mathfrak{A}$, $i \ge n+1$, можна подати єдиним чином як лінійну комбінацію елементів (3.23). Оскільки z можна розкласти за базисом (3.20), достатньо довести твердження для будь-якого елемента вигляду

$$a = (\ell_{j_1}\cdots\ell_{j_h})(\ell_{j_{h+1}}\cdots\ell_{j_s})\ell_i,\ j_1 \le \cdots \le j_h \le n < j_{h+1} \le \cdots \le j_s,\ i \ge n+1.$$

Для $s = h$ твердження очевидне. Нехай $s \ge h+1$. За лемою 3.6, елемент $(\ell_{j_{h+1}}\cdots\ell_{j_s})\ell_i$ є лінійною комбінацією елементів (3.21). Отже, a є лінійною комбінацією елементів вигляду

$$(\ell_{j_1}\cdots\ell_{j_h})(\ell_{i_1}\cdots\ell_{i_k}),\quad \text{де}\ \ j_1 \le \cdots \le j_h \le n,\quad n+1 \le i_1 \le \cdots \le i_k,\ k \ge 1.$$

Отже, будь-який елемент $\mathfrak{J}_g$ є лінійною комбінацією елементів (3.23). З іншого боку, елементи (3.23) є лінійно незалежними, оскільки вони входять до базису (3.20). Тобто вони утворюють базис лівого ідеалу $\mathfrak{J}_g$. ∎

Наслідок 3.3. *Для будь-якого* $k \ge 1$

$$\mathfrak{J}_g \cap \mathfrak{L}^k = \mathcal{P}^k$$

а отже,

$$\mathfrak{J}_g \cap \mathfrak{L} = \mathfrak{L}_g.$$

Доведення. Включення $\mathcal{P}^k \subset \mathfrak{J}_g \cap \mathfrak{L}^k$ випливає з означення. Доведемо, що $\mathfrak{J}_g \cap \mathfrak{L}^k \subset \mathcal{P}^k$.

За наслідком 3.2, будь-який елемент $a \in \mathfrak{J}_g$ можна подати як лінійну комбінацію елементів (3.23) (що є підмножиною (3.20)). З іншого боку, базис $\mathfrak{L}$ задається елементами $\{\ell_j\}_{j=1}^{\infty}$, які належать базису (3.20).

Якщо $a \in \mathfrak{J}_g \cap \mathfrak{L}$, то a дорівнює лінійній комбінації елементів з перетину множин (3.23) і $\{\ell_j\}_{j=1}^{\infty}$, який дорівнює $\{\ell_j\}_{j=n+1}^{\infty}$. Очевидно, $a \in \mathfrak{J}_g \cap \mathfrak{L}^k$ є лінійною комбінацією елементів $\{\ell_j\}_{j=n+1}^{\infty} \cap \mathfrak{L}^k \subset \mathcal{P}^k$. ■

Таким чином, дві структури, які індукуються відображенням g, а саме, ядерна підалгебра Лі $\mathfrak{L}_g$ і лівий ідеал $\mathfrak{J}_g$, однозначно визначають одна одну.

3.2.2 Ортогональне доповнення до лівого ідеалу і узагальнення теореми Р. Рі

Розглянемо ортогональне доповнення до лівого ідеалу $\mathfrak{J}_g$

$$\mathfrak{J}_g^{\perp} = \{x \in \mathfrak{A} : \langle x, a \rangle = 0 \text{ для всіх } a \in \mathfrak{J}_g\}.$$

З рівності (3.15) випливає, що це ортогональне доповнення є градуйованим, тобто

$$\mathfrak{J}_g^{\perp} = \sum_{k=1}^{\infty} (\mathfrak{J}_g^{\perp} \cap \mathfrak{A}^k). \tag{3.24}$$

Зауважимо, що за припущенням 3.1 кожний підпростір $\mathfrak{A}^k$ є скінченновимірним, тому $\mathfrak{A}^k = (\mathfrak{J}_g \cap \mathfrak{A}^k) + (\mathfrak{J}_g^{\perp} \cap \mathfrak{A}^k)$, а отже,

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{J}_g \oplus \mathfrak{J}_g^{\perp}. \tag{3.25}$$

(нагадаємо, що $\oplus$ означає ортогональну суму).

Лема 3.7. *Нехай $x = \sum\limits_{i_1,\dots,i_k} \gamma_{i_1\dots i_k} \zeta_{i_1\dots i_k} \in \mathfrak{A}^m$, де $\gamma_{i_1\dots i_k} \in \mathbb{R}$. Елемент x належить до $\mathfrak{J}_g^{\perp}$ тоді і тільки тоді, коли $\sum\limits_{i_{s+1}\dots i_k} \gamma_{i_1\dots i_k} \zeta_{i_{s+1}\dots i_k} \perp \mathcal{P}^{m-q}$ для всіх $0 \le q \le m-1$ і сума береться по всіх наборах індексів $i_{s+1}, \dots, i_k$, для яких $\operatorname{ord}(\zeta_{i_{s+1}\dots i_k}) = m - q$ (для $q = 0$ це означає, що $x \perp \mathcal{P}^m$).*

Доведення. Доведення випливає з означень. Дійсно, $x \in \mathfrak{J}_g^{\perp}$ тоді і тільки тоді, коли x ортогональний до будь-якого елемента вигляду $\zeta_{i_1^0\dots i_s^0}\ell$, де $\ell \in \mathcal{P}^{m-q}$, $\operatorname{ord}(\zeta_{i_1^0\dots i_s^0}) = q$, $0 \le q \le m-1$, тобто

$$\langle x, \zeta_{i_1^0\dots i_s^0}\ell \rangle = \langle \sum_{i_1,\dots,i_k} \gamma_{i_1\dots i_k} \zeta_{i_1\dots i_k}, \zeta_{i_1^0\dots i_t^0}\ell \rangle = \langle \sum_{i_{s+1},\dots,i_k} \gamma_{i_1^0\dots i_s^0 i_{s+1}\dots i_k} \zeta_{i_{s+1}\dots i_k}, \ell \rangle = 0,$$

що й доводить лему. ■

Лема 3.8. *Нехай $a, b \in \mathfrak{J}_g^\perp$; тоді $a \text{ ш } b \in \mathfrak{J}_g^\perp$.*

Доведення. Достатньо довести, що для довільних однорідних елементів $a, b \in \mathfrak{J}_g^\perp$ елемент $a \text{ ш } b$ ортогональний до будь-якого елемента вигляду $x\ell$, де $x \in \mathfrak{A}^s$ і $\ell \in \mathcal{P}^{m-s}$, для всіх $0 \leq s \leq m-1$, де $m = \operatorname{ord}(a) + \operatorname{ord}(b)$. Для $s = 0$ цей факт випливає з теореми Р. Рі 1.5. Розглянемо $1 \leq s \leq m-1$.

Нехай $a = \sum\limits_{i_1,\dots,i_k} \alpha_{i_1\dots i_k}\zeta_{i_1\dots i_k}$ і $b = \sum\limits_{j_1,\dots,j_r} \beta_{j_1\dots j_r}\zeta_{j_1\dots j_r}$. Використовуючи лему 3.2, отримуємо

$$a \text{ ш } b = \sum_{\substack{i_1,\dots,i_k \\ j_1,\dots,j_r}} \alpha_{i_1\dots i_k}\beta_{j_1\dots j_r}\zeta_{i_1\dots i_k} \text{ ш } \zeta_{j_1\dots j_r} =$$

$$= \sum_{\substack{i_1,\dots,i_k \\ j_1,\dots,j_r}} \sum_{\substack{\operatorname{ord}(\zeta_{i_1\dots i_q}\zeta_{j_1\dots j_t})=s \\ 0\leq q\leq k,\ 0\leq t\leq r}} \alpha_{i_1\dots i_k}\beta_{j_1\dots j_r}(\zeta_{i_1\dots i_q} \text{ ш } \zeta_{j_1\dots j_t})(\zeta_{i_{q+1}\dots i_k} \text{ ш } \zeta_{j_{t+1}\dots j_r}) + z =$$

$$= \sum_{\substack{\operatorname{ord}(\zeta_{i_1\dots i_q}\zeta_{j_1\dots j_t})=s \\ 0\leq q\leq k,\ 0\leq t\leq r}} \sum_{\substack{i_1,\dots,i_q \\ j_1,\dots,j_t}} (\zeta_{i_1\dots i_q} \text{ш} \zeta_{j_1\dots j_t}) \sum_{\substack{i_{q+1},\dots,i_k \\ j_{t+1},\dots,j_r}} \alpha_{i_1\dots i_k}\beta_{j_1\dots j_r}(\zeta_{i_{q+1}\dots i_k} \text{ш} \zeta_{j_{t+1}\dots j_r}) + z,$$

де $\langle x\ell, z\rangle = 0$. Отже,

$$\langle x\ell, a \text{ ш } b\rangle =$$

$$= \sum_{\substack{\operatorname{ord}(\zeta_{i_1\dots i_q}\zeta_{j_1\dots j_t})=s \\ 0\leq q\leq k,\ 0\leq t\leq r}} \sum_{\substack{i_1,\dots,i_q \\ j_1,\dots,j_t}} \langle x, \zeta_{i_1\dots i_q} \text{ш} \zeta_{j_1\dots j_t}\rangle \left\langle \ell, \sum_{\substack{i_{q+1},\dots,i_k \\ j_{t+1},\dots,j_r}} \alpha_{i_1\dots i_k}\beta_{j_1\dots j_r}(\zeta_{i_{q+1}\dots i_k} \text{ш} \zeta_{j_{t+1}\dots j_r})\right\rangle. \tag{3.26}$$

Розглянемо кожний доданок (3.26).

Якщо $q < k$ і $t < r$, то $\zeta_{i_{q+1}\dots i_k} \in \mathfrak{A}$ і $\zeta_{j_{t+1}\dots j_r} \in \mathfrak{A}$ (тобто ці слова — непорожні). Отже, за теоремою Р. Рі 1.5, $\langle \ell, \zeta_{i_{q+1}\dots i_k} \text{ ш } \zeta_{j_{t+1}\dots j_r}\rangle = 0$.

Якщо $t = r$, то $\zeta_{j_{t+1}\dots j_r} = 1$. Але тоді $\operatorname{ord}(\zeta_{i_1\dots i_q} = s \leq m-1$, а отже, $q \leq k-1$. Тобто в цьому випадку

$$\left\langle \ell, \sum_{\substack{i_{q+1},\dots,i_k \\ j_{t+1},\dots,j_r}} \alpha_{i_1\dots i_k}\beta_{j_1\dots j_r}(\zeta_{i_{q+1}\dots i_k} \text{ ш } \zeta_{j_{t+1}\dots j_r})\right\rangle = \beta_{j_1\dots j_r}\left\langle \ell, \sum_{i_{q+1},\dots,i_k} \alpha_{i_1\dots i_k}\zeta_{i_{q+1}\dots i_k}\right\rangle = 0$$

за лемою 3.7, оскільки $a \in \mathfrak{J}_g^\perp$. Тобто відповідний доданок у (3.26) дорівнює нулю. Аналогічний висновок отримуємо, якщо $q = k$.

Таким чином, усі доданки з правої частини (3.26) дорівнюють нулю, тобто $\langle x\,\ell, a \sqcup\!\sqcup b\rangle = 0$. ■

Далі ми використовуємо наступне позначення.

Позначення 3.1. *Для будь-якого $a \in \mathfrak{A}$ символом $\widetilde{a}$ будемо позначати ортопроекцію a на підпростір $\mathfrak{J}_g^{\perp}$. Аналогічно, для будь-якого підпростору $M \subset \mathfrak{A}$ символом $\widetilde{M}$ будемо позначати ортопроекцію M на $\mathfrak{J}_g^{\perp}$.*

Лема 3.9. *Нехай однорідні елементи $\ell_1, \ldots, \ell_n \in \mathfrak{L}$ задовольняють рівність (3.18). Нехай $\{\ell_j\}_{j=n+1}^{\infty}$ — однорідний базис ядерної підалгебри Лі $\mathfrak{L}_g$. Тоді множина*

$$\begin{aligned}\{\widetilde{\ell}_{i_1} \sqcup\!\sqcup \cdots \sqcup\!\sqcup \widetilde{\ell}_{i_s} \sqcup\!\sqcup \ell_{j_1} \sqcup\!\sqcup \cdots \sqcup\!\sqcup \ell_{j_t} :&\\ s+t \geq 1,\ 1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_s \leq n < j_1 \leq \cdots \leq j_t\}&\end{aligned} \tag{3.27}$$

утворює базис $\mathfrak{A}$.

Доведення. Спочатку доведемо, що будь-який однорідний елемент $\ell \in \mathfrak{L}$ можна подати як лінійну комбінацію елементів (3.27). Для будь-якого $\ell \in \mathfrak{L}_g$ це очевидно. Доведемо цей факт для $\ell_1, \ldots, \ell_n$.

Не обмежуючи загальності, вважатимемо, що виконується умова (3.19). Нехай $p = \mathrm{ord}(\ell_n)$ і $v_0 = 0$, $v_k = \dim(\mathfrak{L}^k) - \dim(\mathcal{P}^k)$ при $k = 1, \ldots, p$. Тоді $\mathrm{ord}(\ell_i) = k$, якщо $v_{k-1} + 1 \leq i \leq v_k$, $k = 1, \ldots, p$.

Застосуємо індукцію за порядком елемента. Для елементів $\ell_1, \ldots, \ell_{v_1}$ порядку 1, очевидно, маємо $\widetilde{\ell}_i = \ell_i$, $i = 1, \ldots, v_1$, отже, вони містяться в лінійній оболонці елементів (3.27).

Припустимо, що $\ell_1, \ldots, \ell_{v_{k-1}}$ містяться в лінійній оболонці (3.27). Розглянемо довільний елемент ℓ_i, для якого $\mathrm{ord}(\ell_i) = k$, тобто $v_{k-1} + 1 \leq i \leq v_k$. Отримуємо

$$\ell_i = \widetilde{\ell}_i + x_i, \quad \text{де} \quad x_i \in \mathfrak{J}_g \cap \mathfrak{A}^k. \tag{3.28}$$

З розкладу (3.7) випливає, що

$$x_i = \ell_i^* + y_i, \quad \text{де} \quad \ell_i^* \in \mathfrak{L}^k,\ y_i \in \mathfrak{L}^{sh} \cap \mathfrak{A}^k. \tag{3.29}$$

Отже,

$$\ell_i - \ell_i^* = \widetilde{\ell}_i + y_i. \tag{3.30}$$

Умова $y_i \in \mathfrak{L}^{sh}$ означає, що y_i дорівнює лінійній комбінації елементів вигляду $\ell_{i_1} ш \cdots ш \ell_{i_s}$, де $\ell_{i_1}, \dots, \ell_{i_s} \in \mathfrak{L}$ і $s \geq 2$. Отже, $\ell_{i_1}, \dots, \ell_{i_s} \in \mathfrak{L}^1 + \dots + \mathfrak{L}^{k-1}$. Таким чином, за припущенням індукції, праву частину (3.30) можна подати як лінійну комбінацію елементів вигляду (3.27).

З іншого боку, елемент $\ell_i - \ell_i^* \in \mathfrak{L}^k$ однозначно визначається формулами (3.28) і (3.29). Зауважимо, що $\widetilde{\ell}_i \in \mathfrak{J}_g^\perp \subset \mathfrak{L}_g^\perp$ і $y_i \in \mathfrak{L}^{sh} = \mathfrak{L}^\perp \subset \mathfrak{L}_g^\perp$, отже, з (3.30) випливає, що $\ell_i - \ell_i^* \in \mathfrak{L}_g^\perp$.

Доведемо, що елементи $\{\ell_i - \ell_i^* : \ v_{k-1} + 1 \leq i \leq v_k\}$ лінійно незалежні. Припустимо супротивне, тоді

$$\sum_{i=v_{k-1}+1}^{v_k} \mu_i(\ell_i - \ell_i^*) = 0$$

для деяких чисел μ_i, для яких $\sum\limits_{i=v_{k-1}+1}^{v_k} \mu_i^2 > 0$. З рівності (3.30) випливає, що

$$\sum_{i=v_{k-1}+1}^{v_k} \mu_i \widetilde{\ell}_i = - \sum_{i=v_{k-1}+1}^{v_k} \mu_i y_i \in \mathfrak{L}^{sh} = \mathfrak{L}^\perp.$$

Зокрема, елемент $\sum\limits_{i=v_{k-1}+1}^{v_k} \mu_i \widetilde{\ell}_i$ ортогональний до $\sum\limits_{i=v_{k-1}+1}^{v_k} \mu_i \ell_i$. Оскільки за означенням $\widetilde{\ell}_i$ є ортопроекцією ℓ_i на підпростір $\mathfrak{J}_g^\perp$, отримуємо

$$\sum_{i=v_{k-1}+1}^{v_k} \mu_i \ell_i \in \mathfrak{J}_g \cap \mathfrak{L} = \mathfrak{L}_g, \text{ де } \sum_{i=v_{k-1}+1}^{v_k} \mu_i^2 > 0,$$

що суперечить (3.18).

Позначимо $\{\ell_{j_1}, \dots, \ell_{j_q}\} = \{\ell_j\}_{j=n+1}^\infty \cap \mathfrak{L}^k$ і розглянемо множину

$$\{\ell_{j_1}, \dots, \ell_{j_q}\} \cup \{\ell_i - \ell_i^* : \ v_{k-1} + 1 \leq i \leq v_k\} \subset \mathfrak{L}^k. \tag{3.31}$$

Оскільки $\ell_i - \ell_i^* \in \mathfrak{L}_g^\perp$ і $\ell_{j_1}, \dots, \ell_{j_q} \in \mathfrak{L}_g$, отримуємо, що її елементи лінійно незалежні. Кількість цих елементів дорівнює $\dim \mathfrak{L}^k$. Тому множина (3.31) є базисом $\mathfrak{L}^k$ і будь-який елемент з цього базису можна подати у вигляді лінійної комбінації елементів (3.27) завдяки (3.30) і припущенню індукції.

Отже, отримуємо, що будь-який однорідний елемент $\ell \in \mathfrak{L}$ можна подати як лінійну комбінацію елементів (3.27). З розкладу (3.8) випливає, що це так і для довільного елемента з $\mathfrak{A}$, тобто лінійна оболонка (3.27) дорівнює $\mathfrak{A}$. Крім того, для будь-якого $k \geq 1$ кількість елементів (3.27) порядку k дорівнює $\dim \mathfrak{A}^k$, оскільки вона дорівнює кількості елементів базису (3.20) порядку k. Це означає, що елементи множини (3.27) лінійно незалежні. ■

Наступна теорема узагальнює теорему Р. Рі 1.5 (що показує наслідок 3.4).

Теорема 3.1. *Нехай елементи $\ell_1, \dots, \ell_n \in \mathfrak{L}$ є однорідними і задовольняють рівність* (3.18). *Тоді множина*

$$\{\widetilde{\ell}_{i_1} ш \cdots ш \widetilde{\ell}_{i_s} : \; s \geq 1, \; 1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_s \leq n\} \tag{3.32}$$

утворює базис $\mathfrak{J}_g^{\perp}$.

Доведення. Нехай $\{\ell_j\}_{j=n+1}^{\infty}$ — однорідний базис $\mathfrak{L}_g$. Для довільного $k \geq 1$ розглянемо множину

$$\begin{aligned} \{\widetilde{\ell}_{i_1} ш \cdots ш \widetilde{\ell}_{i_s} ш \ell_{j_1} ш \cdots ш \ell_{j_t} \in \mathfrak{A}^k : \\ s + t \geq 1, \; 1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_s \leq n < j_1 \leq \cdots \leq j_t\} \end{aligned} \tag{3.33}$$

Кількість елементів у множині (3.33) дорівнює кількості елементів порядку k у множині (3.20), що у свою чергу дорівнює $\dim \mathfrak{A}^k$. З наслідку 3.2 випливає, що кількість елементів у множині (3.33) з $t \geq 1$ дорівнює $\dim(\mathfrak{J}_g \cap \mathfrak{A}^k)$. Отже, кількість елементів у множині (3.33) з $t = 0$ дорівнює $\dim(\mathfrak{J}_g^{\perp} \cap \mathfrak{A}^k)$. Розглянемо такі елементи. Вони мають вигляд

$$\{\widetilde{\ell}_{i_1} ш \cdots ш \widetilde{\ell}_{i_s} \in \mathfrak{A}^k : \; s \geq 1, \; 1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_s \leq n\}. \tag{3.34}$$

За лемою 3.9 вони є лінійно незалежними, а за лемою 3.8 вони належать $\mathfrak{J}_g^{\perp}$. Отже, множина (3.34) утворює базис $\mathfrak{J}_g^{\perp} \cap \mathfrak{A}^k$. ■

Зауважимо, що (3.32) можна переписати у вигляді

$$\{\widetilde{\ell}_1^{ш q_1} ш \cdots ш \widetilde{\ell}_n^{ш q_n} : \; q_1, \dots, q_n \geq 0, \; q_1 + \cdots + q_n \geq 1\}.$$

Наслідок 3.4. *Має місце ортогональний розклад*

$$\mathfrak{J}_g^{\perp} = \widetilde{\mathfrak{L}} \oplus (\widetilde{\mathfrak{L}})^{sh}, \tag{3.35}$$

а отже,

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{J}_g \oplus \widetilde{\mathfrak{L}} \oplus (\widetilde{\mathfrak{L}})^{sh}, \tag{3.36}$$

що узагальнює розклад (3.8).

Доведення. За теоремою 3.1 множина (3.32) є базисом $\mathfrak{J}_g^{\perp}$. Оскільки $\widetilde{\mathfrak{L}} = \mathrm{Lin}\{\widetilde{\ell}_1, \dots, \widetilde{\ell}_n\}$, отримуємо прямий розклад

$$\mathfrak{J}_g^{\perp} = \widetilde{\mathfrak{L}} + (\widetilde{\mathfrak{L}})^{sh}.$$

Залишилося довести, що підпростір $\widetilde{\mathfrak{L}}$ ортогональний до $(\widetilde{\mathfrak{L}})^{sh}$. Для довільного $1 \le i \le n$ маємо $\ell_i = \widetilde{\ell}_i + x_i$, де $x_i \in \mathfrak{J}_g$. Оскільки $\widetilde{\ell}_{i_1} ш \cdots ш \widetilde{\ell}_{i_s} \in \mathfrak{J}_g^{\perp}$ для будь-яких $1 \le i_1, \dots, i_s \le n$ за лемою 3.8, для $s \ge 2$ отримуємо

$$\langle \widetilde{\ell}_i, \widetilde{\ell}_{i_1} ш \cdots ш \widetilde{\ell}_{i_s} \rangle = \langle \ell_i, \widetilde{\ell}_{i_1} ш \cdots ш \widetilde{\ell}_{i_s} \rangle = 0$$

за теоремою Р. Рі 1.5. Отже, $\widetilde{\mathfrak{L}}$ ортогональний до $(\widetilde{\mathfrak{L}})^{sh}$, що доводить (3.35). Для отримання (3.36) залишилося скористатися (3.25). ∎

Зауваження 3.2. *З теореми 3.1 випливає, що підпростір $\mathfrak{J}_g^{\perp}$ з тасуючим добутком ізоморфний алгебрі поліномів від n змінних без вільного члену (з коефіцієнтами з $\mathbb{R}$).*

3.2.3 Спряжений базис

Нехай $\{\ell_i\}_{i=1}^{\infty}$ — довільний однорідний базис $\mathfrak{L}$. Нам буде зручно переписати базис (3.20) у такому вигляді:

$$\{\ell_{j_1}^{p_1} \cdots \ell_{j_s}^{p_s} : \ s \ge 1, \ 1 \le j_1 < \cdots < j_s, \ p_1, \dots, p_s \ge 1\} \tag{3.37}$$

де вважається, що $\ell^p = \ell \cdots \ell$ (p разів), $p \ge 1$. Оскільки елементи ℓ_i, $i \ge 1$, є однорідними, усі базисні елементи теж є однорідними і для будь-якого $k \ge 1$ множина

$$\{\ell_{j_1}^{p_1} \cdots \ell_{j_s}^{p_s} \in \mathfrak{A}^k : \ s \ge 1, \ 1 \le j_1 < \cdots < j_s, \ p_1, \dots, p_s \ge 1\}$$

є базисом $\mathfrak{A}^k$. Оскільки $\dim \mathfrak{A}^k < \infty$ (за припущенням 3.1), існує спряжений базис $\mathfrak{A}^k$. Оскільки підпростори $\mathfrak{A}^k$ з різними k ортогональні один одному, існує й спряжений базис $\mathfrak{A}$. Позначимо його

$$\{d^{q_1\ldots q_r}_{i_1\ldots i_r}:\ r \geq 1,\ 1 \leq i_1 < \cdots < i_r,\ q_1,\ldots,q_r \geq 1\}, \tag{3.38}$$

де

$$\langle \ell^{p_1}_{j_1}\cdots\ell^{p_s}_{j_s}, d^{q_1\ldots q_r}_{i_1\ldots i_r}\rangle = \begin{cases} 1, & \text{якщо}\quad s=r \quad \text{і} \quad j_t = i_t,\ p_t = q_t,\ t=1,\ldots,s, \\ 0 & \text{у супротивному випадку.} \end{cases} \tag{3.39}$$

Тепер ми скористаємося теоремою Меленсона-Рейтенауера 1.6, за якою елементи спряженого базису (3.38) задаються формулами

$$d^{q_1\ldots q_r}_{i_1\ldots i_r} = \frac{1}{q_1!\cdots q_r!}\, d^{ш q_1}_{i_1} \,ш \cdots ш\, d^{ш q_r}_{i_r}, \tag{3.40}$$

де використовується позначення $d_q = d^1_q$, $q \geq 1$.

Лема 3.10. *Нехай елементи $\ell_1,\ldots,\ell_n$ задовольняють умови (3.18), (3.19) і $\{\ell_j\}_{j=n+1}^{\infty}$ є однорідним базисом $\mathfrak{L}_g$. Тоді множина*

$$\{d_1^{ш q_1} \,ш \cdots ш\, d_n^{ш q_n}:\ q_1,\ldots,q_n \geq 0,\ q_1+\cdots+q_n \geq 1\} \tag{3.41}$$

утворює базис $\mathfrak{J}_g^{\perp}$.

Доведення. За наслідком 3.2 будь-який елемент $\mathfrak{J}_g$ дорівнює лінійній комбінації елементів вигляду $\ell^{p_1}_{j_1}\cdots\ell^{p_s}_{j_s}$, де $j_1 < \cdots < j_s$ і $j_s \geq n+1$, отже, він є ортогональним до будь-якого елемента $d_1^{ш q_1} \,ш \cdots ш\, d_n^{ш q_n}$ за (3.40) і теоремою 1.6. Це означає, що елементи (3.41) ортогональні до $\mathfrak{J}_g$.

Тепер для довільного $k \geq 1$ розглянемо множину

$$\{d_1^{ш q_1} \,ш \cdots ш\, d_n^{ш q_n} \in \mathfrak{A}^k:\ q_1,\ldots,q_n \geq 0,\ q_1+\cdots+q_n \geq 1\}. \tag{3.42}$$

Як показано вище, ця множина міститься в $\mathfrak{J}_g^{\perp}$. Більш того, всі елементи (3.42) належать спряженому базису (3.40) (з точністю до числових множників), отже, вони лінійно незалежні. Кількість цих елементів дорівнює

$\dim(\mathfrak{J}_g^{\perp}\cap\mathfrak{A}^k)$, оскільки вона дорівнює кількості елементів у множині (3.34). Отже, (3.42) є базисом $\mathfrak{J}_g^{\perp}\cap\mathfrak{A}^k$. Нарешті, об'єднання множин (3.42) для всіх $k \geq 1$, тобто (3.41), утворює базис $\mathfrak{J}_g^{\perp}$. ■

Наслідок 3.5. *Для будь-якого $i = 1, \ldots, n$ елемент $\widetilde{\ell}_i$ дорівнює однорідному поліному відносно тасуючого добутку від $d_1, \ldots, d_n$. Навпаки, для будь-якого $i = 1, \ldots, n$ елемент d_i дорівнює однорідному поліному відносно тасуючого добутку від $\widetilde{\ell}_1, \ldots, \widetilde{\ell}_n$. Крім того,* $\operatorname{ord}(d_i) = \operatorname{ord}(\widetilde{\ell}_i) = \operatorname{ord}(\ell_i)$, *$i = 1, \ldots, n$.*

3.2.4 Розклад ряду відносно спряженого базису

Застосуємо властивості спряженого базису для перерозкладання ряду (3.9). Спочатку для будь-якого $k \geq 1$ розглянемо довільний елемент $a \in \mathfrak{A}^k$. З означення скалярного добутку випливає, що

$$a = \sum_{\operatorname{ord}(\zeta_{i_1\ldots i_t})=k} \langle a, \zeta_{i_1\ldots i_t}\rangle \zeta_{i_1\ldots i_t}. \tag{3.43}$$

Розкладаючи a за спряженим базисом (3.40), отримуємо

$$a = \sum{}' \frac{1}{q_1!\cdots q_r!} \langle a, \ell_{i_1}^{q_1}\cdots \ell_{i_r}^{q_r}\rangle \, d_{i_1}^{ш q_1} ш \cdots ш \, d_{i_r}^{ш q_r}, \tag{3.44}$$

де сума $\sum'$ береться по всіх індексах $1 \leq i_1 < \cdots < i_r$ і $q_1, \ldots, q_r \geq 1$, для яких $\operatorname{ord}(\ell_{i_1}^{q_1}\cdots\ell_{i_r}^{q_r}) = k$.

Тепер розглянемо ряд $\mathcal{Z}_g$ і отримуємо таке зображення для його компонент $(\mathcal{Z}_g)_j$, $j = 1, \ldots, n$. Детальніше, зафіксуємо $k \geq 1$ і розглянемо довільний базисний елемент $\ell_{i_1}^{q_1}\cdots\ell_{i_r}^{q_r} \in \mathfrak{A}^k$. Нехай

$$a = \sum_{\operatorname{ord}(\zeta_{i_1\ldots i_t})=k} (g(\eta_{i_1\ldots i_t}))_j \eta_{i_1\ldots i_t}.$$

Оскільки відображення g є лінійним, використовуючи (3.43), отримуємо

$$\langle a, \ell_{i_1}^{q_1}\cdots\ell_{i_r}^{q_r}\rangle = \sum_{\operatorname{ord}(\zeta_{i_1\ldots i_t})=k} (g(\zeta_{i_1\ldots i_t}))_j \langle \zeta_{i_1\ldots i_k}, \ell_{i_1}^{q_1}\cdots\ell_{i_r}^{q_r}\rangle =$$

$$= \Big(g\Big(\sum_{\operatorname{ord}(\zeta_{i_1\dots i_t})=k} \langle \ell_{i_1}^{q_1}\cdots\ell_{i_r}^{q_r}, \zeta_{i_1\dots i_t}\rangle \zeta_{i_1\dots i_t}\Big)\Big)_j = \big(g(\ell_{i_1}^{q_1}\cdots\ell_{i_r}^{q_r})\big)_j .$$

Отже, з (3.44) випливає

$$a = \sum{}' \frac{1}{q_1!\cdots q_r!} \big(g(\ell_{i_1}^{q_1}\cdots\ell_{i_r}^{q_r})\big)_j \, d_{i_1}^{ш q_1} ш \cdots ш \, d_{i_r}^{ш q_r}.$$

Застосовуючи ці міркування до всіх $k \geq 1$ і всіх $j = 1, \dots, n$, отримуємо такий результат.

Лема 3.11. *Нехай множина $\{\ell_1, \dots, \ell_n\}$ однорідних елементів з $\mathfrak{L}$ задовольняє умову (3.18) і $\{\ell_j\}_{j=n+1}^{\infty}$ є однорідним базисом $\mathfrak{L}_g$. Тоді ряд у правій частині (3.9) можна подати в наступному вигляді:*

$$\mathcal{Z}_g = \sum_{\substack{1\leq i_1<\dots<i_r\\ q_1,\dots,q_r\geq 1}} \frac{1}{q_1!\cdots q_r!} g(\ell_{i_1}^{q_1}\cdots\ell_{i_r}^{q_r})\, d_{i_1}^{ш q_1} ш \cdots ш \, d_{i_r}^{ш q_r} \qquad (3.45)$$

де $d_j = d_j^1$ є елементами спряженого базису (3.40).

Зауваження 3.3. *За зауваженням 1.3, множина (1.44) є базисом $\mathfrak{A}$. Її можна переписати як*

$$\{\ell_{j_1}^{p_1}\cdots\ell_{j_s}^{p_s} : \ s\geq 1, \ j_1 > \dots > j_s \geq 1, \ p_1,\dots,p_s \geq 1\}. \qquad (3.46)$$

Як і базис (3.37), базис (3.46) має спряжений базис вигляду

$$d_{i_1\dots i_r}^{q_1\dots q_r} = \frac{1}{q_1!\cdots q_r!} d_{i_1}^{ш q_1} ш \cdots ш \, d_{i_r}^{ш q_r}, \qquad (3.47)$$

де $d_q = d_q^1$, $q \geq 1$. Зазначимо, що базиси (3.40) і (3.47) різні.

Наслідок 3.6. *Нехай лінійне відображення $g : \mathfrak{A} \to \mathbb{R}^n$ задовольняє припущення 3.2. Нехай $y = Q(x)$ — перетворення вигляду (3.16) і $\mathcal{Z}_{\widetilde{g}} = Q(\mathcal{Z}_g)$. Тоді відображення $\widetilde{g} : \mathfrak{A} \to \mathbb{R}^n$ задовольняє умову 2 припущення 3.2. Якщо матриця $Q'(0)$ невироджена, то відображення $\widetilde{g} : \mathfrak{A} \to \mathbb{R}^n$ задовольняє умову 1 припущення 3.2. У цьому випадку $\mathfrak{L}_{\widetilde{g}} = \mathfrak{L}_g$ і $\mathfrak{J}_{\widetilde{g}} = \mathfrak{J}_g$.*

Доведення. Нехай $\ell \in \mathfrak{L}$ і $g(\ell) = 0$. Нехай s — таке число, для якого $\ell \in \mathfrak{L}^1 + \dots + \mathfrak{L}^s$. За припущенням 3.1 цей підпростір скінченновимірний.

Побудуємо його базис $\{\ell_i\}_{i=1}^{k}$, де $\ell_1 = \ell$, і нехай $\{\ell_i\}_{i=k+1}^{\infty}$ — однорідний базис $\sum\limits_{j=s+1}^{\infty} \mathfrak{L}^j$.

Розглянемо базис (3.46), спряжений базис (3.47) і розвинення

$$\mathcal{Z}_g = \sum_{\substack{i_1>\cdots>i_r\geq 1\\ q_1,\ldots,q_r\geq 1}} \frac{1}{q_1!\cdots q_r!} g(\ell_{i_1}^{q_1}\cdots\ell_{i_r}^{q_r})\, d_{i_1}^{ш q_1} ш \cdots ш\, d_{i_r}^{ш q_r}. \tag{3.48}$$

Оскільки g задовольняє умову 2 припущення 3.2 і $g(\ell_1) = 0$, отримуємо, що $g(\ell_{i_1}^{q_1}\cdots\ell_{i_r}^{q_r}) = 0$, якщо $i_r = 1$. Це означає, що у зображенні (3.48) усі коефіцієнти елементів, які включають d_1, дорівнюють нулю, тобто ряд $\mathcal{Z}_g$ не містить елемента d_1.

Тепер застосуємо до ряду (3.48) перетворення $y = Q(x)$ і розглянемо розвинення отриманого ряду $\mathcal{Z}_{\widetilde{g}} = Q(\mathcal{Z}_g)$ за базисом (3.47). Очевидно, цей ряд теж не містить елемента d_1, а отже $\widetilde{g}(\ell_{i_1}^{q_1}\cdots\ell_{i_r}^{q_r}) = 0$, якщо $i_1 > \cdots > i_r = 1$. Оскільки (3.46) — базис $\mathfrak{A}$, то для будь-якого $z \in \mathfrak{A}$ отримуємо $\widetilde{g}(z\ell_1) = \widetilde{g}(z\ell) = 0$. Отже, $\widetilde{g}$ задовольняє умову 2 припущення 3.2.

Нехай тепер матриця $Q'(0)$ невироджена. Очевидно, коефіцієнти при d_j у ряді $\mathcal{Z}_{\widetilde{g}}$ дорівнюють $\widetilde{g}(\ell_j) = Q'(0)g(\ell_j)$, тобто $\widetilde{g}(\mathfrak{L}) = Q'(0)g(\mathfrak{L})$. Оскільки $\det Q'(0) \neq 0$ і $g(\mathfrak{L}) = \mathbb{R}^n$, отримуємо $\widetilde{g}(\mathfrak{L}) = \mathbb{R}^n$, тобто $\widetilde{g}$ задовольняє умову 1 припущення 3.2.

У цьому випадку підпростори (3.11) для відображень g і $\widetilde{g}$ одні й ті самі. Тому $\mathfrak{L}_{\widetilde{g}} = \mathfrak{L}_g$ і, отже, $\mathfrak{J}_{\widetilde{g}} = \mathfrak{J}_g$. Це означає, що ядерна підалгебра Лі і лівий ідеал інваріантні відносно невироджених перетворень (3.16). ■

Для керованих систем наслідок 3.6 означає, що заміна змінних переводить ряд системи у ряд системи, а якщо заміна невироджена, то вона зберігає умову Рашевського-Чжоу. Крім того, ядерна підалгебра Лі і лівий ідеал інваріантні відносно невироджених замін змінних.

3.3 Побудова і класифікація однорідних апроксимацій рядів

У цьому підрозділі ми пояснимо, як застосувати лему 3.11 до побудови однорідної апроксимації ряду.

3.3.1 Побудова і опис однорідних апроксимацій і апроксимуючих перетворень

Розглянемо розклад (3.45) і відділимо доданки, які містять тільки $d_1, \dots, d_n$:

$$\mathcal{Z}_g = \mathcal{S} + \mathcal{T}, \tag{3.49}$$

де

$$\mathcal{S} = \sum_{\substack{q_1,\dots,q_n \geq 0 \\ q_1+\dots+q_n \geq 1}} \frac{1}{q_1! \cdots q_n!} g(\ell_1^{q_1} \cdots \ell_n^{q_n})\, d_1^{\text{ш} q_1} \text{ ш} \cdots \text{ ш } d_n^{\text{ш} q_n}, \tag{3.50}$$

$$\mathcal{T} = \sum_{\substack{1 \leq i_1 < \dots < i_r, i_r \geq n+1 \\ q_1,\dots,q_r \geq 1}} \frac{1}{q_1! \cdots q_r!} g(\ell_{i_1}^{q_1} \cdots \ell_{i_r}^{q_r})\, d_{i_1}^{\text{ш} q_1} \text{ ш} \cdots \text{ ш } d_{i_r}^{\text{ш} q_r}. \tag{3.51}$$

Якщо $i_r \geq n+1$, то $\ell_{i_1}^{q_1} \cdots \ell_{i_r}^{q_r} \in \mathfrak{J}_g$, що означає, що всі коефіцієнти ряду $\mathcal{T}$ належать $g(\mathfrak{J}_g)$. Звідси випливає наступна лема.

Лема 3.12. *Зафіксуємо $1 \leq i \leq n$ і припустимо, що $\mathcal{S}_i$ містить тільки члени порядку не менше k, тобто $\mathcal{S}_i \in \sum_{j=k}^{\infty} \mathfrak{A}^j$. Тоді $\mathcal{T}_i$ містить тільки члени порядку більше k, тобто $\mathcal{T}_i \in \sum_{j=k+1}^{\infty} \mathfrak{A}^j$.*

Доведення. Достатньо довести, що $(g(\mathfrak{J}_g \cap \mathfrak{A}^j))_i = 0$ для будь-якого $j = 1, \dots, k$.

Застосуємо індукцію по j. Для $j = 1$ твердження очевидне, оскільки $g(\mathfrak{J}_g \cap \mathfrak{A}^1) = 0$ за лемою 3.5.

Припустимо, що для деякого $1 \leq j < k$ виконується рівність

$$(g(\mathfrak{J}_g \cap (\mathfrak{A}^1 + \dots + \mathfrak{A}^j)))_i = 0.$$

Розглянемо довільний елемент $a \in \mathfrak{J}_g \cap \mathfrak{A}^{j+1}$. Ураховуючи лему 3.5, отримуємо

$$g(a) \in g(\mathfrak{A}^1 + \cdots + \mathfrak{A}^j) = g(M^j) + g(N^j),$$

де ми використали тимчасові позначення

$$M^j = \mathrm{Lin}\{\ell_{i_1}^{q_1} \cdots \ell_{i_r}^{q_r} : i_1 \le \cdots \le i_r \le n\} \cap (\mathfrak{A}^1 + \cdots + \mathfrak{A}^j),$$

$$N^j = \mathrm{Lin}\{\ell_{i_1}^{q_1} \cdots \ell_{i_r}^{q_r} : i_1 \le \cdots \le i_r,\ i_r \ge n+1\} \cap (\mathfrak{A}^1 + \cdots + \mathfrak{A}^j).$$

Але $(g(M^j))_i = 0$, оскільки за умовою $\mathcal{S}_i$ містить тільки члени порядку не менше k (нагадаємо, що $j < k$), і $(g(N^j))_i = 0$ за припущенням індукції. Отже, $(g(\mathfrak{A}^1 + \cdots + \mathfrak{A}^j))_i = 0$, звідки випливає $(g(a))_i = 0$. Це означає, що $(g(\mathfrak{J}_g \cap \mathfrak{A}^{j+1}))_i = 0$, отже, за індукцією, лему доведено. ■

З леми 3.12 випливає, що для того, щоб побудувати однорідну апроксимацію, достатньо розглядати лише перетворення ряду $\mathcal{S}$. Детальніше, застосуємо довільне перетворення $y = Q(x)$ до вихідного ряду $\mathcal{Z}_g$:

$$Q(\mathcal{Z}_g) = Q(\mathcal{S} + \mathcal{T}) =$$

$$= \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{q!} \sum_{j_1 + \cdots + j_n = q} \frac{\partial^{j_1 + \cdots + j_n} Q(0)}{\partial x_1^{j_1} \cdots \partial x_n^{j_n}} (\mathcal{S}_1 + \mathcal{T}_1)^{ш j_1} ш \cdots ш (\mathcal{S}_n + \mathcal{T}_n)^{ш j_n} = Q(\mathcal{S}) + \mathcal{T}', \tag{3.52}$$

де

$$\mathcal{T}' = \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{q!} \sum_{j_1 + \cdots + j_n = q} \sum_{\substack{0 \le k_i \le j_i \\ k_1 + \cdots + k_n \ge 1}} \alpha_{j_1 \ldots j_n}^{k_1 \ldots k_n} \mathcal{S}_1^{ш (j_1 - k_1)} ш\, \mathcal{T}_1^{ш k_1} ш \cdots ш\, \mathcal{S}_n^{ш (j_n - k_n)} ш\, \mathcal{T}_n^{ш k_n},$$

$$\alpha_{j_1 \ldots j_n}^{k_1 \ldots k_n} = \frac{\partial^{j_1 + \cdots + j_n} Q(0)}{\partial x_1^{j_1} \cdots \partial x_n^{j_n}} \cdot \frac{j_1! \cdots j_n!}{(j_1 - k_1)! k_1! \cdots (j_n - k_n)! k_n!}.$$

Зокрема, кожний член ряду $\mathcal{T}'$ обов'язково включає множник $\mathcal{T}_j$ для деякого $j = 1, \ldots, n$.

З іншого боку, $Q(\mathcal{Z}_g)$ можна записати як

$$Q(\mathcal{Z}_g) = \sum_{\substack{1 \le i_1 < \cdots < i_r \\ q_1, \ldots, q_r \ge 1}} \frac{1}{q_1! \cdots q_r!} \widetilde{g}(\ell_{i_1}^{q_1} \cdots \ell_{i_r}^{q_r})\, d_{i_1}^{ш q_1} ш \cdots ш\, d_{i_r}^{ш q_r} = \widetilde{\mathcal{S}} + \widetilde{\mathcal{T}}, \tag{3.53}$$

де

$$\widetilde{\mathcal{S}} = \sum_{q_1,\dots,q_n\geq 0} \frac{1}{q_1!\cdots q_n!}\widetilde{g}(\ell_1^{q_1}\cdots\ell_n^{q_n})\, d_1^{\text{ш}q_1} \,\text{ш}\cdots\text{ш}\, d_n^{\text{ш}q_n},$$

$$\widetilde{\mathcal{T}} = \sum_{\substack{1\leq i_1<\cdots<i_r, i_r\geq n+1\\ q_1,\dots,q_r\geq 1}} \frac{1}{q_1!\cdots q_r!}\widetilde{g}(\ell_{i_1}^{q_1}\cdots\ell_{i_r}^{q_r})\, d_{i_1}^{\text{ш}q_1} \,\text{ш}\cdots\text{ш}\, d_{i_r}^{\text{ш}q_r}.$$

Порівняємо зображення (3.52) і (3.53). Бачимо, що всі члени вигляду $d_1^{\text{ш}q_1} \,\text{ш}\cdots\text{ш}\, d_n^{\text{ш}q_n}$ входять у $Q(\mathcal{S})$, а всі члени вигляду $d_{i_1}^{\text{ш}q_1} \,\text{ш}\cdots\text{ш}\, d_{i_r}^{\text{ш}q_r}$ з $i_1 < \ldots < i_r$ і $i_r \geq n+1$ входять у $\mathcal{T}'$. Отже,

$$\widetilde{\mathcal{S}} = Q(\mathcal{S}) \quad \text{i} \quad \widetilde{\mathcal{T}} = \mathcal{T}'.$$

Припустимо, що перетворення $y = Q(x)$ є таким, що ряд $Q(\mathcal{S})$ має трикутну форму, а саме,

$$(Q(\mathcal{S}))_i = a_i + \widetilde{\rho}_i,\ i = 1,\dots,n, \tag{3.54}$$

де $a_i \in \mathfrak{A}^{w_i}$, $\widetilde{\rho}_i \in \sum\limits_{k=w_i+1}^{\infty}\mathfrak{A}^k$, $w_i = \operatorname{ord}(\ell_i) = \operatorname{ord}(d_i)$, $i = 1,\dots,n$, причому за умовою (3.19) вважаємо $1 \leq w_1 \leq \cdots \leq w_n$. Урахуємо наслідок 3.6 і застосуємо лему 3.12 до рядів $Q(\mathcal{S})$ і $\mathcal{T}'$. Отримуємо, що $(\mathcal{T}')_i$ містить тільки члени порядку більше w_i, $i = 1,\dots,n$. Це означає, що ряд $Q(\mathcal{Z}_g)$ теж має трикутну форму, а саме,

$$(Q(\mathcal{Z}_g))_i = a_i + \rho_i,\ i = 1,\dots,n, \tag{3.55}$$

де $a_i \in \mathfrak{A}^{w_i}$, $\rho_i \in \sum\limits_{k=w_i+1}^{\infty}\mathfrak{A}^k$, $i = 1,\dots,n$.

Дамо повний опис таких перетворень $y = Q(x)$. Разом з рядом $\mathcal{S}$ розглянемо вектор-функцію $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ вигляду

$$\Phi(z) = \sum_{\substack{q_1,\dots,q_n\geq 0\\ q_1+\cdots+q_n\geq 1}} \frac{1}{q_1!\cdots q_n!} g(\ell_1^{q_1}\cdots\ell_n^{q_n})\, z_1^{q_1}\cdots z_n^{q_n}, \qquad z\in\mathbb{R}^n. \tag{3.56}$$

За припущенням 3.2 і умовою (3.18) маємо $g(\mathfrak{L}) = \operatorname{Lin}\{g(\ell_1),\dots,g(\ell_n)\} = \mathbb{R}^n$. А оскільки $\frac{\partial\Phi(0)}{\partial z_i} = g(\ell_i)$, $i = 1,\dots,n$, то вектори $g(\ell_i)$ лінійно незалежні і вектор-функція $\Phi(z)$ обернена (як формальний ряд).

Лема 3.13. *Невироджене перетворення* $y = Q(x)$ *зводить ряд* $\mathcal{S}$ *до трикутної форми* (3.54) *тоді і тільки тоді, коли воно зводить вектор-функцію* (3.56) *до трикутної форми*

$$(Q(\Phi(z)))_i = \sum_{w_1 r_1 + \cdots + w_n r_n \geq w_i} \alpha_i^{r_1 \ldots r_n} z_1^{r_1} \cdots z_n^{r_n}, \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{3.57}$$

де $\alpha_i^{r_1 \ldots r_n} \in \mathbb{R}$.

Доведення. Доведення випливає з того, що перетворення Q діє на $\Phi(z)$ і на $\mathcal{S}$ однаково. ■

Зокрема, $Q(x)$ можна вибирати як $Q(z) = \Phi^{-1}(z)$. Проте не так легко знайти явний вигляд цього перетворення. З іншого боку, для того, щоб звести $\Phi(z)$ до трикутного вигляду, достатньо перетворити тільки члени до порядку не більше, ніж w_n. Отже, довільне перетворення, яке зводить $\Phi(z)$ до трикутного вигляду, також зводить *поліноміальну* вектор-функцію

$$\Psi(z) = \sum_{w_1 q_1 + \cdots + w_n q_n \leq w_n} \frac{1}{q_1! \cdots q_n!} g(\ell_1^{q_1} \cdots \ell_n^{q_n}) z_1^{q_1} \cdots z_n^{q_n}, \qquad z \in \mathbb{R}^n, \tag{3.58}$$

до трикутного вигляду, і навпаки.

Лема 3.14. *Невироджене перетворення* $y = Q(x)$ *зводить ряд* $\mathcal{S}$ *до трикутної форми* (3.54) *тоді і тільки тоді, коли воно зводить поліноміальну вектор-функцію* (3.58) *до трикутної форми*

$$(Q(\Psi(z)))_i = \sum_{w_1 r_1 + \cdots + w_n r_n \geq w_i} \alpha_i^{r_1 \ldots r_n} z_1^{r_1} \cdots z_n^{r_n}, \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{3.59}$$

де $\alpha_i^{r_1 \ldots r_n} \in \mathbb{R}$.

Отже, отримуємо такий результат щодо існування однорідної апроксимації.

Лема 3.15. *Для кожного ряду* $\mathcal{Z}_g$ *вигляду* (3.9)*, що задовольняє припущення* 3.2*, існує однорідна апроксимація вигляду*

$$\mathcal{Z}_{\widetilde{g}} = (d_1, \ldots, d_n)^{\mathsf{T}}, \tag{3.60}$$

де $d_1, \ldots, d_n$ *— елементи спряженого базису* (3.40), *причому апроксимуюче перетворення може бути вибране поліноміальним.*

Доведення. Нехай поліноміальне перетворення $y = Q(x)$ зводить вектор-функцію (3.58) до трикутної форми (3.59). Застосовуючи його до ряду $\mathcal{Z}_g$, отримуємо, що елемент a_i у правій частині (3.55) («старший доданок») дорівнює

$$a_i = \sum_{w_1 r_1 + \cdots + w_n r_n = w_i} \alpha_i^{r_1 \ldots r_n} d_1^{\text{ш} r_1} \,\text{ш} \cdots \text{ш}\, d_n^{\text{ш} r_n}.$$

Зокрема, можна вибрати $y = Q(x)$ так, щоб $a_i = d_i$, $i = 1, \ldots, n$, тобто

$$Q(\mathcal{Z}_g) = d + \rho,$$

де $d = (d_1, \ldots, d_n)^\mathsf{T}$, $\rho = (\rho_1, \ldots, \rho_n)^\mathsf{T}$, причому ρ_i містить елементи порядку вище $w_i = \operatorname{ord}(d_i)$. Позначимо

$$\mathcal{Z}_{\widehat{g}} = d.$$

Цей ряд задає відображення $\widehat{g} : \mathfrak{A} \to \mathbb{R}^n$, яке визначається на базисних елементах (3.37) так:

$$\begin{aligned} &\widehat{g}(\ell_i) = e_i \text{ при } i = 1, \ldots, n, \quad \widehat{g}(\ell_j) = 0 \text{ при } j \geq n+1, \\ &\widehat{g}(\ell_{j_1}^{p_1} \ldots \ell_{j_r}^{p_r}) = 0, \text{ якщо } p_1 + \cdots + p_r \geq 2. \end{aligned} \tag{3.61}$$

Очевидно, ряд $\mathcal{Z}_{\widehat{g}}+$ задовольняє всі умови означення 3.4. ■

Зазначимо, що ряд $\mathcal{Z}_{\widehat{g}}$ і апроксимуюче перетворення $y = Q(x)$ задаються неоднозначно; наприклад, $(\mathcal{Z}_{\widehat{g}})_i$ можна вибрати як $d_i + P_i(d_1, \ldots, d_{i-1})$, де $P_i(d_1, \ldots, d_{i-1}) \in \mathfrak{A}^{w_i}$ є однорідними поліномами (відносно тасуючого добутку) без лінійного члена. Покажемо, що це й вичерпує всі можливості для однорідної апроксимації.

Лема 3.16. *Нехай ряд* $\mathcal{Z}_{\widehat{g}}$ *є однорідною апроксимацією ряду* $\mathcal{Z}_g$. *Тоді його компоненти мають вигляд*

$$(\mathcal{Z}_{\widehat{g}})_i = P_i(d_1, \ldots, d_{i-1}), \; i = 1, \ldots, n,$$

де $P_i(d_1, \dots, d_{i-1}) \in \mathfrak{A}^{w_i}$ *є однорідними поліномами (відносно тасуючого добутку), причому* $P = (P_1, \dots, P_n)^\mathsf{T}$ *— поліноміальна вектор-функція з невиродженою лінійною частиною.*

Доведення. Позначимо $(\mathcal{Z}_{\widehat{g}})_i = a_i$, $\widetilde{w}_i = \operatorname{ord}(a_i)$, причому $\widetilde{w}_1 \le \dots \le \widetilde{w}_n$. З означення 3.4 випливає, що існує таке перетворення $y = \widetilde{Q}(x)$, для якого

$$(\widetilde{Q}(\mathcal{Z}_g))_i = a_i + \widetilde{\rho}_i,$$

де $\widetilde{\rho}_i$ містить елементи порядку вище $\widetilde{w}_i$. З іншого боку, з леми 3.15 отримуємо, що

$$(Q(\mathcal{Z}_g))_i = d_i + \rho_i,$$

де ρ_i містить елементи порядку вище w_i. Оскільки перетворення $y = \widetilde{Q}(x)$ і $y = Q(x)$ невироджені, існує перетворення $F(x) = \widetilde{Q}(Q^{-1}(x))$, яке теж є невиродженим. Маємо

$$a + \widetilde{\rho} = F(d_1 + \rho_1, \dots, d_n + \rho_n).$$

Елементи *найменшого* порядку i-ї компоненти лівої частини — це a_i, їх порядок дорівнює $\widetilde{w}_i$. Розглянемо елементи найменшого порядку правої частини: очевидно, це елементи, які входять до $(F(d_1, \dots, d_n))_i$. Отже,

$$a_i + \widetilde{\rho}_i = P_i(d_1, \dots, d_n) + R_i(d_1, \dots, d_n),$$

де $P_i(d_1, \dots, d_n)$ — однорідний поліном (відносно тасуючого добутку) порядку $\widetilde{w}_i$, а $R_i(d_1, \dots, d_n)$ містить елементи порядку вище ніж $\widetilde{w}_i$, звідки отримуємо, що $(\mathcal{Z}_{\widehat{g}})_i = a_i = P_i(d_1, \dots, d_n)$. Покажемо, як визначити відображення $\widehat{g}$ на базисних елементах (3.37): якщо

$$P_i(x_1, \dots, x_n) = \sum \alpha^i_{q_1 \dots q_n} x_1^{q_1} \cdots x_n^{q_n},$$

то $\widehat{g}$ задається так:

$$\begin{aligned} &(\widehat{g}(\ell_1^{q_1} \dots \ell_n^{q_n}))_i = \alpha^i_{q_1 \dots q_n}, \\ &(\widehat{g}(\ell_{j_1}^{p_1} \dots \ell_{j_r}^{p_r}))_i = 0, \text{ якщо } j_r \ge n+1. \end{aligned} \tag{3.62}$$

Отже, значення $\widehat{g}$ на елементах $\ell_1, \ldots, \ell_n$ дорівнює лінійній частині $P = (P_1, \ldots, P_n)^{\mathsf{T}}$. З умови 3 означення 3.4 отримуємо, що лінійна частина P невироджена. Очевидно, тоді $\widetilde{w}_i = w_i$ і $P_i = P_i(d_1, \ldots, d_{i-1})$, $i = 1, \ldots, n$. ■

Об'єднуючи леми 3.15 і 3.16, отримуємо повний опис однорідних апроксимацій рядів (3.9).

Теорема 3.2. *Розглянемо довільний ряд $\mathcal{Z}_g$ вигляду* (3.9), *що задовольняє припущення 3.2. Будь-яка його однорідна апроксимація має вигляд*

$$\mathcal{Z}_{\widehat{g}} = P(d_1, \ldots, d_n), \tag{3.63}$$

де P — довільна поліноміальна вектор-функція з невиродженою лінійною частиною і однорідними компонентами, $d_1, \ldots, d_n$ — елементи спряженого базису (3.40) *до базису Пуанкаре-Біркгофа-Вітта* (3.37), *однорідні елементи $\ell_1, \ldots, \ell_n \in \mathfrak{L}$ задовольняють умови* (3.18), (3.19), *а $\{\ell_j\}_{j=n+1}^{\infty}$ є однорідним базисом $\mathfrak{L}_g$.*

При цьому апроксимуюче перетворення $y = Q(x)$ з означення 3.4 може бути вибране поліноміальним.

Отже, однорідна апроксимація ряду є *єдиною* в такому сенсі: будь-яка однорідна апроксимація може бути зведена до будь-якої іншої за допомогою однорідного поліноміального перетворення.

З лем 3.13 і 3.14 випливає повний опис апроксимуючих перетворень.

Теорема 3.3. *Невироджене перетворення $y = Q(x)$ є апроксимуючим для ряду* (3.45) *тоді і тільки тоді, коли воно зводить вектор-функцію* (3.56) *до трикутної форми* (3.57). *Еквівалентно, невироджене перетворення $y = Q(x)$ є апроксимуючим тоді і тільки тоді, коли воно зводить поліноміальну вектор-функцію* (3.58) *до трикутної форми* (3.59).

Використовуючи наслідок 3.5, за яким будь-який елемент $\widetilde{\ell}_i$, $i = 1, \ldots, n$, можна подати як поліном відносно тасуючого добутку від

$d_1, \ldots, d_n$, і навпаки, отримуємо іншу зручну форму для однорідної апроксимації.

Теорема 3.4. *Розглянемо довільний ряд $\mathcal{Z}_g$ вигляду (3.9), що задовольняє припущення 3.2. Будь-яка його однорідна апроксимація має вигляд*

$$\mathcal{Z}_{\widehat{g}} = P(\widetilde{\ell}_1, \ldots, \widetilde{\ell}_n),$$

де P — довільна поліноміальна вектор-функція з невиродженою лінійною частиною і однорідними компонентами, однорідні елементи $\ell_1, \ldots, \ell_n \in \mathcal{L}$ задовольняють умови (3.18), (3.19), а $\widetilde{\ell}_i$ позначає ортопроекцію ℓ_i на підпростір $\mathfrak{J}_g^{\perp}$.

При цьому апроксимуюче перетворення $y = Q(x)$ з означення 3.4 може бути вибране поліноміальним.

Наслідок 3.7. *Нехай ряд $\mathcal{Z}_g$ задовольняє припущення 3.2, а ряд $\mathcal{Z}_{\widehat{g}}$ є його однорідною апроксимацією. Тоді $\mathcal{Z}_{\widehat{g}}$ теж задовольняє припущення 3.2.*

Доведення. Виконання вимоги 1 припущення 3.2 випливає з означення 3.4. Покажемо, що вимога 2 також задовольняється.

Розглянемо довільну однорідну апроксимацію; вона має вигляд (3.63). Нехай $\ell \in \mathfrak{L}$ — такий елемент, для якого $\widehat{g}(\ell) = 0$. Тоді ℓ є лінійною комбінацією $\{\ell_j\}_{j=n+1}^{\infty}$, тобто $\ell \in \mathfrak{L}_g$. Але тоді $z\ell \in \mathfrak{J}_g$, а отже, за наслідком 3.2 є лінійною комбінацією елементів вигляду (3.23). Але з (3.62) випливає, що на всіх таких елементах $\widehat{g}$ дорівнює нулю, отже, $\widehat{g}(z\ell) = 0$. ∎

3.3.2 Безкоординатне означення і класифікація однорідних апроксимацій

З доведення наслідку 3.7 випливає, що однорідна апроксимація задовольняє такі властивості: $\mathfrak{L}_g = \mathfrak{L}_{\widehat{g}}$ і $\widehat{g}(\mathfrak{J}_{\widehat{g}}) = 0$; за вимогою 2 припущення 3.2 остання рівність рівносильна рівності $\widehat{g}(\mathfrak{L}_{\widehat{g}}) = 0$. Навпаки, якщо ряд $\mathcal{Z}_{\widehat{g}}$ задовольняє ці умови, він, очевидно, є однорідною апроксимацією ряду $\mathcal{Z}_g$. Отже, отримуємо безкоординатне означення однорідної апроксимації, еквівалентне означенню 3.4, яке не пов'язане з вимогою існування апроксимуючого перетворення.

Означення 3.5. *Нехай заданий ряд $\mathcal{Z}_g$ вигляду (3.9), який задовольняє припущення 3.2. Ми кажемо, що ряд $\mathcal{Z}_{\widehat{g}}$ є однорідною апроксимацією ряду $\mathcal{Z}_g$ (а відображення $\widehat{g}$ є однорідною апроксимацією відображення g), якщо:*

(а) $\widehat{g}(\mathfrak{L}_{\widehat{g}}) = 0$;

(б) $\mathfrak{L}_g = \mathfrak{L}_{\widehat{g}}$.

Зазначимо, що умова (а) означає однорідність, а умова (б) — апроксимацію.

Зауваження 3.4. *Умови (а) і (б) означення 3.5 можна замінити еквівалентними умовами:*

(а$'$) $\widehat{g}(\mathfrak{J}_{\widehat{g}}) = 0$;

(б$'$) $\mathfrak{J}_g = \mathfrak{J}_{\widehat{g}}$.

Як показано вище, будь-який ряд вигляду (3.9), що задовольняє припущення 3.2, визначає ядерну підалгебру Лі — градуйовану підалгебру Лі ковимірності n, яка «відповідає» за однорідну апроксимацію. Покажемо тепер, що будь-яка градуйована підалгебра Лі ковимірності n відповідає якомусь ряду. З цього випливатиме повний опис усіх можливих однорідних апроксимацій рядів (3.9).

Лема 3.17. *Нехай $\mathfrak{L}' \subset \mathfrak{L}$ — довільна градуйована підалгебра Лі ковимірності n. Тоді існує ряд $\mathcal{Z}_{\widehat{g}}$ вигляду (3.9) (або, що те ж саме, лінійне відображення $\widehat{g} : \mathfrak{A} \to \mathbb{R}^n$), що задовольняє вимоги 3.2, для якого $\mathfrak{L}_{\widehat{g}} = \mathfrak{L}'$.*

Доведення. Покладемо $\mathfrak{J}' = \mathrm{Lin}\{\mathfrak{A}^e \mathfrak{L}'\}$, виберемо будь-які однорідні елементи $\ell_1, \ldots, \ell_n$, для яких $\mathfrak{L} = \mathrm{Lin}\{\ell_1, \ldots, \ell_n\} + \mathfrak{L}'$. Тоді всі результати підрозділу 3.2 (крім наслідку 3.6) можна повторити для $\mathfrak{L}'$ і $\mathfrak{J}'$. Отже, ми можемо побудувати (однорідний) ряд, наприклад, за формулою (3.61), для якого $\mathfrak{L}_{\widehat{g}} = \mathfrak{L}'$. ∎

Зауваження 3.5. *Лема 3.17 означає, що ядерною підалгеброю Лі може бути довільна градуйована підалгебра Лі ковимірності n. Разом з лемою 3.4 це дає повну класифікацію можливих однорідних апроксимацій.*

Висновки до розділу 3

У розділі 3 отримані основні результати дисертації щодо формальних рядів в абстрактній вільній алгебрі. А саме, розглянуто ряди, які задовольняють певним вимогам (припущення 3.2); ці припущення автоматично задовольняються для рядів ітерованих інтегралів і нелінійних степеневих моментів, які розглядалися в розділі 2.

У підрозділі 3.1 введені поняття ядерної алгебри і лівого ідеалу, що породжуються рядом, досліджені їх властивості, введене поняття однорідної апроксимації формального ряду. У підрозділі 3.2 отримане узагальнення теореми Р. Рі, за допомогою якого будується базис ортогонального доповнення до лівого ідеалу.

У підрозділі 3.3 отриманий повний опис усіх можливих однорідних апроксимацій і апроксимуючих перетворень. Зокрема, показано, що два ряди мають одну й ту саму однорідну апроксимацію тоді і тільки тоді, коли їх ядерні підалгебри Лі збігаються. З іншого боку, показано, що ядерною підалгеброю Лі є будь-яка градуйована підалгебра Лі ковимірності n.

У наступних розділах одержані результати будуть застосовані до дослідження апроксимації нелінійних керованих систем.

Основні результати розділу опубліковані у роботах [129, 132, 134, 82, 137].

РОЗДІЛ 4
ПОБУДОВА ОДНОРІДНОЇ АПРОКСИМАЦІЇ І ДОСЛІДЖЕННЯ ЗАДАЧІ ШВИДКОДІЇ ДЛЯ НЕЛІНІЙНИХ СИСТЕМ, ЛІНІЙНИХ ЗА КЕРУВАННЯМ

У цьому розділі ми повертаємося до дослідження нелінійних керованих систем, лінійних за керуванням. У підрозділі 4.1 застосовуються результати розділу 3 до побудови однорідної апроксимації: пропонується безкоординатне алгебраїчне означення однорідної апроксимації, описується метод її побудови і пояснюється, в якому сенсі її можна вважати єдиною.

У підрозділі 4.2 досліджується задача швидкодії для систем, лінійних за керуванням, і з'ясовується зв'язок між однорідною апроксимацією і апроксимацією у сенсі швидкодії. У підрозділі 4.3 досліджується задача однорідної апроксимації в околі, зокрема, для однорідних і регулярних систем.

Основні результати розділу опубліковано в роботах [82, 132, 134, 137].

4.1 Однорідна апроксимація

Повернемось до поняття однорідної апроксимації, введеного в пунктах 1.2.2 та 2.3.1. У цьому підрозділі ми пропонуємо інше, безкоординатне означення однорідної апроксимації, яке дозволяє отримати повну класифікацію однорідних апроксимацій і ефективно будувати однорідні апроксимації. Результати використовують алгебраїчні методи, розвинуті в розділі 3.

4.1.1 Ядерна підалгебра Лі і лівий ідеал, що породжуються системою

Розглянемо систему вигляду (2.1), де $X_1(x), \ldots, X_m(x)$ — дійсноаналітичні векторні поля в деякому околі нуля $U(0) \subset \mathbb{R}^n$. Як показано в підрозділі 2.1, така система визначає відображення в кінець траєкторії

$\mathcal{E}_{X_1,\dots,X_m}$ (означення 2.1), яке припускає розвинення в ряд ітерованих інтегралів (2.3)–(2.5). Ітеровані інтеграли (2.4) утворюють вільну асоціативну алгебру $\mathcal{F}_\theta$ (означення 2.4), яка ізоморфна абстрактній вільній алгебрі $\mathcal{F}$. Абстрактний аналог відображення в кінець траєкторії — це ряд (2.12) в алгебрі $\mathcal{F}$.

Тепер розглянемо алгебру $\mathcal{F}$ як вільну алгебру з розділу 3, тобто $\mathfrak{A} = \mathcal{F}$. Вона породжується літерами $\{\zeta_i : i \in I\} = \{\eta_1, \dots, \eta_m\}$ (отже, $I = \{1, \dots, m\}$) з порядком $\operatorname{ord}(\eta_1) = \dots = \operatorname{ord}(\eta_m) = 1$. Це градуювання, очевидно, задовольняє припущення 3.1. Алгебра Лі $\mathfrak{L} = \mathcal{L}$ породжується тими самими літерами. Ряд $\mathcal{Z}_g = \mathcal{E}_{X_1,\dots,X_m}$ елементів $\mathcal{F}$ з векторними коефіцієнтами породжується відображенням $g = c : \mathcal{F} \to \mathbb{R}^n$ вигляду (2.21). З умови Рашевського-Чжоу (2.23) і леми 2.3 випливає, що це відображення задовольняє вимоги припущення 3.2.

Як наслідок означень підрозділу 3.1, отримуємо такі означення.

Означення 4.1. *Розглянемо підпростори $\mathcal{L}$ вигляду*

$$\mathcal{P}^k = \{\ell \in \mathcal{L}^k : c(\ell) \in c(\mathcal{L}^1 + \dots + \mathcal{L}^{k-1})\}, \ k \geq 1, \tag{4.1}$$

де при $k = 1$ мається на увазі $\mathcal{P}^1 = \{\ell \in \mathcal{L}^1 : c(\ell) = 0\}$, і нехай

$$\mathcal{L}_{X_1,\dots,X_m} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{P}^k. \tag{4.2}$$

Ми називаємо $\mathcal{L}_{X_1,\dots,X_m}$ ядерною підалгеброю Лі, що відповідає системі (2.1).

Означення 4.2. *Підпростір*

$$\mathcal{J}_{X_1,\dots,X_m} = \operatorname{Lin}\{\mathcal{F}^e \mathcal{L}_{X_1,\dots,X_m}\} = \operatorname{Lin}\{y\ell : y \in \mathcal{F}^e, \ \ell \in \mathcal{L}_{X_1,\dots,X_m}\}$$

називається лівим ідеалом, що відповідає системі (2.1).

За наслідком 3.3,

$$\mathcal{J}_{X_1,\dots,X_m} \cap \mathcal{L} = \mathcal{L}_{X_1,\dots,X_m}. \tag{4.3}$$

За лемами 3.3 і 3.4, $\mathcal{L}_{X_1,\dots,X_m}$ є градуйованою підалгеброю Лі ковимірності n. За наслідком 3.6 ядерна підалгебра Лі і лівий ідеал інваріантні відносно невироджених замін змінних у системі.

Зауваження 4.1. *Системи, для яких ядерна підалгебра Лі дорівнює* $\sum\limits_{m=p+1}^{\infty}\mathcal{L}^m$, *називаються вільними; вони були досліджені у роботі* [96]. *Зауважимо, що вони існують тільки для окремих значень* n.

Зауваження 4.2. *Якщо* $v=(v_1,\dots,v_p)$ *є вектором зросту системи* (2.1) *(означення* 2.6*), то*

$$\dim\mathcal{L}^k=\dim\mathcal{P}^k+(v_k-v_{k-1}),\quad 1\le k\le p, \tag{4.4}$$

де $v_0=0$. *Дійсно, аналогічно доведенню леми* 3.4, *розглянемо пряму суму* $\mathcal{L}^k=\mathcal{P}^k+\mathcal{M}^k$. *За означенням вектора зросту,* $\dim\mathcal{M}^k=v_k-v_{k-1}$.

Приклад 4.1. Повернемось до системи (2.19) з прикладу 2.1. Маємо

$$c(\eta_1)=c_1=e_1\ne 0,\quad c(\eta_2)=c_2=0,\quad c([\eta_2,\eta_1])=c_{21}-c_{12}=e_2\notin\mathrm{Lin}\{e_1\},$$

$$c([[\eta_2,\eta_1],\eta_1])=c_{211}-2c_{121}+c_{112}=0,\quad c([[\eta_2,\eta_1],\eta_2])=2c_{212}-c_{122}-c_{221}=0,$$

$$c([[[\eta_2,\eta_1],\eta_1],\eta_1])=c_{2111}-3\eta_{1211}+3c_{1121}-c_{1112}=e_3\notin\mathrm{Lin}\{e_1,e_2\},$$

а решта дужок Лі дорівнюють нулю. Отже, степінь неголономності системи дорівнює $p=4$, а вектор зросту має вигляд $v=(1,2,2,3)$.

Знайдемо ядерну підалгебру Лі $\mathcal{L}_{X_1,X_2}$. Маємо

$$\begin{gathered}\mathcal{P}^1=\mathrm{Lin}\{\eta_2\},\ \mathcal{P}^2=\{0\},\ \mathcal{P}^3=\mathrm{Lin}\{[[\eta_2,\eta_1],\eta_1],[[\eta_2,\eta_1],\eta_2]\}=\mathcal{L}^3,\\ \mathcal{P}^4=\mathrm{Lin}\{[[[\eta_2,\eta_1],\eta_1],\eta_2],[[[\eta_2,\eta_1],\eta_2],\eta_2]\},\end{gathered} \tag{4.5}$$

і $\mathcal{P}^k=\mathcal{L}^k$ при $k\ge 5$. Очевидно, $\mathcal{L}_{X_1,X_2}=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\mathcal{P}^k$ є підалгеброю Лі і $\operatorname{codim}\mathcal{L}_{X_1,X_2}=3$.

Знайдемо три однорідні елементи, які задають доповнення $\mathcal{L}_{X_1,X_2}$. Наприклад, можемо взяти

$$\ell_1=\eta_1+\eta_2,\ \ell_2=-2[\eta_2,\eta_1],\ \ell_3=3[[[\eta_2,\eta_1],\eta_1],\eta_1]-[[[\eta_2,\eta_1],\eta_2],\eta_2], \tag{4.6}$$

тоді $\mathcal{L} = \mathrm{Lin}\{\ell_1, \ell_2, \ell_3\} + \mathcal{L}_{X_1,X_2}$. Зауважимо, що вектори $c(\ell_1) = e_1$, $c(\ell_2) = -2e_2$ і $c(\ell_3) = 3e_3$ лінійно незалежні.

Тепер знайдемо лівий ідеал $\mathcal{J}_{X_1,X_2}$ і ортопроекції доповнюючих елементів. Ми використаємо (4.5). Очевидно, $\mathcal{J}_{X_1,X_2} \cap \mathcal{F}^1 = \mathcal{L}_{X_1,X_2} \cap \mathcal{F}^1 = \mathrm{Lin}\{\eta_2\}$. Отже, всі елементи вигляду $\eta_{i_1\dots i_k 2}$ також належать $\mathcal{J}_{X_1,X_2}$, що дає $\mathcal{J}_{X_1,X_2} \cap \mathcal{F}^2 = \mathrm{Lin}\{\eta_{12}, \eta_{22}\}$. Оскільки $[[\eta_2, \eta_1], \eta_1] = \eta_{211} - 2\eta_{121} + \eta_{112}$, $[[\eta_2, \eta_1], \eta_2] = -\eta_{221} + 2\eta_{212} - \eta_{122}$ і $\eta_{122}, \eta_{212}, \eta_{112} \in \mathcal{J}_{X_1,X_2}$, отримуємо

$$\mathcal{J}_{X_1,X_2} \cap \mathcal{F}^3 = \mathrm{Lin}\{\eta_{112}, \eta_{122}, \eta_{212}, \eta_{222}, \eta_{211} - 2\eta_{121}, \eta_{221}\},$$

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{X_1,X_2} \cap \mathcal{F}^4 = \mathrm{Lin}\{&\eta_{1112}, \eta_{1122}, \eta_{1212}, \eta_{1222}, \eta_{1211} - 2\eta_{1121}, \eta_{1221}, \\ &\eta_{2112}, \eta_{2122}, \eta_{2212}, \eta_{2222}, \eta_{2211} - 2\eta_{2121}, \eta_{2221}\}. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Тепер знайдемо ортопроекції елементів (4.6) на підпростір $\mathcal{J}^{\perp}_{X_1,X_2}$. Оскільки $\eta_2 \in \mathcal{J}_{X_1,X_2}$, отримуємо $\widetilde{\ell}_1 = \eta_1$. Аналогічно, оскільки $\eta_{12} \in \mathcal{J}_{X_1,X_2}$, маємо $\widetilde{\ell}_2 = -2\eta_{21}$. Зауважимо, що елементи $\widetilde{\ell}_1^{ш4} = 24\eta_{1111}$, $\widetilde{\ell}_1^{ш2} ш \widetilde{\ell}_2 = -12\eta_{2111} - 8\eta_{1211} - 4\eta_{1121}$ і $\widetilde{\ell}_2^{ш2} = 8\eta_{2121} + 16\eta_{2211}$ є ортогональними до всіх елементів (4.7). Нарешті, зауважимо, що $[[[\eta_2, \eta_1], \eta_2], \eta_2] \in \mathcal{J}_{X_1,X_2}$ і $[[[\eta_2, \eta_1], \eta_1], \eta_1] = \eta_{2111} - 3\eta_{1211} + 3\eta_{1121} - \eta_{1112}$, де $\eta_{1112} \in \mathcal{J}_{X_1,X_2}$. Очевидно, елемент $\eta_{2111} - 3\eta_{1211} + 3\eta_{1121}$ є ортогональним до всіх елементів (4.7) за винятком $\eta_{1211} - 2\eta_{1121}$. Отже, його ортопроекція на $\mathcal{J}^{\perp}_{X_1,X_2}$ дорівнює $\eta_{2111} - 3\eta_{1211} + 3\eta_{1121} + \alpha(\eta_{1211} - 2\eta_{1121})$, де α таке, що

$$\langle \eta_{2111} - 3\eta_{1211} + 3\eta_{1121} + \alpha(\eta_{1211} - 2\eta_{1121}), \eta_{1211} - 2\eta_{1121} \rangle = 0,$$

що дає $\alpha = \frac{9}{5}$. Остаточно отримуємо

$$\widetilde{\ell}_1 = \eta_1, \quad \widetilde{\ell}_2 = -2\eta_{21}, \quad \widetilde{\ell}_3 = 3\eta_{2111} - \tfrac{18}{5}\eta_{1211} - \tfrac{9}{5}\eta_{1121}.$$

Тепер знайдемо елементи спряженого базису. Виберемо $\ell_4 = \eta_2$. Тоді d_1 можна знайти з рівностей $\langle d_1, \ell_1 \rangle = 1$, $\langle d_1, \ell_4 \rangle = 0$, що дає $d_1 = \eta_1 = \widetilde{\ell}_1$. Аналогічно, d_2 можна знайти з рівностей $\langle d_2, \ell_2 \rangle = 1$, $\langle d_2, \ell_1\ell_1 \rangle = \langle d_2, \ell_1\ell_4 \rangle = \langle d_2, \ell_4\ell_4 \rangle = 0$, що дає $d_2 = -\frac{1}{2}\eta_{21} = \frac{1}{4}\widetilde{\ell}_2$. Нарешті, виберемо $\ell_5 = [[\eta_2, \eta_1], \eta_1]$, $\ell_6 = [[\eta_2, \eta_1], \eta_2]$, $\ell_7 = [[[\eta_2, \eta_1], \eta_1], \eta_2]$, $\ell_8 = [[[\eta_2, \eta_1], \eta_2], \eta_2]$. Елемент d_3 задовольняє рівність $\langle d_3, \ell_3 \rangle = 1$ і є ортогональним до

$$\ell_1^4,\ \ell_1^3\ell_4,\ \ell_1^2\ell_4^2,\ \ell_1\ell_4^3,\ \ell_4^4,\ \ell_1^2\ell_2,\ \ell_1\ell_2\ell_4,\ \ell_2^2,\ \ell_2\ell_4^2,\ \ell_1\ell_5,\ \ell_1\ell_6,\ \ell_4\ell_5,\ \ell_4\ell_6,\ \ell_7,\ \ell_8,$$

що дає $d_3 = \frac{1}{3}\eta_{2111}$. Зауважимо, що $\eta_1^{ш2} ш \eta_{21} = 6\eta_{2111} + 4\eta_{1211} + 2\eta_{1121}$, отже, $d_3 = \frac{5}{126}\widetilde{\ell}_3 - \frac{1}{54}\widetilde{\ell}_1^{ш2} ш \widetilde{\ell}_2$. Остаточно,

$$d_1 = \eta_1 = \widetilde{\ell}_1, \quad d_2 = -\tfrac{1}{2}\eta_{21} = \tfrac{1}{4}\widetilde{\ell}_2, \quad d_3 = \tfrac{1}{3}\eta_{2111} = \tfrac{5}{126}\widetilde{\ell}_3 - \tfrac{1}{54}\widetilde{\ell}_1^{ш2} ш \widetilde{\ell}_2$$

4.1.2 Опис і класифікація однорідних апроксимацій

У лемі 3.15 запропоновано метод побудови ряду $\mathcal{Z}_{\widehat{g}}$, який є однорідною апроксимацією ряду $\mathcal{Z}_g$ (означення 3.4). Застосуємо його до ряду $\mathcal{Z}_g = \mathcal{E}_{X_1,\dots,X_m}$ і позначимо апроксимацію $\widehat{\mathcal{E}} = \mathcal{Z}_{\widehat{g}}$. За наслідком 3.7 апроксимуючий ряд задовольняє припущення 3.2. Крім того, він містить скінченну кількість доданків (див. (3.62)). Це означає, що ряд $\widehat{\mathcal{E}}$ задовольняє умови теореми 1.8, а отже, існує (дійсно-аналітична) система (2.44), для якої $\mathcal{E}_{\widehat{X}_1,\dots,\widehat{X}_m} = \widehat{\mathcal{E}}$.

Таким чином, отримуємо такі наслідки з теорем 3.2 і 3.4.

Теорема 4.1. *Для кожної дійсно-аналітичної повністю неголономної системи вигляду (2.1) існує така невироджена поліноміальна заміна змінних $y = Q(x)$, що відображення в кінець траєкторії системи в нових координатах (2.13) зображається як ряд вигляду*

$$\left(\mathcal{E}_{Y_1,\dots,Y_m}\right)_i = \left(Q(\mathcal{E}_{X_1,\dots,X_m})\right)_i = d_i + \rho_i, \quad i = 1,\dots,n, \tag{4.8}$$

де $\rho_i \in \sum\limits_{j=w_i+1}^{\infty} \mathcal{F}^j$, $w_i = \mathrm{ord}(d_i)$, $i = 1,\dots,n$. Тут $d_1,\dots,d_n$ — елементи спряженого базису (3.40) до базису Пуанкаре-Біркгофа-Вітта (3.37), де однорідні елементи $\ell_1,\dots,\ell_n \in \mathcal{L}$ задовольняють умови

$$\begin{gathered} \mathcal{L} = \mathrm{Lin}\{\ell_1,\dots,\ell_n\} + \mathcal{L}_{X_1,\dots,X_m}, \\ \mathrm{ord}(\ell_i) \le \mathrm{ord}(\ell_j) \ \ \textit{при} \ \ 1 \le i < j \le n, \end{gathered} \tag{4.9}$$

а $\{\ell_j\}_{j=n+1}^{\infty}$ є однорідним базисом $\mathcal{L}_{X_1,\dots,X_m}$.

Теорема 4.2. *Для кожної дійсно-аналітичної повністю неголономної системи вигляду (2.1) існує така невироджена поліноміальна заміна* *змінних* $y = Q(x)$, *що відображення в кінець траєкторії системи в нових координатах* (2.13) *зображається як ряд вигляду*

$$\left(\mathcal{E}_{Y_1,\ldots,Y_m}\right)_i = \left(Q(\mathcal{E}_{X_1,\ldots,X_m})\right)_i = \widetilde{\ell}_i + \widehat{\rho}_i, \quad i = 1,\ldots,n, \tag{4.10}$$

де $\widehat{\rho}_i \in \sum\limits_{j=w_i+1}^{\infty} \mathcal{F}^j$, $w_i = \mathrm{ord}(\ell_i)$, $i = 1,\ldots,n$. *Тут однорідні елементи* $\ell_i \in \mathcal{L}$ *задовольняють умови* (4.9), *а* $\widetilde{\ell}_i$ *позначає ортопроекцію* ℓ_i *на підпростір* $\mathcal{J}^{\perp}_{X_1,\ldots,X_m}$.

Наслідок 4.1. *Система* (2.44) *є однорідною апроксимацією системи* (2.1) *у сенсі означення* 2.12 *тоді і тільки тоді, коли її ряд має вигляд* $(\mathcal{E}_{\widehat{X}_1,\ldots,\widehat{X}_m})_i = P_i(d_1,\ldots,d_n)$, $i = 1,\ldots,n$, *де* $P = (P_1,\ldots,P_n)^{\mathsf{T}}$ *— поліноміальна вектор-функція з невиродженою лінійною частиною і* $P_i(d_1,\ldots,d_n) \in \mathcal{F}^{w_i}$ *(де* $w_i = \mathrm{ord}(d_i)$*).*

Наслідок 4.2. *Система* (2.44) *є однорідною апроксимацією системи* (2.1) *у сенсі означення* 2.12 *тоді і тільки тоді, коли її ряд має вигляд* $(\mathcal{E}_{\widehat{X}_1,\ldots,\widehat{X}_m})_i = P_i(\widetilde{\ell}_1,\ldots,\widetilde{\ell}_n)$, $i = 1,\ldots,n$, *де* $P = (P_1,\ldots,P_n)^{\mathsf{T}}$ *— поліноміальна вектор-функція з невиродженою лінійною частиною і* $P_i(\widetilde{\ell}_1,\ldots,\widetilde{\ell}_n) \in \mathcal{F}^{w_i}$ *(де* $w_i = \mathrm{ord}(\ell_i)$*).*

Таким чином, однорідну апроксимацію системи можна побудувати суто алгебраїчним шляхом, за допомогою «стандартної» процедури знаходження ортопроекцій елементів $\ell_1,\ldots,\ell_n$, які задовольняють умови (4.9), на підпростір $\mathcal{J}^{\perp}_{X_1,\ldots,X_m}$.

Як випливає з наслідків 4.1 і 4.2, якщо система (2.44) є однорідною апроксимацією системи (2.1), то $\mathcal{L}_{X_1,\ldots,X_m} = \mathcal{L}_{\widehat{X}_1,\ldots,\widehat{X}_m}$. Крім того, ряд системи, яка є однорідною апроксимацією, визначається єдиним чином з точністю до однорідної поліноміальної заміни змінних. Оскільки ряд задовольняє умови (a) і (b) теореми 1.8, апроксимуюча система теж визначається однозначно.

Беручи до уваги зауваження 3.5, отримуємо наступні наслідки, які дають повну класифікацію всіх можливих однорідних апроксимацій нелінійних систем, лінійних за керуванням.

Наслідок 4.3. *Дві повністю неголономні системи вигляду* (2.1) *мають одну й ту саму однорідну апроксимацію тоді і тільки тоді, коли їх ядерні підалгебри Лі збігаються.*

Наслідок 4.4. *Для системи вигляду* (2.1) *однорідна апроксимація існує і є единою з точністю до однорідної поліноміальної заміни змінних.*

Наслідок 4.5. *Множина однорідних апроксимацій повністю неголономних систем вигляду* (2.1) *знаходиться у взаємно однозначній відповідності з множиною всіх градуйованих підалгебр Лі $\mathcal{L}$ ковимірності n.*

Означення 2.12 однорідної апроксимації є координатно залежним. Ми переформулюємо це означення у координатно незалежний спосіб, враховуючи означення 3.5 і зауваження 3.4.

Означення 4.3. *Розглянемо повністю неголономну систему* (2.1). *Нехай система* (2.44) *є повністю неголономною; нехай* $c_{\widehat{X}_1,\ldots,\widehat{X}_m} : \mathcal{F} \to \mathbb{R}^n$ *позначає лінійне відображення, що відповідає системі* (2.44). *Система* (2.44) *називається однорідною апроксимацією системи* (2.1), *якщо*

(а) $c_{\widehat{X}_1,\ldots,\widehat{X}_m}(\mathcal{L}_{\widehat{X}_1,\ldots,\widehat{X}_m}) = 0$,

(б) $\mathcal{L}_{X_1,\ldots,X_m} = \mathcal{L}_{\widehat{X}_1,\ldots,\widehat{X}_m}$.

Зауваження 4.3. *Умови (а) і (б) означення 4.3 можна замінити еквівалентними умовами:*

(а′) $c_{\widehat{X}_1,\ldots,\widehat{X}_m}(\mathcal{J}_{\widehat{X}_1,\ldots,\widehat{X}_m}) = 0$,

(б′) $\mathcal{J}_{X_1,\ldots,X_m} = \mathcal{J}_{\widehat{X}_1,\ldots,\widehat{X}_m}$.

4.1.3 Опис усіх можливих привілейованих координат

Повернемось до поняття привілейованих координат, яке обговорювалося в пунктах 1.2.2 і 2.3.1. Запишемо зображення (3.45) для ряду $\mathcal{E}_{X_1,\ldots,X_m}$:

$$\mathcal{E}_{X_1,\ldots,X_m} = \sum_{\substack{1\le i_1<\cdots<i_r \\ q_1,\ldots,q_r\ge 1}} \frac{1}{q_1!\cdots q_r!} c(\ell_{i_1}^{q_1}\cdots \ell_{i_r}^{q_r})\, d_{i_1}^{ш q_1} ш \cdots ш\, d_{i_r}^{ш q_r}. \tag{4.11}$$

Отримуємо наступний опис понять порядку, ваги і привілейованих координат (пункт 1.2.2).

Порядок координатної функції $f_i(x) = x_i$ *дорівнює мінімальному порядку* k_i *базисного елемента* $d_{i_1}^{ш q_1} ш \cdots ш d_{i_r}^{ш q_r}$, *який входить до* i*-ї компоненти правої частини* (4.11) *з ненульовим коефіцієнтом, тобто такого, що* $(c(\ell_{i_1}^{q_1} \cdots \ell_{i_r}^{q_r}))_i \neq 0$.

Припустимо, що координати лінійно адаптовані. Вага координати x_i *дорівнює мінімальному порядку* w_i *базисного елемента* d_q, *який входить до* i*-ї компоненти правої частини* (4.11) *з ненульовим коефіцієнтом, тобто такого, що* $(c(d_q))_i \neq 0$. Якщо $c(d_i) = e_i$ при $i = 1, \ldots, n$, то вага координати x_i дорівнює $w_i = \mathrm{ord}(d_i)$.

Зокрема, очевидно, що порядок координатної функції не більший за вагу цієї координати. Більш того, порядок $f_i(x) = x_i$ строго менше ваги x_i тоді і тільки тоді, коли існує елемент $d_{i_1}^{ш q_1} ш \cdots ш d_{i_r}^{ш q_r}$, для якого $(c(\ell_{i_1}^{q_1} \cdots \ell_{i_r}^{q_r}))_i \neq 0$ і $\mathrm{ord}(\ell_{i_1}^{q_1} \cdots \ell_{i_r}^{q_r}) < w_i$. Отже, *лінійно адаптовані координати є привілейованими, якщо для всіх* $i = 1, \ldots, n$

$$(c(\ell_{i_1}^{q_1} \cdots \ell_{i_r}^{q_r}))_i = 0 \quad \text{\textit{при}} \quad \mathrm{ord}(\ell_{i_1}^{q_1} \cdots \ell_{i_r}^{q_r}) < w_i.$$

Але з вибору базисних елементів випливає, що *лінійно адаптовані координати є привілейованими, якщо для всіх* $i = 1, \ldots, n$

$$(c(\ell_1^{q_1} \cdots \ell_n^{q_n}))_i = 0 \quad \text{\textit{при}} \quad \mathrm{ord}(\ell_1^{q_1} \cdots \ell_n^{q_n}) < w_i.$$

Тобто можна побудувати привілейовані координати, якщо виключити всі елементи $d_1^{ш q_1} ш \cdots ш d_n^{ш q_n}$, порядок яких менше w_i, з i-ї компоненти (4.11) для всіх $i = 1, \ldots, n$. Це відповідає зведенню ряду

$$\mathcal{S} = \sum_{\substack{q_1, \ldots, q_n \geq 0 \\ q_1 + \cdots + q_n \geq 1}} \frac{1}{q_1! \cdots q_n!} c(\ell_1^{q_1} \cdots \ell_n^{q_n})\, d_1^{ш q_1} ш \cdots ш d_n^{ш q_n}$$

до трикутного вигляду.

Отже, отримуємо такі наслідки з теореми 3.3.

Розглянемо вектор-функцію $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ вигляду

$$\Phi(z) = \sum_{\substack{q_1,\dots,q_n \ge 0 \\ q_1+\dots+q_n \ge 1}} \frac{1}{q_1! \cdots q_n!} c(\ell_1^{q_1} \cdots \ell_n^{q_n})\, z_1^{q_1} \cdots z_n^{q_n}, \qquad z \in \mathbb{R}^n. \tag{4.12}$$

Зауважимо, що $\Phi(0) = 0$. Як випливає з означення (2.5) і обговорення з пункту 2.1.4,

$$c(\ell_1^{q_1} \cdots \ell_n^{q_n}) = Z_n^{q_n} \cdots Z_1^{q_1},$$

де векторні поля $Z_i = H(\ell_i)$, $i = 1, \dots, n$, визначаються за антигомоморфізмом (2.20), а Z^q позначає композицію $Z^q = Z \cdots Z$ (q разів). Оскільки векторні поля $Z_1, \dots, Z_n$ є дійсно-аналітичними в околі нуля, $\Phi(z)$ також є дійсно-аналітичною в околі нуля. Зазначимо, що $\Phi_z(0) = (c(\ell_1), \dots, c(\ell_n))$, а отже, за наслідком 3.1, $\det \Phi_z(0) \ne 0$.

Теорема 4.3. *Заміна змінних $y = Q(x)$ визначає привілейовані координати тоді і тільки тоді, коли вона зводить вектор-функцію (4.12) до трикутного вигляду, тобто*

$$(Q(\Phi(z)))_i = \sum_{w_1 r_1 + \dots + w_n r_n \ge w_i} \alpha_i^{r_1 \dots r_n} z_1^{r_1} \cdots z_n^{r_n}, \qquad i = 1, \dots, n,$$

де $\alpha_i^{r_1 \dots r_n} \in \mathbb{R}$.

Зокрема, $Q(z) = \Phi^{-1}(z)$ задає привілейовані координати; така однорідна апроксимація була запропонована в роботі [80].

Теорема 4.4. *Заміна змінних $y = Q(x)$ визначає привілейовані координати тоді і тільки тоді, коли воно зводить поліноміальну вектор-функцію*

$$\Psi(z) = \sum_{w_1 q_1 + \dots + w_n q_n \le w_n} \frac{1}{q_1! \cdots q_n!} c(\ell_1^{q_1} \cdots \ell_n^{q_n}) z_1^{q_1} \cdots z_n^{q_n}, \qquad z \in \mathbb{R}^n, \tag{4.13}$$

до трикутного вигляду, тобто

$$(Q(\Psi(z)))_i = \sum_{w_1 r_1 + \dots + w_n r_n \ge w_i} \alpha_i^{r_1 \dots r_n} z_1^{r_1} \cdots z_n^{r_n}, \qquad i = 1, \dots, n,$$

де $\alpha_i^{r_1 \dots r_n} \in \mathbb{R}$.

По суті така поліноміальна заміна була описана в роботі [50]. На практиці зручно будувати заміну змінних покомпонентно, щоб на i-му кроці перетворювати i-у компоненту, виключаючи всі члени порядку менше w_i.

Нарешті, обговоримо зв'язок двох означень однорідної апроксимації — означення 2.12 і означення з роботи [50]. Нагадаємо, як вводилося поняття однорідної апроксимації у [50]. Припустимо, що систему (2.1) записано у привілейованих координатах; тоді $X_i(x) = X_i^{(-1)}(x)+Y_i(x)$, $i = 1,\ldots,m$, де векторні поля $X_i^{(-1)}(x)$ мають порядок -1, а Y_i містить доданки порядку більше, ніж -1, тобто

$$(X_i^{(-1)}(x))_j = \sum_{k_1w_1+\cdots+k_{j-1}w_{j-1}=w_j-1} \mu^{j,i}_{k_1\ldots k_{j-1}} x_1^{k_1}\cdots x_{j-1}^{k_{j-1}}, \quad j = 1,\ldots,n,$$

$$(Y_i(x))_j = \sum_{k_1w_1+\cdots+k_nw_n\geq w_j} \nu^{j,i}_{k_1\ldots k_n} x_1^{k_1}\cdots x_n^{k_n}, \quad j = 1,\ldots,n.$$

Тоді *система* $\dot z = \sum\limits_{i=1}^m u_iX_i^{(-1)}(z)$ *називається однорідною апроксимацією системи* (2.1).

Можна показати, що ця система задовольняє означення 2.12. Для цього розглянемо $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{X_1,\ldots,X_m}$ і $\widehat{\mathcal{E}} = \mathcal{E}_{X_1^{(-1)},\ldots,X_m^{(-1)}}$. Оскільки за означенням $\mathcal{E}_{X_1,\ldots,X_m}$ і $\mathcal{E}_{X_1^{(-1)},\ldots,X_m^{(-1)}}$

$$\widehat{\mathcal{E}}_j(\theta,u) = x_j(\theta) = \sum_{i=1}^m \int_0^\theta u_i(\tau)(X_i^{(-1)}(x(\tau)))_j d\tau,$$

$$\mathcal{E}_j(\theta,u) = x_j(\theta) = \sum_{i=1}^m \int_0^\theta u_i(\tau)\left((X_i^{(-1)}(x(\tau)))_j + (Y_i(x(\tau)))_j\right) d\tau,$$

то

$$\widehat{\mathcal{E}}_j = \sum_{i=1}^m \eta_i \Bigg(\sum_{k_1w_1+\cdots+k_{j-1}w_{j-1}=w_j-1} \mu^{j,i}_{k_1\ldots k_{j-1}} \widehat{\mathcal{E}}_1^{ш k_1} ш \cdots ш\, \widehat{\mathcal{E}}_{j-1}^{ш k_{j-1}} \Bigg),$$

$$\mathcal{E}_j = \sum_{i=1}^m \eta_i \Bigg(\sum_{k_1w_1+\cdots+k_{j-1}w_{j-1}=w_j-1} \mu^{j,i}_{k_1\ldots k_{j-1}} \mathcal{E}_1^{ш k_1} ш \cdots ш\, \mathcal{E}_{j-1}^{ш k_{j-1}} +$$

$$+ \sum_{k_1w_1+\cdots+k_nw_n\geq w_j} \nu^{j,i}_{k_1\ldots k_n} \mathcal{E}_1^{ш k_1} ш \cdots ш\, \mathcal{E}_n^{ш k_n} \Bigg).$$

Застосовуючи індукцію по j, можна довести, що $\widehat{\mathcal{E}}_j$ є однорідним і містить елементи тільки порядку w_j, а $\mathcal{E}_j$ містить елементи порядку не менше w_j і, більш того, елементи порядку w_j в $\widehat{\mathcal{E}}_j$ і $\mathcal{E}_j$ збігаються. Звідси випливають умови означення 2.12. З наслідку 4.4 отримуємо, що однорідна апроксимація у сенсі означення 2.12 є єдиною (з точністю до поліноміальної заміни змінних). Отже, означення 2.12 і означення однорідної апроксимації з роботи [50] задають одне й те саме поняття.

4.1.4 Побудування апроксимуючої системи

Як випливає з теореми 3.4, ряд $\widehat{\mathcal{E}} = \sum \widehat{c}_{i_1\ldots i_k}\eta_{i_1\ldots i_k}$, що відповідає однорідній апроксимації системи, може бути знайдений у такому вигляді:

$$\widehat{\mathcal{E}}_i = \widetilde{\ell}_i, \ i = 1, \ldots, n.$$

Як було зазначено вище, він задовольняє умови теореми 1.8, тобто існує (єдина) система вигляду (2.44), для якої $\widehat{c}_{i_1\ldots i_k} = \widehat{X}_{i_k} \cdots \widehat{X}_{i_1} E(0)$. У цьому пункті ми покажемо, як її побудувати.

Побудування проводимо за індукцією по $i = 1, \ldots, n$. Для $i = 1$ розглянемо елемент $\widetilde{\ell}_1 = \sum\limits_{j=1}^{m} \alpha_j^1 \eta_j$. Задамо першу компоненту векторних полів $\widehat{X}_1, \ldots, \widehat{X}_m$ так:

$$(\widehat{X}_j)_1(x) = \alpha_j^1, \quad j = 1, \ldots, m.$$

Тоді функція

$$x_1(t) = \widetilde{\ell}_1(t, u) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j^1 \eta_j(t, u) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j^1 \int_0^t u_j(\tau) d\tau$$

задовольняє рівняння

$$\dot{x}_1(t) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j^1 u_j(t) = \sum_{j=1}^{m} u_j(t) (\widehat{X}_j)_1.$$

Нехай $2 \leq i \leq n$ і після $i-1$ кроків усі компоненти $(\widehat{X}_j)_1, \ldots, (\widehat{X}_j)_{i-1}$ обрані так, що функції

$$x_q(t) = \widetilde{\ell}_q(t, u), \quad q = 1, \ldots, i-1,$$

задовольняють рівняння

$$\dot{x}_q(t) = \sum_{j=1}^{m} u_j(t)(\widehat{X}_j)_q(x_1(t), \ldots, x_{q-1}(t)), \quad q = 1, \ldots, i-1.$$

На i-му кроці розглянемо елемент $\widetilde{\ell}_i$. Оскільки $\ell_i \in \mathcal{F}^{w_i}$, отримуємо

$$\widetilde{\ell}_i = \sum_{1 \le i_1, \ldots, i_k \le m} \alpha^i_{i_1 \ldots i_k} \eta_{i_1 \ldots i_k}, \quad \alpha^i_{i_1 \ldots i_k} \in \mathbb{R}, \quad k = w_i.$$

Якщо $k = 1$, то $\widetilde{\ell}_i = \sum\limits_{j=1}^{m} \alpha^i_j \eta_j$. Тоді задамо i-ту компоненту векторних полів $\widehat{X}_1, \ldots, \widehat{X}_m$ так:

$$(\widehat{X}_j)_i(x) = \alpha^i_j, \quad j = 1, \ldots, m.$$

Тоді функція

$$x_i(t) = \widetilde{\ell}_i(t, u) = \sum_{j=1}^{m} \alpha^i_j \eta_j(t, u) = \sum_{j=1}^{m} \alpha^i_j \int_0^t u_j(\tau) d\tau$$

задовольняє

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{j=1}^{m} \alpha^i_j u_j(t) = \sum_{j=1}^{m} u_j(t)(\widehat{X}_j)_i.$$

Нехай $k \ge 2$. Перепишемо $\widetilde{\ell}_i$ як

$$\widetilde{\ell}_i = \sum_{1 \le i_1, \ldots, i_k \le m} \alpha^i_{i_1 \ldots i_k} \eta_{i_1 \ldots i_k} = \sum_{1 \le i_1, \ldots, i_k \le m} \alpha^i_{i_1 \ldots i_k} \eta_{i_1} \eta_{i_2 \ldots i_k} = \sum_{j=1}^{m} \eta_j a_j,$$

де

$$a_j = \sum_{1 \le i_2, \ldots, i_k \le m} \alpha^i_{j i_2 \ldots i_k} \eta_{i_2 \ldots i_k} \in \mathcal{F}^{k-1}.$$

Покажемо, що $a_j \in \mathcal{J}^{\perp}_{X_1, \ldots, X_m}$. Дійсно, якщо $\langle a_j, a \rangle \ne 0$ для деякого $a \in \mathcal{J}_{X_1, \ldots, X_m}$, тоді

$$\langle a_j, a \rangle = \langle \eta_j a_j, \eta_j a \rangle = \langle \widetilde{\ell}_i, \eta_j a \rangle \ne 0$$

де $\eta_j a \in \mathcal{J}_{X_1, \ldots, X_m}$, хоча $\widetilde{\ell}_i \in \mathcal{J}^{\perp}_{X_1, \ldots, X_m}$. Отже, $a_j \in \mathcal{J}^{\perp}_{X_1, \ldots, X_m}$.

Зауважимо, що $\mathrm{ord}(a_j) = \mathrm{ord}(\widetilde{\ell}_i) - 1 = k - 1$. Тоді, враховуючи теорему 3.1, виразимо a_j як однорідний поліном відносно тасуючого добутку від $\widetilde{\ell}_1, \ldots, \widetilde{\ell}_{i-1}$:

$$a_j = P_j(\widetilde{\ell}_1, \ldots, \widetilde{\ell}_{i-1}) = \sum_{w_1 q_1 + \cdots + w_{i-1} q_{i-1} = k-1} \gamma_j^{q_1 \cdots q_{i-1}} \widetilde{\ell}_1^{\text{ш} q_1} \,\text{ш} \cdots \text{ш}\, \widetilde{\ell}_{i-1}^{\text{ш} q_{i-1}}.$$

Визначимо i-ту компоненту векторних полів $\widehat{X}_1, \ldots, \widehat{X}_m$ так:

$$(\widehat{X}_j)_i(x) = P_j(x_1, \ldots, x_{i-1}) = \sum_{w_1 q_1 + \cdots + w_{i-1} q_{i-1} = k-1} \gamma_j^{q_1 \cdots q_{i-1}} x_1^{q_1} \cdots x_{i-1}^{q_{i-1}},$$

$j = 1, \ldots, m$. Отже, отримуємо

$$x_i(t) = \widetilde{\ell}_i(t, u) = \sum_{j=1}^{m} (\eta_j P_j(\widetilde{\ell}_1, \ldots, \widetilde{\ell}_{i-1}))(t, u) =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \int_0^t u_j(\tau) P_j(\widetilde{\ell}_1, \ldots, \widetilde{\ell}_{i-1})(\tau, u) d\tau.$$

Нагадаємо, що за означенням тасуючого добутку

$$P_j(\widetilde{\ell}_1, \ldots, \widetilde{\ell}_{i-1})(\tau, u) = P_j(\widetilde{\ell}_1(\tau, u), \ldots, \widetilde{\ell}_{i-1}(\tau, u)),$$

де ліворуч ми вважаємо P_j поліномом відносно тасуючого добутку, а праворуч вважаємо P_j звичайним поліномом від $i-1$ змінної. Отже,

$$x_i(t) = \widetilde{\ell}_i(t, u) = \sum_{j=1}^{m} \int_0^t u_j(\tau) P_j(\widetilde{\ell}_1(\tau, u), \ldots, \widetilde{\ell}_{i-1}(\tau, u)) d\tau,$$

тобто за припущенням індукції

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{j=1}^{m} u_j(t) P_j(\widetilde{\ell}_1(t, u), \ldots, \widetilde{\ell}_{i-1}(t, u)) = \sum_{j=1}^{m} u_j(t) P_j(x_1(t), \ldots, x_{i-1}(t)) =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} u_j(t) \widehat{X}_j(x_1(t), \ldots, x_{i-1}(t)).$$

Після n таких кроків ми побудуємо поліноміальні векторні поля $\widehat{X}_1, \ldots, \widehat{X}_m$, для яких траєкторія $x(t)$ системи (2.44) з початковою умовою $x(0) = 0$ задовольняє рівності $x_i(t) = \widetilde{\ell}_i(t, u)$, $i = 1, \ldots, n$ (для довільного керування $u = u(t)$). Нагадаємо, що $x(t) = \mathcal{E}_{\widehat{X}_1,\dots,\widehat{X}_m}(t,u)$. Отже, векторні поля $\widehat{X}_1,\dots,\widehat{X}_m$ є такими, що $(\mathcal{E}_{\widehat{X}_1,\dots,\widehat{X}_m})_i = \widetilde{\ell}_i$, $i = 1,\dots,n$.

Аналогічно можна знайти поліноміальні векторні поля, для яких $(\mathcal{E}_{\widehat{X}_1,\dots,\widehat{X}_m})_i = d_i$, $i = 1,\dots,n$.

Приклад 4.2. Нехай $\mathcal{L}$ — вільна алгебра Лі, що породжена двома елементами η_1 і η_2. Нехай $\mathcal{L}' = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\mathcal{P}^k$, де

$$\mathcal{P}^1 = \mathrm{Lin}\{\eta_2\},\ \mathcal{P}^2 = \{0\},\ \mathcal{P}^3 = \mathrm{Lin}\{[[\eta_2,\eta_1],\eta_2]\},\ \mathcal{P}^4 = \mathrm{Lin}\{[[[\eta_2,\eta_1],\eta_2],\eta_2]\}$$

і $\mathcal{P}^k = \mathcal{L}^k$ для $k \ge 5$. Тоді $\mathcal{L}'$ є підалгеброю Лі ковимірності $n = 5$. Виберемо

$$\ell_1 = \eta_1,\ \ \ell_2 = [\eta_2,\eta_1],\ \ \ell_3 = [[\eta_2,\eta_1],\eta_1],$$

$$\ell_4 = [[[\eta_2,\eta_1],\eta_1],\eta_2],\ \ \ell_5 = [[[\eta_2,\eta_1],\eta_1],\eta_1],$$

тоді $\mathcal{L} = \mathrm{Lin}\{\ell_1,\dots,\ell_5\} + \mathcal{L}'$. Позначимо $\mathcal{J}' = \mathrm{Lin}\{\mathcal{F}^e\mathcal{L}'\}$ і знайдемо $\widetilde{\ell}_i$, $i = 1,\dots,5$. Очевидно, $\widetilde{\ell}_1 = \eta_1$. Оскільки

$$\mathcal{J}' \cap \mathcal{F}^2 = \mathrm{Lin}\{\eta_{12},\eta_{22}\},$$

отримуємо $\widetilde{\ell}_2 = \eta_{21}$. Підпростір $\mathcal{J}'\cap\mathcal{F}^3$ задається всіма елементами вигляду $\eta_{i_1i_22}$ і $[[\eta_2,\eta_1],\eta_2]$, отже,

$$\mathcal{J}' \cap \mathcal{F}^3 = \mathrm{Lin}\{\eta_{112},\eta_{122},\eta_{212},\eta_{222},\eta_{221}\};$$

звідки $\widetilde{\ell}_3 = \eta_{211} - 2\eta_{121}$. Нарешті,

$$\mathcal{J}' \cap \mathcal{F}^4 = \mathrm{Lin}\{\eta_{1112},\eta_{1122},\eta_{1212},\eta_{1222},\eta_{1221},\eta_{2112},\eta_{2122},\eta_{2212},\eta_{2222},\eta_{2221}\},$$

що дає $\widetilde{\ell}_4 = \eta_{2211} - 2\eta_{2121}$ і $\widetilde{\ell}_5 = \eta_{2111} - 3\eta_{1211} + 3\eta_{1121}$.

Тепер побудуємо систему

$$\dot{x} = u_1\widehat{X}_1(x) + u_2\widehat{X}_2(x),$$

для якої $(\mathcal{E}_{\widehat{X}_1,\widehat{X}_2})_i = \widetilde{\ell}_i$, $i = 1,\dots,5$, тобто

$$\mathcal{E}_{\widehat{X}_1,\widehat{X}_2} = (\eta_1,\ \eta_{21},\ \eta_{211} - 2\eta_{121},\ \eta_{2211} - 2\eta_{2121},\ \eta_{2111} - 3\eta_{1211} + 3\eta_{1121})^{\mathsf{T}}, \quad (4.14)$$

як роз'яснено вище. Оскільки $\widetilde{\ell}_1 = \eta_1$, виберемо $(\widehat{X}_1)_1 = 1$ і $(\widehat{X}_2)_1 = 0$.

Перепишемо $\widetilde{\ell}_2$ як $\widetilde{\ell}_2 = \eta_{21} = \eta_2\eta_1 = \eta_2\widetilde{\ell}_1$. Отже, $(\widehat{X}_1)_2 = 0$ і $(\widehat{X}_2)_2 = x_1$.

Перепишемо $\widetilde{\ell}_3$ як $\widetilde{\ell}_3 = \eta_{211} - 2\eta_{121} = \eta_2\eta_{11} - 2\eta_1\eta_{21}$. Оскільки $\eta_{11} = \frac{1}{2}\eta_1^{\text{ш}2} = \frac{1}{2}\widetilde{\ell}_1^{\text{ш}2}$ і $\eta_{21} = \widetilde{\ell}_2$, виберемо $(\widehat{X}_1)_3 = -2x_2$ і $(\widehat{X}_2)_3 = \frac{1}{2}x_1^2$.

Аналогічно, $\widetilde{\ell}_4 = \eta_{2211} - 2\eta_{2121} = \eta_2(\eta_{211} - 2\eta_{121}) = \eta_2\widetilde{\ell}_3$, отже, $(\widehat{X}_1)_4 = 0$ і $(\widehat{X}_2)_4 = x_3$.

Нарешті, $\widetilde{\ell}_5 = \eta_{2111} - 3\eta_{1211} + 3\eta_{1121} = \eta_2\eta_{111} - 3\eta_1(\eta_{211} - \eta_{121})$. Зауважимо, що $\eta_{111} = \frac{1}{6}\widetilde{\ell}_1^{\text{ш}3}$ і $\eta_{211} - \eta_{121} = \frac{1}{5}\eta_{21} \,\text{ш}\, \eta_1 + \frac{3}{5}(\eta_{211} - 2\eta_{121}) = \frac{1}{5}\widetilde{\ell}_1 \,\text{ш}\, \widetilde{\ell}_2 + \frac{3}{5}\widetilde{\ell}_3$. Отже, $(\widehat{X}_1)_5 = -\frac{3}{5}x_1x_2 - \frac{9}{5}x_3$ і $(\widehat{X}_2)_5 = \frac{1}{6}x_1^3$.

Таким чином, отримуємо

$$\widehat{X}_1(x) = (1,\ 0,\ -2x_2,\ 0,\ -\tfrac{3}{5}x_1x_2 - \tfrac{9}{5}x_3)^{\mathsf{T}},\quad \widehat{X}_2(x) = (0,\ x_1,\ \tfrac{1}{2}x_1^2,\ x_3,\ \tfrac{1}{6}x_1^3)^{\mathsf{T}},$$

тобто система має вигляд

$$\begin{aligned} &\dot{x}_1 = u_1,\ \dot{x}_2 = x_1u_2,\ \dot{x}_3 = -2x_2u_1 + \tfrac{1}{2}x_1^2u_2, \\ &\dot{x}_4 = x_3u_2,\ \dot{x}_5 = -\tfrac{3}{5}x_1x_2u_1 - \tfrac{9}{5}x_3u_1 + \tfrac{1}{6}x_1^3u_2. \end{aligned}$$

Ця система є досить складною; спробуємо її спростити. Спочатку знайдемо заміну змінних, яка спрощує ряд (4.14). Легко бачити, що заміна

$$y = Q(x) = (x_1,\ x_2,\ \tfrac{1}{5}(x_3 + 2x_1x_2),\ \tfrac{1}{5}(x_4 + x_2^2),\ \tfrac{1}{19}(x_5 + \tfrac{21}{10}x_1^2x_2 + \tfrac{18}{10}x_1x_3))^{\mathsf{T}}$$

зводить ряд (4.14) до наступного вигляду:

$$Q(\mathcal{E}_{\widehat{X}_1,\widehat{X}_2}) = (\eta_1, \eta_{21}, \eta_{211}, \eta_{2211}, \eta_{2111})^{\mathsf{T}}.$$

Система, якій відповідає цей ряд, може бути легко знайдена за процедурою, що описана вище; вона має вигляд

$$\dot{y}_1 = u_1,\ \dot{y}_2 = y_1u_2,\ \dot{y}_3 = \tfrac{1}{2}y_1^2u_2,\ \dot{y}_4 = y_3u_2,\ \dot{y}_5 = \tfrac{1}{6}y_1^3u_2.$$

4.2 Задача швидкодії для систем, лінійних за керуванням

У цьому підрозділі ми досліджуємо задачу швидкодії для лінійних за керуванням систем. Зокрема, ми вивчаємо зв'язок між однорідною апроксимацією і апроксимацією в сенсі швидкодії. Результати підрозділу опубліковано в роботі [137].

4.2.1 Оптимальні за швидкодією керування

Розглянемо задачу швидкодії для системи (2.1) вигляду

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{m} u_i(t)X_i(x), \ x(0) = s^1, \ x(\theta) = s^2, \tag{4.15}$$

$$\sum_{i=1}^{m} u_i^2(t) \le 1, \ t \in [0,\theta], \quad \theta \to \min, \tag{4.16}$$

де $s^1 \neq s^2$. Ми вважаємо, що виконується умова Рашевського-Чжоу (2.23), а отже, з кожної точки s^1 деякого околу нуля $U(0)$ можна дістатися будь-якої іншої точки s^2 цього околу в силу системи (2.1) з припустимим керуванням. Тоді з теореми Філіппова [40] випливає, що оптимальне за швидкодією керування існує (але не обов'язково є єдиним).

Перше зауваження стосується характеру оптимального керування.

Теорема 4.5. *Нехай θ^* є оптимальним часом, а $u^*(t) \in B^{\theta^*}$ є оптимальним керуванням для задачі (4.15), (4.16). Тоді*

$$\sum_{i=1}^{m} u_i^{*\,2}(t) = 1 \ \text{м.в.}, \ t \in [0,\theta^*]. \tag{4.17}$$

Доведення. Нехай $x^*(t)$ — оптимальна траєкторія, що відповідає керуванню $u^*(t)$. Для будь-якого $\varepsilon > 0$ розглянемо перепараметризацію кривої $x^*(t)$ вигляду

$$\tau = \psi(t) = \int_0^t \Big(\sum_{i=1}^{m} u_i^{*2}(\sigma)\Big)^{1/2} d\sigma + \varepsilon t, \quad t \in [0,\theta^*].$$

Іншими словами, $\tau = \psi(t)$ є заміна часу в системі (2.1); вона коректно визначена, оскільки $\dot{\psi}(t) \ge \varepsilon > 0$. Відносно цього нового часу оптимальна траєкторія $\widehat{x}(\tau) = x^*(\psi^{-1}(\tau))$ задовольняє диференціальне рівняння

$$\frac{d\widehat{x}(\tau)}{d\tau} = \frac{dx^*(t)}{dt}\Big|_{t=\psi^{-1}(\tau)} \cdot \frac{d\psi^{-1}(\tau)}{d\tau} = \sum_{i=1}^{m} \widehat{u}_i(\tau)X_i(\widehat{x}(\tau)), \quad \tau \in [0,\psi(\theta^*)],$$

де

$$\widehat{u}_i(\tau) = \frac{u_i^*(t)}{\dot{\psi}(t)}\bigg|_{t=\psi^{-1}(\tau)} = \frac{u_i^*(t)}{\Big(\sum\limits_{i=1}^{m} u_i^{*2}(t)\Big)^{1/2} + \varepsilon}\Bigg|_{t=\psi^{-1}(\tau)}, \qquad i = 1, \dots, m,$$

і умови

$$\widehat{x}(0) = x^*(0) = s^1, \qquad \widehat{x}(\psi(\theta^*)) = x^*(\theta^*) = s^2.$$

Крім того,

$$\sum_{i=1}^{m} \widehat{u}_i^2(\tau) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{m} u_i^{*2}(t)}{\Bigg(\Big(\sum\limits_{i=1}^{m} u_i^{*2}(t)\Big)^{1/2} + \varepsilon\Bigg)^2}\Bigg|_{t=\psi^{-1}(\tau)} \le 1, \quad \tau \in [0, \psi(\theta^*)].$$

Таким чином, керування $\widehat{u}(\tau) \in B^{\psi(\theta^*)}$ переводить точку s^1 до точки s^2 за час $\psi(\theta^*)$ в силу системи (2.1). Отже, час руху $\psi(\theta^*)$ не менший, ніж оптимальний час θ^*, тобто

$$\psi(\theta^*) = \int_0^{\theta^*} \Big(\sum_{i=1}^{m} u_i^{*2}(t)\Big)^{1/2} dt + \varepsilon\theta^* \ge \theta^*.$$

Оскільки нерівність справджується для будь-якого $\varepsilon > 0$, отримуємо

$$\int_0^{\theta^*} \Big(\sum_{i=1}^{m} u_i^{*2}(t)\Big)^{1/2} dt \ge \theta^*.$$

Беручи до уваги обмеження $u^* \in B^{\theta^*}$, отримуємо (4.17). ∎

Наслідок 4.6. *Нехай θ^* є оптимальним часом, а $u^*(t) \in B^{\theta^*}$ є оптимальним керуванням для задачі* (4.15), (4.16)*. Позначимо $\widehat{u}(t) = \theta^* u^*(t\theta^*)$, $t \in [0, 1]$. Тоді*

(a) *керування $\widehat{u}(t)$ мінімізує функціонал довжини, тобто розв'язує задачу оптимального керування*

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{m} u_i X_i(x), x(0) = s^1, x(1) = s^2, \ell(u) = \int_0^1 \Big(\sum_{i=1}^{m} u_i^2(t)\Big)^{1/2} dt \to \min, \tag{4.18}$$

причому $\min \ell(u) = \ell(\widehat{u}) = \theta^*$;

(б) *керування $\widehat{u}(t)$ мінімізує функціонал енергії, тобто розв'язує задачу оптимального керування*

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{m} u_i X_i(x), x(0) = s^1, x(1) = s^2, J(u) = \int_0^1 \sum_{i=1}^{m} u_i^2(t) dt \to \min, \tag{4.19}$$

причому $\min J(u) = J(\widehat{u}) = \theta^{*2}$.

Доведення. (а) Розглянемо довільне керування $u(t)$, $t \in [0,1]$, що переводить s^1 до s^2 в силу системи (2.1), і будемо міркувати аналогічно доведенню теореми 4.5. Розглядаючи перепараметризацію

$$\tau = \psi(t) = \int_0^t \Big(\sum_{i=1}^{m} u_i^2(\sigma)\Big)^{1/2} d\sigma + \varepsilon t, \quad t \in [0,1],$$

отримуємо, що керування

$$\widetilde{u}(\tau) = \frac{u_i(t)}{\Big(\sum\limits_{i=1}^{m} u_i^2(t)\Big)^{1/2} + \varepsilon}\Bigg|_{t=\psi^{-1}(\tau)}, \qquad i = 1, \ldots, m,$$

переводить s^1 до s^2 за час $\widetilde{\theta} = \psi(1)$ в силу системи (2.1) і задовольняє обмеження, тобто $\widetilde{u}(\tau) \in B^{\widetilde{\theta}}$. Отже,

$$\widetilde{\theta} = \psi(1) = \int_0^1 \Big(\sum_{i=1}^{m} u_i^2(t)\Big)^{1/2} dt + \varepsilon = \ell(u) + \varepsilon \geq \theta^*.$$

Оскільки $\varepsilon > 0$ є довільним, отримуємо $\ell(u) \geq \theta^*$. З іншого боку, завдяки (4.17) отримуємо

$$\sum_{i=1}^{m} \widehat{u}_i^2(t) = \theta^{*2} \sum_{i=1}^{m} u_i^{*2}(t\theta^*) \equiv \theta^{*2}, \tag{4.20}$$

отже,

$$\ell(\widehat{u}) = \int_0^1 \Big(\sum_{i=1}^{m} \widehat{u}_i^2(t)\Big)^{1/2} dt = \theta^*.$$

Це означає, що $\widehat{u}(t)$ мінімізує функціонал довжини і, крім того, $\min \ell(u) = \theta^*$.

(б) За нерівністю Коші-Буняковського, $\ell(u) \leq \sqrt{J(u)}$. Отже, беручи до уваги пункт (а), отримуємо, що якщо $u(t)$, $t \in [0,1]$, переводить точку

s^1 до s^2 в силу системи (2.1), то $\theta^* = \ell(\widehat{u}) \leq \ell(u) \leq \sqrt{J(u)}$. З іншого боку, завдяки (4.20) отримуємо $\sqrt{J(\widehat{u})} = \theta^*$. Це означає, що $\widehat{u}(t)$ мінімізує функціонал енергії і $\min J(u) = \theta^{*2}$. ■

Нагадаємо, що функціонал довжини тісно пов'язаний з поняттям субріманової метрики [50]. А саме, субріманова метрика може бути означена як

$$\rho(s^1, s^2) = \inf \ell(u),$$

де інфімум береться за усіма $u(t) \in L_2([0,1], \mathbb{R}^m)$, що задовольняють умови (4.15). Таким чином, розв'язок $\widehat{u}(t)$ задачі (4.15), (4.16), що існує за наслідком 4.6, задовольняє рівність $\rho(s^1, s^2) = \ell(\widehat{u})$.

Аналогічними міркуваннями можна довести таке твердження.

Лема 4.1. *Припустимо, що керування* $\widehat{u}(t)$ *мінімізує функціонал енергії, тобто розв'язує задачу* (4.19). *Тоді* $\sum_{i=1}^{m} \widehat{u}_i^2(t) \equiv \min J(u) = J(\widehat{u})$. *Як наслідок,*

(а) $\widehat{u}(t)$ *мінімізує функціонал довжини, тобто розв'язує задачу* (4.18), *і* $\min \ell(u) = \ell(\widehat{u}) = \sqrt{J(\widehat{u})}$*;*

(б) $\theta^* = \sqrt{J(\widehat{u})}$ *є оптимальним часом, а* $u^*(t) = \frac{1}{\theta^*}\widehat{u}\left(\frac{t}{\theta^*}\right)$ *є оптимальним керуванням для задачі оптимальної швидкодії* (4.15), (4.16).

Теорема 4.5 і лема 4.1 означають, що задачі оптимального керування (4.15), (4.16) і (4.19) еквівалентні. А саме, θ^* є оптимальним часом і $u^*(t)$ є оптимальним керуванням для задачі (4.15), (4.16) тоді і тільки тоді, коли $\theta^* u^*(t\theta^*)$ є оптимальним керуванням для задачі (4.19). Вважається загальновідомим, що задача (4.18) еквівалентна їм обом [108], але ми не змогли знайти у доступній літературі повного і строгого доведення цього факту. Підкреслимо, що з наслідку 4.6 і леми 4.1 випливає імплікація тільки в один бік.

4.2.2 Слабка неперервність ітерованих інтегралів і слабка збіжність оптимальних керувань

Оберемо таке $T_0 > 0$, для якого ряд (2.3) абсолютно збігається для всіх $0 \le \theta \le T_0$ і всіх $u \in B^\theta$. Оскільки нуль є точкою спокою системи (2.1), $\mathcal{E}_{X_1,\ldots,X_m}(\theta, B^\theta) \subset \mathcal{E}_{X_1,\ldots,X_m}(T_0, B^{T_0})$ при $0 \le \theta \le T_0$. Зауважимо, що множина досяжності $\mathcal{E}_{X_1,\ldots,X_m}(T_0, B^{T_0})$ є околом нуля завдяки умові (2.23).

Відтепер будемо розглядати задачу швидкодії *з початку координат*

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{m} u_i(t) X_i(x),\ x(0) = 0,\ x(\theta) = s,\ \sum_{i=1}^{m} u_i^2(t) \le 1,\ t \in [0,\theta],\ \theta \to \min . \tag{4.21}$$

Як і в означенні 2.13, пара (θ_s^*, u_s^*) позначає розв'язок задачі (4.21): θ_s^* — оптимальний час, а $u_s^*(t)$, $t \in [0, \theta_s^*]$ — оптимальне керування для задачі (4.21); множина всіх оптимальних керувань позначається U_s^*.

Зауваження 4.4. *Із результатів роботи [21] випливає, що функція θ_s^* є неперервною по s.*

У цьому пункті ми розглядаємо керування як елементи гільбертового простору $L_2([0,1], \mathbb{R}^m)$. Нехай $v, v_{(q)} \in L_2[0,1]$; ми пишемо $v_{(q)} \xrightarrow{w} v$, якщо послідовність $v_{(q)}$ слабко збігається до v у просторі $L_2[0,1]$ при $q \to \infty$. Для $u, u_{(q)} \in L_2([0,1], \mathbb{R}^m)$ ми пишемо $u_{(q)} \xrightarrow{w} u$, якщо $u_{(q)i} \xrightarrow{w} u_i$ для всіх $i = 1, \ldots, m$. Далі $\|\cdot\|_{L_2}$ позначає норму в $L_2[0,1]$.

Зауваження 4.5. *Нехай $z(t) \in L_2[0,1]$ фіксоване. Тоді, як добре відомо, лінійний оператор $(A(v))(t) = \int_0^t z(\tau)v(\tau)d\tau : L_2[0,1] \to L_2[0,1]$ є компактним. Отже, якщо послідовність $v_{(q)} \in L_2[0,1]$ слабко збігається, $v_{(q)} \xrightarrow{w} v$, то послідовність $A(v_{(q)})$ сильно збігається до $A(v)$ в $L_2[0,1]$, а саме,*

$$\|A(v_{(q)}) - A(v)\|_{L_2}^2 = \int_0^1 \left| \int_0^t z(\tau)\Big(v_{(q)}(\tau) - v(\tau)\Big)d\tau \right|^2 dt \to 0 \quad \text{\textit{при}} \quad q \to \infty.$$

Лема 4.2. *Оператори* $\eta_{i_1\ldots i_k}(\cdot,u) : L_2([0,1],\mathbb{R}^m) \to L_2([0,1],\mathbb{R}^m)$ *є слабко неперервними, тобто якщо* $u_{(q)} \xrightarrow{w} u$, *то* $\eta_{i_1\ldots i_k}(\cdot,u_{(q)}) \to \eta_{i_1\ldots i_k}(\cdot,u)$ *в* $L_2[0,1]$, *тобто*

$$\|\eta_{i_1\ldots i_k}(\cdot,u_{(q)}) - \eta_{i_1\ldots i_k}(\cdot,u)\|^2_{L_2} = \int_0^1 |\eta_{i_1\ldots i_k}(t,u_{(q)}) - \eta_{i_1\ldots i_k}(t,u)|^2 dt \to 0$$

при $q \to \infty$.

Доведення. Застосуємо індукцію по k. Для $k=1$ твердження випливає з зауваження 4.5. Припустимо, що $j \geq 1$ і твердження леми виконується для всіх $k \leq j$. Зафіксуємо довільні $1 \leq i_1,\ldots,i_{j+1} \leq m$ і позначимо $z_{(q)}(t) = \eta_{i_2\ldots i_{j+1}}(t,u_{(q)})$, $z(t) = \eta_{i_2\ldots i_{j+1}}(t,u)$; очевидно, $z_{(q)}, z \in L_2[0,1]$. Тоді з припущення індукції отримуємо $z_{(q)} \to z$, тобто $\|z_{(q)} - z\|^2_{L_2} \to 0$ при $q \to \infty$. Отже,

$$\eta_{i_1\ldots i_{j+1}}(t,u_{(q)}) - \eta_{i_1\ldots i_{j+1}}(t,u) = \int_0^t u_{(q)i_1}(\tau_1) z_{(q)}(\tau_1) d\tau_1 - \int_0^t u_{i_1}(\tau_1) z(\tau_1) d\tau_1 =$$

$$= \underbrace{\int_0^t u_{(q)i_1}(\tau_1)\Big(z_{(q)}(\tau_1) - z(\tau_1)\Big) d\tau_1}_{I(t)} + \int_0^t \Big(u_{(q)i_1}(\tau_1) - u_{i_1}(\tau_1)\Big) z(\tau_1) d\tau_1. \quad (4.22)$$

За зауваженням 4.5, другий доданок (4.22) сильно збігається до нуля. Оцінимо норму першого доданку:

$$\|I\|^2_{L_2} = \int_0^1 \left| \int_0^t u_{(q)i_1}(\tau_1)\Big(z_{(q)}(\tau_1) - z(\tau_1)\Big) d\tau_1 \right|^2 dt \leq$$

$$\leq \int_0^1 \int_0^1 |u_{(q)i_1}(\tau_1)|^2 d\tau_1 \int_0^1 |z_{(q)}(\tau_2) - z(\tau_2)|^2 d\tau_2 dt = \underbrace{\|u_{(q)i_1}\|^2_{L_2}}_{\leq C} \|z_{(q)} - z\|^2_{L_2} \to 0$$

при $q \to \infty$ завдяки припущенню індукції і тому, що послідовність $u_{(q)i_1}$, яка слабко збігається, є обмеженою. Отже, $\eta_{i_1\ldots i_{j+1}}(\cdot,u_{(q)}) - \eta_{i_1\ldots i_{j+1}}(\cdot,u)$ сильно збігається до нуля, що доводить лему за індукцією. ■

Наслідок 4.7. *Функціонали* $\eta_{i_1\ldots i_k}(1,u) : L_2([0,1],\mathbb{R}^m) \to \mathbb{R}^1$ *є слабко неперервними, тобто якщо* $u_{(q)} \xrightarrow{w} u$, *то* $\eta_{i_1\ldots i_k}(1,u_{(q)}) \to \eta_{i_1\ldots i_k}(1,u)$ *при* $q \to \infty$.

Доведення. Для $k = 1$ доведення очевидне. Припустимо $k \geq 2$. Аналогічно (4.22) отримуємо

$$\eta_{i_1 \ldots i_k}(1, u_{(q)}) - \eta_{i_1 \ldots i_k}(1, u) = \int_0^1 u_{(q)i_1}(\tau_1) z_{(q)}(\tau_1) d\tau_1 - \int_0^1 u_{i_1}(\tau_1) z(\tau_1) d\tau_1 =$$
$$= \int_0^1 u_{(q)i_1}(\tau_1) \Big(z_{(q)}(\tau_1) - z(\tau_1) \Big) d\tau_1 + \int_0^1 \Big(u_{(q)i_1}(\tau_1) - u_{i_1}(\tau_1) \Big) z(\tau_1) d\tau_1,$$

де $z_{(q)}(t) = \eta_{i_2 \ldots i_k}(t, u_{(q)})$ і $z(t) = \eta_{i_2 \ldots i_k}(t, u)$. Другий доданок прямує до нуля, оскільки $u_{(q)i_1} \xrightarrow{w} u_{i_1}$, а перший — оскільки $u_{(q)i_1}$ обмежена і $z_{(q)} - z$ сильно збігається до нуля за лемою 4.2. ■

Далі ми використовуємо позначення 2.1. Зокрема, для довільних $\theta > 0$ і $u(t) \in B^\theta$ ми позначаємо $u^\theta(t) = u(t\theta) \in B^1$, а для довільних $\theta > 0$ і $u(t) \in B^1$ позначаємо $u^{1/\theta}(t) = u\left(\frac{t}{\theta}\right) \in B^\theta$.

Наслідок 4.8. *Для системи* (2.1) *позначимо*

$$\mathcal{E}^k(\theta, u) = \sum_{1 \leq i_1, \ldots, i_k \leq m} c_{i_1 \ldots i_k} \eta_{i_1 \ldots i_k}(\theta, u), \quad k \geq 1. \tag{4.23}$$

Нехай $\theta_q \to \theta_0$, де $0 < \theta_q \leq T_0$, а $u_{(q)} \in B^{\theta_q}$, $u_0 \in B^{\theta_0}$ є такими, що $u_{(q)}^{\theta_q}(t) \xrightarrow{w} u_0^{\theta_0}(t)$ при $q \to \infty$. Тоді для довільного $N \geq 0$

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} \mathcal{E}^k(\theta_q, u_{(q)}) \to \sum_{k=N+1}^{\infty} \mathcal{E}^k(\theta_0, u_0) \quad \textit{при} \;\; q \to \infty.$$

Доведення. Нагадаємо, що коефіцієнти ряду задовольняють умову (1.47), причому без обмеження загальності можемо вважати, що $\gamma = mC_2T_0 < 1$. Отже, якщо $u \in B^\theta$, то $\|\mathcal{E}^k(\theta, u)\| \leq C_1(mC_2\theta)^k \leq C_1\gamma^k$.

Для довільного $\varepsilon > 0$ знайдемо $r \geq N$, для якого $\frac{C_1}{1-\gamma}\gamma^{r+1} < \frac{1}{4}\varepsilon$; тоді

$$\sum_{k=r+1}^{\infty} \|\mathcal{E}^k(\theta, u)\| < \tfrac{1}{4}\varepsilon \quad \text{для всіх} \;\; 0 \leq \theta \leq T_0, \; u \in B^\theta.$$

Далі, використовуючи припущення даного наслідку та наслідок 4.7, отримуємо для довільного $k = N+1, \ldots, r$

$$\mathcal{E}^k(\theta_q, u_{(q)}) - \mathcal{E}^k(\theta_0, u_0) = \theta_q^k \mathcal{E}^k(1, u_{(q)}^{\theta_q}) - \theta_0^k \mathcal{E}^k(1, u_0^{\theta_0}) =$$
$$= \theta_q^k \Big(\mathcal{E}^k(1, u_{(q)}^{\theta_q}) - \mathcal{E}^k(1, u_0^{\theta_0}) \Big) + \Big(\theta_q^k - \theta_0^k \Big) \mathcal{E}^k(1, u_0^{\theta_0}) \to 0 \;\; \text{при} \;\; q \to \infty.$$

Отже, існує таке q_0, для якого $\sum\limits_{k=N+1}^{r} \|\mathcal{E}^k(\theta_q, u_{(q)}) - \mathcal{E}^k(\theta_0, u_0)\| < \frac{1}{2}\varepsilon$ для всіх $q > q_0$. Тобто для всіх $q > q_0$

$$\left\| \sum_{k=N+1}^{\infty} \mathcal{E}^k(\theta_q, u_{(q)}) - \sum_{k=N+1}^{\infty} \mathcal{E}^k(\theta_0, u_0) \right\| \leq \sum_{k=N+1}^{r} \|\mathcal{E}^k(\theta_q, u_{(q)}) - \mathcal{E}^k(\theta_0, u_0)\| + \\ + \sum_{k=r+1}^{\infty} \|\mathcal{E}^k(\theta_q, u_{(q)})\| + \sum_{k=r+1}^{\infty} \|\mathcal{E}^k(\theta_0, u_0)\| < \varepsilon,$$

що завершує доведення. ■

Для повноти викладення наведемо й наступний відомий факт: одинична куля простору $L_\infty[0,1]$ є слабко замкненою множиною простору $L_2[0,1]$.

Лема 4.3. *Нехай* $u_{(q)} \xrightarrow{w} u$ *при* $q \to \infty$ *і* $u_{(q)} \in B^1$. *Тоді* $u \in B^1$.

Доведення леми 4.3 наведене у додатку Б.3.

Лема 4.4. *Нехай послідовність* $s_{(q)} \in \mathcal{E}_{X_1,\ldots,X_m}(\theta_{s_{(q)}}, B^{\theta_{s_{(q)}}})$ *є такою, що* $s_{(q)} \to s$ *при* $q \to \infty$, *де* $s \neq 0$, *причому* $0 < \theta_{s_{(q)}} \leq T_0$ *і* $\theta_{s_{(q)}} \to \theta_0$. *Тоді* $s \in \mathcal{E}_{X_1,\ldots,X_m}(\theta_0, B^{\theta_0})$, *тобто точка* s *може бути досягнута з нуля за час* θ_0 *за допомогою керування з* B^{θ_0}.

При цьому, якщо $s_{(q)} = \mathcal{E}_{X_1,\ldots,X_m}(\theta_{s_{(q)}}, u_{s_{(q)}})$, *то* $s = \mathcal{E}_{X_1,\ldots,X_m}(\theta_0, v_0^{1/\theta_0})$, *де* $v_0(t)$ *— довільна слабка часткова границя послідовності* $u_{s_{(q)}}(t\theta_{s_{(q)}})$.

Доведення. Позначимо $v_q(t) = u_{s_{(q)}}(t\theta_{s_{(q)}})$, $t \in [0,1]$. Тоді $v_q \in B^1$, а отже, v_q належать одиничній кулі простору $L_2([0,1];\mathbb{R}^m)$. Оскільки ця одинична куля слабко компактна, множина слабких часткових границь послідовності v_q непорожня. Нехай v_0 є довільною слабкою частковою границею v_q, тобто $v_{q_r} \xrightarrow{w} v_0$ при $r \to \infty$, тоді $v_0 \in B^1$ за лемою 4.3.

За припущенням, $s_{(q)} = \mathcal{E}_{X_1,\ldots,X_m}(\theta_{s_{(q)}}, u_{s_{(q)}})$ і $\theta_{s_{(q)}} \to \theta_0$ при $q \to \infty$. Отже, за наслідком 4.8 (де обрано $N = 0$)

$$s_{(q_r)} = \mathcal{E}_{X_1,\ldots,X_m}(\theta_{s_{(q_r)}}, u_{s_{(q_r)}}) \to \mathcal{E}_{X_1,\ldots,X_m}(\theta_0, v_0^{1/\theta_0}) \quad \text{при} \quad r \to \infty. \tag{4.24}$$

Але за припущенням $s_{(q_r)} \to s$, отже,

$$s = \mathcal{E}_{X_1,\ldots,X_m}(\theta_0, v_0^{1/\theta_0}),$$

тобто керування $v_0^{1/\theta_0}(t) \in B^{\theta_0}$ переводить нуль до точки s за час θ_0. ■

Як наслідок, отримуємо добре відомий факт: для довільного $0 < \theta_0 \leq T_0$ множина $\mathcal{E}_{X_1,\dots,X_m}(\theta_0, B^{\theta_0})$ замкнена.

Повернемось до задачі швидкодії (4.21); нагадаємо, що θ_s^* позначає оптимальний час, а U_s^* позначає множину оптимальних керувань.

Наслідок 4.9. *Нехай $s_{(q)} = \mathcal{E}_{X_1,\dots,X_m}(\theta_{s_{(q)}}, u_{s_{(q)}})$, де $0 < \theta_{s_{(q)}} \leq T_0$ і $u_{s_{(q)}} \in B^{\theta_{s_{(q)}}}$. Припустимо, що $s_{(q)} \to s \neq 0$ і $\theta_{s_{(q)}} \to \theta_s^*$ при $q \to \infty$. Нехай $v_0(t)$, $t \in [0,1]$, є довільною частковою слабкою границею послідовності $u_{s_{(q)}}(t\theta_{s_{(q)}})$, $t \in [0,1]$. Тоді $v_0^{1/\theta_s^*} \in U_s^*$, тобто $v_0^{1/\theta_s^*}(t) = v_0(t/\theta_s^*)$, $t \in [0, \theta_s^*]$, є оптимальним керуванням для задачі* (4.21).

Доведення. З леми 4.4 при $\theta_0 = \theta_s^*$ випливає, що $s = \mathcal{E}_{X_1,\dots,X_m}(\theta_s^*, v_0^{1/\theta_s^*})$, тобто керування $v_0^{1/\theta_s^*}(t) \in B^{\theta_s^*}$ переводить нуль до s за час θ_s^*. Оскільки θ_s^* є оптимальним часом, то $v_0^{1/\theta_s^*}(t)$ є оптимальним керуванням. ■

Наслідок 4.10. *Нехай, на додаток до припущень наслідку 4.9, задача* (4.21) *має єдиний розв'язок (θ_s^*, u_s^*). Тоді*

$$u_{s_{(q)}}(t\theta_{s_{(q)}}) \xrightarrow{w} u_s^*(t\theta_s^*). \tag{4.25}$$

Нарешті, застосуємо теорему 4.5.

Наслідок 4.11. *Нехай, на додаток до припущень наслідку 4.9, задача* (4.21) *має єдиний розв'язок (θ_s^*, u_s^*). Тоді покомпонентно*

$$\int_0^1 \left| u_{s_{(q)}i}(t\theta_{s_{(q)}}) - u_{s\,i}^*(t\theta_s^*) \right| dt \to 0 \quad \textit{при} \quad q \to \infty, \qquad i = 1, \dots, m. \tag{4.26}$$

Доведення. Оскільки оптимальне керування $u_s^*(t)$ задовольняє рівність (4.17), $u_s^*(t\theta_s^*)$ належить одиничній сфері гільбертового простору $L_2([0,1]; \mathbb{R}^m)$, а послідовність $u_{s_{(q)}}(t\theta_{s_{(q)}})$ лежить в одиничній кулі $L_2([0,1]; \mathbb{R}^m)$. Отже, зі слабкої збіжності (4.25) випливає сильна збіжність в $L_2([0,1]; \mathbb{R}^m)$, тобто

$$\int_0^1 \sum_{i=1}^m \left| u_{s_{(q)}i}(t\theta_{s_{(q)}}) - u_{s\,i}^*(t\theta_s^*) \right|^2 dt \to 0 \quad \text{при} \quad q \to \infty,$$

звідки випливає (4.26). ■

4.2.3 Апроксимація у сенсі швидкодії

У цьому пункті ми повернемось до поняття апроксимації у сенсі швидкодії для систем, лінійних за керуванням (означення 2.13), та встановимо її зв'язок з однорідною апроксимацією.

Зауваження 4.6. *В означенні 2.13, якщо це зручно, можна вважати, що область Ω є підмножиною малого околу нуля, а можна, навпаки, вважати її необмеженою: в обох співвідношеннях (2.51) і (2.52) фігурують тільки малі вектори $s \in \Omega$.*

Наступна теорема є одним з основних результатів розділу.

Теорема 4.6. *Нехай система (2.44) є однорідною апроксимацією системи (2.1). Нехай існує така відкрита область $\Omega \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, що $0 \in \overline{\Omega}$, і для довільного $s \in \Omega$ розв'язок $(\widehat{\theta}^*_s, \widehat{u}^*_s)$ задачі швидкодії (2.49) є єдиним. Тоді існує сімейство вкладених областей $\Omega(\delta)$, $\delta > 0$, таких, що $\Omega(\delta_1) \subset \Omega(\delta_2)$ при $\delta_1 > \delta_2 > 0$ і $\Omega = \bigcup\limits_{\delta > 0} \Omega(\delta)$, у кожній з яких задача швидкодії (2.49) апроксимує задачу швидкодії (2.50).*

Доведення. Загальна схема доведення наслідує [27].

Не обмежуючи загальності, припустимо, що обидві системи записані в привілейованих координатах: наприклад, за теоремою 4.1,

$$\left(\mathcal{E}_{X_1,\dots,X_m}\right)_i = d_i + \rho_i, \quad \left(\mathcal{E}_{\widehat{X}_1,\dots,\widehat{X}_m}\right)_i = d_i, \ i = 1, \dots, n,$$

де $\operatorname{ord}(d_i) = w_i$, $i = 1, \dots, n$, причому $w_1 \le \dots \le w_n$, а ρ_i включає елементи порядку більше w_i. Тоді для довільного $0 < \theta \le T_0$ і $u \in B^\theta$ завдяки умові (1.47) маємо

$$|\rho_i(\theta, u)| \le c_1 (c_2 \theta)^{w_i + 1}, \ i = 1, \dots, n, \tag{4.27}$$

де $c_1 = \frac{C_1}{1 - mC_2T_0}$, $c_2 = mC_2$ (і без обмеження загальності $mC_2T_0 < 1$).

Далі позначатимемо $d = (d_1, \dots, d_n)^\mathsf{T}$, $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_n)^\mathsf{T}$.

Нехай $D_\varepsilon(y) = (\varepsilon^{w_1} y_1, \dots, \varepsilon^{w_n} y_n)^\mathsf{T}$. Тоді завдяки однорідності

$$\widehat{\theta}^*_{D_\varepsilon(y)} = \varepsilon \widehat{\theta}^*_y, \quad \widehat{u}^*_{D_\varepsilon(y)}(t\varepsilon) = \widehat{u}^*_y(t), \ t \in [0, \widehat{\theta}^*_y]. \tag{4.28}$$

Тобто якщо деяка властивість, пов'язана з оптимальним часом або оптимальним керуванням для задачі (2.49) (існування, єдиність тощо), задовольняється в деякій області Ω, то вона задовольняється також і в області $D_\varepsilon(\Omega)$, $\varepsilon > 0$. Отже, без обмеження загальності вважатимемо, що область Ω задовольняє таку умову:

$$D_\varepsilon(\Omega) = \Omega, \quad \varepsilon > 0. \tag{4.29}$$

(a) Введемо позначення: $|||y||| = \max\limits_{1\le j\le n}\{|y_j|^{1/w_j}\}$ для $y \in \mathbb{R}^n$ ($|||y|||$ задовольняє означення норми за винятком додатної однорідності; замість неї має місце властивість $|||D_\varepsilon(y)||| = \varepsilon|||y|||$ для $\varepsilon > 0$). Позначимо

$$V^\alpha = \{y \in \mathbb{R}^n : |||y||| \le \alpha\}, \ \alpha > 0.$$

Зауважимо, що

$$D_\varepsilon(V^\alpha) = V^{\varepsilon\alpha}, \ \varepsilon > 0, \ \alpha > 0. \tag{4.30}$$

Розглянемо множини

$$\omega(\delta) = \{y \in \partial V^1 : y + V^\delta \subset \Omega\}, \ \delta > 0.$$

Нехай $0 < \delta_0 < 1$ є таким, що $\omega(\delta_0) \ne \varnothing$. Позначимо

$$\Omega(\delta) = \bigcup_{\varepsilon>0} D_\varepsilon(\omega(\delta)) \text{ при } 0 < \delta \le \delta_0, \quad \Omega(\delta) = \Omega(\delta_0) \text{ при } \delta > \delta_0. \tag{4.31}$$

Тоді $\Omega(\delta_1) \subset \Omega(\delta_2)$ при $\delta_1 > \delta_2 > 0$ і $\Omega = \bigcup\limits_{\delta>0} \Omega(\delta)$.

Зафіксуємо довільне $\delta > 0$ і доведемо, що (2.49) апроксимує (2.50) в області $\Omega(\delta)$. Не обмежуючи загальності, вважатимемо $0 < \delta \le \delta_0 < 1$.

Позначимо

$$C = \sup\{\widehat{\theta}^*_y : y \in V^1 \cap \Omega\} > 0.$$

Далі розглядатимемо $0 < \varepsilon \le \min\{1, \frac{T_0}{2C}\}$. Тоді завдяки (4.28), (4.30)

$$\sup\{\widehat{\theta}^*_y : y \in V^\varepsilon \cap \Omega\} = C\varepsilon \le T_0. \tag{4.32}$$

Зафіксуємо довільне $s \in \Omega(\delta) \cap \partial V^\varepsilon$, тоді

$$D_\varepsilon^{-1}(s) \in \omega(\delta), \text{ тобто } D_\varepsilon^{-1}(s) \in V^1 \text{ і } D_\varepsilon^{-1}(s) + V^\delta \subset \Omega. \tag{4.33}$$

Розглянемо оператор $G_s(y) : \Omega(\delta) \to \mathbb{R}^n$, визначений як

$$G_s(y) = s - \rho(\widehat{\theta}^*_y, \widehat{u}^*_y). \tag{4.34}$$

Доведемо, що для досить малого ε цей оператор має нерухому точку у множині

$$M = s + V^{\delta\varepsilon}. \tag{4.35}$$

Зазначимо, що множина $M \subset \Omega$ опукла, обмежена і замкнена (і $0 \notin M$ при малих ε).

Спочатку доведемо, що $G_s(y)$ відображає множину M у себе. Виберемо довільну точку $y \in M$, тоді $y = s + \widehat{y}$, де $\widehat{y} \in V^{\delta\varepsilon}$. Отже, $|\widehat{y}_j| \le (\delta\varepsilon)^{w_j} \le \varepsilon^{w_j}$, а тоді $|y_j| \le |s_j| + \varepsilon^{w_j} \le 2\varepsilon^{w_j} \le (2\varepsilon)^{w_j}$, тобто $y \in V^{2\varepsilon}$.

Оскільки $D_\varepsilon^{-1}(\widehat{y}) \in V^\delta$, то $D_\varepsilon^{-1}(y) = D_\varepsilon^{-1}(s) + D_\varepsilon^{-1}(\widehat{y}) \in D_\varepsilon^{-1}(s) + V^\delta$. Отже, з (4.33) випливає, що $D_\varepsilon^{-1}(y) \in \Omega$, а тоді $y \in \Omega$.

Таким чином,

$$M = s + V^{\delta\varepsilon} \subset V^{2\varepsilon} \cap \Omega.$$

Тоді існує єдиний розв'язок $(\widehat{\theta}^*_y, \widehat{u}^*_y)$ задачі (2.49). Це означає, що оператор G_s визначений у будь-якій точці $y \in M$. Оскільки $y \in V^{2\varepsilon}$, то завдяки (4.28), (4.30) маємо $\widehat{\theta}^*_y \le 2C\varepsilon \le T_0$, отже, з (4.27) випливає

$$|||\rho(\widehat{\theta}^*_y, \widehat{u}^*_y)||| = \max_{1\le j\le n}\{|\rho_j(\widehat{\theta}^*_y, \widehat{u}^*_y)|^{1/w_j}\} \le 2c_1c_2C\varepsilon \max_{1\le j\le n}\{(2c_2C\varepsilon)^{1/w_j})\} \le \delta\varepsilon, \tag{4.36}$$

якщо ε досить мале, а саме, якщо $0 < \varepsilon \le \alpha = \frac{1}{2c_1c_2C} \min\limits_{1\le j\le n}\{(\frac{\delta}{2c_2C})^{w_j}\}$. Тобто в цьому випадку

$$G_s(y) = s - \rho(\widehat{\theta}^*_y, \widehat{u}^*_y) \in s + V^{\delta\varepsilon} = M.$$

Отже, якщо $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0 = \min\{1, \frac{T_0}{2C}, \alpha\}$, то для довільної фіксованої точки $s \in \Omega(\delta) \cap \partial V^\varepsilon$ оператор G_s відображає множину M у себе.

Тепер доведемо, що оператор G_s неперервний в M. Нехай послідовність $\{y_{(q)}\}_{q=1}^\infty \subset M$ збігається, $y_{(q)} \to y$ при $q \to \infty$ (тоді $y \in M$ і $y \neq 0$). За зауваженням 4.4, $\widehat{\theta}^*_{y_{(q)}} \to \widehat{\theta}^*_y$. Тоді з наслідку 4.10 випливає, що $\widehat{u}^*_{y_{(q)}}(t\widehat{\theta}^*_{y_{(q)}}) \xrightarrow{w}$

$\widehat{u}^*_y(t\widehat{\theta}^*_y)$. А тоді з наслідку 4.8 отримуємо $\rho(\widehat{\theta}^*_{y_{(q)}}, \widehat{u}^*_{y_{(q)}}) \to \rho(\widehat{\theta}^*_y, \widehat{u}^*_y)$, тобто оператор G_s є неперервним.

Таким чином, неперервний оператор G_s відображає опуклу, обмежену і замкнену множину $M \subset \mathbb{R}^n$ у себе. Отже, за теоремою Брауера оператор G_s має нерухому точку в M. Позначимо її s^1, тобто $G_s(s^1) = s^1$.

Для точки s^1 маємо $s^1 = G_s(s^1) = s - \rho(\widehat{\theta}^*_{s^1}, \widehat{u}^*_{s^1})$, отже,

$$s = s^1 + \rho(\widehat{\theta}^*_{s^1}, \widehat{u}^*_{s^1}).$$

Але для $s^1 \in M \subset \Omega$ задача (2.49) має єдиний розв'язок, звідки

$$s^1 = d(\widehat{\theta}^*_{s^1}, \widehat{u}^*_{s^1}),$$

а отже,

$$s = d(\widehat{\theta}^*_{s^1}, \widehat{u}^*_{s^1}) + \rho(\widehat{\theta}^*_{s^1}, \widehat{u}^*_{s^1}). \tag{4.37}$$

Це означає, що керування $\widehat{u}^*_{s^1} \in B^{\widehat{\theta}^*_{s^1}}$ переводить нуль до точки s за час $\widehat{\theta}^*_{s^1}$ в силу системи (2.1). Отже, час $\widehat{\theta}^*_{s^1}$ не менший, ніж оптимальний час у задачі (2.50), $\theta^*_s \le \widehat{\theta}^*_{s^1}$. Оскільки $s^1 \in M \subset V^{2\varepsilon}$, отримуємо оцінку

$$\theta^*_s \le \widehat{\theta}^*_{s^1} \le 2C\varepsilon. \tag{4.38}$$

Крім того, розглянемо точку $s^0 = s - \rho(\theta^*_s, u^*_s)$; тоді

$$s = s^0 + \rho(\theta^*_s, u^*_s) = d(\theta^*_s, u^*_s) + \rho(\theta^*_s, u^*_s),$$

звідки випливає $s^0 = d(\theta^*_s, u^*_s)$. Тобто керування $u^*_s \in B^{\theta^*_s}$ переводить нуль до точки s^0 за час θ^*_s в силу системи (2.44), що дає оцінку $\widehat{\theta}^*_{s^0} \le \theta^*_s$. Використовуючи (4.38) і міркуючи аналогічно (4.36), отримуємо $|||\rho(\theta^*_s, u^*_s)||| \le \delta\varepsilon$, отже, $s^0 \in s + V^{\delta\varepsilon} = M$.

Отже, для достатньо малого $\varepsilon > 0$ і для довільної точки $s \in \Omega(\delta) \cap \partial V^\varepsilon$ виконується нерівність

$$\widehat{\theta}^*_{s^0} \le \theta^*_s \le \widehat{\theta}^*_{s^1}, \tag{4.39}$$

де $s^1, s^0 \in M \subset V^{2\varepsilon}$ — деякі точки, визначені за s. Оскільки $s \in \partial V^\varepsilon$, то $\varepsilon = |||s|||$. Отже, якщо $s \to 0$, то $\varepsilon \to 0$ і, як наслідок, $s^1 \to 0$ і $s^0 \to 0$.

Тепер розглянемо довільну послідовність $\{s_{(q)}\}_{q=1}^{\infty} \subset \Omega(\delta)$, таку, що $s_{(q)} \to 0$. Покладемо $\varepsilon_q = |||s_{(q)}||| \to 0$. Для кожної точки $s_{(q)}$ знайдемо $s^0_{(q)}$ і $s^1_{(q)}$ як це зроблено вище, тоді

$$s_{(q)} = s^1_{(q)} + \rho(\widehat{\theta}^*_{s^1_{(q)}}, \widehat{u}^*_{s^1_{(q)}}), \quad s_{(q)} = s^0_{(q)} + \rho(\theta^*_{s_{(q)}}, u^*_{s_{(q)}}),$$

а отже, з (4.27) отримуємо

$$|(s^1_{(q)} - s_{(q)})_j| \le c_1(2c_2C\varepsilon_q)^{w_j+1}, \ |(s^0_{(q)} - s_{(q)})_j| \le c_1(2c_2C\varepsilon_q)^{w_j+1}.$$

Тоді для послідовностей

$$\bar{s}_{(q)} = D^{-1}_{\varepsilon_q}(s_{(q)}) \in \partial V^1, \ \ \bar{s}^1_{(q)} = D^{-1}_{\varepsilon_q}(s^1_{(q)}), \ \ \bar{s}^0_{(q)} = D^{-1}_{\varepsilon_q}(s^0_{(q)})$$

маємо

$$|(\bar{s}^1_{(q)} - \bar{s}_{(q)})_j| \le c_3\varepsilon_q, \qquad |(\bar{s}^0_{(q)} - \bar{s}_{(q)})_j| \le c_3\varepsilon_q, \tag{4.40}$$

де $c_3 = 2c_1c_2C \max\limits_{1\le j\le n}\{(2c_2C)^{1/w_j}\}$. Оскільки множина ∂V^1 є компактною, існує така підпослідовність $\bar{s}_{(q_r)}$, що $\bar{s}_{(q_r)} \to \bar{s} \in \partial V^1$ при $r \to \infty$. Тоді з (4.40) випливає $\bar{s}^1_{(q_r)} \to \bar{s}$ і $\bar{s}^0_{(q_r)} \to \bar{s}$.

Нагадаємо, що $s_{(q)} \in \Omega(\delta)$, а отже, $\bar{s}_{(q)} \in \omega(\delta)$, тобто $\bar{s}_{(q)} + V^\delta \subset \Omega$. З цього випливає, що $\bar{s} \in \Omega$.

За зауваженням 4.4,

$$\widehat{\theta}^*_{\bar{s}_{(q_r)}} = \frac{\widehat{\theta}^*_{s_{(q_r)}}}{\varepsilon_{q_r}} \to \widehat{\theta}^*_{\bar{s}}, \qquad \widehat{\theta}^*_{\bar{s}^1_{q_r}} = \frac{\widehat{\theta}^*_{s^1_{(q_r)}}}{\varepsilon_{q_r}} \to \widehat{\theta}^*_{\bar{s}}, \qquad \widehat{\theta}^*_{\bar{s}^0_{q_r}} = \frac{\widehat{\theta}^*_{s^0_{(q_r)}}}{\varepsilon_{q_r}} \to \widehat{\theta}^*_{\bar{s}}.$$

Отже,

$$\frac{\widehat{\theta}^*_{s^1_{(q_r)}}}{\widehat{\theta}^*_{s_{(q_r)}}} \to 1, \qquad \frac{\widehat{\theta}^*_{s^0_{(q_r)}}}{\widehat{\theta}^*_{s_{(q_r)}}} \to 1. \tag{4.41}$$

Тоді з (4.39) отримуємо

$$\frac{\theta^*_{s_{(q_r)}}}{\widehat{\theta}^*_{s_{(q_r)}}} \to 1.$$

Оскільки кожна підпослідовність $s_{(q)}$ має під-підпослідовність, яка задовольняє це співвідношення, остаточно отримуємо

$$\frac{\theta^*_{s_{(q)}}}{\widehat{\theta}^*_{s_{(q)}}} \to 1 \quad \text{при} \quad s_{(q)} \to 0, \quad s_{(q)} \in \Omega(\delta), \tag{4.42}$$

що збігається з (2.51) (для $Q(s)=s$ і $\Omega=\Omega(\delta)$).

(б) Тепер доведемо (2.52). Нагадаємо, що

$$s_{(q)}=d(\widehat{\theta}^*_{s_{(q)}},\widehat{u}^*_{s_{(q)}}),\quad s^0_{(q)}=d(\theta^*_{s_{(q)}},u^*_{s_{(q)}}),$$

отже, завдяки однорідності,

$$\bar{s}_{(q)}=d(\widehat{\theta}^*_{\bar{s}_{(q)}},\widehat{u}^*_{\bar{s}_{(q)}}),\quad \text{де}\quad \widehat{\theta}^*_{\bar{s}_{(q)}}=\frac{\widehat{\theta}^*_{s_{(q)}}}{\varepsilon_q},\ \widehat{u}^*_{\bar{s}_{(q)}}(t)=\widehat{u}^*_{s_{(q)}}(t\varepsilon_q),\ t\in[0,\widehat{\theta}^*_{\bar{s}_{(q)}}],\quad (4.43)$$

$$\bar{s}^0_{(q)}=d(\theta_{\bar{s}_{(q)}},u_{\bar{s}_{(q)}}),\quad \text{де}\quad \theta_{\bar{s}_{(q)}}=\frac{\theta^*_{s_{(q)}}}{\varepsilon_q},\ u_{\bar{s}_{(q)}}(t)=u^*_{s_{(q)}}(t\varepsilon_q),\ t\in[0,\theta_{\bar{s}_{(q)}}].\quad (4.44)$$

Нагадаємо також, що $\bar{s}_{(q_r)}\to\bar{s}$, $\widehat{\theta}^*_{\bar{s}_{(q_r)}}\to\widehat{\theta}^*_{\bar{s}}$ і $\bar{s}^0_{(q_r)}\to\bar{s}$, $\theta_{\bar{s}_{(q_r)}}\to\widehat{\theta}^*_{\bar{s}}$. Отже, з наслідку 4.11 (застосованого для $\bar{s}_{(q_r)}\to\bar{s}$ і $\bar{s}^0_{(q_r)}\to\bar{s}$) випливає

$$\int_0^1\left|\widehat{u}^*_{\bar{s}_{(q_r)}i}(t\widehat{\theta}^*_{\bar{s}_{(q_r)}})-\widehat{u}^*_{\bar{s}\,i}(t\widehat{\theta}^*_{\bar{s}})\right|dt\to 0,\ \int_0^1\left|u_{\bar{s}_{(q_r)}i}(t\theta_{\bar{s}_{(q_r)}})-\widehat{u}^*_{\bar{s}\,i}(t\widehat{\theta}^*_{\bar{s}})\right|dt\to 0,$$

звідки отримуємо

$$\int_0^1\left|\widehat{u}^*_{\bar{s}_{(q_r)}i}(t\widehat{\theta}^*_{\bar{s}_{(q_r)}})-u_{\bar{s}_{(q_r)}i}(t\theta_{\bar{s}_{(q_r)}})\right|dt=\int_0^1\left|\widehat{u}^*_{s_{(q_r)}i}(t\widehat{\theta}^*_{s_{(q_r)}})-u^*_{s_{(q_r)}i}(t\theta^*_{s_{(q_r)}})\right|dt\to 0.\quad (4.45)$$

Тепер розглянемо послідовності

$$s'_{(q)}=d(\theta^*_{s_{(q)}},\widehat{u}^*_{s_{(q)}}),\quad \bar{s}'_{(q)}=D^{-1}_{\varepsilon_q}(s'_{(q)}),$$

тоді завдяки однорідності $\bar{s}'_{(q)}=d(\theta_{\bar{s}_{(q)}},\widehat{u}^*_{\bar{s}_{(q)}})$. Доведемо, що $\bar{s}'_{(q_r)}\to\bar{s}$. Зауважимо, що при $0<\mu<1$ маємо

$$\eta_{i_1\ldots i_k}(1,v)-\eta_{i_1\ldots i_k}(\mu,v)=\sum_{j=2}^k\eta_{i_j\ldots i_k}(\mu,v)\eta_{i_1\ldots i_{j-1}}(1-\mu,\widetilde{v})+\eta_{i_1\ldots i_k}(1-\mu,\widetilde{v}),$$

де $\widetilde{v}(t)=v(t+\mu)$, а при $\mu>1$ аналогічно

$$\eta_{i_1\ldots i_k}(\mu,v)-\eta_{i_1\ldots i_k}(1,v)=\sum_{j=2}^k\eta_{i_j\ldots i_k}(1,v)\eta_{i_1\ldots i_{j-1}}(\mu-1,\widetilde{v})+\eta_{i_1\ldots i_k}(\mu-1,\widetilde{v}),$$

де $\widetilde{v}(t)=v(t+1)$ (детальніше ця властивість обговорюється у лемі 4.5 нижче). Нехай $\mu_q=\frac{\theta_{\bar{s}_{(q)}}}{\widehat{\theta}^*_{\bar{s}_{(q)}}}=\frac{\theta^*_{s_{(q)}}}{\widehat{\theta}^*_{s_{(q)}}}\to 1$. Вибираючи $v(t)=v_q(t)=\widehat{u}^*_{\bar{s}_{(q)}}(t\widehat{\theta}^*_{\bar{s}_{(q)}})$,

$\mu = \mu_q$, і враховуючи, що d_j містять скінченну кількість доданків, отримуємо, що для деякого $C' > 0$

$$|(\bar{s}'_{(q)})_j - (\bar{s}_{(q)})_j| = |d_j(\widehat{\theta}^*_{\bar{s}_{(q)}}\mu_q, \widehat{u}^*_{\bar{s}_{(q)}}) - d_j(\widehat{\theta}^*_{\bar{s}_{(q)}}, \widehat{u}^*_{\bar{s}_{(q)}})| =$$

$$= (\widehat{\theta}^*_{\bar{s}_{(q)}})^{w_j}|d_j(\mu_q, v_q) - d_j(1, v_q)| \le C'|\mu_q - 1| \to 0,$$

$j = 1, \ldots, n$, звідки отримуємо $\|\bar{s}'_{(q_r)} - \bar{s}\| \to 0$ при $q \to \infty$. Отже, з наслідку 4.11 випливає

$$\int_0^1 \left|\widehat{u}^*_{\bar{s}_{(q_r)}i}(t\theta_{\bar{s}_{(q_r)}}) - \widehat{u}^*_{\bar{s}\,i}(t\widehat{\theta}^*_{\bar{s}})\right| dt \to 0,$$

звідки

$$\int_0^1 \left|\widehat{u}^*_{s_{(q_r)}i}(t\theta^*_{s_{(q_r)}}) - \widehat{u}^*_{s\,i}(t\widehat{\theta}^*_{s})\right| dt \to 0. \tag{4.46}$$

Об'єднуючи (4.45) і (4.46), отримуємо

$$\int_0^1 \left|u^*_{s_{(q_r)}i}(t\theta^*_{s_{(q_r)}}) - \widehat{u}^*_{s\,i}(t\theta^*_{s})\right| dt \to 0,$$

що можна подати як

$$\frac{1}{\theta^*_{s_{(q_r)}}}\int_0^{\theta^*_{s_{(q_r)}}} \left|u^*_{s_{(q_r)}i}(t) - \widehat{u}^*_{s_{(q_r)}i}(t)\right| dt \to 0.$$

Оскільки кожна підпослідовність $s_{(q)}$ має під-підпослідовність, яка задовольняє це співвідношення, отримуємо

$$\frac{1}{\theta^*_{s_{(q)}}}\int_0^{\theta^*_{s_{(q)}}} \left|u^*_{s_{(q)}i}(t) - \widehat{u}^*_{s_{(q)}i}(t)\right| dt \to 0.$$

Ураховуючи (4.42), остаточно отримуємо

$$\frac{1}{\theta_q}\int_0^{\theta_q} \left|u^*_{s_{(q)}i}(t) - \widehat{u}^*_{s_{(q)}i}(t)\right| dt \to 0, \quad i = 1, \ldots, m,$$

при $s_{(q)} \to 0$, $s_{(q)} \in \Omega(\delta)$, де $\theta_q = \min\{\widehat{\theta}^*_{s_{(q)}}, \theta^*_{s_{(q)}}\}$, що збігається з (2.52) (для $Q(s) = s$ і $\Omega = \Omega(\delta)$). ■

Зауваження 4.7. *Співвідношення (2.51) було отримане в [50]; воно означає, що субріманові відстані до нуля, що визначаються самою системою та її однорідною апроксимацією, асимптотично еквівалентні.*

Зауважимо, що наше означення апроксимації в сенсі швидкодії включає ще і співвідношення щодо оптимальних керувань (2.52)*, що не було розглянуте в* [50].

Зауваження 4.8. *Теорема 4.5 дозволяє надати часткову відповідь на відкрите питання* [130]. *Як буде показано у розділі 5, у випадку задачі швидкодії для афінних систем має виконуватися така умова: для множини* $K = \{\widehat{u}_s^*(t\widehat{\theta}_s^*), t \in [0,1] : s \in \Omega\}$*, що розглядається у просторі* $L_2[0,1]$*, зі слабкої збіжності послідовності елементів з* K *випливає сильна збіжність. Відкрите питання полягає в тому, чи випливає ця властивість з решти умов теореми. Для систем, лінійних за керуванням, за теоремою 4.5 множина* K *міститься в одиничній сфері гільбертового простору* $L_2([0,1];\mathbb{R}^m)$*, а отже, вона автоматично задовольняє вказаній умові.*

4.3 Апроксимація в околі

Дотепер у цьому розділі ядерна підалгебра Лі (і однорідна апроксимація) визначалися, виходячи з задачі Коші для системи (2.1), де початкова точка фіксована — це початок координат. У цьому підрозділі ми вивчаємо ядерну підалгебру Лі як функцію початкової точки в околі початку координат. Зокрема, ми досліджуємо зв'язок властивостей регулярності і однорідності систем із властивостями їх ядерних підалгебр Лі. Результати підрозділу опубліковано в роботі [137].

4.3.1 Конкатенація керувань

У цьому підрозділі ми розглядаємо алгебру $\mathcal{F}^e = \mathcal{F} + \mathbb{R}$ зі скалярним добутком, який продовжується з $\mathcal{F}$ так, що $\langle 1, 1\rangle = 1$ і $\langle 1, a\rangle = 0$ для всіх $a \in \mathcal{F}$. Введемо тензорний добуток лінійних просторів $\mathcal{F}^e \otimes \mathcal{F}^e$ з базисом

$$\{\eta_{i_1\ldots i_k} \otimes \eta_{j_1\ldots j_s} : \ k, s \geq 0, \ 1 \leq i_1, \ldots, i_k, j_1, \ldots, j_s \leq m\}$$

(нагадаємо, що $\eta_{q_1\dots q_r} = 1$ при $r = 0$). Введемо скалярний добуток в $\mathcal{F}^e \otimes \mathcal{F}^e$, вважаючи цей базис ортонормальним. Тоді для довільних $a, b, c, d \in \mathcal{F}^e$

$$\langle a \otimes b, c \otimes d\rangle = \langle a, c\rangle\langle b, d\rangle.$$

Якщо $\{b'_q\}_{q=1}^{\infty}$ і $\{b''_q\}_{q=1}^{\infty}$ — спряжені базиси в $\mathcal{F}^e$, то $\{b'_i \otimes b'_j\}_{i,j=1}^{\infty}$ і $\{b''_i \otimes b''_j\}_{i,j=1}^{\infty}$ — спряжені базиси в $\mathcal{F}^e \otimes \mathcal{F}^e$. Тому для довільного $a \in \mathcal{F}^e \otimes \mathcal{F}^e$

$$a = \sum_{i,j=1}^{\infty} \langle a, b'_i \otimes b'_j\rangle b''_i \otimes b''_j, \tag{4.47}$$

причому ця тотожність може бути поширена на будь-який формальний степеневий ряд a елементів $\mathcal{F}^e \otimes \mathcal{F}^e$ з векторними коефіцієнтами.

Позначення 4.1. *Нехай $\Delta : \mathcal{F}^e \to \mathcal{F}^e \otimes \mathcal{F}^e$ позначає лінійне відображення, що визначене на базисних елементах за правилом*

$$\Delta(\eta_{i_1\dots i_k}) = \sum_{j=0}^{k} \eta_{i_1\dots i_j} \otimes \eta_{i_{j+1}\dots i_k}. \tag{4.48}$$

Зазначимо, що Δ є комноженням у відповідній алгебрі Хопфа (див. [98], де цей оператор позначається як Δ'). За лінійністю, Δ природним чином поширюється на формальні степеневі ряди елементів $\mathcal{F}^e$.

Неважко довести таку властивість Δ: для довільних $a, a_1, a_2 \in \mathcal{F}^e$

$$\langle \Delta(a), a_1 \otimes a_2\rangle = \langle a, a_1 a_2\rangle. \tag{4.49}$$

Дійсно, завдяки лінійності достатньо розглянути $a = \eta_{i_1\dots i_k}$, $a_1 = \eta_{s_1\dots s_q}$ і $a_2 = \eta_{t_1\dots t_r}$:

$$\langle \Delta(\eta_{i_1\dots i_k}), \eta_{s_1\dots s_q} \otimes \eta_{t_1\dots t_r}\rangle = \sum_{j=0}^{k} \langle \eta_{i_1\dots i_j} \otimes \eta_{i_{j+1}\dots i_k}, \eta_{j_1\dots j_q} \otimes \eta_{s_1\dots s_r}\rangle =$$

$$= \begin{cases} 1, & \text{якщо } k = q + r \text{ і } \eta_{i_1\dots i_k} = \eta_{s_1\dots s_q t_1\dots t_r}, \\ 0 & \text{у супротивному випадку} \end{cases} = \langle \eta_{i_1\dots i_k}, \eta_{s_1\dots s_q}\eta_{t_1\dots t_r}\rangle.$$

Як наслідок, якщо $\{b'_q\}_{q=1}^{\infty}$ та $\{b''_q\}_{q=1}^{\infty}$ є спряженими базисами в $\mathcal{F}^e$, то для довільного $a \in \mathcal{F}^e$

$$\Delta(a) = \sum_{i,j=1}^{\infty} \left\langle a, b'_i b'_j \right\rangle b''_i \otimes b''_j, \tag{4.50}$$

і ця рівність поширюється на формальні степеневі ряди елементів $\mathcal{F}^e$.

Повернемось до системи (2.1). Припустимо, що керування $u^1(t)$ переводить початок координат до точки z за час θ^1, а керування $u^2(t)$ переводить точку z до точки x за час θ^2. Тобто розв'язок $x^1(t)$ задачі Коші

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{m} u_i^1(t) X_i(x), \quad x(0) = 0$$

задовольняє умову $x^1(\theta^1) = z$, а розв'язок $x^2(t)$ задачі Коші

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{m} u_i^2(t) X_i(x), \quad x(0) = z$$

задовольняє умову $x^2(\theta^2) = x$. Нехай $u^1 \circ u^2$ позначає *конкатенацію* керувань $u^1(t)$ і $u^2(t)$, яка задається так:

$$(u^1 \circ u^2)(t) = \begin{cases} u^1(t) & \text{при } t \in [0, \theta^1], \\ u^2(t - \theta^1) & \text{при } \ t \in (\theta^1, \theta^1 + \theta^2]. \end{cases} \tag{4.51}$$

Тоді, очевидно, керування $u^3 = u^1 \circ u^2$ переводить початок координат до точки x, тобто розв'язок $x^3(t)$ задачі Коші

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{m} u_i^3(t) X_i(x), \quad x(0) = 0$$

задовольняє умову $x^3(\theta^1 + \theta^2) = x$.

Лема 4.5. *Для довільних керувань $u^1 \in B^{\theta^1}$ і $u^2 \in B^{\theta^2}$ і довільного ітерованого інтегралу має місце наступна рівність:*

$$\eta_{i_1 \ldots i_k}(\theta^1 + \theta^2, u^1 \circ u^2) = \sum_{j=0}^{k} \eta_{i_1 \ldots i_j}(\theta^2, u^2)\, \eta_{i_{j+1} \ldots i_k}(\theta^1, u^1). \tag{4.52}$$

Доведення. Позначимо $u = u^1 \circ u^2$. Розглянемо область інтегрування для $\eta_{i_1\dots i_k}(\theta^1+\theta^2, u)$, яка є симплексом в $\mathbb{R}^k$. Її можна подати як об'єднання $k+1$ багатогранників

$$\{(\tau_1,\dots,\tau_k) : 0 \le \tau_k \le \dots \le \tau_1 \le \theta^1+\theta^2\} =$$

$$= \bigcup_{j=0}^{k} \{(\tau_1,\dots,\tau_k) : 0 \le \tau_k \le \dots \le \tau_{j+1} \le \theta^1 \le \tau_j \le \dots \le \tau_1 \le \theta^1+\theta^2\},$$

у яких внутрішності попарно не перетинаються, причому кожний такий багатогранник дорівнює декартовому добутку двох симплексів. Отже,

$$\eta_{i_1\dots i_k}(\theta^1+\theta^2, u) = \sum_{j=0}^{k} \int_{\theta^1}^{\theta^1+\theta^2} \cdots \int_{\theta^1}^{\tau_{j-1}} \int_0^{\theta^1} \cdots \int_0^{\tau_{k-1}} u_{i_1}(\tau_1)\cdots u_{i_k}(\tau_k) d\tau_k \cdots d\tau_1 =$$

$$= \sum_{j=0}^{k} \left(\int_{\theta^1}^{\theta^1+\theta^2} \cdots \int_{\theta^1}^{\tau_{j-1}} u^2_{i_1}(\tau_1-\theta^1)\cdots u^2_{i_j}(\tau_j-\theta^1) d\tau_j \cdots d\tau_1 \right) \times$$

$$\times \left(\int_0^{\theta^1} \cdots \int_0^{\tau_{k-1}} u^1_{i_{j+1}}(\tau_{j+1})\cdots u^1_{i_k}(\tau_k) d\tau_k \cdots d\tau_{j+1} \right) =$$

$$= \sum_{j=0}^{k} \eta_{i_1\dots i_j}(\theta^2, u^2)\, \eta_{i_{j+1}\dots i_k}(\theta^1, u^1),$$

звідки отримуємо (4.52). ■

Лема 4.6. *Нехай $\{b'_q\}_{q=1}^{\infty}$ та $\{b''_q\}_{q=1}^{\infty}$ — спряжені базиси в $\mathcal{F}^e$. Тоді для довільної пари керувань $u^1 \in B^{\theta^1}$, $u^2 \in B^{\theta^2}$ і довільного $a \in \mathcal{F}^e$*

$$a(\theta^1+\theta^2, u^1 \circ u^2) = \sum_{i,j=1}^{\infty} \left\langle a, b'_i b'_j \right\rangle\, b''_i(\theta^2, u^2)\, b''_j(\theta^1, u^1). \tag{4.53}$$

Доведення. Розглянемо довільну пару керувань $u^1 \in B^{\theta^1}$, $u^2 \in B^{\theta^2}$; далі ми позначатимемо її P. Для пари P введемо лінійне відображення $m_P : \mathcal{F}^e \otimes \mathcal{F}^e \to \mathbb{R}$, визначене на базисних елементах $\eta_{i_1\dots i_k} \otimes \eta_{j_1\dots j_s}$ як

$$m_P(\eta_{i_1\dots i_k} \otimes \eta_{j_1\dots j_s}) = \eta_{i_1\dots i_k}(\theta^2, u^2)\, \eta_{j_1\dots j_s}(\theta^1, u^1), \tag{4.54}$$

звідки завдяки лінійності для довільних $a_1, a_2 \in \mathcal{F}^e$ отримуємо

$$m_P(a_1 \otimes a_2) = a_1(\theta^2, u^2)a_2(\theta^1, u^1). \tag{4.55}$$

Використовуючи (4.48) і (4.54), перепишемо рівність (4.52) як

$$\eta_{i_1\dots i_k}(\theta^1+\theta^2, u^1 \circ u^2) = m_P(\Delta(\eta_{i_1\dots i_k})),$$

звідки завдяки лінійності для довільного $a \in \mathcal{F}^e$ отримуємо

$$a(\theta^1+\theta^2, u^1 \circ u^2) = m_P(\Delta(a)).$$

Отже, з (4.50) і (4.55) маємо

$$a(\theta^1+\theta^2, u^1\circ u^2) = \sum_{i,j=1}^{\infty} \langle a, b_i'b_j'\rangle\, m_P(b_i''\otimes b_j'') = \sum_{i,j=1}^{\infty} \langle a, b_i'b_j'\rangle\, b_i''(\theta^2, u^2)b_j''(\theta^1, u^1),$$

що й доводить лему. Зауважимо, що рівність (4.53) може бути поширена і на формальні степеневі ряди елементів $\mathcal{F}^e$, якщо (неформальні) ряди у правій і лівій частинах збігаються. ■

Тепер розглянемо систему вигляду (2.1) в околі $U(0)$ і антигомоморфізм (2.20). Для довільного $z \in U(0)$ введемо лінійне відображення $c^z : \mathcal{F} \to \mathbb{R}^n$, визначене як

$$c^z(a) = H(a)E(z), \qquad a \in \mathcal{F};$$

зокрема, $c^z(\eta_{i_1\dots i_k}) = X_{i_k}X_{i_{k-1}}\cdots X_{i_1}E(z)$. Без обмеження загальності будемо вважати, що умова Рашевського-Чжоу (2.23) виконується у довільній точці $z \in U(0)$. Аналогічно (2.3), кінцева точка $x(\theta)$ розв'язку задачі Коші

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{m} u_i(t)X_i(x), \quad x(0) = z,$$

може бути записана як

$$x(\theta) = z + \mathcal{E}^z_{X_1,\dots,X_m}(\theta, u),$$

де

$$\mathcal{E}^z_{X_1,\dots,X_m}(\theta, u) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{1\le i_1,\dots,i_k\le m} c^z(\eta_{i_1\dots i_k})\eta_{i_1\dots i_k}(\theta, u).$$

Далі ми розглядатимемо й відповідні формальні ряди

$$\mathcal{E}^z_{X_1,\dots,X_m} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{1\le i_1,\dots,i_k\le m} c^z(\eta_{i_1\dots i_k})\eta_{i_1\dots i_k}.$$

Розглянемо довільну точку $x \in U(0)$ і траєкторію системи (2.1) (яка належить $U(0)$), що починається в нулі, закінчується в точці x і проходить через точку z; нехай $u^1 \in B^{\theta^1}$ переводить нуль до z, а $u^2 \in B^{\theta^2}$ переводить z до x, тоді $u^1 \circ u^2$ переводить нуль до x (за час $\theta^1 + \theta^2$). Тоді

$$x = \mathcal{E}_{X_1,\dots,X_m}(\theta^1 + \theta^2, u^1 \circ u^2) = z + \mathcal{E}^z_{X_1,\dots,X_m}(\theta^2, u^2), \tag{4.56}$$

де

$$z = \mathcal{E}_{X_1,\dots,X_m}(\theta^1, u^1). \tag{4.57}$$

Далі вважатимемо, що точка z фіксована, а точка x довільна.

Виникає питання: чи можна коефіцієнти ряду $\mathcal{E}^z_{X_1,\dots,X_m}$ (тобто $c^z_{i_1\dots i_k}$) знайти прямо через коефіцієнти ряду $\mathcal{E}_{X_1,\dots,X_m}$ (тобто через $c_{i_1\dots i_k}$), без знаходження похідних $X_{i_k}X_{i_{k-1}}\cdots X_{i_1}E(z)$. Далі ми покажемо, що це можливо в класі регулярних систем, які описані в наступному пункті.

4.3.2 Регулярні системи

У цьому і наступному пунктах ми вивчаємо регулярні системи. Зазначимо, що в регулярному випадку поняття ядерної підалгебри Лі збігається з поняттям символу Танаки [150, 160]. У роботі [50] для регулярного випадку результати щодо однорідної апроксимації були уточнені; зокрема, були отримані оцінки для субріманової метрики в околі. У цьому підрозділі ми показуємо, які властивості ядерної підалгебри Лі дозволяють це зробити.

Найпростіша характеристика поведінки системи в околі — це поведінка її вектора зросту. Нехай p^z — степінь неголономності, а $v^z = (v^z_1, \dots, v^z_{p^z})$ — вектор зросту системи в точці z, тобто

$$v^z_k = \dim c^z(\mathcal{L}^1 + \dots + \mathcal{L}^k), \quad k = 1, \dots, p^z.$$

Нехай p і $v = (v_1, \dots, v_p)$ — степінь неголономності і вектор зросту в нулі. Очевидно, існує окіл $U(0)$, такий, що для довільного $z \in U(0)$

$$p^z \le p \ \text{ та } \ v_k^z \ge v_k, \ k = 1, \dots, p^z.$$

Означення 4.4. *Система* (2.1) *називається регулярною в нулі, якщо її вектор зросту є сталим у деякому околі $U(0)$, тобто $p^z = p$ і $v_k^z = v_k$, $k = 1, \dots, p$, для довільного $z \in U(0)$. У супротивному випадку система називається нерегулярною в нулі.*

Якщо система регулярна в нулі, то вона, очевидно, регулярна в будь-якій точці з деякого околу нуля.

Ідея двох наступних лем і пов'язаної з ними теореми 4.7 була запропонована І. Зеленко [10].

Лема 4.7. *Припустимо, що система* (2.1) *є регулярною в нулі. Тоді її ядерна підалгебра Лі $\mathcal{L}_{X_1,\dots,X_m}$ є ідеалом Лі в $\mathcal{L}$, тобто для довільних $a \in \mathcal{L}$ та $\ell \in \mathcal{L}_{X_1,\dots,X_m}$ виконується $[a, \ell] \in \mathcal{L}_{X_1,\dots,X_m}$.*

Доведення. Нехай однорідні елементи $\ell_1, \dots, \ell_n$ задовольняють умови (4.9). За наслідком 3.1, вектори $c(\ell_1), \dots, c(\ell_n)$ лінійно незалежні, а отже, вектори $c^x(\ell_1), \dots, c^x(\ell_n)$ лінійно незалежні для довільного x з деякого околу $U(0)$. Без обмеження загальності припустимо, що вектор зросту є сталим в $U(0)$, тобто $p^x = p$ і $v_k^x = v_k$, $k = 1, \dots, p$. Тоді для довільного $x \in U(0)$

$$c^x(\mathcal{L}^1 + \dots + \mathcal{L}^k) = \mathrm{Lin}\{c^x(\ell_1), \dots, c^x(\ell_{v_k})\}, \quad 1 \le k \le p. \tag{4.58}$$

Зафіксуємо $k = 1, \dots, p$ і довільний елемент $\ell \in \mathcal{L}_{X_1,\dots,X_m} \cap \mathcal{L}^k$. З (4.58) випливає, що

$$c^x(\ell) = \sum_{i=1}^{v_k} \alpha_i(x) c^x(\ell_i)$$

для деяких скалярних функцій $\alpha_i(x)$, $i = 1, \dots, v_k$. Оскільки вектори $c^x(\ell_1), \dots, c^x(\ell_{v_k})$ лінійно незалежні, отримуємо, що функції $\alpha_i(x)$ гладкі.

Оскільки $\ell \in \mathcal{L}_{X_1,\dots,X_m} \cap \mathcal{L}^k$, маємо $c(\ell) \in \mathrm{Lin}\{c(\ell_1), \dots, c(\ell_{v_{k-1}})\}$, отже,

$$\alpha_i(0) = 0, \quad i = v_{k-1}+1, \dots, v_k. \tag{4.59}$$

Тепер розглянемо довільний елемент $a \in \mathcal{L}^q$, $q \geq 1$. Тоді

$$c^x([a,\ell]) = (c^x(\ell))'_x \, c^x(a) - (c^x(a))'_x \, c^x(\ell) =$$

$$= \sum_{i=1}^{v_k} (\alpha_i(x) c^x(\ell_i))'_x \, c^x(a) - \sum_{i=1}^{v_k} (c^x(a))'_x \, \alpha_i(x) c^x(\ell_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{v_k} \Big(\alpha_i'(x) c^x(a)\Big) c^x(\ell_i) + \sum_{i=1}^{v_k} \alpha_i(x) \Big((c^x(\ell_i))'_x \, c^x(a) - (c^x(a))'_x \, c^x(\ell_i)\Big) =$$

$$= \sum_{i=1}^{v_k} \widetilde{\alpha}_i(x) c^x(\ell_i) + \sum_{i=1}^{v_k} \alpha_i(x) c^x([a,\ell_i]),$$

де $\widetilde{\alpha}_i(x) = \alpha_i'(x) c^x(a)$, $i = 1, \dots, v_k$. Ураховуючи (4.59), у точці $x = 0$ маємо

$$c([a,\ell]) = \sum_{i=1}^{v_k} \widetilde{\alpha}_i(0) c(\ell_i) + \sum_{i=1}^{v_{k-1}} \alpha_i(0) c([a,\ell_i]).$$

Але $\ell_i \in \mathcal{L}^1 + \dots + \mathcal{L}^k$ для $i = 1, \dots, v_k$, і $[a,\ell_i] \in \mathcal{L}^1 + \dots + \mathcal{L}^{k+q-1}$ для $i = 1, \dots, v_{k-1}$. Отже, $c([a,\ell]) \in c(\mathcal{L}^1 + \dots + \mathcal{L}^{k+q-1})$, причому $[a,\ell] \in \mathcal{L}^{k+q}$. Це означає, що $[a,\ell] \in \mathcal{P}^{k+q} \subset \mathcal{L}_{X_1,\dots,X_m}$. ■

Властивість $\mathcal{L}_{X_1,\dots,X_m}$ бути ідеалом Лі може бути виражена в термінах лівого ідеалу $\mathcal{J}_{X_1,\dots,X_m}$.

Лема 4.8. *Ядерна підалгебра Лі $\mathcal{L}_{X_1,\dots,X_m}$ системи (2.1) є ідеалом Лі в $\mathcal{L}$ тоді і тільки тоді, коли лівий ідеал $\mathcal{J}_{X_1,\dots,X_m}$ є двостороннім, тобто $b\,a \in \mathcal{J}_{X_1,\dots,X_m}$ для довільного $a \in \mathcal{F}$ і довільного $b \in \mathcal{J}_{X_1,\dots,X_m}$.*

Доведення. Припустимо, що $\mathcal{J}_{X_1,\dots,X_m}$ двосторонній. Оберемо довільні елементи $\ell \in \mathcal{L}_{X_1,\dots,X_m} \subset \mathcal{J}_{X_1,\dots,X_m}$ і $a \in \mathcal{L}$, тоді $a\ell \in \mathcal{J}_{X_1,\dots,X_m}$ і $\ell a \in \mathcal{J}_{X_1,\dots,X_m}$. Ураховуючи (4.3), отримуємо $[a,\ell] = a\ell - \ell a \in \mathcal{J}_{X_1,\dots,X_m} \cap \mathcal{L} = \mathcal{L}_{X_1,\dots,X_m}$. Отже, $\mathcal{L}_{X_1,\dots,X_m}$ є ідеалом Лі.

Тепер нехай $\mathcal{L}_{X_1,\dots,X_m}$ є ідеалом Лі; доведемо, що лівий ідеал $\mathcal{J}_{X_1,\dots,X_m}$ є двостороннім. Очевидно, достатньо довести, що $\ell a \in \mathcal{J}_{X_1,\dots,X_m}$ для довільного $\ell \in \mathcal{L}_{X_1,\dots,X_m}$ і довільного $a \in \mathcal{F}$. Більш того, завдяки теоремі 1.4, достатньо довести, що $\ell\ell_1\cdots\ell_k \in \mathcal{J}_{X_1,\dots,X_m}$ для всіх $k \geq 1$ і довільних $\ell_1,\dots,\ell_k \in \mathcal{L}$.

Доведення проведемо індукцією по k. Для $k=1$ маємо $\ell\ell_{i_1} = [\ell,\ell_{i_1}] + \ell_{i_1}\ell$. Оскільки $\mathcal{L}_{X_1,\dots,X_m}$ є ідеалом Лі, $[\ell,\ell_{i_1}] \in \mathcal{L}_{X_1,\dots,X_m} \subset \mathcal{J}_{X_1,\dots,X_m}$; оскільки $\mathcal{J}_{X_1,\dots,X_m}$ є лівим ідеалом, $\ell_{i_1}\ell \in \mathcal{J}_{X_1,\dots,X_m}$. Отже, $\ell\ell_{i_1} \in \mathcal{J}_{X_1,\dots,X_m}$.

Нехай твердження виконане для деякого $k \geq 1$. Розглянемо довільні $\ell_1,\dots,\ell_{k+1} \in \mathcal{L}$ і позначимо $b = \ell\ell_1\cdots\ell_k$. За припущенням індукції $b \in \mathcal{J}_{X_1,\dots,X_m}$, отже, $b = \sum b_i\ell_i'$, де $b_i \in \mathcal{F}^e$ і $\ell_i' \in \mathcal{L}_{X_1,\dots,X_m}$, а тоді за припущенням індукції $\ell_i'\ell_{k+1} \in \mathcal{J}_{X_1,\dots,X_m}$. Отже,

$$\ell\ell_1\cdots\ell_k\ell_{k+1} = b\,\ell_{k+1} = \sum b_i\ell_i'\ell_{k+1} \in \mathcal{J}_{X_1,\dots,X_m},$$

що й доводить лему. ■

Визначимо підалгебру Лі і лівий ідеал системи у точці z. Розглянемо підпростори

$$\mathcal{P}^k(z) = \{\ell \in \mathcal{L}^k : c^z(\ell) \in c^z(\mathcal{L}^1 + \cdots + \mathcal{L}^{k-1})\}, \qquad k \geq 1,$$

тоді підалгебра Лі і лівий ідеал у точці z мають вигляд

$$\mathcal{L}^z_{X_1,\dots,X_m} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{P}^k(z), \quad \mathcal{J}^z_{X_1,\dots,X_m} = \mathrm{Lin}\{\mathcal{F}^e\mathcal{L}^z_{X_1,\dots,X_m}\}.$$

Для $z=0$ ми, як правило, опускаємо посилання на точку, тобто пишемо $\mathcal{L}_{X_1,\dots,X_m}$ замість $\mathcal{L}^0_{X_1,\dots,X_m}$, $\mathcal{J}_{X_1,\dots,X_m}$ замість $\mathcal{J}^0_{X_1,\dots,X_m}$ тощо.

Наслідок 4.12. *Припустимо, що система (2.1) є регулярною в нулі. Тоді існує такий окіл $U(0)$, що для довільного $z \in U(0)$ ядерна підалгебра Лі $\mathcal{L}^z_{X_1,\dots,X_m}$ є ідеалом Лі в $\mathcal{L}$.*

Наслідок 4.13. *Нехай система (2.1) є регулярною в нулі. Тоді існує такий окіл $U(0)$, що для довільної точки $z \in U(0)$ лівий ідеал $\mathcal{J}^z_{X_1,\dots,X_m}$ є двостороннім, тобто для довільного $a \in \mathcal{F}$ і довільного $b \in \mathcal{J}^z_{X_1,\dots,X_m}$ виконується $b\,a \in \mathcal{J}^z_{X_1,\dots,X_m}$.*

Наступний приклад показує, що ідеал Лі $\mathcal{L}^z_{X_1,\dots,X_m}$ регулярної системи може залежати від точки z.

Приклад 4.3. Розглянемо систему в околі нуля

$$\dot{x}_1 = u_1,\ \dot{x}_2 = u_2 + x_1^2 u_2,\ \dot{x}_3 = x_1 u_2,\ \dot{x}_4 = x_1^2 u_2 + x_1 x_2 u_2.$$

Маємо $X_1(x) = e_1$,

$$X_2(x) = (0,\ 1 + x_1^2,\ x_1,\ x_1^2 + x_1 x_2)^\mathsf{T},\ [X_1, X_2](x) = (0,\ 2x_1,\ 1,\ 2x_1 + x_2)^\mathsf{T},$$

$$[X_1, [X_1, X_2]](x) = (0,\ 2,\ 0,\ 2)^\mathsf{T},\ [X_2, [X_1, X_2]](x) = (0,\ 0,\ 0,\ 1 - x_1^2)^\mathsf{T}.$$

Отже, вектор зросту дорівнює $v^x = (2, 3, 4)$ в околі нуля, тобто система регулярна. Легко перевірити, що

$$[X_2, [X_1, X_2]](x) - \frac{(1-x_1^2)^2}{2}[X_1, [X_1, X_2]](x) = -(1-x_1^2)\Big(X_2(x) - x_1[X_1, X_2](x)\Big).$$

Отже, $\mathcal{P}^1(x) = \mathcal{P}^2(x) = \{0\}$, $\mathcal{P}^3(x) = \mathrm{Lin}\{[[\eta_2, \eta_1], \eta_2] - \alpha(x)[[\eta_2, \eta_1], \eta_1]\}$ (де $\alpha(x) = \frac{(1-x_1^2)^2}{2}$ залежить від точки x), та $\mathcal{P}^k(x) = \mathcal{L}^k$, $k \geq 4$. Отже, система є регулярною (і очевидно, $\mathcal{L}^x_{X_1,X_2}$ є ідеалом Лі), але $\mathcal{L}^x_{X_1,X_2}$ залежить від точки.

Таким чином, ядерна підалгебра Лі регулярної системи не обов'язково є сталою в околі.

У наступному прикладі ми розглянемо нерегулярну систему, для якої ядерна підалгебра Лі є ідеалом Лі.

Приклад 4.4. Розглянемо систему в околі нуля

$$\dot{x}_1 = u_1,\ \dot{x}_2 = u_2,\ \dot{x}_3 = x_1 u_2,\ \dot{x}_4 = x_1^2 u_2,\ \dot{x}_5 = x_1^3 u_2 + x_3 x_1^2 u_2.$$

Маємо $X_1(x) = e_1$,

$$X_2(x) = (0,\ 1,\ x_1,\ x_1^2,\ x_1^3 + x_3 x_1^2)^\mathsf{T},\ [X_1, X_2](x) = (0,\ 0,\ 1,\ 2x_1,\ 3x_1^2 + 2x_1 x_3)^\mathsf{T},$$

$$[X_1, [X_1, X_2]](x) = (0,\ 0,\ 0,\ 2,\ 6x_1 + 2x_3)^\mathsf{T},$$

$[X_2,[X_1,X_2]](x) = x_1^2 e_5$, $[X_1,[X_1,[X_1,X_2]]](x) = 6e_5$, $[X_1,[X_2,[X_1,X_2]]](x) = 2x_1 e_5$ і $[X_2,[X_2,[X_1,X_2]]](x) = 0$. У точці $x = 0$ маємо

$$X_1(0) = e_1,\ X_1(0) = e_2,\ [X_1,X_2](0) = e_3,\ [X_1,[X_1,X_2]](0) = 2e_4,$$

$$[X_2,[X_1,X_2]](0) = 0,\ [X_1,[X_1,[X_1,X_2]]](0) = e_5,$$

отже, вектор зросту в нулі дорівнює $v = (2,3,4,5)$. Але $[X_2,[X_1,X_2]](x) = x_1^2 e_5$, а отже, для $x_1 \neq 0$ вектор зросту дорівнює $v^x = (2,3,5)$. Тобто система нерегулярна в нулі.

Знайдемо ядерну підалгебру Лі $\mathcal{L}^x_{X_1,X_2}$. Оскільки система нерегулярна, $\mathcal{L}^x_{X_1,X_2}$ не може бути сталою.

Якщо $x_1 = 0$ (у тому числі, якщо $x = 0$), то $\mathcal{P}^1(x) = \mathcal{P}^2(x) = \{0\}$, $\mathcal{P}^3(x) = \mathrm{Lin}\{[[\eta_2,\eta_1],\eta_2]\}$, $\mathcal{P}^4(x) = \mathrm{Lin}\{[[[\eta_2,\eta_1],\eta_2],\eta_1],[[[\eta_2,\eta_1],\eta_2],\eta_2]\}$, і $\mathcal{P}^k(x) = \mathcal{L}^k$, $k \geq 5$. Очевидно, $\mathcal{L}^x_{X_1,X_2}$ є ідеалом Лі.

Якщо $x_1 \neq 0$, то $\mathcal{P}^1(x) = \mathcal{P}^2(x) = \mathcal{P}^3(x) = \{0\}$ і $\mathcal{P}^k(x) = \mathcal{L}^k$, $k \geq 4$, отже, $\mathcal{L}^x_{X_1,X_2}$ також є ідеалом Лі.

Отже, $\mathcal{L}^x_{X_1,X_2}$ є ідеалом Лі в будь-якій точці з околу нуля. Тобто навіть якщо підалгебра Лі є ідеалом Лі в околі нуля, система може не бути регулярною.

У наступному пункті ми показуємо, що для *однорідних* систем властивість ядерної підалгебри Лі $\mathcal{L}_{X_1,\ldots,X_m}$ бути ідеалом Лі достатня для регулярності і, більш того, з неї випливає, що ядерна підалгебра Лі є сталою в околі нуля.

4.3.3 Перерозкладання рядів та регулярні однорідні системи

У цьому пункті ми розглядаємо однорідні системи з точки зору властивостей їх ядерних підалгебр Лі та рядів $\mathcal{E}_{X_1,\ldots,X_m}$. Враховуючи означення 3.5, введемо таке означення однорідної системи.

Означення 4.5. *Повністю неголономна система* (2.1) *називається однорідною в нулі, якщо* $c(\mathcal{L}_{X_1,\ldots,X_m}) = 0$.

Зазначимо, що система є однорідною в нулі в сенсі означення 4.5 тоді і тільки тоді, коли існує таке невироджене перетворення $Q(x)$ ($Q(0)=0$), що $(Q(\mathcal{E}_{X_1,\dots,X_m}))_k$ є однорідними для всіх $k=1,\dots,n$, тобто $(Q(\mathcal{E}_{X_1,\dots,X_m}))_k \in \mathcal{F}^{w_k}$, $k=1,\dots,n$. Припустимо, що заміна змінних $y=Q(x)$ вже застосована; як випливає з теореми 3.2, для однорідної системи без обмеження загальності можна вважати

$$(\mathcal{E}_{X_1,\dots,X_m})_k = d_k, \quad k=1,\dots,n, \tag{4.60}$$

де d_k є елементами спряженого базису (3.40). Зауважимо, що однорідні системи доречно розглядати в усьому просторі $\mathbb{R}^n$, а не тільки в околі нуля.

Лема 4.9. *Нехай система* (2.1) *є однорідною в нулі. Тоді* $\mathcal{E}^z_{X_1,\dots,X_m}$ *можна знайти з* $\mathcal{E}_{X_1,\dots,X_m}$ *без знаходження* $X_{i_k}\cdots X_{i_1}E(z)$.

Доведення. Позначимо $\mathcal{E}=\mathcal{E}_{X_1,\dots,X_m}$ і $\mathcal{E}^z=\mathcal{E}^z_{X_1,\dots,X_m}$. Нехай $\{\ell_i\}_{i=1}^{\infty}$ — однорідний базис $\mathcal{L}$, що задовольняє умови (4.9). Нехай d_k — елемент спряженого базису (3.40). Для $1\le k\le n$ маємо

$$\langle d_k, \ell_{j_1}\cdots\ell_{j_r}\rangle = 0, \quad \text{якщо } r\ge 2 \ \text{ і } \ j_r\ge k \tag{4.61}$$

(тут індекси $j_1,\dots,j_r$ можуть бути не впорядковані). Дійсно, якщо $j_r\ge n+1$, то $\ell_{j_1}\cdots\ell_{j_r}\in\mathcal{J}_{X_1,\dots,X_m}$, а отже, (4.61) виконується за лемою 3.10 (і при $r=1$ також). Якщо $k\le j_r\le n$, то з (4.9) випливає, що $\operatorname{ord}(\ell_{j_r})\ge \operatorname{ord}(\ell_k)=\operatorname{ord}(d_k)$. Оскільки $r\ge 2$, отримуємо $\operatorname{ord}(\ell_{j_1}\cdots\ell_{j_r})>\operatorname{ord}(d_k)$, звідки випливає (4.61).

Тепер застосуємо лему 4.6. Не обмежуючи загальності, вважатимемо, що виконується (4.60). Ураховуючи (3.39), (4.53), (4.56), (4.57), (4.61), отримуємо

$$\mathcal{E}^z_k(\theta^2,u^2) = \mathcal{E}_k(\theta^1+\theta^2,u^1\circ u^2)-\mathcal{E}_k(\theta^1,u^1) = d_k(\theta^1+\theta^2,u^1\circ u^2)-d_k(\theta^1,u^1) =$$

$$= d_k(\theta^2,u^2)+\sum\left\langle d_k,(\ell_{i_1}^{q_1}\cdots\ell_{i_j}^{q_j})(\ell_1^{r_1}\cdots\ell_{k-1}^{r_{k-1}})\right\rangle \frac{\prod\limits_{s=1}^{j} d_{i_s}^{q_s}(\theta^2,u^2)\prod\limits_{s=1}^{k-1} d_s^{r_s}(\theta^1,u^1)}{q_1!\cdots q_j! r_1!\cdots r_{k-1}!},$$

де сума береться по всіх $j \ge 1$, $i_1 < \dots < i_j$, $q_1, \dots, q_j \ge 1$, $r_1 + \dots + r_{k-1} \ge 1$, для яких

$$\sum_{s=1}^{j} \operatorname{ord}(\ell_{i_s}) q_s + \sum_{s=1}^{k-1} \operatorname{ord}(\ell_s) r_s = \operatorname{ord}(\ell_k).$$

Завдяки (4.57), $d_i(\theta^1, u^1) = \mathcal{E}_i(\theta^1, u^1) = z_i$, $i = 1, \dots, n$, а отже,

$$\mathcal{E}_k^z(\theta^2, u^2) = d_k(\theta^2, u^2) + \sum_{\substack{j \ge 1,\, i_1 < \dots < i_j \\ q_1, \dots, q_j \ge 1}} P_k^{\substack{q_1 \dots q_j \\ i_1 \dots i_j}}(z) \prod_{s=1}^{j} d_{i_s}^{q_s}(\theta^2, u^2), \tag{4.62}$$

де $P_k^{\substack{q_1 \dots q_j \\ i_1 \dots i_j}}(z)$ — поліноми вигляду

$$P_k^{\substack{q_1 \dots q_j \\ i_1 \dots i_j}}(z) = \sum \frac{\left\langle d_k, (\ell_{i_1}^{q_1} \cdots \ell_{i_j}^{q_j})(\ell_1^{r_1} \cdots \ell_{k-1}^{r_{k-1}}) \right\rangle}{q_1! \cdots q_j! r_1! \cdots r_{k-1}!} \prod_{s=1}^{k-1} z_s^{r_s}, \tag{4.63}$$

і сума береться по всіх $r_1, \dots, r_{k-1} \ge 0$, для яких

$$r_1 + \dots + r_{k-1} \ge 1 \quad \text{і} \quad \sum_{s=1}^{k-1} \operatorname{ord}(\ell_s) r_s = \operatorname{ord}(\ell_k) - \sum_{s=1}^{j} \operatorname{ord}(\ell_{i_s}) q_s. \tag{4.64}$$

Зокрема, якщо $\operatorname{ord}(\ell_k) - \sum_{s=1}^{j} \operatorname{ord}(\ell_{i_s}) q_s \le 0$, то $P_k^{\substack{q_1 \dots q_j \\ i_1 \dots i_j}}(z) \equiv 0$. Поліноми (4.63) можна знайти явно. А саме, розглянемо елемент $a = (\ell_{i_1}^{q_1} \cdots \ell_{i_j}^{q_j})(\ell_1^{r_1} \cdots \ell_{k-1}^{r_{k-1}})$, для якого виконується умова (4.64), і розкладемо його за базисом (3.20); тоді $\langle d_k, a \rangle$ дорівнює коефіцієнту ℓ_k у цьому розвиненні.

Нарешті, зауважимо, що (4.62) має місце для довільного $u^2 \in B^{\theta^2}$, що і дає явне зображення $\mathcal{E}^z$:

$$\mathcal{E}_k^z = d_k + \sum_{\substack{j \ge 1,\, i_1 < \dots < i_j \\ q_1, \dots, q_j \ge 1}} P_k^{\substack{q_1 \dots q_j \\ i_1 \dots i_j}}(z)\, d_{i_1}^{ш q_1} ш \cdots ш\, d_{i_j}^{ш q_j}, \quad k = 1, \dots, n, \tag{4.65}$$

де $P_k^{\substack{q_1 \dots q_j \\ i_1 \dots i_j}}(z)$ задаються рівностями (4.63), (4.64). ■

Далі ми опишемо випадок, в якому права частина (4.65) включає лише елементи $d_1, \dots, d_k$ для будь-якого $k = 1, \dots, n$.

Лема 4.10. *Нехай система (2.1) є однорідною в нулі і $\mathcal{L}_{X_1,\dots,X_m}$ — ідеал Лі. Тоді права частина (4.65) включає лише поліноми відносно тасуючого добутку від $d_1, \dots, d_k$ (з коефіцієнтами, що залежать від z).*

Доведення. Як і раніше, не обмежуючи загальності, припустимо, що виконуються рівності (4.60). За лемою 4.8, ідеал $\mathcal{J}_{X_1,\ldots,X_m}$ є двостороннім, отже,

$$\langle d_k, a\ell_i b\rangle = 0 \quad \text{для всіх} \;\; a,b\in\mathcal{F}^e, \;\; \text{якщо} \;\; i\geq n+1.$$

Зокрема,

$$\left\langle d_k, (\ell_{i_1}^{q_1}\cdots\ell_{i_j}^{q_j})(\ell_1^{r_1}\cdots\ell_{k-1}^{r_{k-1}})\right\rangle = 0, \;\; \text{якщо} \;\; i_j\geq n+1.$$

Крім того, з (4.9) випливає, що

$$\left\langle d_k, (\ell_{i_1}^{q_1}\cdots\ell_{i_j}^{q_j})(\ell_1^{r_1}\cdots\ell_{k-1}^{r_{k-1}})\right\rangle = 0, \;\; \text{якщо} \;\; r_1+\cdots+r_{k-1}\geq 1 \;\; \text{і} \;\; k\leq i_j\leq n,$$

оскільки за вказаних умов $\mathrm{ord}((\ell_{i_1}^{q_1}\cdots\ell_{i_j}^{q_j})(\ell_1^{r_1}\cdots\ell_{k-1}^{r_{k-1}}))>\mathrm{ord}(d_k)$. Отже,

$$P_k^{\substack{q_1\cdots q_j\\ i_1\cdots i_j}}(z)=0, \;\; \text{якщо} \;\; i_j\geq k.$$

Отже, (4.65) можна подати в наступному вигляді:

$$\mathcal{E}_k^z = d_k + \sum_{q_1+\cdots+q_{k-1}\geq 1}\widehat{P}_k^{q_1\ldots q_{k-1}}(z)\, d_1^{ш q_1}\,ш\cdots ш\, d_{k-1}^{ш q_{k-1}}, \qquad k=1,\ldots,n, \tag{4.66}$$

де

$$\widehat{P}_k^{q_1\ldots q_{k-1}}(z) = \sum \frac{\left\langle d_k, (\ell_1^{q_1}\cdots\ell_{k-1}^{q_{k-1}})(\ell_1^{r_1}\cdots\ell_{k-1}^{r_{k-1}})\right\rangle}{q_1!\cdots q_{k-1}!r_1!\cdots r_{k-1}!}\prod_{s=1}^{k-1} z_s^{r_s}, \tag{4.67}$$

і сума береться по всіх $r_1,\ldots,r_{k-1}\geq 0$, для яких

$$r_1+\cdots+r_{k-1}\geq 1 \quad \text{і} \quad \sum_{s=1}^{k-1}\mathrm{ord}(\ell_s)r_s = \mathrm{ord}(\ell_k)-\sum_{s=1}^{k-1}\mathrm{ord}(\ell_s)q_s. \tag{4.68}$$

Тобто $\mathcal{E}_k^z$ дорівнює поліному відносно тасуючого добутку від $d_1,\ldots,d_k$. ■

Теорема 4.7. *Нехай система* (2.1) *є однорідною в нулі. Ця система регулярна тоді і тільки тоді, коли* $\mathcal{L}_{X_1,\ldots,X_m}$ *є ідеалом Лі. Більш того, в цьому випадку ядерна підалгебра Лі є сталою, тобто* $\mathcal{L}^z_{X_1,\ldots,X_m}=\mathcal{L}_{X_1,\ldots,X_m}$ *для довільного* $z\in\mathbb{R}^n$ *(отже, система має одну й ту саму однорідну апроксимацію в будь-якій точці). Крім того, для довільного* $z\in\mathbb{R}^n$ *існує поліноміальна заміна змінних (яка залежить від* z*), що переводить систему до однорідного вигляду в точці* z*.*

Доведення. За лемою 4.7, якщо система регулярна, то її ядерна підалгебра Лі є ідеалом Лі. Доведемо зворотне твердження для однорідної системи.

Розглянемо однорідну систему вигляду (2.1) і припустимо, що $\mathcal{L}_{X_1,\ldots,X_m}$ є ідеалом Лі. Тоді за лемою 4.10 отримуємо зображення (4.66), (4.67). Введемо поліноміальне відображення $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (яке залежить від параметра z), $\Phi = (\Phi_1, \ldots, \Phi_n)^{\mathsf{T}}$, де

$$\Phi_k(x_1, \ldots, x_n) = x_k + \sum_{q_1+\cdots+q_{k-1}\geq 1} \widehat{P}_k^{q_1\cdots q_{k-1}}(z) \prod_{s=1}^{k-1} x_s^{q_s}.$$

Очевидно, воно має трикутний вигляд, а саме, $\Phi_k = x_k + \widetilde{\Phi}_k(x_1, \ldots, x_{k-1})$. Отже, Φ^{-1} також є (невиродженим) поліноміальним відображенням. Тобто поліноміальна заміна змінних $y = \Phi^{-1}(x)$ (яка залежить від z) є такою, що

$$(\Phi(\mathcal{E}^z))_k = d_k, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Це означає, що система в нових координатах є однорідною в точці z і $\mathcal{L}^z_{X_1,\ldots,X_m} = \mathcal{L}_{X_1,\ldots,X_m}$, тобто $c^z(\mathcal{L}^z_{X_1,\ldots,X_m}) = c^z(\mathcal{L}_{X_1,\ldots,X_m}) = 0$. ■

Зауваження 4.9. *Зображення* (4.66)*, по суті, побудоване в роботі* [50]*; там воно було використане для отримання оцінки відстані в околі регулярної точки для вихідної системи і її однорідної апроксимації* [50, Section 7]*. Але методи, запропоновані в цьому розділі, дозволяють отримати точну формулу* (4.67) *для поліноміальних коефіцієнтів* $\widehat{P}_k^{q_1\cdots q_{k-1}}(z)$*.*

Нагадаємо, що $L_F = \sum\limits_{k=1}^{\infty} L_F^k$ означає фільтровану алгебру Лі векторних полів, що породжена множиною $X_1, \ldots, X_m$. Як наслідок теореми 4.7, отримуємо відому властивість алгебри Лі L для випадку регулярної і однорідної системи.

Наслідок 4.14. *Нехай система* (2.1) *є регулярною і однорідною в нулі. Тоді алгебра Лі векторних полів* L*, що породжена множиною* $X_1, \ldots, X_m$*, є* n*-вимірною.*

Доведення наслідку 4.14 наведене у додатку Б.3.

Висновки до розділу 4

У розділі 4 розглянута задача апроксимації для нелінійних дійсно-аналітичних систем, які є лінійними за керуванням. У підрозділі 4.1 застосовано результати розділу 3 до дослідження однорідної апроксимації таких систем. А саме, введені і досліджені поняття ядерної підалгебри Лі і лівого ідеалу, які породжуються системою, і показано, що кожний з цих об'єктів визначає однорідну апроксимацію системи. Запропоновані безкоординатне означення однорідної апроксимації, надана класифікація однорідних апроксимацій і опис усіх привілейованих координат, а також запропонований метод побудови однорідної апроксимації і привілейованих координат.

У підрозділі 4.2 досліджено задачу швидкодії для систем, які є лінійними за керуванням. Зокрема, показано, що оптимальні керування набувають лише межові значення, встановлено властивості оптимальних керувань. Доведено, що за деяких додаткових умов розв'язок задачі швидкодії для однорідної апроксимації наближає розв'язок задачі швидкодії для вихідної системи в околі нуля.

У підрозділі 4.3 досліджена поведінка однорідних апроксимацій у залежності від початкової точки. Досліджуються однорідні апроксимації для регулярних систем. Зокрема, показано, що для однорідної в нулі системи регулярність еквівалентна тому, що її ядерна підалгебра Лі (в нулі) є ідеалом Лі.

Основні результати розділу опубліковані у роботах [82, 132, 134, 137].

РОЗДІЛ 5
ОДНОРІДНА АПРОКСИМАЦІЯ І АПРОКСИМАЦІЯ У СЕНСІ ШВИДКОДІЇ ДЛЯ НЕЛІНІЙНИХ СИСТЕМ, АФІННИХ ЗА КЕРУВАННЯМ

У цьому розділі ми досліджуємо нелінійні керовані системи, афінні за керуванням. У підрозділі 5.1 ми застосовуємо результати розділу 3 і описуємо перетворення ряду нелінійних степеневих моментів — виділення головної частини, що відповідає за однорідну апроксимацію ряду нелінійних степеневих моментів. Як і для лінійних за керуванням систем, запропоноване безкоординатне алгебраїчне означення однорідної апроксимації і описаний метод її побудови.

У підрозділі 5.2 ми досліджуємо задачу швидкодії для систем, афінних за керуванням, і з'ясовуємо зв'язок між однорідною апроксимацією і апроксимацією у сенсі швидкодії. У підрозділі 5.3 вивчається зв'язок між алгеброю ітерованих інтегралів і алгеброю нелінійних степеневих моментів, а також отримуються умови реалізовності ряду нелінійних степеневих моментів як ряду, що відповідає керованій системі.

Основні результати розділу опубліковано в роботах [35, 13, 14, 17, 37, 128, 129, 130, 131, 140, 85].

5.1 Головна частина ряду нелінійних степеневих моментів і однорідна апроксимація

5.1.1 Ядерна підалгебра Лі і правий ідеал, що породжуються системою

Розглянемо систему вигляду (2.25), де $a(t,x)$ та $b(t,x)$ — аналітичні векторні поля в деякому околі нуля $(-t_0,t_0)\times U(0)\subset\mathbb{R}^{n+1}$. З умови $a(t,0)\equiv 0$ випливає, що нуль є точкою спокою системи.

Як показано в підрозділі 2.2, така система визначає відображення до початку траєкторії $S_{a,b}$ (означення 2.7), яке припускає розвинення в ряд нелінійних степеневих моментів (2.29). Нелінійні степеневі моменти (2.30) утворюють вільну асоціативну алгебру $\mathcal{A}_\theta$ (означення 2.10), яка ізоморфна абстрактній вільній алгебрі $\mathcal{A}$. Абстрактний аналог відображення до початку траєкторії — це ряд (2.36) в алгебрі $\mathcal{A}$.

Розглянемо алгебру $\mathcal{A}$ як вільну алгебру з розділу 3, тобто $\mathfrak{A} = \mathcal{A}$. Вона породжується літерами $\{\zeta_i : i \in I\} = \{\xi_i\}_{i=0}^{\infty}$ (отже, $I = \{0\} \cup \mathbb{N}$) з порядком $\operatorname{ord}(\xi_i) = i + 1$, $i \geq 0$. Очевидно, отримане градуювання задовольняє припущення 3.1. Ряд $\mathcal{Z}_g = S_{a,b}$ елементів $\mathcal{A}$ з векторними коефіцієнтами породжується відображенням $g = v : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^n$ вигляду (2.41). Алгебра Лі $\mathfrak{L} = \mathcal{L}$ породжується тими самими літерами.

Зауваження 5.1. *На відміну від відображення c в алгебрі $\mathcal{F}$ з розділу 4, в алгебрі $\mathcal{A}$ відображення v породжує не лівий, а правий ідеал (лема 2.6). Тому при застосуванні результатів розділу 3 до алгебри $\mathcal{A}$ замість лівого ідеалу $\mathfrak{J}_g$ треба розглядати цілком аналогічний правий ідеал*

$$\mathfrak{J}_g = \operatorname{Lin}\{\mathfrak{L}_g \mathfrak{A}^e\} = \operatorname{Lin}\{\ell a : \, a \in \mathfrak{A}^e, \, \ell \in \mathfrak{L}_g\}$$

Далі в цьому розділі всі односторонні ідеали будемо вважати правими, а замість базисів (3.37) і (3.40), ураховуючи зауваження 3.3, будемо розглядати базиси (3.46) і (3.47).

З умови Рашевського-Чжоу (2.43) і леми 2.6 випливає, що відображення $g = v$ задовольняє вимоги припущення 3.2, де з урахуванням зауваження 5.1 вимога 2 набуває такого вигляду:

2′) якщо $v(\ell) = 0$ для деякого $\ell \in \mathcal{L}$, то $v(\ell z) = 0$ для всіх $z \in \mathcal{A}$.

Як наслідок означень підрозділу 3.1, отримуємо такі означення.

Означення 5.1. *Розглянемо підпростори $\mathcal{L}$ вигляду*

$$\mathcal{P}^k = \{\ell \in \mathcal{L}^k : \, v(\ell) \in v(\mathcal{L}^1 + \cdots + \mathcal{L}^{k-1})\}, \;\; k \geq 1, \qquad (5.1)$$

де при $k = 1$ *мається на увазі* $\mathcal{P}^1 = \{\ell \in \mathcal{L}^1 : v(\ell) = 0\}$, *і нехай*

$$\mathcal{L}_{a,b} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{P}^k. \tag{5.2}$$

Ми називаємо $\mathcal{L}_{a,b}$ *ядерною підалгеброю Лі, що відповідає системі* (2.25).

Означення 5.2. *Підпростір*

$$\mathcal{J}_{a,b} = \mathrm{Lin}\{\mathcal{L}_{a,b}\mathcal{A}^e\} = \mathrm{Lin}\{\ell y : \ y \in \mathcal{A}^e, \, \ell \in \mathcal{L}_{a,b}\}$$

називається правим ідеалом, що відповідає системі (2.25).

За наслідком 3.3,

$$\mathcal{J}_{a,b} \cap \mathcal{L} = \mathcal{L}_{a,b}. \tag{5.3}$$

За лемами 3.3 і 3.4, $\mathcal{L}_{a,b}$ є градуйованою підалгеброю Лі ковимірності n. За наслідком 3.6 ядерна підалгебра Лі і правий ідеал інваріантні відносно невироджених замін змінних у системі.

5.1.2 Побудова, алгебраїчне означення і класифікація однорідних апроксимацій

Як і для систем, лінійних за керуванням, ураховуючи зауваження 3.3, отримуємо такі наслідки з теорем 3.2 і 3.4.

Теорема 5.1. *Для кожної дійсно-аналітичної повністю неголономної системи вигляду* (2.25) *існує така невироджена поліноміальна заміна змінних* $y = Q(x)$, *що відображення до початку траєкторії для системи в нових координатах* (2.37) *зображається як ряд вигляду*

$$(S_{\bar{a},\bar{b}})_i = (Q(S_{a,b}))_i = d_i + \rho_i, \ \ i = 1, \ldots, n, \tag{5.4}$$

де $\rho_i \in \sum\limits_{j=w_i+1}^{\infty} \mathcal{A}^j$, $w_i = \mathrm{ord}(\ell_i) = \mathrm{ord}(d_i)$, $i = 1, \ldots, n$. *Тут* $d_1, \ldots, d_n$ *— елементи спряженого базису* (3.47) *до базису Пуанкаре-Біркгофа-Вітта* (3.46), *однорідні елементи* $\ell_1, \ldots, \ell_n \in \mathcal{L}$ *задовольняють умови* (3.18), (3.19), *а* $\{\ell_j\}_{j=n+1}^{\infty}$ *є однорідним базисом* $\mathcal{L}_{a,b}$.

Оскільки ряд в нових змінних має вигляд

$$(S_{\bar{a},\bar{b}})_i = d_i + \text{“елементи порядку} > \operatorname{ord}(d_i)\text{”},$$

множину елементів $d_1, \ldots, d_n$ можна розглядати як *головну частину ряду* для відображення $S_{\bar{a},\bar{b}}$. З теореми 3.4 отримуємо іншу форму головної частини ряду.

Теорема 5.2. *Для кожної дійсно-аналітичної повністю неголономної системи вигляду* (2.25) *існує така невироджена поліноміальна заміна змінних* $y = Q(x)$*, що відображення до початку траєкторії системи в нових координатах* (2.37) *зображається як ряд вигляду*

$$(S_{\bar{a},\bar{b}})_i = (Q(S_{a,b}))_i = \widetilde{\ell}_i + \rho_i, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{5.5}$$

де $\rho_i \in \sum\limits_{j=w_i+1}^{\infty} \mathcal{A}^j$, $w_i = \operatorname{ord}(\ell_i)$, $i = 1, \ldots, n$. *Тут однорідні елементи* $\ell_i \in \mathcal{L}$ *задовольняють умови* (3.18), (3.19), *а* $\widetilde{\ell}_i$ *позначає ортопроекцію* ℓ_i *на підпростір* $\mathcal{J}_{a,b}^{\perp}$.

Зауваження 5.2. *Для лінійних за керуванням систем існування апроксимуючої системи випливає з теореми 1.8 (пункт 4.1.2). Нижче, у підпункті 5.3.2.2 встановлюється аналогічна теорема реалізовності для афінних за керуванням систем (теорема 5.7).*

Тепер (без посилання на теорему 5.7) ми доведемо, що існує апроксимуюча система (означення 2.14), яка реалізує головну частину ряду. А саме, ми покажемо, як побудувати систему (2.53), для якої відображення до початку траєкторії дорівнює

$$(S_{\widehat{a},\widehat{b}})_i = d_i, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{5.6}$$

Введемо наступне позначення. Розглянемо лінійну оболонку інтегралів

$$\xi_{m_1 \ldots m_k}(t, \theta, u) = \int_t^{\theta} \cdots \int_t^{\tau_{k-1}} \tau_1^{m_1} \cdots \tau_k^{m_k} u(\tau_1) \cdots u(\tau_k) d\tau_k \cdots d\tau_1 \tag{5.7}$$

для фіксованого $0 < t < \theta$ і введемо операцію конкатенації, аналогічну (2.32). Отримуємо вільну алгебру, ізоморфну $\mathcal{A}_\theta$ (а отже і $\mathcal{A}$); позначимо її $\mathcal{A}_{t,\theta}$.

Покладемо $\widehat{a}(t,x) \equiv 0$ (інші реалізації можуть бути отримані методами, описаними у підпункті 5.3.3.2).

Побудуємо $\widehat{b}(t,x)$ за n кроків. Нагадаємо, що $\mathrm{ord}(d_1) \le \cdots \le \mathrm{ord}(d_n)$.

На першому кроці розглянемо d_1 і покажемо, що $d_1 = \alpha_1 \xi_{w_1-1}$, де $w_1 = \mathrm{ord}(d_1)$. Дійсно, якщо $\xi_k \in \mathcal{L}_{a,b}$ для всіх $k \ge 0$, то оскільки $\mathcal{L}_{a,b}$ підалгебра, отримуємо $\mathcal{L}_{a,b} = \mathcal{L}$, що суперечить повній неголономності системи. Отже, існують $\xi_k \notin \mathcal{L}_{a,b}$. Знайдемо мінімальне m, для якого $\xi_m \notin \mathcal{L}$, тоді очевидно, що $\ell_1 \in \mathrm{Lin}\{\xi_m\}$, а отже, $w_1 = m-1$ і $d_1 = \alpha_1 \xi_{w_1-1}$, $\alpha_1 \in \mathbb{R}$.

Покладемо $\widehat{b}_1(t,x) = -\alpha_1 t^{w_1-1}$, тоді

$$\dot{x}_1 = -\alpha_1 t^{w_1-1} u(t),$$

звідки, інтегруючи обидві частини на проміжку $[t,\theta]$, отримуємо

$$x_1(t) = \alpha_1 \xi_{w_1-1}(t,\theta,u) = d_1(t,\theta,u).$$

Припустимо тепер, що для деякого $2 \le i \le n$ компоненти $\widehat{b}_1(t,x), \ldots, \widehat{b}_{i-1}(t,x)$ вже побудовані, причому

$$x_k(t) = d_k(t,\theta,u), \quad k = 1, \ldots, i-1.$$

Розглянемо d_i і подамо його у такому вигляді:

$$d_i = \sum_{m=0}^{w_i-2} y_{mi} \xi_m + \alpha_i \xi_{w_i-1},$$

де $y_{mi} \in \mathcal{A}^{w_i-m-1}$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$.

Якщо $w_i = 1$, права частина дорівнює $\alpha_i \xi_{w_i-1}$ і $\widehat{b}_i(t,x)$ будується так само, як $\widehat{b}_1(t,x)$.

Нехай $w_i \ge 2$. Доведемо, що $y_{mi} \in \mathcal{J}_{a,b}^{\perp}$. Розглянемо довільний $z \in \mathcal{J}_{a,b}$, тоді $z\xi_m \in \mathcal{J}_{a,b}$. Очевидно, $\langle y_{mi}, z\rangle = \langle y_{mi}\xi_m, z\xi_m\rangle$. Але

$$\langle y_{ki}\xi_k, z\xi_m\rangle = 0 \text{ при } k \ne m \text{ і } \langle \xi_{w_i-1}, z\xi_m\rangle = 0,$$

тому

$$\langle y_{mi}, z\rangle = \langle y_{mi}\xi_m, z\xi_m\rangle = \left\langle \sum_{m=0}^{w_i-2} y_{mi}\xi_m + \alpha_i\xi_{w_i-1}, z\xi_m \right\rangle = \langle d_i, z\xi_m\rangle = 0,$$

оскільки $z\xi_m \in \mathcal{J}_{a,b}$ і $d_i \in \mathcal{J}_{a,b}^{\perp}$.

Отже, y_{mi} належить $\mathcal{J}_{a,b}^{\perp}$ і має порядок менший, ніж порядок d_i, а тому може бути поданий як поліном відносно тасуючого добутку від $d_1, \ldots, d_{i-1}$:

$$y_{mi} = P_{mi}(d_1, \ldots, d_{i-1}).$$

Цій рівності в $\mathcal{A}$ відповідає рівність в $\mathcal{A}_{t,\theta}$:

$$y_{mi}(t,\theta,u) = P_{mi}(d_1(t,\theta,u), \ldots, d_{i-1}(t,\theta,u)),$$

де праворуч P_{mi} — «звичайний» поліном від $i-1$ змінної.

Тепер задамо $\widehat{b}_i(t,x)$ наступним чином:

$$\widehat{b}_i(t,x) = -\sum_{m=0}^{w_i-2} P_{mi}(x_1, \ldots, x_{i-1})t^m - \alpha_i t^{w_i-1}.$$

Тоді

$$\dot{x}_i = -\sum_{m=0}^{w_i-2} P_{mi}(x_1, \ldots, x_{i-1})t^m u(t) - \alpha_i t^{w_i-1}u(t),$$

звідки, інтегруючи обидві частини на проміжку $[t,\theta]$, отримуємо

$$x_i(t) = \sum_{m=0}^{w_i-2}\int_t^\theta P_{mi}(x_1(\tau), \ldots, x_{i-1}(\tau))\tau^m u(\tau)d\tau + \alpha_i\int_t^\theta \tau^{w_i-1}u(\tau)d\tau.$$

Оскільки

$$\int_t^\theta \cdots \int_t^{\tau_{k-1}} \prod_{j=1}^k \tau_j^{m_j}u(\tau_j)d\tau_k\cdots d\tau_1 = \int_t^\theta\int_{\tau_k}^\theta \cdots \int_{\tau_2}^\theta \prod_{j=1}^k \tau_j^{m_j}u(\tau_j)d\tau_1\cdots d\tau_k,$$

маємо

$$\int_t^\theta \xi_{m_1\ldots m_k}(\tau,\theta,u)\tau^m u(\tau)d\tau = \int_t^\theta\int_\tau^\theta\int_{\tau_k}^\theta \cdots \int_{\tau_2}^\theta \prod_{j=1}^k \tau_j^{m_j}u(\tau_j)\tau^m u(\tau)d\tau_1\cdots d\tau_k d\tau =$$

$$= \xi_{m_1\ldots m_k m}(t,\theta,u) = (\xi_{m_1\ldots m_k}\xi_m)(t,\theta,u),$$

звідки, враховуючи припущення індукції, отримуємо

$$\int_t^\theta P_{mi}(x_1(\tau),\ldots,x_{i-1}(\tau))\tau^m u(\tau)d\tau = (y_{mi}\xi_m)(t,\theta,u),$$

а отже,

$$x_i(t) = \sum_{m=0}^{w_i-2}(y_{mi}\xi_m)(t,\theta,u) + \alpha_i\xi_{w_i-1}(t,\theta,u) = d_i(t,\theta,u).$$

За індукцією маємо, що $x_i(t) = d_i(t,\theta,u)$ для всіх $i = 1,\ldots,n$. При $t = 0$ отримуємо

$$x_i^0 = (S_{\widehat{a},\widehat{b}}(\theta,u))_i = d_i(\theta,u),\ \ i = 1,\ldots,n,$$

що збігається з (5.6).

Таким чином, пара $\widehat{a}(t,x) \equiv 0$ і $\widehat{b}(t,x)$ реалізує головну частину ряду для $S_{a,b}$. Аналогічно можна побудувати таке $\widehat{b}(t,x)$, для якого $(S_{a,b})_i = \widetilde{\ell}_i$ для всіх $i = 1,\ldots,n$.

Зауваження 5.3. *Як випливає з теореми 3.3, заміна змінних $y = Q(x)$ задовольняє умови теореми 5.1 тоді і тільки тоді, коли вона зводить вектор-функцію*

$$\Phi(z) = \sum_{\substack{q_1,\ldots,q_n\ge 0\\ q_1+\cdots+q_n\ge 1}} \frac{1}{q_1!\cdots q_n!} v(\ell_1^{q_1}\cdots\ell_n^{q_n})\, z_1^{q_1}\cdots z_n^{q_n}, \qquad z\in\mathbb{R}^n.$$

до трикутного вигляду; замість $\Phi(z)$ достатньо розглядати поліноміальну вектор-функцію

$$\Psi(z) = \sum_{\substack{1\le w_1q_1+\cdots+w_nq_n\le w_n\\ q_1,\ldots,q_n\ge 0}} \frac{1}{q_1!\cdots q_n!} v(\ell_1^{q_1}\cdots\ell_n^{q_n}) z_1^{q_1}\cdots z_n^{q_n}, \qquad z\in\mathbb{R}^n,$$

де $w_i = \operatorname{ord}(\ell_i)$, $i = 1,\ldots,n$.

Аналогічно наслідкам 4.1 і 4.2 отримуємо такі наслідки.

Наслідок 5.1. *Система (2.53) є однорідною апроксимацією системи (2.25) у сенсі означення 2.14 тоді і тільки тоді, коли її ряд має вигляд $(S_{\widehat{a},\widehat{b}})_i = P_i(d_1,\ldots,d_n)$, $i = 1,\ldots,n$, де $P = (P_1,\ldots,P_n)^{\mathsf{T}}$ — поліноміальна вектор-функція з невиродженою лінійною частиною і $P_i(d_1,\ldots,d_n)\in\mathcal{A}^{w_i}$ (де $w_i = \operatorname{ord}(d_i)$).*

Наслідок 5.2. *Система* (2.53) *є однорідною апроксимацією системи* (2.25) *у сенсі означення 2.14 тоді і тільки тоді, коли її ряд має вигляд* $(S_{\widehat{a},\widehat{b}})_i = P_i(\widetilde{\ell}_1, \dots, \widetilde{\ell}_n)$, $i = 1, \dots, n$, *де* $P = (P_1, \dots, P_n)^{\mathsf{T}}$ *— поліноміальна вектор-функція з невиродженою лінійною частиною і* $P_i(\widetilde{\ell}_1, \dots, \widetilde{\ell}_n) \in \mathcal{A}^{w_i}$ *(де* $w_i = \mathrm{ord}(\ell_i)$*).*

Приклад 5.1. Розглянемо систему рівнянь Ейлера для космічного корабля [117, приклад 3.24]

$$\dot{\omega}_1 = \omega_2\omega_3 + u,\ \dot{\omega}_2 = -\omega_1\omega_3 + u,\ \dot{\omega}_3 = u.$$

Тут $a(\omega) = (\omega_2\omega_3,\ -\omega_1\omega_3,\ 0)^{\mathsf{T}}$, $b(\omega) = (1,\ 1,\ 1)^{\mathsf{T}}$, отже, $a(0) = 0$. Позначимо $\delta_m = (-1)^{[m/2]}$, тоді

$$\mathrm{ad}_{R_a} R_b E(\omega) = (-\omega_2 - \omega_3,\ \omega_1 + \omega_3,\ 0)^{\mathsf{T}},\ \mathrm{ad}^m_{R_a} R_b E(\omega) = (\delta_{m+1}\omega_3^m,\ \delta_m\omega_3^m,\ 0)^{\mathsf{T}},$$

$m \geq 2$. Неважко підрахувати, що всі коефіцієнти $v_{m_1 \dots m_k}$ дорівнюють нулю за винятком $v(\xi_0^q \xi_i \xi_1^j)$. А оскільки

$$\underbrace{R_b \cdots R_b}_{q} \mathrm{ad}^i_{R_a} R_b \underbrace{\mathrm{ad}_{R_a} R_b \cdots \mathrm{ad}_{R_a} R_b}_{j} E(\omega) =$$
$$= \left(\tfrac{i!}{(i-q)!} \delta_{i+j+1} \omega_3^{i-q},\ \tfrac{i!}{(i-q)!} \delta_{i+j} \omega_3^{i-q},\ 0 \right)^{\mathsf{T}},\ i \geq q,$$

то $v(\xi_0^q \xi_i \xi_1^j) = 0$ при $i \neq q$. Таким чином, ненульові коефіцієнти такі:

$$v(\xi_0) = -(1,\ 1,\ 1)^{\mathsf{T}},\ v(\xi_0 \xi_1^j) = (-1)^{j+1}(2\delta_{j+1},\ 2\delta_j,\ 0)^{\mathsf{T}},\ j \geq 1,$$
$$v(\xi_0^i \xi_i \xi_1^j) = (-1)^{i+j+1}(\delta_{i+j+1},\ \delta_{i+j},\ 0)^{\mathsf{T}},\ \ i \geq 2,\ j \geq 0.$$

Отже, ряд (2.29) має вигляд

$$S_{a,b} = -\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \xi_0 + \sum_{N=1}^{\infty} (-1)^{N+1} \begin{pmatrix} \delta_{N+1} \\ \delta_N \\ 0 \end{pmatrix} \left(\sum_{i=1}^{N} \xi_0^i \xi_i \xi_1^{N-i} + \xi_0 \xi_1^N \right).$$

Випишемо перші члени ряду:

$$S_{a,b} = -\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \xi_0 + 2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \xi_{01} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} (2\xi_{011} + \xi_{002}) + \rho,$$

де ρ включає моменти порядку більше 5. Бачимо:

$$\mathcal{P}^1 = \{0\},\ \mathcal{P}^2 = \mathcal{L}^2,\ \mathcal{P}^3 = \{0\},\ \mathcal{P}^4 = \mathcal{L}^4,$$

$$\mathcal{P}^5 = \mathrm{Lin}\{\xi_4, [\xi_0, \xi_3], [\xi_1, \xi_2], 2[\xi_0, [\xi_0, \xi_2]] - [[\xi_0, \xi_1], \xi_1], [\xi_0, [\xi_0, [\xi_0, \xi_1]]]\},$$

і можна вибрати $\ell_1 = \xi_0$, $\ell_2 = [\xi_0, \xi_1]$, $\ell_3 = 2[[\xi_0, \xi_1], \xi_1] + [\xi_0, [\xi_0, \xi_2]]$. Тоді $\widetilde{\ell}_1 = \ell_1 = \xi_0$. Оскільки $\xi_1 \in \mathcal{P}^2$, то $\xi_{10} \in \mathcal{J}_{a,b}$, а отже, $\widetilde{\ell}_2 = \xi_{01}$. Аналогічно, $\xi_{110}, \xi_{101} \in \mathcal{J}_{a,b}$. Крім того, $\xi_2 \in \mathcal{P}^3$, тому $\xi_{200} \in \mathcal{J}_{a,b}$, а оскільки $[\xi_0, \xi_2] \in \mathcal{P}^4$, то $[\xi_0, \xi_2]\xi_0 \in \mathcal{J}_{a,b}$. Отже, $\xi_{020} \in \mathcal{J}_{a,b}$. Нарешті, $2[\xi_0, [\xi_0, \xi_2]] - [[\xi_0, \xi_1], \xi_1] \in \mathcal{P}^4$, звідки $2\xi_{002} - \xi_{011} \in \mathcal{J}_{a,b}$. Отже, $\widetilde{\ell}_3 = 2\xi_{011} + \xi_{002}$.

Таким чином, головна частина ряду (5.5) має вигляд

$$(\xi_0, \xi_{01}, 2\xi_{011} + \xi_{002})^{\mathsf{T}},$$

а відповідна заміна змінних, очевидно, лінійна; її матриця — зворотна до матриці (v_2, v_{01}, v_{002}).

Апроксимуюча система, легко може бути знайдена за описаним вище алгоритмом:

$$\dot{x}_1 = -u,\ \dot{x}_2 = -tu,\ \dot{x}_3 = -(2tx_2 + \tfrac{1}{2}t^2 x_1^2)u.$$

Пояснимо праву частину третього рівняння: оскільки $\xi_{00} = \frac{1}{2}\xi_0^{\text{ш}2}$, то

$$2\xi_{011} + \xi_{002} = 2\underbrace{\xi_{01}}_{x_2}\underbrace{\xi_1}_{t} + \tfrac{1}{2}\underbrace{\xi_0^{\text{ш}2}}_{x_1^2}\underbrace{\xi_2}_{t^2}.$$

Як випливає з результатів підпункту 5.3.3.1, можна побудувати і автономну апроксимуючу систему (що відповідає такому самому ряду):

$$\dot{x}_1 = -u,\ \dot{x}_2 = -\tfrac{1}{2}x_1^2,\ \dot{x}_3 = -x_1 x_2.$$

Беручи до уваги зауваження 3.5, отримуємо наступні наслідки, які дають класифікацію однорідних апроксимацій нелінійних систем, афінних за керуванням.

Наслідок 5.3. *Дві повністю неголономні системи вигляду* (2.25) *мають одну й ту саму однорідну апроксимацію тоді і тільки тоді, коли їх ядерні підалгебри Лі збігаються.*

Наслідок 5.4. *Множина ядерних підалгебр Лі повністю неголономних систем вигляду* (2.25) *знаходиться у взаємно однозначній відповідності з множиною всіх градуйованих підалгебр Лі $\mathcal{L}$ ковимірності n.*

Єдиність однорідної апроксимації у сенсі означення 2.14 обговорюється в пункті 5.3.3.

Повернемось до формулювання теореми 5.1. Нехай $v_{\widehat{a},\widehat{b}}$ — відображення, що відповідає апроксимуючій системі (2.53). Тоді з рівностей (5.6) випливає, що $v_{\widehat{a},\widehat{b}}(\ell_i) = e_i$ при $i = 1, \dots, n$ і $v_{\widehat{a},\widehat{b}}(\ell_j) = 0$ при $j \geq n+1$. Тобто $\mathcal{L}_{\widehat{a},\widehat{b}} = \mathrm{Lin}\{\ell_j : j \geq n+1\}$ і $v_{\widehat{a},\widehat{b}}(\mathcal{L}_{\widehat{a},\widehat{b}}) = 0$. Ця властивість означає однорідність системи. А оскільки $\{\ell_j\}_{j=n+1}^{\infty}$ — базис $\mathcal{L}_{a,b}$, то отримуємо $\mathcal{L}_{a,b} = \mathcal{L}_{\widehat{a},\widehat{b}}$; ця властивість означає апроксимацію. Отже, отримуємо наступне безкоординатне означення однорідної апроксимації.

Означення 5.3. *Розглянемо повністю неголономну систему* (2.25). *Нехай система* (2.53) *є повністю неголономною; нехай $v_{\widehat{a},\widehat{b}} : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^n$ позначає лінійне відображення, що відповідає системі* (2.53). *Система* (2.53) *називається однорідною апроксимацією для* (2.25), *якщо*

(а) $v_{\widehat{a},\widehat{b}}(\mathcal{L}_{\widehat{a},\widehat{b}}) = 0$;

(б) $\mathcal{L}_{a,b} = \mathcal{L}_{\widehat{a},\widehat{b}}$.

Зауваження 5.4. *Умови (а) і (б) означення 5.3 можна замінити еквівалентними умовами:*

(а$'$) $v_{\widehat{a},\widehat{b}}(\mathcal{J}_{\widehat{a},\widehat{b}}) = 0$;

(б$'$) $\mathcal{J}_{a,b} = \mathcal{J}_{\widehat{a},\widehat{b}}$.

Таким чином, однорідна апроксимація вводиться «алгебраїчним» шляхом (тому її можна назвати *алгебраїчною апроксимацією*). З теореми 5.1 (або теореми 5.2) випливає, що однорідна апроксимація *наближає* вихідну систему в сенсі означення 2.14.

Зазначимо, що з умови (б) означення 2.14 випливає, що *множина досяжності апроксимуючої системи* $S_{\widehat{a},\widehat{b}}(\theta, B^\theta)$ *апроксимує множину досяжності вихідної системи після заміни змінних* $Q(S_{a,b}(\theta, B^\theta))$:

$$\operatorname{dist}\Big(D_\theta^{-1}(Q(S_{a,b}(\theta, B^\theta))), D_\theta^{-1}(S_{\widehat{a},\widehat{b}}(\theta, B^\theta))\Big) \to 0 \quad \textit{при } \theta \to 0,$$

де dist *— відстань Хаусдорфа між множинами.*

Приклад 5.2. Нехай $n = 7$. Розглянемо підалгебру Лі $\mathcal{L}' = \sum\limits_{m=5}^{\infty} \mathcal{L}^m$. Знайдемо ковимірність $\mathcal{L}'$. Оскільки $\mathcal{L} = \operatorname{Lin}\{\ell_1, \ldots, \ell_7\} + \mathcal{L}'$, де

$$\ell_1 = \xi_0,\ \ell_2 = \xi_1,\ \ell_3 = \xi_2,\ \ell_4 = [\xi_0, \xi_1],\ \ell_5 = \xi_3,\ \ell_6 = [\xi_0, \xi_2],\ \ell_7 = [\xi_0, [\xi_0, \xi_1]],$$

отримуємо $\operatorname{codim}(\mathcal{L}') = n = 7$. Отже, існує (повністю неголономна) система, для якої $\mathcal{L}'$ є ядерною підалгеброю Лі. Для того, щоб побудувати таку систему, знайдемо $\mathcal{J}' = \operatorname{Lin}\{\mathcal{L}'\mathcal{A}^e\}$ і ортопроекції елементів ℓ_i на $\mathcal{J}'^\perp$. Оскільки $\mathcal{L}' \cap \mathcal{A}^k = \{0\}$ при $k \le 4$, отримуємо $\mathcal{J}' \cap \mathcal{A}^k = \{0\}$ при $k \le 4$, а отже, $\widetilde{\ell}_i = \ell_i$, $i = 1, \ldots, 7$.

Скориставшись методом пункту 5.1.2, побудуємо апроксимуючу систему з $\widehat{a}(t,x) \equiv 0$. Оскільки $\widetilde{\ell}_1 = \xi_0$, $\widetilde{\ell}_2 = \xi_1$, $\widetilde{\ell}_3 = \xi_2$ і $\widetilde{\ell}_5 = \xi_3$, вибираємо $(\widehat{b}(t,x))_1 = -1$, $(\widehat{b}(t,x))_2 = -t$, $(\widehat{b}(t,x))_3 = -t^2$ і $(\widehat{b}(t,x))_5 = -t^3$.

Розглянемо решту компонент. Маємо:

$$\widetilde{\ell}_4 = [\xi_0, \xi_1] = \xi_0\xi_1 - \xi_1\xi_0 = \underbrace{\widetilde{\ell}_1}_{x_1}\underbrace{\xi_1}_{t} - \underbrace{\widetilde{\ell}_2}_{x_2}\underbrace{\xi_0}_{1},$$

$$\widetilde{\ell}_6 = [\xi_0, \xi_2] = \xi_0\xi_2 - \xi_2\xi_0 = \underbrace{\widetilde{\ell}_1}_{x_1}\underbrace{\xi_2}_{t^2} - \underbrace{\widetilde{\ell}_3}_{x_3}\underbrace{\xi_0}_{1},$$

отже, $(\widehat{b}(t,x))_4 = -tx_1 + x_2$ і $(\widehat{b}(t,x))_6 = -t^2x_1 + x_3$. Нарешті,

$$\widetilde{\ell}_7 = [\xi_0, [\xi_0, \xi_1]] = \xi_{001} - 2\xi_{010} + \xi_{100} =$$

$$= \xi_{00}\xi_1 - 2\xi_{01}\xi_0 + \xi_{10}\xi_0 = \underbrace{\xi_{00}}\underbrace{\xi_1}_{t} + \underbrace{(-2\xi_{01} + \xi_{10})}\underbrace{\xi_0}_{1}.$$

Але $\xi_{00} = \frac{1}{2}\xi_0^{ш2} = \frac{1}{2}\widetilde{\ell}_1^{ш2}$ і, як легко перевірити,

$$-2\xi_{01} + \xi_{10} = -\tfrac{1}{2}\xi_0 ш \xi_1 - \tfrac{3}{2}[\xi_0, \xi_1] = -\tfrac{1}{2}\widetilde{\ell}_1 ш \widetilde{\ell}_2 - \tfrac{3}{2}\widetilde{\ell}_4,$$

отже, $(\widehat{b}(t,x))_7 = -\frac{1}{2}tx_1^2+\frac{1}{2}x_1x_2+\frac{3}{2}x_4$. Таким чином, апроксимуюча система має вигляд

$$\dot{x}_1 = -u,\quad \dot{x}_2 = -tu,\quad \dot{x}_3 = -t^2u,\quad \dot{x}_4 = (x_2 - tx_1)u,$$
$$\dot{x}_5 = -t^3u,\quad \dot{x}_6 = (x_3 - t^2x_1)u,\quad \dot{x}_7 = \left(\tfrac{1}{2}x_1x_2 + \tfrac{3}{2}x_4 - \tfrac{1}{2}tx_1^2\right)u.$$

Зазначимо, що методами підпункту 5.3.3.1 можна отримати й автономну апроксимуючу систему:

$$\dot{x}_1 = -u,\quad \dot{x}_2 = -x_1,\quad \dot{x}_3 = -2x_2,\quad \dot{x}_4 = x_2u,$$
$$\dot{x}_5 = -3x_3,\quad \dot{x}_6 = x_3u - 2x_4,\quad \dot{x}_7 = \tfrac{1}{2}x_1x_2u + \tfrac{3}{2}x_4u.$$

Приклад 5.3. Змодифікуємо приклад 5.2: нехай $\xi_0 \in \mathcal{L}'$, а решта однорідних підпросторів $\mathcal{L}'$ зберігається, тобто $\mathcal{L}' = \mathrm{Lin}\{\xi_0\} + \sum\limits_{m=5}^{\infty}\mathcal{L}^m$. Нехай $n = 6$, що дорівнює ковимірності $\mathcal{L}'$. Тоді

$$\mathcal{J}' \cap (\mathcal{A}^1 + \mathcal{A}^2 + \mathcal{A}^3 + \mathcal{A}^4) = \mathrm{Lin}\{\xi_0\xi_{m_1\ldots m_k} : m_1 + \cdots + m_k + k \le 3\} =$$

$$= \mathrm{Lin}\{\xi_0, \xi_{00}, \xi_{000}, \xi_{01}, \xi_{0000}, \xi_{001}, \xi_{010}, \xi_{02}\}.$$

Виберемо ℓ_i аналогічно прикладу 5.2 (звісно, за винятком ξ_0), тоді

$$\ell_1 = \widetilde{\ell}_1 = \xi_1,\ \ell_2 = \widetilde{\ell}_2 = \xi_2,\ \ell_3 = [\xi_0, \xi_1],\ \widetilde{\ell}_3 = \xi_{10},\ \ell_4 = \widetilde{\ell}_4 = \xi_3,$$

$$\ell_5 = [\xi_0, \xi_2],\ \widetilde{\ell}_5 = \xi_{20},\ \ell_6 = [\xi_0, [\xi_0, \xi_1]],\ \widetilde{\ell}_6 = \xi_{100}.$$

Апроксимуюча система з $\widehat{a}(t,x) \equiv 0$ має вигляд

$$\dot{x}_1 = -tu,\quad \dot{x}_2 = -t^2u,\quad \dot{x}_3 = -x_1u,\quad \dot{x}_4 = -t^3u,\ \dot{x}_5 = -x_2u,\quad \dot{x}_6 = -x_3u.$$

Як показано в пункті 5.3.3, у цьому випадку автономної реалізації не існує.

5.1.3 Системи з багатовимірним керуванням і однорідна апроксимація при різних градуюваннях

У цьому пункті обговорюються деякі узагальнення; результати опубліковані в роботах [17, 37, 140].

Результати, отримані в даному розділі щодо систем вигляду (2.25), можуть бути узагальнені на системи з багатовимірним керуванням (1.24). Розглянемо відображення $S_{a,b_1,\ldots,b_r} : B^\theta \to \mathbb{R}^n$ до початку траєкторії для системи (1.24), яке переводить керування $u(t) = (u_1, \ldots, u_r) \in B^\theta$ до початкової точки x^0 для системи (1.24) (тут B^θ — одинична куля простору $L_\infty([0,\theta];\mathbb{R}^r)$); воно припускає зображення у вигляді ряду нелінійних степеневих моментів (1.25). Аналогічно випадку одновимірного керування можна розглянути вільну асоціативну алгебру нелінійних степеневих моментів (1.26); відповідна абстрактна асоціативна алгебра $\mathcal{A}$ і алгебра Лі $\mathcal{L}$ породжуються літерами $\{\xi_m^i : m \geq 0, 1 \leq i \leq r\}$, а градуювання задається порядком $\operatorname{ord}(\xi_m^i) = m + 1$.

Узагальнення результатів про однорідну апроксимацію очевидні: задамо лінійне відображення $v : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^n$ на базисних елементах як $v(\xi_{m_1\ldots m_k}^{i_1\ldots i_k}) = v_{m_1\ldots m_k}^{i_1\ldots i_k}$, і далі введемо ядерну підалгебру Лі $\mathcal{L}_{a,b_1,\ldots,b_r}$ і правий ідеал $\mathcal{J}_{a,b_1,\ldots,b_r}$ так само, як і у випадку одновимірного керування.

Опишемо ще одне узагальнення, яке можна зробити як для одновимірного, так і для багатовимірного керування: замість одиничної кулі розглянути інші множини допустимих керувань. Виявляється, що від вибору такої множини може залежати градуювання в алгебрі, а отже, і вигляд однорідної апроксимації. Зауважимо, що така ідея була застосована в роботі [53].

Коротко викладемо відповідні означення [140]. Зафіксуємо множину r невід'ємних дійсних чисел $q_1, \ldots, q_r$ і розглянемо множину $C(q_1, \ldots, q_r)$ дійсних чисел вигляду

$$C(q_1, \ldots, q_r) = \Big\{p + k + q_{i_1} \cdots + q_{i_k} : p \in \mathbb{N} \cup \{0\},\ 1 \leq i_1, \ldots, i_k \leq r,\ k \in \mathbb{N}\Big\}.$$

Оскільки ця множина є зліченною, запишемо її як строго зростаючу послідовність

$$C(q_1, \ldots, q_r) = \{c_j\}_{j=1}^{\infty}. \tag{5.8}$$

Неважко бачити, що $C(q_1, \ldots, q_r)$ утворює напівгрупу відносно звичайної операції додавання дійсних чисел.

Наприклад, якщо $r = 4$ і $q_1 = \frac{1}{4}$, $q_2 = \frac{1}{2}$, то

$$C(q_1, q_2) = \left\{\tfrac{5}{4}, \tfrac{6}{4}\right\} \cup \left\{\tfrac{k}{4}\right\}_{k=8}^{\infty},$$

а якщо $q_1 = 0$, $q_2 = \sqrt{2}$, то

$$C(q_1, q_2) = \{k\sqrt{2} + j : j \geq k \geq 0, j + k \geq 1\} =$$

$$= \{1, 2, (\sqrt{2}+1), 3, (\sqrt{2}+2), 4, (\sqrt{2}+3), (2\sqrt{2}+2), \ldots\}.$$

Побудуємо градуювання $\mu = \mu(q_1, \ldots, q_r) = (C, \{\mathcal{A}_c\}_{c \in C})$. Визначимо порядок літер:

$$\mathrm{ord}_\mu \left(\xi_m^i\right) = m + 1 + q_i,$$

тоді

$$\mathrm{ord}_\mu \left(\xi_{m_1 \ldots m_k}^{i_1 \ldots i_k}\right) = (m_1 + \ldots + m_k) + k + (q_{i_1} + \ldots + q_{i_k})$$

і однорідні підпростори $\mathcal{A}^c$ задаються так:

$$\mathcal{A}^c = \mathrm{Lin}\{\xi_{m_1 \ldots m_k}^{i_1 \ldots i_k} : (m_1 + \ldots + m_k) + k + (q_{i_1} + \ldots + q_{i_k}) = c\},\ c \in C(q_1, \ldots, q_r).$$

Зауважимо, що при такому градуюванні зберігаються властивості однорідних підпросторів, які використовувалися в конструкціях, пов'язаних з однорідною апроксимацією: вони є скінченновимірними і ортогональними один до одного.

Пояснимо сенс градуювань такого вигляду. Припустимо, що замість одиничної кулі B^θ ми розглядаємо множину

$$B^\theta_{q_1, \ldots, q_r} = \{u \in L_\infty[0, \theta] : |u_j(t)| \leq t^{q_j},\ t \in [0, \theta],\ j = 1, \ldots, r\}$$

як множину допустимих керувань. Тоді для будь-якого $u \in B^\theta_{q_1, \ldots, q_r}$ існує $\hat{u} \in B^\theta$, для якого

$$u_j(t) = t^{q_j} \hat{u}_j(t),\ j = 1, \ldots, r.$$

Отже,

$$\xi_{m_1 \ldots m_k}^{i_1 \ldots i_k}(\theta, u) = \xi_{\hat{m}_1 \ldots \hat{m}_k}^{i_1 \ldots i_k}(\theta, \hat{u}), \quad \text{де}\ \ \hat{m}_j = m_j + q_{i_j},\ j = 1, \ldots, r,$$

причому u пробігає множину $B^{\theta}_{q_1,\dots,q_r}$ тоді і тільки тоді, коли $\hat{u}$ пробігає множину B^{θ}.

Аналогічно випадку одновимірного керування, число $\hat{m}_1+\cdots+\hat{m}_k+k = m_1+q_{i_1}+\cdots+m_k+q_{i_k}+k$ дорівнює асимптотичному порядку нелінійного степеневого моменту $\xi^{i_1\dots i_k}_{\hat{m}_1\dots\hat{m}_k}(\theta, u^{1/\theta})$ при $\theta\to 0$ для довільної функції $u\in B^1$, такої що $\xi^{i_1\dots i_k}_{\hat{m}_1\dots\hat{m}_k}(1,u)\neq 0$. Отже, те саме число дорівнює асимптотичному порядку $\xi^{i_1\dots i_k}_{m_1\dots m_k}(\theta, u^{1/\theta})$ при $\theta\to 0$ для довільної функції $u\in B^1_{q_1,\dots,q_r}$, такої що $\xi^{i_1\dots i_k}_{m_1\dots m_k}(1,u)\neq 0$.

Нехай задана система вигляду (1.24) і зафіксоване градуювання (5.8), описане вище (тобто зафіксовані числа $q_1,\dots,q_r$). Розглянемо підпростори

$$\mathcal{P}^{c_k} = \{\ell\in\mathcal{L}^{c_k} : v(\ell)\in v(\mathcal{L}^{c_1}+\cdots+\mathcal{L}^{c_{k-1}})\},\quad k\geq 1,$$

де $\mathcal{P}^{c_1} = \{\ell\in\mathcal{L}^{c_1} : v(\ell)=0\}$, тоді ядерна підалгебра Лі і правий ідеал, що відповідають системі (1.24) і градуюванню $\mu(q_1,\dots,q_r)$, задаються так:

$$\mathcal{L}_{a,b_1,\dots,b_r} = \sum_{k=1}^{\infty}\mathcal{P}^{c_k},\quad \mathcal{J}_{a,b_1,\dots,b_r} = \mathrm{Lin}\{\mathcal{L}_{a,b_1,\dots,b_r}\mathcal{A}^e\}.$$

Можна показати, що для таких $\mathcal{L}_{a,b_1,\dots,b_r}$ і $\mathcal{J}_{a,b_1,\dots,b_r}$ узагальнюються всі результати, отримані для $\mathcal{L}_{a,b}$ і $\mathcal{J}_{a,b}$ [140]. Зокрема, можна ввести поняття однорідної апроксимації і довести існування замін змінних, які виділяють головну частину ряду $S_{a,b_1,\dots,b_r}$ *відносно заданого градуювання*, аналогічне теоремам 5.1 і 5.2.

Покажемо, що головна частина ряду може залежати від обраного градуювання.

Приклад 5.4. Розглянемо систему з одновимірним керуванням

$$\dot{x}_1 = u,\quad \dot{x}_2 = x_1,\quad \dot{x}_3 = 2x_2 - \tfrac{1}{2}x_1^2.$$

Неважко знайти коефіцієнти відповідного ряду нелінійних степеневих моментів:

$$v(\xi_0) = -e_1,\ v(\xi_1) = e_2,\ v(\xi_2) = v(\xi_{01}) = -e_3,$$

а решта коефіцієнтів дорівнює нулю. У звичайному градуюванні (воно відповідає $\mu(q_1)$ з $q_1 = 0$) ця система є однорідною ($\mathrm{ord}(\xi_2) = \mathrm{ord}(\xi_{01}) = 3$), тобто ряд $S_{a,b}$ містить тільки головну частину.

Розглянемо градуювання $\mu = \mu(q_1)$ з $q_1 > 0$, тоді $\mathrm{ord}_\mu(\xi_2) = 3 + q_1$, $\mathrm{ord}_\mu(\xi_{01}) = 3 + 2q_1$, тобто $\mathrm{ord}_\mu(\xi_2) < \mathrm{ord}_\mu(\xi_{01})$. Це означає, що третя компонента головної частини ряду дорівнює лише $2\xi_2$. Нагадаємо, що таке градуювання відповідає обмеженню на керування вигляду $|u(t)| \leq t^{q_1}$.

Приклад 5.5. Нехай $r = 2$, $q_1 = 0$, $q_2 = 1$. Випишемо базис трьох перших однорідних підпросторів $\mathcal{L}$ відповідно до градуювання $\mu = \mu(q_1, q_2)$:

$$\mathcal{L}^1 = \mathrm{Lin}\{\xi_0^1\},\ \mathcal{L}^2 = \mathrm{Lin}\{\xi_1^1, \xi_0^2\},\ \mathcal{L}^3 = \mathrm{Lin}\{\xi_2^1, \xi_1^2, [\xi_0^1, \xi_1^1], [\xi_0^1, \xi_0^2]\}.$$

Нехай $n = 4$, $\mathcal{P}^1 = \{0\}$, $\mathcal{P}^2 = \mathrm{Lin}\{\xi_1^1, \xi_0^2\}$, $\mathcal{P}^3 = \mathrm{Lin}\{\xi_2^1 + \xi_1^2\}$ і $\mathcal{P}^k = \mathcal{L}^k$ при $k \geq 4$. Побудуємо систему, яка є однорідною апроксимацією систем з ядерною підалгеброю Лі $\mathcal{L}' = \sum\limits_{m=1}^{\infty} \mathcal{P}^m$. Виберемо

$$\ell_1 = \xi_0^1,\ \ell_2 = \xi_2^1 - \xi_1^2,\ \ell_3 = [\xi_0^1, \xi_1^1],\ \ell_4 = [\xi_0^1, \xi_0^2].$$

Перші три підпростори $\mathcal{J}' \cap \mathcal{A}^k = \mathrm{Lin}\{\mathcal{L}'\mathcal{A}^e\} \cap \mathcal{A}^k$, $k = 1, 2, 3$, мають вигляд

$$\mathcal{J}' \cap \mathcal{A}^1 = \{0\},\ \mathcal{J}' \cap \mathcal{A}^2 = \mathrm{Lin}\{\xi_1^1, \xi_0^2\},\ \mathcal{J}' \cap \mathcal{A}^3 = \mathrm{Lin}\{\xi_1^1\xi_0^1, \xi_0^2\xi_0^1, \xi_2^1 + \xi_1^2\},$$

а отже, ортопроекції елементів ℓ_i на $\mathcal{J}'^\perp$ дорівнюють

$$\widetilde{\ell}_1 = \xi_0^1,\ \widetilde{\ell}_2 = \xi_2^1 - \xi_1^2,\ \widetilde{\ell}_3 = \xi_0^1\xi_1^1,\ \widetilde{\ell}_4 = \xi_0^1\xi_0^2.$$

Скориставшись методом, аналогічним описаному в пункті 5.1.1, виберемо $\widehat{a}(t, x) \equiv 0$ і знаходимо: $(\widehat{b}_1(t, x))_1 = -1$, $(\widehat{b}_2(t, x))_1 = 0$, $(\widehat{b}_1(t, x))_2 = -t^2$, $(\widehat{b}_2(t, x))_2 = t$,

$$\widetilde{\ell}_3 = \underbrace{\xi_0^1}_{x_1}\underbrace{\xi_1^1}_{t},\quad \widetilde{\ell}_4 = \underbrace{\xi_0^1}_{x_1}\underbrace{\xi_0^2}_{1},$$

звідки $(\widehat{b}_1(t, x))_3 = -x_1 t$, $(\widehat{b}_3(t, x))_2 = 0$, $(\widehat{b}_1(t, x))_4 = 0$, $(\widehat{b}_2(t, x))_4 = -x_1$. Отже, апроксимуюча система має вигляд

$$\dot{x}_1 = -u_1,\ \dot{x}_2 = -t^2 u_1 + t u_2,\ \dot{x}_3 = -x_1 t u_1,\ \dot{x}_4 = -x_1 u_2.$$

5.2 Апроксимація у сенсі швидкодії і зв'язок з однорідною апроксимацією

Тепер ми повертаємось до вихідної ідеї залучити методи проблеми моментів до вивчення нелінійних керованих систем аналогічно лінійному випадку, описаному в пункті 1.1.1. Означення нелінійної min-проблеми моментів було введене в дисертації [12] і роботі [126], де був описаний клас нелінійних систем, локально еквівалентних лінійним у сенсі швидкодії. У цьому підрозділі ми розглядаємо загальний випадок. Результати опубліковано в роботах [129, 130, 131].

5.2.1 Нелінійна min-проблема моментів Маркова і апроксимація у сенсі швидкодії

Повернемось до систем вигляду (2.25) і задачі потрапляння з точки s до початку координат (2.26) з обмеженням на керування вигляду $|u(t)| \le 1$, $t \in [0, \theta]$. Ураховуючи теорему 1.1, отримуємо, що при фіксованому $\theta > 0$ така задача потрапляння еквівалентна наступній задачі: знайти керування, яке задовольняє вказане обмеження і рівності

$$s = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\substack{m_1+\cdots+m_k+k=m \\ k\ge1,\ m_i\ge0}} v_{m_1\ldots m_k} \xi_{m_1\ldots m_k}(\theta, u). \tag{5.9}$$

Рівності (5.9) можна інтерпретувати як *моментні рівності*, а сформульовану задачу — як *нелінійну проблему моментів Маркова.* У подальшому ми *не будемо розрізняти задачу швидкодії і відповідну min-проблему моментів.*

Розглянемо тепер задачу *оптимальної швидкодії*: знайти найменше можливе $\theta > 0$ для якого існує керування $u(t)$, що задовольняє умови (2.26) і обмеження $|u(t)| \le 1$, $t \in [0, \theta]$. Цій задачі відповідає нелінійна min-проблема моментів Маркова (означення 1.1).

У цьому пункті розглянемо питання локальної еквівалентності задач швидкодії і, відповідно, min-проблем моментів Маркова. У випадку, коли одна з задач лінійна, таке поняття введено в означенні 1.2. Але, на відміну від лінійного випадку, навіть за умовою Рашевського-Чжоу (2.43) початок координат може належати межі множини розв'язності нелінійної задачі швидкодії (і, відповідно, min-проблеми моментів Маркова). Крім того, оптимальне керування може бути неєдиним. Узагальнимо означення 1.2 таким чином.

Розглянемо системи (2.25) і (2.53) і дві відповідні задачі швидкодії

$$\begin{gathered}\dot{x} = a(t,x) + b(t,x)u(t), \quad a(t,0) \equiv 0, \quad x(0) = s, \quad x(\theta) = 0, \\ |u(t)| \le 1, \; t \in [0,\theta], \quad \theta \to \min,\end{gathered} \tag{5.10}$$

$$\begin{gathered}\dot{x} = \widehat{a}(t,x) + \widehat{b}(t,x)u(t), \quad \widehat{a}(t,0) \equiv 0, \quad x(0) = s, \quad x(\theta) = 0, \\ |u(t)| \le 1, \; t \in [0,\theta], \quad \theta \to \min\,.\end{gathered} \tag{5.11}$$

Як випливає з теореми Філіпова [40], для будь-якої точки s, з якої можна потрапити до нуля в силу системи (2.25) або (2.53), існує й оптимальне керування, тобто розв'язна задача (5.10) або (5.11) відповідно.

Означення 5.4. *Припустимо, що Ω — така відкрита область, $\Omega \subset \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$, $0 \in \overline{\Omega}$, що для будь-якого $s \in \Omega$ існує єдиний розв'язок $(\widehat{\theta}^*_s, \widehat{u}^*_s)$ задачі (5.11). Нехай $U_s(\theta)$ — множина керувань, які переводять точку s до нуля за час θ в силу системи (2.25) і задовольняють обмеження $|u(t)| \le 1$, $t \in [0,\theta]$; нехай θ^*_s — оптимальний час в задачі (5.10), тобто $\theta^*_s = \min\{\theta : U_s(\theta) \neq \varnothing\}$.*

Ми кажемо, що задача швидкодії (5.11) апроксимує задачу швидкодії (5.10) (в області Ω), якщо існує невироджене дійсно-аналітичне відображення Q околу нуля $\mathbb{R}^n$, $Q(0) = 0$, і множина пар $(\widetilde{\theta}_s, \widetilde{u}_s)$, $s \in \Omega$, таких, що $\widetilde{u}_s \in U_{Q(s)}(\widetilde{\theta}_s)$ і

$$\frac{\theta^*_{Q(s)}}{\widehat{\theta}^*_s} \to 1, \quad \frac{\widetilde{\theta}_s}{\widehat{\theta}^*_s} \to 1 \quad \text{при} \;\; s \to 0, \; s \in \Omega, \tag{5.12}$$

$$\frac{1}{\theta} \int_0^\theta |\widehat{u}^*_s(t) - \widetilde{u}_s(t)| dt \to 0 \quad \text{при} \;\; s \to 0, \; s \in \Omega, \tag{5.13}$$

де $\theta = \min\{\widetilde{\theta}_s, \widehat{\theta}^*_s\}$.

За таких умов ми кажемо, що система (2.53) наближає систему (2.25) в сенсі швидкодії (в області Ω).

Іншими словами, після певної заміни змінних в системі (2.25) при малих $s \in \Omega$ розв'язок задачі (5.10) існує, причому $\theta^*_{Q(s)}$ і $\widehat{\theta}^*_s$ асимптотично еквівалентні при $s \to 0$, $s \in \Omega$, як в означенні 1.2, а функція $\widehat{u}^*_s(t)$ є близькою до «майже оптимального» керування $\widetilde{u}_s(t)$.

Замість задач швидкодії в означенні 5.4 можна розглядати відповідні min-проблеми моментів.

Зауваження 5.5. *На нелінійні степеневі моменти можна поширити результати, отримані в пункті 4.2.2, за винятком наслідку 4.11. Дійсно, для довільного фіксованого m розглянемо функції $u_i(t) = \frac{1}{\sqrt{m}}t^{i-1}u(t)$, $i = 1, \ldots, m$; тоді $\xi_{m_1 \ldots m_k}(\theta, u) = m^{k/2}\eta_{i_{m_1} \ldots i_{m_k}}(\theta, u)$ (де в правій частині мається на увазі $u = (u_1, \ldots, u_m)$). З урахуванням цього отримуємо аналоги леми 4.2 і наслідку 4.7, а також наслідку 4.8, де замість (1.47) треба скористатися (2.31). З них отримуємо аналоги леми 4.4 і наслідків 4.9 і 4.10.*

Наступна теорема є одним з основних результатів розділу. Вона описує умови, за яких однорідна апроксимація наближає вихідну систему в сенсі швидкодії.

Теорема 5.3. *Припустимо, що система (2.25) є повністю неголономною, а система (2.53) є її однорідною апроксимацією.*

Припустимо, що $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ є відкритою областю, $0 \in \overline{\Omega}$, в якій задовольняються такі умови:

(i) *задача швидкодії (5.11) має єдиний розв'язок $(\widehat{\theta}^*_s, \widehat{u}^*_s)$ для всіх $s \in \Omega$;*

(ii) *функція $\widehat{\theta}^*_s$ є неперервною в усіх точках $s \in \Omega$;*

(iii) *для множини $K = \{\widehat{u}^*_s(t\widehat{\theta}^*_s),\ t \in [0,1] : s \in \Omega\} \subset L_2[0,1]$ зі слабкої збіжності послідовності елементів K випливає її сильна збіжність.*

Тоді існує сімейство вкладених областей $\Omega(\delta)$, $\delta > 0$, *таких, що* $\Omega(\delta_1) \subset \Omega(\delta_2)$ *при* $\delta_1 > \delta_2 > 0$ *і* $\Omega = \bigcup\limits_{\delta>0} \Omega(\delta)$, *у кожній з яких задача швидкодії* (5.11) *апроксимує задачу швидкодії* (5.10).

Обговоримо умови (i)–(iii). Умова (i) має виконуватись, тому що цього вимагає означення 5.4. Умова (ii) є досить природною; для локально керованих систем вона завжди виконується [21].

Умова (iii) є найбільш обмежувальною; питання щодо того, чи випливає вона з інших умов теореми, поставлене в роботі [130].

Зазначимо, що замість дослідження множини K можна розглядати більш широку множину, наприклад, керування, які задовольняють принципу максимуму Понтрягіна: множина таких керувань припускає явний опис у деяких випадках. Наприклад, умова (iii) виконується, якщо всі оптимальні керування для задачі (5.11) «релейні», тобто є кусково-сталими і набувають значень ± 1. Зокрема, це так, якщо система (2.53) є лінійною.

Зауважимо, що для простішого випадку систем, лінійних за керуванням, який вивчається у пункті 4.2.3, умови (ii), (iii) виконуються автоматично.

Доведення. Загальна схема доведення, як і доведення теореми 4.6, наслідує [27].

Без обмеження загальності можна вважати, що $(\widehat{\theta}^*_s, \widehat{u}^*_s)$ — розв'язок min-проблеми моментів

$$s_i = d_i(\theta, u),\ \ i = 1, \ldots, n,\ \ |u(t)| \le 1, t \in [0, \theta],\ \ \theta \to \min, \tag{5.14}$$

де ρ_i містить доданки порядку більше $w_i = \operatorname{ord}(d_i)$, $i = 1, \ldots, n$. Будемо вважати, що в системі (2.25) вже зроблено заміну змінних, яка приводить ряд нелінійних степеневих моментів $S_{a,b}$ до вигляду (5.4). Тоді множина розв'язків задачі швидкодії (5.10) збігається з множиною розв'язків min-проблеми моментів

$$s_i = d_i(\theta, u) + \rho_i(\theta, u),\ \ i = 1, \ldots, n,\ \ |u(t)| \le 1, t \in [0, \theta],\ \ \theta \to \min. \tag{5.15}$$

Будемо міркувати аналогічно доведенню теореми 4.6. Розглянемо дилатацію $D_\varepsilon(y) = (\varepsilon^{w_1}y_1, \ldots, \varepsilon^{w_n}y_n)^\mathsf{T}$ і зазначимо, що виконується властивість (4.28). Вважатимемо, що область Ω задовольняє умову (4.29). Введемо $\Omega(\delta)$ за формулою (4.31) і покажемо, що задача (5.11) апроксимує задачу (5.10) в області $\Omega(\delta)$.

(а) Розглянемо оператор G_s, що задається (4.34), і множину M, яка задається (4.35). Аналогічно доведенню теореми 4.6 отримуємо, що G_s переводить множину M у себе для досить малого ε; зазначимо, що оцінка (4.27) у цьому випадку випливає з (2.31). Для доведення неперервності оператора G_s урахуємо зауваження 5.5 і скористаємось умовою (ii) замість зауваження 4.4.

Далі, повністю аналогічно пункту (а) доведення теореми 4.6, отримуємо (4.42). Позначимо

$$\widetilde{\theta}_s = \widehat{\theta}^*_{s^1},\ \widetilde{\theta}_{s_{(q)}} = \widehat{\theta}^*_{s^1_{(q)}} \quad \widetilde{u}_s(t) = \widehat{u}^*_{s^1}(t),\ \widetilde{u}_{s_{(q)}}(t) = \widehat{u}^*_{s^1_{(q)}}(t), \tag{5.16}$$

тоді з (4.37) випливає, що $\widetilde{u}_s \in U_s(\widetilde{\theta}_s)$, $\widetilde{u}_{s_{(q)}} \in U_{s_{(q)}}(\widetilde{\theta}_{s_{(q)}})$, а з (4.41) отримуємо

$$\frac{\widetilde{\theta}_{s_{(q)}}}{\widehat{\theta}^*_{s_{(q)}}} \to 1 \quad \text{при} \quad s_{(q)} \to 0, \quad s_{(q)} \in \Omega(\delta), \tag{5.17}$$

що разом з (4.42) дає (5.12) (для $Q(s) = s$).

(б) Нагадаємо, що, як і в пункті (а) доведення теореми 4.6,

$$s_{(q)} = d(\widehat{\theta}^*_{s_{(q)}}, \widehat{u}^*_{s_{(q)}}), \quad s^1_{(q)} = d(\widehat{\theta}^*_{s^1_{(q)}}, \widehat{u}^*_{s^1_{(q)}}),$$

отже, завдяки однорідності, маємо (4.43) і

$$\bar{s}^1_{(q)} = d(\widehat{\theta}^*_{\bar{s}^1_{(q)}}, \widehat{u}^*_{\bar{s}^1_{(q)}}), \quad \text{де} \quad \widehat{\theta}^*_{\bar{s}^1_{(q)}} = \frac{\widehat{\theta}^*_{s^1_{(q)}}}{\varepsilon_q},\ \widehat{u}^*_{\bar{s}^1_{(q)}}(t) = \widehat{u}^*_{s^1_{(q)}}(t\varepsilon_q),\ t \in [0, \widehat{\theta}^*_{\bar{s}^1_{(q)}}].$$

Нагадаємо також, що $\bar{s}_{(q_r)} \to \bar{s}$ і $\bar{s}^1_{(q_r)} \to \bar{s}$, причому $\bar{s} \in \Omega$; завдяки умові (ii) маємо $\widehat{\theta}^*_{\bar{s}_{(q_r)}} \to \widehat{\theta}^*_{\bar{s}}$ і $\widehat{\theta}^*_{\bar{s}^1_{(q_r)}} \to \widehat{\theta}^*_{\bar{s}}$. Отже, з аналогу наслідку 4.10 (див. зауваження 5.5), ураховуючи умову (i), отримуємо

$$\widehat{u}^*_{\bar{s}_{(q_r)}}(t\widehat{\theta}^*_{\bar{s}_{(q_r)}}) \xrightarrow{w} \widehat{u}^*_{\bar{s}}(t\widehat{\theta}^*_{\bar{s}}), \qquad \widehat{u}^*_{\bar{s}^1_{(q_r)}}(t\widehat{\theta}^*_{\bar{s}^1_{(q_r)}}) \xrightarrow{w} \widehat{u}^*_{\bar{s}}(t\widehat{\theta}^*_{\bar{s}}).$$

Оскільки керування $\widehat{u}^*_{\bar{s}_{(qr)}}(t\widehat{\theta}^*_{\bar{s}_{(qr)}})$, $\widehat{u}^*_{\bar{s}^1_{(qr)}}(t\widehat{\theta}^*_{\bar{s}^1_{(qr)}})$, $\widehat{u}^*_{\bar{s}}(t\widehat{\theta}^*_{\bar{s}})$ належать множині K, то з умови (iii) отримуємо

$$\int_0^1 \left| \widehat{u}^*_{\bar{s}_{(qr)}}(t\widehat{\theta}^*_{\bar{s}_{(qr)}}) - \widehat{u}^*_{\bar{s}^1_{(qr)}}(t\widehat{\theta}^*_{\bar{s}^1_{(qr)}}) \right| dt \to 0,$$

що можна подати як

$$\int_0^1 \left| \widehat{u}^*_{s_{(q)}}(t\widehat{\theta}^*_{s_{(q)}}) - \widetilde{u}_{s_{(q)}}(t\widetilde{\theta}_{s_{(q)}}) \right| dt \to 0.$$

Решта доведення повторює останню частину доведення пункту (б) теореми 4.6, де замість наслідку 4.11 треба використовувати умову (iii). Отже, отримуємо (5.13) (для $Q(s) = s$ і $\Omega = \Omega(\delta)$). ■

Пояснимо відмінності в пунктах (б) доведення теорем 4.6 і 5.3.

Як доведено в теоремі 4.5, оптимальні керування для систем, лінійних за керуванням, належать одиничній сфері простору $L_2([0,1];\mathbb{R}^m)$, а отже, для них зі слабкої збіжності випливає сильна збіжність. Тому в пункті (б) доведення теореми 4.6 використана послідовність $s^0_{(q)}$, що задовольняє рівність $s^0_{(q)} = d(\theta^*_{s_{(q)}}, u^*_{s_{(q)}})$, де $(\theta^*_{s_{(q)}}, u^*_{s_{(q)}})$ — розв'язок вихідної задачі швидкодії: зі слабкої збіжності $u^*_{s_{(q)}}(t\theta^*_{s_{(q)}})$ випливає сильна збіжність, що дозволяє довести (4.45). Тому отримуємо співвідношення, що пов'язує оптимальні керування вихідної і апроксимуючої задач (2.52).

На відміну від цього випадку, для систем, афінних за керуванням, невідомо, чи завжди виконується умова (iii) [130]. Принаймні оптимальне за швидкодією керування не обов'язково належить одиничній сфері простору $L_2[0,1]$; відповідний клас систем наведений у підрозділі 7.2.

Оскільки в теоремі 5.3 умова (iii) накладається лише на апроксимуючу систему, всі міркування щодо сильної збіжності треба проводити лише для оптимальних керувань задачі (5.11). Тому в пункті (б) доведення теореми 5.3 замість $s^0_{(q)}$ використовується послідовність $s^1_{(q)}$, що задовольняє рівність $s^1_{(q)} = d(\widehat{\theta}^*_{s^1_{(q)}}, \widehat{u}^*_{s^1_{(q)}})$, а отже, вдається отримати лише співвідношення, що пов'язує оптимальне керування апроксимуючої задачі і «майже оптимальне» керування вихідної задачі.

Якщо ж відомо, що умова (iii) виконується і для оптимальних керувань задачі (5.10), то можна повторити доведення пункту (б) теореми 4.6 і отримати сильніший висновок.

Наслідок 5.5. *Нехай на додаток до умов теореми 5.3 для множини* $K_1 = \{u^*_{Q(s)}(t\theta^*_{Q(s)}),\ t \in [0,1] : s \in \Omega\} \subset L_2[0,1]$ *зі слабкої збіжності послідовності елементів* K_1 *випливає її сильна збіжність. Тоді виконуються співвідношення* (5.12), (5.13) *означення 5.4, де* $\widetilde{u}_s(t) = u^*_{Q(s)}(t)$, $\widetilde{\theta}_s = \theta^*_{Q(s)}$.

Іншими словами, замість властивості (5.13) маємо:

$$\frac{1}{\theta}\int_0^\theta |\widehat{u}^*_s(t) - u^*_{Q(s)}(t)|dt \to 0 \quad \text{при} \ \ s \to 0,\ \ s \in \Omega, \tag{5.18}$$

де $\theta = \min\{\theta^*_{Q(s)}, \widehat{\theta}^*_s\}$ (для $\Omega = \Omega(\delta)$).

Зауваження 5.6. *У роботі* [126] *розглянутий випадок, коли* d_i *містять лише лінійні моменти, а отже,* $\widehat{u}^*_s(t)$ *є кусково-сталими і мають не більше* $n-1$ *перемикання. З використанням цього спеціального вигляду оптимальних керувань показано, що* (5.18) *виконується без додаткових вимог наслідку 5.5 (з* $\Omega = \mathbb{R}^n$*).*

5.2.2 Зв'язок однорідної апроксимації і апроксимації у сенсі швидкодії

У попередньому пункті було доведено, що однорідна апроксимація за деяких умов апроксимує вихідну систему в сенсі швидкодії.

У роботі [126] для підкласу систем, для яких однорідна апроксимація є лінійною, було доведено, що має місце і зворотна імплікація: якщо система апроксимується лінійною в сенсі швидкодії, то її однорідна апроксимація теж є лінійною. Крім властивостей лінійних моментів, у доведенні суттєво використовувався вигляд оптимальних керувань для лінійних задач швидкодії.

У даному пункті ми вивчаємо це питання для загального випадку. Результати опубліковано в роботах [14, 85].

Позначення 5.1. *Розглянемо два диференціювання* $\varphi : \mathcal{A}^e \to \mathcal{A}$ *і* $\varphi' : \mathcal{A} \to \mathcal{A}^e$*, які на літерах визначаються за формулами*

$$\varphi(1) = 0, \quad \varphi(\xi_m) = (m+1)\xi_{m+1},\ m \geq 0,$$
$$\varphi'(\xi_0) = 0, \quad \varphi'(\xi_m) = m\xi_{m-1},\ m \geq 1,$$

тоді, за означенням диференціювання,

$$\varphi(\xi_{m_1\dots m_k}) = \sum_{i=1}^{k}(m_i+1)\xi_{m_1\dots(m_i+1)\dots m_k}, \quad \varphi'(\xi_{m_1\dots m_k}) = \sum_{i=1}^{k} m_i\xi_{m_1\dots(m_i-1)\dots m_k}.$$

Крім того, введемо два лінійних відображення $\psi_q : \mathcal{A}^e \to \mathcal{A}$ *і* $\psi'_q : \mathcal{A} \to \mathcal{A}^e$*, які на базисних елементах задаються так:*

$$\psi_q(\xi_{m_1\dots m_k}) = \xi_{m_1\dots m_k}\xi_q, \quad \psi_q(1) = \xi_q,$$
$$\psi'_q(\xi_q) = 1, \quad \psi'_q(\xi_{m_1\dots m_k}) = \begin{cases} 0, & m_k \neq q, \\ \xi_{m_1\dots m_{k-1}}, & m_k = q. \end{cases}$$

Лема 5.1. (а) *Відображення* φ *і* φ' *спряжені одне до одного, тобто для всіх* $y_1 \in \mathcal{A}^e$ *і* $y_2 \in \mathcal{A}$

$$\langle \varphi(y_1), y_2 \rangle = \langle y_1, \varphi'(y_2) \rangle.$$

(б) *Відображення* ψ_q *і* ψ'_q *(для всіх* $q \geq 0$*) спряжені одне до одного, тобто для всіх* $y_1 \in \mathcal{A}^e$ *і* $y_2 \in \mathcal{A}$

$$\langle \psi_q(y_1), y_2 \rangle = \langle y_1, \psi'_q(y_2) \rangle.$$

Доведення. (а) По-перше, зазначимо, що

$$\langle \varphi(\xi_{i_1\dots i_s}), \xi_{m_1\dots m_k} \rangle = 0 = \langle \xi_{i_1\dots i_s}, \varphi'(\xi_{m_1\dots m_k}) \rangle \text{ при } s \neq k.$$

Тепер нехай $s = k \geq 1$. Для довільного $q = 1, \dots, k$ маємо

$$\langle \xi_{i_1\dots(i_q+1)\dots i_k}, \xi_{m_1\dots m_q\dots m_k} \rangle = \langle \xi_{i_1\dots i_q\dots i_k}, \xi_{m_1\dots(m_q-1)\dots m_k} \rangle,$$

причому

$$\langle \xi_{i_1\dots i_q\dots i_k}, \xi_{m_1\dots(m_q-1)\dots m_k} \rangle = 0 \text{ при } i_q + 1 \neq m_q.$$

Отже, для будь-якого $\xi_{m_1\dots m_k} \in \mathcal{A}$ і будь-якого $\xi_{i_1\dots i_k} \in \mathcal{A}^e$

$$\langle \varphi(\xi_{i_1\dots i_k}), \xi_{m_1\dots m_k}\rangle = \sum_{q=1}^{k} (i_q+1)\langle \xi_{i_1\dots(i_q+1)\dots i_k}, \xi_{m_1\dots m_q\dots m_k}\rangle =$$
$$= \sum_{q=1}^{k} m_q \langle \xi_{i_1\dots i_q\dots i_k}, \xi_{m_1\dots(m_q-1)\dots m_k}\rangle = \langle \xi_{i_1\dots i_k}, \varphi'(\xi_{m_1\dots m_k})\rangle.$$

(б) Для довільних $\xi_{m_1\dots m_k} \in \mathcal{A}$ і $\xi_{i_1\dots i_s} \in \mathcal{A}^e$ маємо

$$\langle \psi_q(\xi_{i_1\dots i_s}), \xi_{m_1\dots m_k}\rangle = \langle \xi_{i_1\dots i_s}\xi_q, \xi_{m_1\dots m_k}\rangle = \begin{cases} \langle \xi_{i_1\dots i_s}, \xi_{m_1\dots m_{k-1}}\rangle \text{ при } m_k = q, \\ 0 \text{ в іншому випадку,} \end{cases}$$

що, очевидно, дорівнює $\langle \xi_{i_1\dots i_s}, \psi_q'(\xi_{m_1\dots m_k})\rangle$. ■

Лема 5.2. $\mathrm{Im}(\varphi) + \mathrm{Im}(\psi_0) = \mathcal{A}$, *а отже,* $\mathrm{Ker}(\varphi') \cap \mathrm{Ker}(\psi_0') = \{0\}$.

Доведення. Доведемо, що будь-який елемент $\xi_{m_1\dots m_k} \in \mathcal{A}$ належить $\mathrm{Im}(\varphi) + \mathrm{Im}(\psi_0)$. Скористаємось індукцією по m_k.

Якщо $m_k = 0$, то $\xi_{m_1\dots m_k} = \psi_0(\xi_{m_1\dots m_{k-1}}) \in \mathrm{Im}(\psi_0)$ для всіх $m_1, \dots, m_{k-1}$.

Нехай $p \geq 0$ і $\xi_{m_1\dots m_{k-1}p} \in \mathrm{Im}(\varphi) + \mathrm{Im}(\psi_0)$ для всіх $m_1, \dots, m_{k-1}$. Тоді

$$\varphi(\xi_{m_1\dots m_{k-1}p}) = \varphi(\xi_{m_1\dots m_{k-1}}\xi_p) = (p+1)\xi_{m_1\dots m_{k-1}(p+1)} + \varphi(\xi_{m_1\dots m_{k-1}})\xi_p.$$

За припущенням індукції $\varphi(\xi_{m_1\dots m_{k-1}})\xi_p \in \mathrm{Im}(\varphi) + \mathrm{Im}(\psi_0)$. Отже,

$$\xi_{m_1\dots m_{k-1}(p+1)} = \tfrac{1}{p+1}\left(\varphi(\xi_{m_1\dots m_{k-1}p}) - \varphi(\xi_{m_1\dots m_{k-1}})\xi_p\right) \in \mathrm{Im}(\varphi) + \mathrm{Im}(\psi_0),$$

звідки за індукцією отримуємо $\mathrm{Im}(\varphi) + \mathrm{Im}(\psi_0) = \mathcal{A}$.

Нехай тепер $y_1 \in \mathrm{Ker}(\varphi') \cap \mathrm{Ker}(\psi_0')$. За лемою 5.1, для довільного $y_2 \in \mathcal{A}^e$

$$\langle \varphi(y_2), y_1\rangle = \langle y_2, \varphi'(y_1)\rangle = 0, \quad \langle \psi_0(y_2), y_1\rangle = \langle y_2, \psi_0'(y_1)\rangle = 0,$$

тобто y_1 ортогональний до $\mathrm{Im}(\varphi) + \mathrm{Im}(\psi_0) = \mathcal{A}$, а отже, $y_1 = 0$. ■

Зауваження 5.7. *Очевидно,* $\sum_{q=0}^{\infty} \mathrm{Im}(\psi_q) = \mathcal{A}$. *Отже, з леми 5.1 випливає, що* $\bigcap_{q=0}^{\infty} \mathrm{Ker}(\psi_q') = \{0\}$.

Далі ми розглядаємо автономні системи

$$\dot{x} = a(x) + b(x)u, \;\; a(0) = 0, \tag{5.19}$$

де $a(x)$ та $b(x)$ — аналітичні векторні поля в деякому околі нуля $U(0) \subset \mathbb{R}^n$.

Лема 5.3. *Нехай $\mathcal{J}_{a,b}$ є правим ідеалом, що відповідає системі (2.25). Відображення ψ_q є $\mathcal{J}_{a,b}$-інваріантними, $\psi_q(\mathcal{J}_{a,b}) \subset \mathcal{J}_{a,b}$. Якщо система автономна, то відображення φ теж є $\mathcal{J}_{a,b}$-інваріантним, $\varphi(\mathcal{J}_{a,b}) \subset \mathcal{J}_{a,b}$.*

Доведення. Для відображень ψ_q їх $\mathcal{J}_{a,b}$-інваріантність випливає з означень. Розглянемо автономну систему (5.19). Маємо

$$\begin{gathered} \mathrm{ad}_{R_a}^{m_1} R_b \cdots \mathrm{ad}_{R_a}^{m_k} R_b \, R_a E(x) = \\ = -\sum_{i=1}^{m} \mathrm{ad}_{R_a}^{m_1} R_b \cdots \mathrm{ad}_{R_a}^{m_i+1} R_b \cdots \mathrm{ad}_{R_a}^{m_k} R_b E(x) + R_a \, \mathrm{ad}_{R_a}^{m_1} R_b \cdots \mathrm{ad}_{R_a}^{m_k} R_b E(x). \end{gathered} \tag{5.20}$$

Розглянемо довільний елемент $\ell \in \mathcal{L}$; нехай $R_{c_1} = H(\ell)$ і $R_{c_2} = H(\varphi(\ell))$, де $H : \mathcal{L} \to L$ — гомоморфізм вигляду (2.40). Тоді з (5.20) отримуємо

$$R_{c_1} R_a E(x) = -R_{c_2} E(x) + R_a R_{c_1} E(x).$$

Нехай $v(\ell) = 0$, тоді $R_{c_1} E(0) = c_1(0) = 0$. Оскільки $R_{c_1} R_a E(x) = R_{c_1} a(x) = a_x(x) c_1(x)$, отримуємо $R_{c_1} R_a E(0) = 0$. Оскільки $a(0) = 0$, то аналогічно $R_a R_{c_1} E(0) = 0$. Отже, $v(\varphi(\ell)) = R_{c_2} E(0) = 0$. З цього випливає, що в автономному випадку $\varphi(\mathcal{L}_{a,b}) \subset \mathcal{L}_{a,b}$, а отже, $\varphi(\mathcal{J}_{a,b}) \subset \mathcal{J}_{a,b}$. ∎

Наслідок 5.6. *Нехай $\mathcal{J}_{a,b}$ є правим ідеалом, що відповідає системі (2.25). Тоді ψ'_q є $\mathcal{J}^{\perp}_{a,b}$-інваріантними, тобто $\psi'_q(\mathcal{J}^{\perp}_{a,b}) \subset \mathcal{J}^{\perp}_{a,b}$.*

Наслідок 5.7. *Нехай $\mathcal{J}_{a,b}$ є правим ідеалом, що відповідає автономній системі (5.19). Тоді φ' і ψ'_0 є $\mathcal{J}^{\perp}_{a,b}$-інваріантними, тобто $\varphi'(\mathcal{J}^{\perp}_{a,b}) \subset \mathcal{J}^{\perp}_{a,b}$ і $\psi'_0(\mathcal{J}^{\perp}_{a,b}) \subset \mathcal{J}^{\perp}_{a,b}$.*

Зауваження 5.8. *Формально наслідок 5.7 вимагає, щоб система була автономною. Але можна ослабити цю умову і припустити, що однорідна апроксимація системи є автономною.*

Лема 5.4. *Зафіксуємо $\theta > 0$ і розглянемо керування $u(t)$, $t \in [0, \theta]$, які є неперервними справа при $t \in [0, \delta_0]$ для деякого $\delta_0 > 0$. Нехай $\theta_\delta = \theta - \delta$ і $u_\delta(t) = u(t + \delta)$, $t \in [0, \theta_\delta]$, де $0 < \delta < \delta_0 < \theta$. Тоді для будь-якого $z \in \mathcal{A}$*

$$\frac{d}{d\delta} z(\theta_\delta, u_\delta) = -\varphi'(z)(\theta_\delta, u_\delta) - u(\delta)\psi_0'(z)(\theta_\delta, u_\delta) \tag{5.21}$$

і, як наслідок,

$$\frac{d}{d\delta} z(\theta_\delta, u_\delta)|_{\delta=+0} = -\varphi'(z)(\theta, u) - u(0)\psi_0'(z)(\theta, u). \tag{5.22}$$

Доведення. Достатньо довести твердження для $z = \xi_{m_1 \ldots m_k}$. Маємо

$$\xi_{m_1 \ldots m_k}(\theta_\delta, u_\delta) = \int_0^{\theta-\delta} \int_{\tau_k}^{\theta-\delta} \cdots \int_{\tau_2}^{\theta-\delta} \prod_{j=1}^{k} \tau_j^{m_j} u(\tau_j + \delta) d\tau_1 \cdots d\tau_k =$$

$$= \int_\delta^\theta \int_{\tau_k}^\theta \cdots \int_{\tau_2}^\theta \prod_{j=1}^{k} (\tau_j - \delta)^{m_j} u(\tau_j) d\tau_1 \cdots d\tau_k.$$

Тоді

$$\frac{d}{d\delta} \xi_{m_1 \ldots m_k}(\theta_\delta, u_\delta) =$$

$$= -\sum_{i=1}^{k} m_i \int_\delta^\theta \int_{\tau_k}^\theta \cdots \int_{\tau_2}^\theta \prod_{j \neq i} (\tau_j - \delta)^{m_j} (\tau_i - \delta)^{m_i - 1} \prod_{j=1}^{k} u(\tau_j) d\tau_1 \cdots d\tau_k -$$

$$-(\tau_k - \delta)^{m_k} u(\tau_k) \int_{\tau_k}^\theta \int_{\tau_{k-1}}^\theta \cdots \int_{\tau_2}^\theta \prod_{j=1}^{k-1} (\tau_j - \delta)^{m_j} u(\tau_j) d\tau_1 \cdots d\tau_{k-1} \Big|_{\tau_k = \delta}.$$

Отже, якщо $m_k \neq 0$, то

$$\frac{d}{d\delta} \xi_{m_1 \ldots m_k}(\theta_\delta, u_\delta) = -\sum_{i=1}^{k} m_i \xi_{m_1 \ldots (m_i - 1) \ldots m_k}(\theta_\delta, u_\delta) = -\varphi'(\xi_{m_1 \ldots m_k}(\theta_\delta, u_\delta)),$$

а якщо $m_k = 0$, то

$$\frac{d}{d\delta} \xi_{m_1 \ldots m_k}(\theta_\delta, u_\delta) = -\sum_{i=1}^{k} m_i \xi_{m_1 \ldots (m_i - 1) \ldots m_k}(\theta_\delta, u_\delta) - u(\delta) \xi_{m_1 \ldots m_{k-1}}(\theta_\delta, u_\delta) =$$

$$= -\varphi'(\xi_{m_1 \ldots m_k}(\theta_\delta, u_\delta)) - u(\delta)\psi_0'(\xi_{m_1 \ldots m_k}(\theta_\delta, u_\delta)),$$

що доводить (5.21). Переходячи до границі, отримуємо (5.22). ∎

5.2.2.1 Випадок автономних систем

Разом з автономною системою (5.19), розглянемо *однорідну* автономну систему

$$\dot{x} = \widehat{a}(x) + \widehat{b}(x)u, \ \widehat{a}(0) = 0. \tag{5.23}$$

Припустимо, що в цих системах вже зроблено апроксимуючі заміни змінних, в яких їх ряди нелінійних степеневих моментів мають вигляд

$$S_{a,b} = d + \rho, \quad S_{\widehat{a},\widehat{b}} = \widehat{d},$$

де $d = (d_1, \ldots, d_n)^{\mathsf{T}}$ і $\widehat{d} = (\widehat{d}_1, \ldots, \widehat{d}_n)^{\mathsf{T}}$ — елементи відповідних спряжених базисів вигляду (3.47), причому $w_i = \mathrm{ord}(d_i)$, $w_1 \le \cdots \le w_n$, $\widehat{w}_i = \mathrm{ord}(\widehat{d}_i)$, $\widehat{w}_1 \le \cdots \le \widehat{w}_n$, а $\rho = (\rho_1, \ldots, \rho_n)^{\mathsf{T}}$, де ρ_i містить елементи порядку вище w_i, $i = 1, \ldots, n$. Оскільки системи автономні, без обмеження загальності можна вважати $\ell_1 = \widehat{\ell}_1 = d_1 = \widehat{d}_1 = \xi_0$.

Отже, розв'язки задач швидкодії

$$\begin{gathered} \dot{x} = a(x) + b(x)u(t), \quad a(0) = 0, \quad x(0) = s, \quad x(\theta) = 0, \\ |u(t)| \le 1, \ t \in [0, \theta], \quad \theta \to \min; \end{gathered} \tag{5.24}$$

$$\begin{gathered} \dot{x} = \widehat{a}(x) + \widehat{b}(x)u(t), \quad \widehat{a}(0) = 0, \quad x(0) = s, \quad x(\theta) = 0, \\ |u(t)| \le 1, \ t \in [0, \theta], \quad \theta \to \min, \end{gathered} \tag{5.25}$$

збігаються відповідно з розв'язками min-проблем моментів

$$s_i = d_i(\theta, u) + \rho_i(\theta, u), \ i = 1, \ldots, n, \ |u(t)| \le 1, t \in [0, \theta], \ \theta \to \min; \tag{5.26}$$

$$s_i = \widehat{d}_i(\theta, u), \ i = 1, \ldots, n, \ |u(t)| \le 1, t \in [0, \theta], \ \theta \to \min\,. \tag{5.27}$$

Ми будемо називати *вертикальною прямою* множину

$$L = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1, \ldots, x_{n-1} \ \text{фіксовані}, \ x_n \in \mathbb{R}\}.$$

Введемо дилатацію $\widehat{D}_\varepsilon(y) = (\varepsilon^{\widehat{w}_1} y_1, \ldots, \varepsilon^{\widehat{w}_n} y_n)^{\mathsf{T}}$.

Теорема 5.4. *Припустимо, що задача швидкодії* (5.25) *для однорідної системи апроксимує задачу швидкодії* (5.24) *в кожній відкритій області*

Ω_γ, $\gamma \in \Gamma$, яка задовольняє умову $\widehat{D}_\varepsilon(\Omega_\gamma) = \Omega_\gamma$ для всіх $\varepsilon > 0$, з одним і тим самим відображенням $Q(x)$ (де Γ може бути скінченною або нескінченною непорожньою множиною індексів). Припустимо, що для всіх $s \in \bigcup_{\gamma\in\Gamma} \Omega_\gamma$ задача швидкодії (5.25) має єдиний розв'язок $(\widehat{\theta}^*_s, \widehat{u}^*_s)$, причому $\widehat{u}^*_s(t)$ неперервна справа при $t = 0$, тобто існує $\widehat{u}^*_s(0) = \lim\limits_{t\to+0} \widehat{u}^*_s(t)$. Припустимо, що існує непорожня відкрита підмножина $\Omega' \subset \bigcup_{\gamma\in\Gamma} \Omega_\gamma$, що задовольняє наступну умову: якщо L — вертикальна пряма і перетин $M = \Omega' \cap L$ непорожній, то функція $f(x) = \widehat{u}^*_x(0)$, $x \in M$, не є сталою.

Тоді система (5.23) є однорідною апроксимацією системи (5.19).

Доведення. (a) Нехай $\widehat{x}^*(t)$, $t \in [0, \widehat{\theta}^*_s]$, позначає оптимальну траєкторію, що відповідає оптимальному керуванню $\widehat{u}^*_s(t)$ в задачі (5.25). Тоді очевидно

$$\widehat{\theta}^*_{\widehat{x}^*(\delta)} = \widehat{\theta}^*_s - \delta \ \text{ і } \ \widehat{u}^*_{\widehat{x}^*(\delta)}(t) = \widehat{u}^*_s(t+\delta),\ t \in [0, \widehat{\theta}^*_{\widehat{x}^*(\delta)}], \quad \text{для } \delta \in (0, \widehat{\theta}^*_s). \quad (5.28)$$

Оскільки Ω_γ відкрита, для довільного $s \in \Omega_\gamma$ деякий сегмент оптимальної траєкторії, що починається в s, належить Ω_γ, тобто існує таке $\delta_0 > 0$, що $\widehat{x}^*(\delta) \in \Omega_\gamma$ для $0 < \delta < \delta_0 < \widehat{\theta}^*_s$.

За умовою, виконані співвідношення (5.12), (5.13) з означення 5.4. Оскільки

$$\begin{gathered} (Q(s))_i = d_i(\widetilde{\theta}_s, \widetilde{u}_s) + \rho_i(\widetilde{\theta}_s, \widetilde{u}_s),\ i = 1, \dots, n, \\ s_i = \widehat{d}_i(\widehat{\theta}^*_s, \widehat{u}^*_s),\ i = 1, \dots, n, \end{gathered} \qquad (5.29)$$

отримуємо

$$\begin{gathered} d_i(\widetilde{\theta}_s, \widetilde{u}_s) + \rho_i(\widetilde{\theta}_s, \widetilde{u}_s) = Q_i(\widehat{d}_1(\widehat{\theta}^*_s, \widehat{u}^*_s), \dots, \widehat{d}_n(\widehat{\theta}^*_s, \widehat{u}^*_s)) = \\ = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \widehat{d}_j(\widehat{\theta}^*_s, \widehat{u}^*_s) + \sum_{m=1}^{w_i} p_{mi}(\widehat{d}_1, \dots, \widehat{d}_n)(\widehat{\theta}^*_s, \widehat{u}^*_s) + R_i(\widehat{\theta}^*_s, \widehat{u}^*_s), \end{gathered} \qquad (5.30)$$

де матриця $\{\alpha_{ij}\}$, що дорівнює $Q_x(0)$, невироджена, p_{mi} — поліноми відносно тасуючого добутку без лінійних членів, $\operatorname{ord}(p_{mi}(\widehat{d}_1, \dots, \widehat{d}_n)) = m$, і $R_i \in \sum\limits_{m=w_i+1}^{\infty} \mathcal{A}^m$. Без обмеження загальності вважаємо, що елементи $\{\widehat{\ell}_i\}_{i=1}^n$ обрано так, що $Q_x(0)$ — одинична матриця, тобто

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \widehat{d}_j(\widehat{\theta}^*_s, \widehat{u}^*_s) = \widehat{d}_i(\widehat{\theta}^*_s, \widehat{u}^*_s). \qquad (5.31)$$

Нехай $\theta_s = \min\{\widetilde{\theta}_s, \widehat{\theta}^*_s\}$, тоді, використовуючи позначення (5.7), для довільного $\xi_{m_1\dots m_k}$ отримуємо

$$\xi_{m_1\dots m_k}(\widetilde{\theta}_s, \widetilde{u}_s) - \xi_{m_1\dots m_k}(\theta_s, \widetilde{u}_s) = \sum_{p=0}^{k-1} \xi_{m_{p+1}\dots m_k}(\theta_s, \widetilde{\theta}_s, \widetilde{u}_s)\xi_{m_1\dots m_p}(\theta_s, \widetilde{u}_s).$$

А оскільки

$$\xi_{m_{p+1}\dots m_k}(\theta_s, \widetilde{\theta}_s, \widetilde{u}_s) = (\theta_s)^{m'}\xi_{m_{p+1}\dots m_k}(1, \widetilde{\theta}_s/\theta_s, u_s),$$

де $m' = \operatorname{ord}(\xi_{m_{p+1}\dots m_k})$, $u_s(t) = \widetilde{u}_s(t\theta_s)$, то, ураховуючи (5.12), отримуємо

$$|\xi_{m_1\dots m_k}(\widetilde{\theta}_s, \widetilde{u}_s) - \xi_{m_1\dots m_k}(\theta_s, \widetilde{u}_s)| \le c_1(\theta_s)^m \left(\frac{\widetilde{\theta}_s}{\theta_s} - 1\right) = \bar{o}((\widehat{\theta}^*_s)^m), \tag{5.32}$$

де $m = \operatorname{ord}(\xi_{m_1\dots m_k})$. Аналогічно

$$|\xi_{m_1\dots m_k}(\widehat{\theta}^*_s, \widehat{u}^*_s) - \xi_{m_1\dots m_k}(\theta_s, \widehat{u}^*_s)| \le c_2(\theta_s)^m \left(\frac{\widehat{\theta}^*_s}{\theta_s} - 1\right) = \bar{o}((\widehat{\theta}^*_s)^m). \tag{5.33}$$

Крім того,

$$\xi_{m_1\dots m_k}(\theta_s, \widetilde{u}_s) - \xi_{m_1\dots m_k}(\theta_s, \widehat{u}^*_s) = (\theta_s)^m(\xi_{m_1\dots m_k}(1, u_s) - \xi_{m_1\dots m_k}(1, \bar{u}_s)) =$$

$$= (\theta_s)^m \sum_{i=1}^{k} \int_0^1 \cdots \int_0^{\tau_{k-1}} \prod_{p=1}^{k} \tau_p^{m_p} \prod_{j=1}^{i-1} u_s(\tau_j)\big(u_s(\tau_i) - \bar{u}_s(\tau_i)\big) \prod_{j=i+1}^{k} \bar{u}_s(\tau_j) d\tau_k \cdots d\tau_1,$$

де $u_s(t) = \widetilde{u}_s(t\theta_s)$, $\bar{u}_s(t) = \widehat{u}^*_s(t\theta_s)$. Ураховуючи (5.12), (5.13), отримуємо

$$\begin{gathered} |\xi_{m_1\dots m_k}(\theta_s, \widetilde{u}_s) - \xi_{m_1\dots m_k}(\theta_s, \widehat{u}^*_s)| \le \\ \le (\theta_s)^m \int_0^1 |u_s(t) - \bar{u}_s(t)|dt = (\theta_s)^m \frac{1}{\theta_s} \int_0^{\theta_s} |\widetilde{u}_s(t) - \widehat{u}^*_s(t)|dt = \bar{o}((\widehat{\theta}^*_s)^m). \end{gathered} \tag{5.34}$$

Остаточно, з (5.32)–(5.34) отримуємо

$$\xi_{m_1\dots m_k}(\widetilde{\theta}_s, \widetilde{u}_s) - \xi_{m_1\dots m_k}(\widehat{\theta}^*_s, \widehat{u}^*_s) = \bar{o}((\widehat{\theta}^*_s)^m) \text{ при } s \to 0, \ s \in \Omega_\gamma.$$

Отже, для довільного $z \in \mathcal{A}^m$ і довільного $\gamma \in \Gamma$ маємо

$$z(\widetilde{\theta}_s, \widetilde{u}_s) = z(\widehat{\theta}^*_s, \widehat{u}^*_s) + \bar{o}((\widehat{\theta}^*_s)^m) \text{ при } s \to 0, \ s \in \Omega_\gamma.$$

Враховуючи (2.31), отримуємо, що для досить малого s мають місце оцінки $|R_i(\widehat{\theta}_s^*, \widehat{u}_s^*)| \le C''\widehat{\theta}_s^{*w_i+1}$, $|\rho_i(\widetilde{\theta}_s, \widetilde{u}_s)| \le C\widetilde{\theta}_s^{w_i+1} \le C'\widehat{\theta}_s^{*w_i+1}$. Тоді з (5.30), (5.31) випливає

$$d_i(\widehat{\theta}_s^*, \widehat{u}_s^*) = \widehat{d}_i(\widehat{\theta}_s^*, \widehat{u}_s^*) + \sum_{m=1}^{w_i} p_{mi}(\widehat{d}_1, \dots, \widehat{d}_n)(\widehat{\theta}_s^*, \widehat{u}_s^*) + \bar{o}((\widehat{\theta}_s^*)^{w_i}), \tag{5.35}$$

при $s \to 0$, $s \in \Omega_\gamma$, $i = 1, \dots, n$. Позначимо

$$P_{mi}(\widehat{d}_1, \dots, \widehat{d}_n) = \begin{cases} \widehat{d}_i + p_{mi}(\widehat{d}_1, \dots, \widehat{d}_n), & \text{якщо} \ \ m = \widehat{w}_i, \\ p_{mi}(\widehat{d}_1, \dots, \widehat{d}_n) & \text{в іншому випадку.} \end{cases} \tag{5.36}$$

Зафіксуємо s і застосуємо (5.35) для $s_\varepsilon = \widehat{D}_\varepsilon(s) \in \Omega_\gamma$ замість s. За однорідністю,

$$\widehat{\theta}_{s_\varepsilon}^* = \varepsilon\widehat{\theta}_s^* \ \text{ і } \ \widehat{u}_{s_\varepsilon}^*(t) = \widehat{u}_s^*(t/\varepsilon), \ t \in [0, \widehat{\theta}_{s_\varepsilon}^*]. \tag{5.37}$$

Отже, отримуємо

$$\varepsilon^{w_i} d_i(\widehat{\theta}_s^*, \widehat{u}_s^*) = \sum_{m=1}^{w_i} \varepsilon^m P_{mi}(\widehat{d}_1, \dots, \widehat{d}_n)(\widehat{\theta}_s^*, \widehat{u}_s^*) + \bar{o}(\varepsilon^{w_i}) \ \text{ при } \varepsilon \to 0,$$

звідки

$$P_{mi}(\widehat{d}_1, \dots, \widehat{d}_n)(\widehat{\theta}_s^*, \widehat{u}_s^*) = 0, \ m \le w_i - 1, \tag{5.38}$$

$$d_i(\widehat{\theta}_s^*, \widehat{u}_s^*) = P_{w_i i}(\widehat{d}_1, \dots, \widehat{d}_n)(\widehat{\theta}_s^*, \widehat{u}_s^*) \tag{5.39}$$

$i = 1, \dots, n$, для $s \in \Omega_\gamma$. Враховуючи (5.29), отримуємо з (5.38)

$$P_{mi}(s_1, \dots, s_n) = 0, \ m \le w_i - 1,$$

для всіх $s \in \bigcup\limits_{\gamma \in \Gamma} \Omega_\gamma$, звідки отримуємо, що поліноми P_{mi} нульові, $P_{mi} \equiv 0$, при $m \le w_i - 1$. Зокрема, з (5.36) випливає $\widehat{w}_i \ge w_i$, $i = 1, \dots, n$.

(б) Тепер розглянемо (5.39) і застосуємо індукцію. Припустимо, що

$$\begin{aligned} & w_j = \dots = w_{j+q} = c, \\ & w_i < c \ \text{ при } \ i \le j-1 \ \text{ і } w_i > c \ \text{ при } \ i \ge j+q+1. \end{aligned} \tag{5.40}$$

Нехай $j = 1$ або

$$j \ge 2 \ \text{ і } \ \widehat{d}_i = d_i \quad i = 1, \dots, j-1. \tag{5.41}$$

Як показано вище, $\widehat{w}_i \geq w_i$ для всіх $i = 1, \ldots, n$. Отже, якщо $j \geq 2$, то за припущенням індукції

$$\mathcal{J}_{a,b}^{\perp} \cap \mathcal{A}^m = \mathcal{J}_{\widehat{a},\widehat{b}}^{\perp} \cap \mathcal{A}^m, \quad m = 1, \ldots, c-1. \tag{5.42}$$

Оскільки $\mathrm{ord}(P_{c(j+r)}(\widehat{d}_1, \ldots, \widehat{d}_n)) = c$ і $\widehat{w}_i \geq w_i > c$ при $i > j + q$, отримуємо $P_{c(j+r)}(\widehat{d}_1, \ldots, \widehat{d}_n) = P_{c(j+r)}(\widehat{d}_1, \ldots, \widehat{d}_{j+q})$. Для скорочення тимчасово позначимо $f_{j+r} = P_{c(j+r)}(\widehat{d}_1, \ldots, \widehat{d}_{j+q})$.

Оскільки Ω_γ відкрита, то $\widehat{x}^*(\delta) \in \Omega_\gamma$ при $0 < \delta < \delta_0$. Отже, розглядаючи (5.39) для $i = j + r$, $r = 0, \ldots, q$, і для $\widehat{x}^*(\delta)$ замість s, отримуємо

$$d_{j+r}(\theta_\delta, u_\delta) = f_{j+r}(\theta_\delta, u_\delta), \;\; r = 0, \ldots, q, \;\; 0 < \delta < \delta_0, \tag{5.43}$$

де $\theta_\delta = \widehat{\theta}_s^* - \delta$, $u_\delta(t) = \widehat{u}_{\widehat{x}^*(\delta)}^*(t) = \widehat{u}_s^*(t + \delta)$, $t \in [0, \theta_\delta]$. Отже, з леми 5.4 випливає

$$\varphi'(d_{j+r})(\theta, u) + u(0)\psi_0'(d_{j+r})(\theta, u) = \varphi'(f_{j+r})(\theta, u) + u(0)\psi_0'(f_{j+r})(\theta, u), \tag{5.44}$$

де $\theta = \widehat{\theta}_s^*$, $u = \widehat{u}_s^*$. За побудовою $d_{j+r} \in \mathcal{J}_{a,b}^{\perp}$ і $f_{j+r} \in \mathcal{J}_{\widehat{a},\widehat{b}}^{\perp}$, отже, застосовуючи наслідок 5.7 і використовуючи (5.42), маємо

$$\varphi'(d_{j+r}), \psi_0'(d_{j+r}) \in \mathcal{J}_{a,b}^{\perp} \cap \mathcal{A}^{c-1} = \mathcal{J}_{\widehat{a},\widehat{b}}^{\perp} \cap \mathcal{A}^{c-1},$$

$$\varphi'(f_{j+r}), \psi_0'(f_{j+r}) \in \mathcal{J}_{\widehat{a},\widehat{b}}^{\perp} \cap \mathcal{A}^{c-1},$$

звідки для всіх $r = 0, \ldots, q$

$$\varphi'(d_{j+r} - f_{j+r}) \in \mathcal{J}_{\widehat{a},\widehat{b}}^{\perp} \cap \mathcal{A}^{c-1}, \quad \psi_0'(d_{j+r} - f_{j+r}) \in \mathcal{J}_{\widehat{a},\widehat{b}}^{\perp} \cap \mathcal{A}^{c-1}.$$

Але базис $\mathcal{J}_{\widehat{a},\widehat{b}}^{\perp}$ складається з поліномів відносно тасуючого добутку від $\widehat{d}_1, \ldots, \widehat{d}_n$. Зауважимо, що $\mathrm{ord}(d_{j+r}) = \mathrm{ord}(f_{j+r}) = c \leq \widehat{w}_j$. Отже, для деяких поліномів P_{1r} і P_{2r}

$$\varphi'(d_{j+r} - f_{j+r}) = P_{1r}(\widehat{d}_1, \ldots, \widehat{d}_{j-1}), \quad \psi_0'(d_{j+r} - f_{j+r}) = P_{2r}(\widehat{d}_1, \ldots, \widehat{d}_{j-1}). \tag{5.45}$$

Тоді з (5.44) отримуємо

$$P_{1r}(\widehat{d}_1, \ldots, \widehat{d}_{j-1})(\theta, u) + u(0)P_{2r}(\widehat{d}_1, \ldots, \widehat{d}_{j-1})(\theta, u) = 0,$$

де $\theta = \widehat{\theta}_s^*$, $u = \widehat{u}_s^*$. Тепер, згадуючи (5.29), отримуємо

$$P_{1r}(s_1, \ldots, s_{j-1}) + u(0) P_{2r}(s_1, \ldots, s_{j-1}) = 0 \tag{5.46}$$

для всіх $s \in \bigcup\limits_{\gamma \in \Gamma} \Omega_\gamma$, де $u(0) = \widehat{u}_s^*(0)$.

Припустимо, що поліном P_{2r} ненульовий. Застосуємо умову теореми щодо вертикальних прямих. Розглянемо множину $\Omega'' = \{x \in \Omega' : P_{2r}(x_1, \ldots, x_{j-1}) \neq 0\}$, що непорожня, оскільки $\Omega' \neq \varnothing$ є відкритою. Для довільного $x \in \Omega''$ оптимальне керування дорівнює $u(x) = -\frac{P_{1r}(x_1,\ldots,x_{j-1})}{P_{2r}(x_1,\ldots,x_{j-1})}$, отже, воно залежить тільки від перших $j-1$ координат точки x (де $j - 1 \leq n - 1$). Тобто оптимальне керування є сталим на перетині Ω'' з будь-якою вертикальною прямою, що суперечить умові теореми.

Отже, поліном P_{2r} нульовий, а тоді P_{1r} теж нульовий. Тоді з (5.45) випливає, що $d_{j+r} - f_{j+r} \in \mathrm{Ker}(\varphi') \cap \mathrm{Ker}(\psi_0')$. За лемою 5.2 $d_{j+r} = f_{j+r}$, звідки

$$d_{j+r} = P_{c(j+r)}(\widehat{d}_1, \ldots, \widehat{d}_{j+q}),\ r = 0, \ldots, q. \tag{5.47}$$

Якщо $\widehat{w}_{j+r} > w_{j+r} = c$, то за означенням (5.36) $P_{c(j+r)}(\widehat{d}_1, \ldots, \widehat{d}_{j+q}) = p_{c(j+r)}(\widehat{d}_1, \ldots, \widehat{d}_{j-1})$ є поліномом відносно тасуючого добутку без лінійних членів, отже, $P_{c(j+r)}(\widehat{d}_1, \ldots, \widehat{d}_{j+q}) \in \mathcal{L}^\perp$. Але $d_{j+r} \notin \mathcal{L}^\perp$, що суперечить (5.47).

Отже, $\widehat{w}_{j+r} = w_{j+r} = c$ для всіх $r = 0, \ldots, q$. Тоді з (5.36) і (5.47) випливає

$$d_{j+r} = \widehat{d}_{j+r} + p_{c(j+r)}(\widehat{d}_1, \ldots, \widehat{d}_{j-1}), \quad r = 0, \ldots, q. \tag{5.48}$$

Нагадаємо, що $p_{c(j+r)}$ є лінійною комбінацією елементів спряженого базису вигляду (3.47). Отже, якщо $p_{c(j+r)}$ містить моном $\widehat{d}_1^{ш q_1} ш \cdots ш \widehat{d}_{j-1}^{ш q_{j-1}}$ з ненульовим коефіцієнтом, то $p_{c(j+r)}(\widehat{d}_1, \ldots, \widehat{d}_{j-1})$ не є ортогональним до елемента $\widehat{\ell}_{j-1}^{q_{j-1}} \cdots \widehat{\ell}_1^{q_1}$, де однорідні елементи $\widehat{\ell}_1, \ldots, \widehat{\ell}_n$ доповнюють $\mathcal{L}_{\widehat{a},\widehat{b}}$ до $\mathcal{L}$. Але з припущення індукції (5.41) випливає, що $\widehat{\ell}_i = \ell_i$, $i = 1, \ldots, j-1$, де однорідні елементи $\ell_1, \ldots, \ell_n$ доповнюють $\mathcal{L}_{a,b}$ до $\mathcal{L}$. Отже, обидва елементи d_{j+r} і $\widehat{d}_{j+r}$ ортогональні до $\widehat{\ell}_{j-1}^{q_{j-1}} \cdots \widehat{\ell}_1^{q_1}$, що суперечить (5.48). Отже, поліном $p_{c(j+r)}$ нульовий, $p_{c(j+r)}(\widehat{d}_1, \ldots, \widehat{d}_{j-1}) \equiv 0$, звідки

$$d_{j+r} = \widehat{d}_{j+r}, \quad r = 0, \ldots, q.$$

За індукцією отримуємо, що $d_s = \widehat{d}_s$ для $s = 1, \ldots, n$. Це означає, що $\mathcal{J}^{\perp}_{a,b} = \mathcal{J}^{\perp}_{\widehat{a},\widehat{b}}$, звідки випливає $\mathcal{J}_{a,b} = \mathcal{J}_{\widehat{a},\widehat{b}}$. ■

Нагадаємо, що за умовою теореми 5.4 керування $\widehat{u}^*_s$ є оптимальними за швидкодією. Але оптимальність не використовується у доведенні. Використовуються лише такі дві властивості керувань $\widehat{u}^*_s$ і $u^*_{x^0}$: вимога (5.37), що означає однорідність, і властивість (5.28), пов'язана з автономністю системи. Можна узагальнити теорему, припускаючи, що для довільної точки $s \in \Omega$ вибирається керування $\widehat{u}^*_s$, яке переводить точку s до нуля в силу системи (5.23), задовольняє (5.37), (5.28), умову теореми щодо вертикальних прямих і є близьким до керування, що переводить точку $Q(s)$ до нуля в силу системи (5.19), — так, щоб виконувалось (5.35). Тоді можна повторити доведення теореми 5.4 і отримати, що вказані дві системи мають один і той самий правий ідеал.

Умову щодо вертикальних прямих з теореми 5.4, що використовується для отримання рівності $P_{1r} = P_{2r} = 0$ з (5.46), можна замінити дещо іншими вимогами. Наприклад, можна вимагати, щоб існувало число $\alpha \in \mathbb{R}$ і дві відкритих множини $M_1, M_2 \subset \bigcup\limits_{\gamma \in \Gamma} \Omega_\gamma$, для яких $\widehat{u}^*_s(0) = \alpha$ при $s \in M_1$ і $\widehat{u}^*_s(0) \neq \alpha$ при $s \in M_2$.

5.2.2.2 Загальний випадок

Тепер, разом із системою загального вигляду (2.25) розглянемо *однорідну* неавтономну систему (2.53). Нехай $d_1, \ldots, d_n$ і $\widehat{d}_1, \ldots, \widehat{d}_n$ визначаються так само, як у попередньому підпункті, і розв'язки задач швидкодії (5.10), (5.11) збігаються відповідно з розв'язками min-проблем моментів (5.26), (5.27).

Лема 5.5. *Зафіксуємо $\theta > 0$, функції $v(t)$ і $w(t)$, $t \in [0, \theta]$, і розглянемо таке сімейство керувань:*

$$v_\delta(t) = \begin{cases} v(t), & t \in [0, \delta) \\ w(t), & t \in [\delta, \theta], \end{cases} \qquad 0 < \delta < \delta_0 < \theta,$$

де ми вважаємо, що $v(t)$ і $w(t)$ неперервні на інтервалі $(0, \delta_0)$. Нехай $z \in \mathcal{A}$ і

$$q_0 = \min\{q : \psi'_q(z) \neq 0\}.$$

Тоді

$$\frac{d}{d\delta} z(\theta, v_\delta) = \delta^{q_0}(v(\delta) - w(\delta))\psi'_{q_0}(z)(\theta, w) + \bar{o}(\delta^{q_0}).$$

Доведення. Використаємо позначення (5.7). Якщо $k = 1$, то

$$\frac{d}{d\delta}\xi_{m_1}(\theta, v_\delta) = \frac{d}{d\delta}\left(\xi_{m_1}(\delta, v) + \xi_{m_1}(\delta, \theta, w)\right) = \delta^{m_1} v(\delta) - \delta^{m_1} w(\delta).$$

Для $k \geq 2$ маємо

$$\xi_{m_1 \dots m_k}(\theta, v_\delta) = \xi_{m_1 \dots m_k}(\delta, v) + \sum_{i=1}^{k-1} \xi_{m_{i+1} \dots m_k}(\delta, v)\xi_{m_1 \cdots m_i}(\delta, \theta, w) + \xi_{m_1 \cdots m_k}(\delta, \theta, w).$$

Зауважимо, що

$$\frac{d}{d\delta}\xi_{m_{i+1} \dots m_k}(\delta, v) = v(\delta)\delta^{m_{i+1}}\xi_{m_{i+2} \dots m_k}(\delta, v),$$

$$\frac{d}{d\delta}\xi_{m_1 \cdots m_i}(\delta, \theta, w) = -w(\delta)\delta^{m_i}\xi_{m_1 \dots m_{i-1}}(\delta, \theta, w).$$

Зазначимо також, що

$$\xi_{m_{i+1} \dots m_k}(\delta, v) = \bar{o}(\delta^{m_k}), \quad i \leq k - 1,$$

$$\xi_{m_1 \dots m_{k-1}}(\delta, \theta, w) = \xi_{m_1 \dots m_{k-1}}(\theta, w) + \bar{o}(1), \quad k \geq 2.$$

Тоді

$$\frac{d}{d\delta}(\xi_{m_1 \dots m_k}(\theta, v_\delta)) =$$

$$= v(\delta)\underbrace{\delta^{m_1}\xi_{m_2 \dots m_k}(\delta, v)}_{=\bar{o}(\delta^{m_k})} + \sum_{i=1}^{k-1}\underbrace{v(\delta)\delta^{m_{i+1}}\xi_{m_{i+2} \dots m_k}(\delta, v)\xi_{m_1 \cdots m_i}(\delta, \theta, w)}_{=\bar{o}(\delta^{m_k}) \text{ крім } i=k-1} -$$

$$-\sum_{i=1}^{k-1}\underbrace{\xi_{m_{i+1} \dots m_k}(\delta, v)w(\delta)\delta^{m_i}\xi_{m_1 \dots m_{i-1}}(\delta, \theta, w)}_{=\bar{o}(\delta^{m_k})} - w(\delta)\delta^{m_k}\xi_{m_1 \dots m_{k-1}}(\delta, \theta, w) =$$

$$= v(\delta)\delta^{m_k}\xi_{m_1 \dots m_{k-1}}(\theta, w) - w(\delta)\delta^{m_k}\xi_{m_1 \dots m_{k-1}}(\theta, w) + \bar{o}(\delta^{m_k}),$$

що завершує доведення. ∎

Означення 5.5. *Ми кажемо, що множина функцій $V \subset L_\infty[0,1]$ тотальна для однорідної системи (2.53), якщо*

$$\operatorname{int}\{\widehat{D}_\varepsilon(S_{\widehat{a},\widehat{b}}(1,u)) : u \in V,\ \varepsilon > 0\} \neq \varnothing.$$

Нехай множина $\Omega \subset \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$, $0 \in \overline{\Omega}$ є такою, що $\widehat{D}_\varepsilon(\Omega) = \Omega$, $\varepsilon > 0$, причому задача (5.27) має єдиний розв'язок $(\widehat{\theta}_s^*, \widehat{u}_s^*)$ для всіх $s \in \Omega$. Введемо позначення

$$V_{\widehat{a},\widehat{b}}(\Omega) = \{\widehat{u}_s^*(t\widehat{\theta}_s^*) : s \in \Omega\} \subset L_\infty[0,1].$$

Лема 5.6. *Нехай (2.53) — однорідна система і $\widehat{d}_i$ — елементи відповідного спряженого базису. Нехай $P(\widehat{d}_1, \ldots, \widehat{d}_n)$ — однорідний поліном відносно тасуючого добутку і $P(\widehat{d}_1, \ldots, \widehat{d}_n)(1,u) = 0$ для всіх $u \in V$, де $V \subset V_{\widehat{a},\widehat{b}}(\Omega)$ є тотальною множиною. Тоді P нульовий, тобто $P \equiv 0$.*

Доведення. Оскільки $V \subset V_{\widehat{a},\widehat{b}}(\Omega)$, то для кожного $u \in V$ існує таке $s \in \Omega$, що $u(t) = \widehat{u}_s^*(t\widehat{\theta}_s^*)$. Тоді $s_i = (\widehat{\theta}_s^*)^{\widehat{w}_i}\widehat{d}_i(1,u)$, $k = 1, \ldots, n$. Нехай

$$P(\widehat{d}_1, \ldots, \widehat{d}_n) = \sum_{\widehat{w}_1 q_1 + \cdots + \widehat{w}_n q_n = m} \alpha_{q_1 \ldots q_n} \widehat{d}_1^{\,ш q_1} \,ш \cdots ш\, \widehat{d}_n^{\,ш q_n},$$

тоді

$$P(\widehat{d}_1, \ldots, \widehat{d}_n)(1,u) = (\widehat{\theta}_s^*)^{-m} \sum_{\widehat{w}_1 q_1 + \cdots + \widehat{w}_n q_n = m} \alpha_{q_1 \ldots q_n} s_1^{q_1} \cdots s_n^{q_n}.$$

Отже,

$$P(s_1, \ldots, s_n) = \sum_{\widehat{w}_1 q_1 + \cdots + \widehat{w}_n q_n = m} \alpha_{q_1 \ldots q_n} s_1^{q_1} \cdots s_n^{q_n} = 0$$

для всіх s, для яких $\widehat{u}_s^*(t\widehat{\theta}_s^*) \in V$, тобто для всіх $s = \widehat{D}_\varepsilon(\widehat{d}(1,u))$, $u \in V$, $\varepsilon > 0$. Оскільки V тотальна, за припущенням леми поліном $P(s_1, \ldots, s_n)$ від n змінних дорівнює нулю на множині з непорожньою внутрішністю, тобто цей поліном нульовий, $P \equiv 0$. ■

Означення 5.6. *Ми кажемо, що множина функцій $V \subset L_\infty[0,1]$ субтотальна для однорідної системи (2.53), якщо проекція множини $\{\widehat{D}_\varepsilon(S_{\widehat{a},\widehat{b}}(1,u)) : u \in V,\ \varepsilon > 0\}$ на підпростір $P = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n = 0\}$ має непорожню відносну внутрішність (в $\mathbb{R}^{n-1}$).*

Для субтотальних множин отримуємо такий наслідок леми 5.6.

Наслідок 5.8. *Нехай (2.53) — однорідна система і $\widehat{d}_i$ — елементи відповідного спряженого базису. Нехай $P(\widehat{d}_1, \ldots, \widehat{d}_{n-1})$ — однорідний поліном відносно тасуючого добутку і $P(\widehat{d}_1, \ldots, \widehat{d}_{n-1})(1, w) = 0$ для всіх $w \in W$, де $W \subset V_{\widehat{a},\widehat{b}}(\Omega)$ є субтотальною множиною. Тоді P нульовий, тобто $P \equiv 0$.*

Теорема 5.5. *Припустимо, що задача швидкодії (5.11) для однорідної системи апроксимує задачу швидкодії (5.10) в області Ω, яка задовольняє умову $\widehat{D}_\varepsilon(\Omega) = \Omega$, $\varepsilon > 0$. Нехай існують два числа $\alpha_1 \neq \alpha_2$ і дві множини $V, W \subset V_{\widehat{a},\widehat{b}}(\Omega)$, для яких*

(i) довільна функція $w(t) \in W$ є неперервною на $t \in [0, \varepsilon_1]$ для деякого $\varepsilon_1 > 0$ і $w(0) = \alpha_1$;

(ii) для довільної $w(t) \in W$ існує $v(t)$, $t \in [0, \delta]$, яка є неперервною на $t \in [\delta - \varepsilon_2, \delta]$ для деякого $\varepsilon_2 > 0$, причому $v(\delta) = \alpha_2$ і $v_\delta(t) \in V$, де

$$v_\delta(t) = \begin{cases} v(t), & t \in [0, \delta) \\ w(\frac{t-\delta}{1-\delta}), & t \in [\delta, 1]; \end{cases}$$

(iii) множина V є тотальною, а множина W є субтотальною.

Тоді система (2.53) є однорідною апроксимацією системи (2.25).

Доведення. Ми використовуємо позначення з доведення теореми 5.4. Повторюючи частину (a) з очевидними змінами, отримуємо, що $\widehat{w}_i \geq w_i$ і виконуються рівності (5.39) для всіх $u = \widehat{u}_s^* \in V$. Застосовуючи індукцію, припустимо, що виконуються (5.40) і (5.41), звідки випливає (5.42).

Зафіксуємо довільне $w \in W$ і розглянемо сімейство керувань $u_\delta(t) \in V$. Тоді аналогічно (5.43) отримуємо

$$d_{j+r}(1, v_\delta) = f_{j+r}(1, v_\delta), \ r = 0, \ldots, q, \ 0 < \delta < \delta_0. \tag{5.49}$$

Скористаємось індукцією. Нехай $i = 0$ або $i \geq 1$ і

$$\psi_p'(d_{j+r} - f_{j+r}) = 0, \quad p = 0, \ldots, i - 1.$$

Тоді за лемою 5.5

$$(\alpha_2-\alpha_1)\delta^i\psi_i'(d_{j+r}-f_{j+r})(1,w)+\bar{o}(\delta^i)=0, \quad 0<\delta\le\delta_0,$$

отже,

$$\psi_i'(d_{j+r}-f_{j+r})(1,w)=0. \tag{5.50}$$

За побудовою $d_{j+r}\in\mathcal{J}_{a,b}^{\perp}$ і $f_{j+r}\in\mathcal{J}_{\widehat{a},\widehat{b}}^{\perp}$. Отже, з (5.42) і наслідку 5.6 отримуємо

$$\psi_i'(d_{j+i}-f_{j+i})\in\mathcal{J}_{\widehat{a},\widehat{b}}^{\perp}\cap\mathcal{A}^{c-1},$$

а отже, для деякого полінома P_i

$$\psi_i'(d_{j+r}-f_{j+r})=P_i(\widehat{d}_1,\dots,\widehat{d}_{j-1}).$$

Тоді з (5.50) випливає

$$P_i(\widehat{d}_1,\dots,\widehat{d}_{j-1})(1,w)=0$$

для всіх $w\in W$, де $j-1\le n-1$. Нагадаємо, що w може бути довільним елементом субтотальної множини W, а отже, з наслідку 5.8 випливає, що поліном P_i нульовий, $P_i\equiv 0$, звідки отримуємо $\psi_i'(d_{j+r}-f_{j+r})=0$.

За індукцією,

$$\psi_i'(d_{j+r}-f_{j+r})=0, \quad i\ge 0.$$

Отже, $d_{j+r}-f_{j+r}\in\bigcap\limits_{i=0}^{\infty}\operatorname{Ker}(\psi_i')$. Ураховуючи зауваження 5.7, отримуємо $d_{j+r}-f_{j+r}=0$, $r=0,\dots,q$.

Решта доведення повторює доведення пункту (б) теореми 5.4. ∎

Зазначимо, що вимога (ii) теореми 5.5 виконується, наприклад, якщо для множини ненульової міри оптимальні керування мають перемикання, а керування, у яких перемикань на одне менше, є оптимальними для системи, що включає перші $n-1$ координат вихідної системи. Зокрема, це має місце для лінійних (однорідних) систем.

5.3 Зв'язок між алгебрами ітерованих інтегралів і нелінійних степеневих моментів і задача реалізовності

З результатів, викладених вище, випливає, що структури, які породжує лінійна або афінна за керуванням система в алгебрі $\mathcal{F}$ або $\mathcal{A}$ відповідно, схожі. Очевидно, це пояснюється тим, що між цими класами систем є тісний зв'язок: лінійна система є частковим випадком афінної; з іншого боку, афінна система може бути розглянута як лінійна з додатковим керуванням, що дорівнює 1. У цьому підрозділі ми описуємо цей зв'язок в алгебраїчних термінах; це дозволяє отримати умови реалізовності ряду нелінійних степеневих моментів як наслідок умов реалізовності ряду ітерованих інтегралів. Результати опубліковано у роботі [128].

5.3.1 Зв'язок між алгебрами ітерованих інтегралів і нелінійних степеневих моментів

Розглянемо траєкторії автономної системи (5.19), які починаються в точці $x(0) = x^0$ з деякого околу нуля, а закінчуються в нулі, $x(\theta) = 0$. У цьому розділі ми будемо використовувати таке позначення для диференціального оператора, що відповідає векторному полю $v(x)$:

$$L_v\phi(x) = \phi_x(x)v(x),$$

де $\phi(x)$ — довільна вектор-функція (для того, щоб спростити порівняння з формулами, в які входять оператори R_v).

Позначимо $u_0(t) \equiv 1$, $u_1(t) = u(t)$, тоді система набуває вигляду

$$\dot{x} = a(x)u_0 + b(x)u_1,\ a(0) = 0,\quad x(0) = x^0,\ x(\theta) = 0.$$

Замінимо час і введемо змінні $y(t) = x(\theta - t)$, тоді $y(0) = x(\theta) = 0$, $y(\theta) = x(0) = x^0$. Тоді за теоремою 1.3

$$x(0) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i_1,\ldots,i_k\in\{0,1\}} (-1)^k c'_{i_1\ldots i_k} \int_0^\theta \int_0^{\tau_1} \cdots \int_0^{\tau_{k-1}} \prod_{j=1}^{k} u_{i_j}(\tau_j)d\tau_k \cdots d\tau_2 d\tau_1, \quad (5.51)$$

де $c'_{i_1\dots i_k} = L_{i_1}\cdots L_{i_k}E(0)$, $i_1,\dots,i_k\in\{0,1\}$, і використані позначення

$$L_0\phi(x) = L_a\phi(x) = \phi_x(x)a(x), \quad L_1\phi(x) = L_b\phi(x) = \phi_x(x)b(x). \tag{5.52}$$

Це означає, що відповідна алгебра $\mathcal{F}$ породжується *двома* елементами (літерами), які ми позначаємо η_0 та η_1 (вони відповідають ітерованим інтегралам $\eta_0(\theta,u)=\int_0^\theta u_0(t)dt$ і $\eta_1(\theta,u)=\int_0^\theta u_1(t)dt$).

Тепер урахуємо, що нуль є точкою спокою системи (5.19), тобто $a(0)=0$, звідки випливає, що $L_a\phi(0)=\phi_x(0)a(0)=0$ для будь-якої дійсно-аналітичної функції $\phi(x)$, а отже,

$$c'_{0i_1\dots i_m}=0 \;\text{ для всіх }\; i_1,\dots,i_m\in\{0,1\},\; m\ge 0.$$

Тобто зображення (5.51) повністю визначається підалгеброю

$$\mathcal{F}' = \mathrm{Lin}\{\eta_{1i_1\dots i_m} : i_1,\dots,i_m\in\{0,1\}, m\ge 0\}\subset\mathcal{F},$$

операція в якій успадковується від $\mathcal{F}$. Зауважимо, що $\mathcal{F}'$ є вільною алгеброю, що породжена послідовністю елементів $\{\eta_1\eta_0^m : m\ge 0\}$.

У цьому розділі нам зручно використовувати позначення $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}$ для вільної підалгебри Лі, яка породжується множиною $\{\eta_0,\eta_1\}$. Нехай $\mathcal{L}_{\mathcal{F}'}$ позначає вільну підалгебру Лі, яка породжується множиною $\{\eta_1\eta_0^m : m\ge 0\}$. Зауважимо, що алгебра Лі $\mathcal{L}_{\mathcal{F}'}$ не є підалгеброю $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}$: наприклад, $[\eta_1,\eta_1\eta_0] = \eta_1^2\eta_0-\eta_1\eta_0\eta_1=\eta_1[\eta_1,\eta_0]\notin\mathcal{L}_{\mathcal{F}}$.

Елементи $\eta_1\eta_0^m$ відповідають в алгебрі $\mathcal{F}^\theta$ ітерованим інтегралам

$$\eta_1\eta_0^m(\theta,u) = \int\limits_0^\theta\int\limits_0^{\tau_1}\cdots\int\limits_0^{\tau_m} u_1(\tau_1)u_0(\tau_2)\cdots u_0(\tau_m)d\tau_{m+1}\cdots d\tau_2 d\tau_1 =$$

$$= \int\limits_0^\theta\int\limits_0^{\tau_1}\cdots\int\limits_0^{\tau_m} u(\tau_1)d\tau_{m+1}\cdots d\tau_2 d\tau_1 = \frac{1}{m!}\int\limits_0^\theta \tau^m u(\tau)d\tau,$$

тобто вони збігаються зі степеневими моментами $\frac{1}{m!}\xi_m(\theta,u)$. Тому природно ідентифікувати $\eta_1\eta_0^m$ і $\frac{1}{m!}\xi_m$.

Загалом, будемо ідентифікувати елементи з алгебр $\mathcal{F}'$ і $\mathcal{A}$, що відповідають одному й тому самому інтегралу; така бієкція між породжувальними елементами алгебр $\mathcal{A}$ і $\mathcal{F}'$ визначає бієкцію між самими алгебрами (як множинами). Підкреслимо, що ця бієкція не є ізоморфізмом алгебр.

Виразимо алгебраїчну операцію в $\mathcal{A}$ через алгебраїчну операцію в $\mathcal{F}'$. У цьому пункті будемо позначати алгебраїчну операцію в $\mathcal{A}$ позначкою $\cdot$, щоб відрізняти її від операції в $\mathcal{F}'$ (для якої позначку опускаємо).

Розглянемо спочатку відповідність між ітерованими інтегралами і степеневими моментами. Маємо:

$$\xi_{m_1\ldots m_k}(\theta,u)=\int_0^\theta \tau_1^{m_1}u(\tau_1)\xi_{m_2\ldots m_k}(\tau_1,u)d\tau_1=$$

$$=m_1!\int_0^\theta u(\tau_1)\eta_0^{m_1}(\tau_1,u)\xi_{m_2\ldots m_k}(\tau_1,u)d\tau_1=$$

$$=m_1!\int_0^\theta u(\tau_1)(\eta_0^{m_1}\sqcup\!\sqcup\,\xi_{m_2\ldots m_k})(\tau_1,u)d\tau_1=m_1!\eta_1(\eta_0^{m_1}\sqcup\!\sqcup\,\xi_{m_2\ldots m_k})(\theta,u),$$

отже,

$$\xi_{m_1}\cdot\ldots\cdot\xi_{m_k}=\xi_{m_1\ldots m_k}=m_1!\eta_1(\eta_0^{m_1}\sqcup\!\sqcup\,\xi_{m_2\ldots m_k}).$$

Продовжуючи за індукцією, отримуємо наступне твердження.

Лема 5.7. *Для всіх $k\geq 1$ і $m_1,\ldots,m_k\geq 0$*

$$\xi_{m_1}\cdot\ldots\cdot\xi_{m_k}=m_1!\ldots m_k!\eta_1\Bigg(\eta_0^{m_1}\sqcup\!\sqcup\,\eta_1\Bigg(\eta_0^{m_2}\sqcup\!\sqcup\,\eta_1(\cdots(\eta_0^{m_{k-1}}\sqcup\!\sqcup\,\eta_1\eta_0^{m_k})\cdots)\Bigg)\Bigg); \tag{5.53}$$

тут і далі в записах ми вважаємо, що алгебраїчна операція в $\mathcal{F}$ має більший пріоритет, ніж тасуючий добуток.

Ця лема дозволяє виразити елементи $\xi_{m_1\ldots m_k}=\xi_{m_1}\cdot\ldots\cdot\xi_{m_k}$ як лінійні комбінації елементів $\mathcal{F}'$. Наприклад,

$$\xi_{00}=\eta_1\eta_1=\eta_{11},\quad \xi_{10}=\eta_1(\eta_0\sqcup\!\sqcup\,\eta_1)=\eta_1(\eta_{01}+\eta_{10})=\eta_{101}+\eta_{110},$$

$$\xi_{110}=\eta_1(\eta_0\sqcup\!\sqcup\,\eta_1(\eta_0\sqcup\!\sqcup\,\eta_1))=\eta_1(\eta_0\sqcup\!\sqcup(\eta_{101}+\eta_{110}))=$$

$$=\eta_{10101}+2\eta_{11001}+2\eta_{11010}+\eta_{10110}+2\eta_{11100}.$$

Введемо в $\mathcal{F}'$ скалярний добуток, успадкований від $\mathcal{F}$.

Лема 5.8. *Послідовність $\xi_{m_1\dots m_k} \in \mathcal{F}'$ є біортогональною до послідовності*

$$\chi_{n_1\dots n_p} = \frac{(-1)^{n_2+\dots+n_p}}{n_1!\dots n_p!}\eta_1\eta_0^{n_1}\mathrm{ad}_{\eta_0}^{n_2}\eta_1\cdots\mathrm{ad}_{\eta_0}^{n_p}\eta_1,$$

тобто

$$\left\langle \xi_{m_1\dots m_k}, \chi_{n_1\dots n_p}\right\rangle = \begin{cases} 1 \ \textit{при}\ p=k,\ m_1=n_1,\dots,m_k=n_k, \\ 0 \ \textit{в іншому випадку.}\end{cases}$$

Доведення. Треба довести, що скалярний добуток

$$\left\langle \eta_1\left(\eta_0^{m_1} ш\, \eta_1\left(\eta_0^{m_2} ш\, \eta_1(\cdots(\eta_0^{m_{k-1}} ш\, \eta_1\eta_0^{m_k})\cdots)\right)\right), \eta_1\eta_0^{n_1}\mathrm{ad}_{\eta_0}^{n_2}\eta_1\cdots\mathrm{ad}_{\eta_0}^{n_p}\eta_1\right\rangle \tag{5.54}$$

дорівнює $(-1)^{n_2+\dots+n_p}$, якщо $p=k$ і $m_1=n_1,\dots,m_k=n_k$, і дорівнює 0 в іншому випадку. Оскільки всі доданки першого множника містять k літер η_0, а всі доданки другого множника містять p літер η_0, то очевидно, що при $p \neq k$ вказаний скалярний добуток дорівнює нулю.

Нехай $p=k$. Застосуємо індукцію по k. При $k=1$ маємо:

$$\langle \eta_1\eta_0^{m_1}, \eta_1\eta_0^{n_1}\rangle = 1$$

тоді і тільки тоді, коли $n_1 = m_1$.

Припустимо, що для деякого $k=p\geq 1$ усі скалярні добутки вигляду (5.54) дорівнюють $(-1)^{n_2+\dots+n_k}$, якщо $m_1=n_1,\dots,m_k=n_k$, і дорівнюють 0 в іншому випадку. Нехай $m_1,\dots,m_{k+1}$, $n_1,\dots,n_{k+1}$ — невід'ємні цілі числа. Позначимо

$$\omega = \eta_0^{m_3} ш\, \eta_1(\cdots(\eta_0^{m_k} ш\, \eta_1\eta_0^{m_{k+1}})\cdots), \quad \sigma = \mathrm{ad}_{\eta_0}^{n_3}\eta_1\cdots\mathrm{ad}_{\eta_0}^{n_{k+1}}\eta_1$$

і розглянемо скалярний добуток

$$\gamma = \left\langle \eta_1(\eta_0^{m_1} ш\, \eta_1(\eta_0^{m_2} ш\, \eta_1\omega)(, \eta_1\eta_0^{n_1}\mathrm{ad}_{\eta_0}^{n_2}\eta_1\,\sigma\right\rangle =$$

$$= \left\langle \eta_0^{m_1} ш\, \eta_1(\eta_0^{m_2} ш\, \eta_1\,\omega), \eta_0^{n_1}\mathrm{ad}_{\eta_0}^{n_2}\eta_1\,\sigma\right\rangle.$$

Очевидно, при $m_1 < n_1$ він дорівнює нулю (тому що доданки другого множника починаються *щонайменше* з n_1 літер η_0, а доданки першого множника починаються *щонайбільше* з m_1 літер η_0. Нехай $m_1 \geq n_1$, тоді

$$\gamma = \left\langle \eta_0^{m_1-n_1} \text{ш}\, \eta_1(\eta_0^{m_2} \text{ш}\, \eta_1\, \omega), \mathrm{ad}_{\eta_0}^{n_2}\eta_1\, \sigma \right\rangle .$$

Тепер застосуємо лему 3.2 з $s = n_2 + 1 = \mathrm{ord}(\mathrm{ad}_{\eta_0}^{n_2}\eta_1)$. Позначимо

$$\omega_1 = \eta_1(\eta_0^{m_2} \text{ш}\, \eta_1\, \omega) = \sum \alpha_{j_1\ldots j_r}\eta_{j_1\ldots j_r}, \quad r = \mathrm{ord}(\omega_1), \tag{5.55}$$

отримуємо

$$\eta_0^{m_1-n_1} \text{ш}\, \omega_1 = \sum_{\substack{0\leq q\leq m_1-n_1,\ 0\leq t\leq r \\ q+t=s}} \alpha_{j_1\ldots j_r}(\eta_0^q \text{ш}\, \eta_{j_1\ldots j_t})(\eta_0^{m_1-n_1-q} \text{ш}\, \eta_{j_{t+1}\ldots j_r}).$$

Нагадаємо, що за теоремою 1.5 елемент $\mathrm{ad}_{\eta_0}^{n_2}\eta_1$ ортогональний будь-якому тасуючому добутку елементів з $\mathcal{F}$. Крім того, врахуємо, що всі доданки $\mathrm{ad}_{\eta_0}^{n_2}\eta_1$ містять одну літеру η_1, а тому цей елемент ортогональний будь-якому елементу, що містить іншу кількість літер η_1 (більше одної або нуль). Отже, $\langle \eta_0^q \text{ш}\, \eta_{j_1\ldots j_t}, \mathrm{ad}_{\eta_0}^{n_2}\eta_1\rangle = 0$ при $q \neq 0$, звідки випливає

$$\gamma = \left\langle \eta_0^{m_1-n_1} \text{ш}\, \omega_1, \mathrm{ad}_{\eta_0}^{n_2}\eta_1\, \sigma \right\rangle = \sum \alpha_{j_1\ldots j_s}\langle \eta_{j_1\ldots j_s}, \mathrm{ad}_{\eta_0}^{n_2}\eta_1\rangle\, \langle \eta_0^{m_1-n_1} \text{ш}\, \eta_{j_{s+1}\ldots j_r}, \sigma\rangle.$$

Розглянемо детальніше елемент $\eta_{j_1\ldots j_s}$; за означенням (5.55), $j_1 = 1$. Крім того, $\eta_{j_1\ldots j_s}$ містить одну літеру η_1 тільки при $m_2 \geq n_2$, причому в такому разі відповідний елемент єдиний: це $\eta_1\eta_0^{n_2}$. Оскільки $s = n_2 + 1$, маємо

$$\sum_{(j_1,\ldots,j_s)=(1,0,\ldots,0)} \alpha_{j_1\ldots j_r}\eta_{j_1\ldots j_r} = \eta_1\eta_0^{n_2}(\eta_0^{m_2-n_2} \text{ш}\, \eta_1\, \omega).$$

Отже,

$$\begin{aligned}\gamma &= \langle \eta_1\eta_0^{n_2}, \mathrm{ad}_{\eta_0}^{n_2}\eta_1\rangle\, \langle \eta_0^{m_1-n_1} \text{ш}\, \eta_0^{m_2-n_2} \text{ш}\, \eta_1\, \omega, \sigma\rangle = \\ &= (-1)^{n_2} C_{m_1-n_1+m_2-n_2}^{m_2-n_2}\langle \eta_0^{m_1-n_1+m_2-n_2} \text{ш}\, \eta_1\, \omega, \sigma\rangle,\end{aligned}$$

причому дана рівність має місце при $m_1 \geq n_1$, $m_2 \geq n_2$ (якщо ці умови не виконуються, $\gamma = 0$). Зазначимо, що скалярний добуток

$$\langle \eta_0^{m_1-n_1+m_2-n_2} \text{ш}\, \eta_1\, \omega, \sigma\rangle = \langle \eta_1(\eta_0^{m_1-n_1+m_2-n_2} \text{ш}\, \eta_1\, \omega), \eta_1\sigma\rangle$$

має вигляд (5.54), причому кількість літер η_1 у кожному множнику дорівнює k. Отже, з припущення індукції випливає

$$\gamma = \begin{cases} (-1)^{n_2+\cdots+n_{k+1}} \text{ при } m_1 - n_1 + m_2 - n_2 = 0, m_3 = n_3, \ldots, m_{k+1} = n_{k+1}, \\ 0 \quad \text{в іншому разі.} \end{cases}$$

Залишилося зауважити, що з умов $m_1 - n_1 + m_2 - n_2 = 0$, $m_1 \geq n_1$ і $m_2 \geq n_2$ випливає $m_1 = n_1$, $m_2 = n_2$. ■

Зауваження 5.9. *З леми 5.8 випливає суто алгебраїчне виведення розвинення (2.29) з розвинення (5.51) для стаціонарного випадку. Дійсно, розглянемо формальний ряд S елементів з $\mathcal{F}$, що відповідає (5.51):*

$$S = \sum \langle S, \eta_{i_1\ldots i_k} \rangle \eta_{i_1\ldots i_k},$$

де $\langle S, \eta_{i_1\ldots i_k} \rangle = (-1)^k c'_{i_1\ldots i_k}$. Перерозкладаючи його за базисом $\xi_{m_1\ldots m_k}$, отримуємо

$$S = \sum \langle S, \chi_{m_1\ldots m_k} \rangle \xi_{m_1\ldots m_k},$$

що дає (2.29), оскільки $v_{m_1\ldots m_k} = (-1)^m c'(\chi_{m_1\ldots m_k}) = \langle S, \chi_{m_1\ldots m_k} \rangle$ (де враховано, що $\mathrm{ad}_{R_a} R_b^q \phi(x)|_{x=0} = (-1)^q R_b R_a^q \phi(x)|_{x=0}$, оскільки $a(0) = 0$).

5.3.2 Умови реалізовності

5.3.2.1 Умови реалізовності для рядів ітерованих інтегралів

Розглянемо спочатку системи, *лінійні за керуванням*, причому для простоти обмежимо себе випадком двох керувань. Нам буде зручно змінити позначення (у порівнянні з розділами 2 і 4). А саме, розглянемо автономну задачу Коші

$$\dot{x} = a(x)u_0 + b(x)u_1, \ x(0) = 0,$$

де $a(x)$, $b(x)$ — дійсно аналітичні в околі нуля, і нагадаємо, що за теоремою 1.3 має місце зображення (1.35), де $c_{i_1\ldots i_k} = L_{i_k} \cdots L_{i_1} E(0)$, $i_1, \ldots, i_k \in \{0, 1\}$, $k \geq 1$, і використані позначення (5.52).

Розглянемо ще неавтономну задачу Коші

$$\dot{x} = a(t,x)u_0 + b(t,x)u_1,\ \ x(0) = 0,$$

де $a(t,x)$, $b(t,x)$ — дійсно аналітичні в околі нуля в $\mathbb{R}^{n+1}$. За теоремою 1.3 і зауваженням 1.1 має місце зображення (1.35), де $c_{i_1\ldots i_k} = R_{i_k}\cdots R_{i_1}E(0)$, $i_1,\ldots,i_k \in \{0,1\}$, $k \geq 1$, і використані позначення

$$\begin{aligned} R_0\phi(t,x) = R_a\phi(t,x) = \phi_t(t,x) + \phi_x(t,x)a(t,x), \\ R_1\phi(t,x) = R_b\phi(t,x) = \phi_x(t,x)b(t,x). \end{aligned} \tag{5.56}$$

Розглянемо тепер зворотну *задачу реалізовності*. Нехай задана множина векторів

$$\{c_{i_1\ldots i_k} \in \mathbb{R}^n : i_1,\ldots,i_k \in \{0,1\},\ \ k \geq 1\}, \tag{5.57}$$

яка задає відображення $c : \mathcal{F} \to \mathbb{R}^n$ за формулою $c(\eta_{i_1\ldots i_k}) = c_{i_1\ldots i_k}$, де $\mathcal{F}$ — вільна асоціативна алгебра, що породжена елементами $\{\eta_0,\eta_1\}$. У цьому розділі $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}$ буде позначати вільну алгебру Лі, що породжена тими самими елементами $\{\eta_0,\eta_1\}$. Далі ми будемо вважати, що відображення c задовольняє умову

$$c(\mathcal{L}_{\mathcal{F}}) = \mathbb{R}^n. \tag{5.58}$$

(i) Автономна задача: для заданої множини (5.57), яка задовольняє умову (5.58), знайти дійсно-аналітичні в околі нуля векторні поля $a(x)$, $b(x)$, такі, що

$$c_{i_1\ldots i_k} = L_{i_k}\cdots L_{i_1}E(0),\ \ \ i_1,\ldots,i_k \in \{0,1\},\ \ k \geq 1,$$

де $L_0 = L_a$, $L_1 = L_b$.

(ii) Неавтономна задача: для заданої множини (5.57), яка задовольняє умову (5.58), знайти дійсно-аналітичні в околі нуля векторні поля $a(t,x)$, $b(t,x)$, такі, що

$$c_{i_1\ldots i_k} = R_{i_k}\cdots R_{i_1}E(0),\ \ \ i_1,\ldots,i_k \in \{0,1\},\ \ k \geq 1,$$

де $R_0 = R_a$, $R_1 = R_b$.

Для стаціонарного випадку, тобто для задачі (i), розв'язок добре відомий (теорема 1.8).

Розглянемо задачу (ii). Її можна звести до спеціальної $(n+1)$-вимірної автономної задачі реалізовності. А саме, побудуємо множину

$$\begin{gathered}\{\hat{c}_{i_1\dots i_k} \in \mathbb{R}^{n+1} : i_1, \dots, i_k \in \{0,1\}, k \geq 1\}, \\ \text{де } \hat{c}_0 = (1, c_0)^\mathsf{T},\ \hat{c}_{i_1\dots i_k} = (0, c_{i_1\dots i_k})^\mathsf{T} \text{ при } \{i_1, \dots, i_k\} \neq \{0\}.\end{gathered} \tag{5.59}$$

За цією множиною побудуємо відображення $\hat{c} : \mathcal{F} \to \mathbb{R}^{n+1}$ за формулою $\hat{c}(\eta_{i_1\dots i_k}) = \hat{c}_{i_1\dots i_k}$. Позначимо також $z = (t, x)^\mathsf{T} = (z_0, \dots, z_n)^\mathsf{T}$.

(ii′) Автономна $(n+1)$-вимірна задача: для множини (5.59) знайти дійсно-аналітичні в околі нуля векторні поля $\hat{a}(z)$, $\hat{b}(z)$, такі, що

$$\hat{c}_{i_1\dots i_k} = \hat{L}_{i_k} \cdots \hat{L}_{i_1} E(0), \quad i_1, \dots, i_k \in \{0,1\},\ k \geq 1,$$

де $\hat{L}_0 = L_{\hat{a}}$, $\hat{L}_1 = L_{\hat{b}}$.

Нехай $\mathcal{L}'_\mathcal{F}$ позначає вільну алгебру Лі, що породжена множиною $\{\mathrm{ad}^m_{\eta_0}\eta_1 : m \geq 0\}$ і дужками, успадкованими з $\mathcal{L}_\mathcal{F}$. Зауважимо, що $\mathcal{L}'_\mathcal{F}$ є підалгеброю $\mathcal{L}_\mathcal{F}$. Більш того, за теоремою про виключення 1.7 (з $h_0 = 0$) отримуємо прямий розклад

$$\mathcal{L}_\mathcal{F} = \mathrm{Lin}\{\eta_0\} + \mathcal{L}'_\mathcal{F}. \tag{5.60}$$

Застосовуючи теорему 1.8, отримуємо умови розв'язання задачі (ii′).

Теорема 5.6. *Нехай за множиною (5.57), яка задовольняє умову (5.58), побудована множина (5.59). Задача (ii′) розв'язна тоді і тільки тоді, коли*

(a) *існують додатні константи C_1 і C_2, для яких*

$$\|c_{i_1\dots i_k}\| \leq k! C_1 C_2^k$$

для всіх $k \geq 1$ і всіх $i_1, \dots, i_k \in \{0,1\}$;

(b) *для будь-якого $\ell \in \mathcal{L}'_\mathcal{F}$, що задовольняє рівність $c(\ell) = 0$, виконується $c(y\ell) = 0$ для всіх $y \in \mathcal{F}$.*

Доведення. Необхідність випливає з теореми 1.3.

Достатність. Розглянемо відображення $\hat{c} : \mathcal{F} \to \mathbb{R}^{n+1}$ і покажемо, що воно задовольняє умови теореми 1.8. За побудовою, $\hat{c}(\eta_1) = (1,0)^\mathsf{T}$ і $\hat{c}(\ell) = (0, c(\ell))^\mathsf{T}$ для довільного $\ell \in \mathcal{L}_\mathcal{F}$. Ураховуючи (5.58) і (5.60), отримуємо $\hat{c}(\mathcal{L}_\mathcal{F}) = \mathbb{R}^{n+1}$.

Крім того, з (5.60) випливає, що будь-який елемент $\hat{\ell} \in \mathcal{L}_\mathcal{F}$ можна подати як $\hat{\ell} = \alpha\eta_0 + \ell$, де $\alpha \in \mathbb{R}$ і $\ell \in L'_\mathcal{F}$. Отже, $\hat{c}(\hat{\ell}) = (\alpha, \alpha c_0 + c(\ell))^\mathsf{T}$, звідки випливає, що $\hat{c}(\hat{\ell}) \neq 0$ при $\alpha \neq 0$. У випадку $\alpha = 0$ і $\hat{c}(\hat{\ell}) = 0$ отримуємо $c(\ell) = 0$, отже, $c(y\ell) = 0$ за умовою (b), звідки $\hat{c}(y\hat{\ell}) = 0$ для довільного $y \in \mathcal{F}$. Це означає, що виконується умова (b) теореми 1.8 для відображення $\hat{c}$. Умова (a) теореми 1.8 для відображення $\hat{c}$ очевидно випливає з умови (a) даної теореми. ■

Зауважимо, що умови теореми 5.6 сформульовано в термінах вихідної множини (5.57), що дозволяє отримати умови розв'язності задачі (ii).

Наслідок 5.9. *Умови теореми 5.6 необхідні і достатні для розв'язності задачі (ii).*

Доведення. Необхідність очевидна. Доведемо достатність. Нехай умови теореми 5.6 виконано і $\hat{a}(z)$, $\hat{b}(z)$ — відповідні векторні поля. Доведемо, що $\hat{a}(z) = (1, a(z))^\mathsf{T}$ і $\hat{b}(z) = (0, b(z))^\mathsf{T}$.

За означенням $\hat{c}$ отримуємо $\hat{a}_0(0) = 1$ і $\hat{b}_0(0) = 0$. Нехай H — антигомоморфізм, для якого

$$H(\eta_{i_1 \dots i_k}) = \hat{L}_{i_k} \cdots \hat{L}_{i_1}.$$

Виберемо такі $\ell_i \in \mathcal{L}_\mathcal{F}$, $i = 1, \dots, n+1$, для яких вектори $\hat{c}(\ell_i)$ лінійно незалежні, і позначимо $g_i(z) = H(\ell_i)$, $i = 1, \dots, n+1$. Тоді за означенням $\hat{c}$

$$(\hat{c}(\eta_0 \ell_{i_1} \cdots \ell_{i_j}))_0 = \hat{L}_{g_{i_j}} \cdots \hat{L}_{g_{i_1}} \hat{a}_0(z)|_{z=0} = 0,$$

$$(\hat{c}(\eta_1 \ell_{i_1} \cdots \ell_{i_j}))_0 = \hat{L}_{g_{i_j}} \cdots \hat{L}_{g_{i_1}} \hat{b}_0(z)|_{z=0} = 0$$

для будь-яких $j \geq 1$ і $i_1, \ldots, i_j \in \{1, \ldots, n+1\}$, де $\hat{L}_g \phi(z) = \phi_z(z) g(z)$. За індукцією по j легко довести, що всі похідні $\hat{a}_0(z)$, $\hat{b}(z)$ при $z = 0$ дорівнюють нулю, отже, $\hat{a}_0(z) \equiv 1$ і $\hat{b}_0(z) \equiv 0$, звідки $\hat{a}(z) = (1, a(z))^\mathsf{T}$ і $\hat{b}(z) = (0, b(z))^\mathsf{T}$.

Звідси випливає, що

$$L_{\hat{a}} \phi(t, x) = \phi_t(t, x) + \phi_x(t, x) a(t, x) = R_a \phi(t, x),$$
$$L_{\hat{b}} \phi(t, x) = \phi_x(t, x) a(t, x) = R_b \phi(t, x),$$

тобто поля $a(t, x) = a(z)$ і $b(t, x) = b(z)$ розв'язують задачу (ii). ■

Отже, різниця між автономним і неавтономним випадком полягає в тому, що в автономному випадку рангова умова (b) критерію реалізовності включає вимоги до елементів $\mathcal{L}_\mathcal{F}$, а в неавтономному — до елементів (меншої множини) $\mathcal{L}'_\mathcal{F}$.

5.3.2.2 Умови реалізовності для рядів нелінійних степеневих моментів

Тепер розглянемо задачу потрапляння в нуль (який є точкою спокою) для систем, афінних за керуванням — автономних і неавтономних. Нагадаємо, що за теоремою 1.1 має місце зображення (1.22), де $v_{m_1 \ldots m_k}$ задовольняють рівності (1.23). Зауважимо, що в автономному випадку $R_a = L_a$, $R_b = L_b$.

Сформулюємо задачі реалізовності. Нехай задана множина векторів

$$\{v_{m_1 \ldots m_k} \in \mathbb{R}^n : m_1, \ldots, m_k \geq 0, \;\; k \geq 1\}, \tag{5.61}$$

яка задає відображення $v : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^n$ за формулою $v(\xi_{m_1 \ldots m_k}) = v_{m_1 \ldots m_k}$. Далі у цьому підрозділі ми будемо використовувати позначення $\mathcal{L}_\mathcal{A}$ для алгебри Лі, що породжена $\{\xi_m\}_{m=0}^\infty$ (для того, щоб відрізняти алгебри Лі $\mathcal{L}_\mathcal{F}$ і $\mathcal{L}_\mathcal{A}$).

Будемо вважати, що відображення v задовольняє умову

$$v(\mathcal{L}_\mathcal{A}) = \mathbb{R}^n. \tag{5.62}$$

(iii) Автономна задача: для заданої множини (5.61), яка задовольняє умову (5.62), знайти дійсно-аналітичні в околі нуля векторні поля $a(x)$,

$b(x)$, такі, що

$$v_{m_1\dots m_k} = \frac{(-1)^m}{m_1!\dots m_k!}\mathrm{ad}_{L_0}^{m_1}L_1\cdots\mathrm{ad}_{L_0}^{m_k}L_1E(0),\ m_1,\dots,m_k\geq 0,\ k\geq 1,\quad (5.63)$$

де $L_0 = L_a$, $L_1 = L_b$.

(iv) Неавтономна задача: для заданої множини (5.61), яка задовольняє умову (5.62), знайти дійсно-аналітичні в околі нуля векторні поля $a(t,x)$, $b(t,x)$, такі, що

$$v_{m_1\dots m_k} = \frac{(-1)^m}{m_1!\dots m_k!}\mathrm{ad}_{R_0}^{m_1}R_1\cdots\mathrm{ad}_{R_0}^{m_k}R_1E(0),\ m_1,\dots,m_k\geq 0,\ k\geq 1,\quad (5.64)$$

де $R_0 = R_a$, $R_1 = R_b$.

Покажемо, як можна звести ці задачі до задачі (i). Введемо новий елемент $\xi_{-1}\notin\mathcal{A}$ і розглянемо розширену алгебру

$$\widetilde{\mathcal{A}} = \mathrm{Lin}\{\xi_{m_1\dots m_k} : m_1,\dots,m_k\geq -1\}$$

з операцією конкатенації. Тепер введемо *відношення* в алгебрі $\widetilde{\mathcal{A}}$, а саме, будемо вважати, що виконуються наступні тотожності:

$$\xi_{m+1} = \frac{1}{m+1}[\xi_{-1},\xi_m] = \frac{1}{m+1}(\xi_{-1}\xi_m - \xi_m\xi_{-1}),\ m\geq 0.$$

Тоді $\xi_m = \frac{1}{m!}\mathrm{ad}_{\xi_{-1}}^m\xi_0$, $m\geq 0$. Це означає, що $\widetilde{\mathcal{A}}$ є вільною алгеброю, що породжена двома елементами $\{\xi_{-1},\xi_0\}$, а $\mathcal{A}$ є її підалгеброю, що породжена послідовністю елементів $\{\mathrm{ad}_{\xi_{-1}}^m\xi_0\}_{m=0}^\infty$.

Нехай $\mathcal{L}_{\widetilde{\mathcal{A}}}$ позначає алгебру Лі, що породжена $\{\xi_{-1},\xi_0\}$, з комутатором $[\ell_1,\ell_2] = \ell_1\ell_2 - \ell_2\ell_1$. Тоді

$$\mathcal{L}_{\widetilde{\mathcal{A}}} = \mathcal{L}_{\mathcal{A}} + \mathrm{Lin}\,\{\xi_{-1}\}.\quad (5.65)$$

Скористаємось диференціюванням φ (позначення 5.1). Зазначимо, що $\varphi(\xi_{m_1\dots m_k})$ дорівнює сумі $m_1+\dots+m_k+k$ доданків вигляду $\xi_{j_1\dots j_k}$, таких, що $j_1+\dots+j_k = m_1+\dots+m_k+1$.

Диференціювання φ і елемент ξ_{-1} пов'язані наступним чином. Розглянемо підпростір

$$P = \mathrm{Lin}\{\xi_{j_1\dots j_k}\xi_{-1} :\ k\geq 0\}\quad (5.66)$$

і будемо писати $\omega_1 \cong \omega_2$, якщо $\omega_1 - \omega_2 \in P$. Тоді, очевидно, $\xi_{-1}\xi_m = [\xi_{-1}, \xi_m] + \xi_m\xi_{-1} = (m+1)\xi_{m+1} + \xi_m\xi_{-1} = \varphi(\xi_m) + \xi_m\xi_{-1}$, отже, $\xi_{-1}\xi_m \cong \varphi(\xi_m)$.

За індукцією неважко довести, що $\xi_{-1}\xi_{m_1\dots m_k} \cong \varphi(\xi_{m_1\dots m_k})$. Дійсно, якщо це виконано для деякого $k \geq 1$, то

$$\xi_{-1}\xi_{m_1\dots m_{k+1}} = [\xi_{-1}, \xi_{m_1}]\xi_{m_2\dots m_{k+1}} + \xi_{m_1}\xi_{-1}\xi_{m_2\dots m_{k+1}} \cong$$

$$\cong \varphi(\xi_{m_1})\xi_{m_2\dots m_{k+1}} + \xi_{m_1}\varphi(\xi_{m_2\dots m_{k+1}}) = \varphi(\xi_{m_1\dots m_{k+1}}).$$

Отже, за лінійністю, $\xi_{-1}y \cong \varphi(y)$ для всіх $y \in \mathcal{A}$, звідки випливає

$$\xi_0^{s_0}\xi_{-1}^{p_1}\xi_0^{s_1}\cdots\xi_{-1}^{p_{q-1}}\xi_0^{s_{q-1}}\xi_{-1}^{p_q}\xi_0^{s_q} \cong \xi_0^{s_0}\varphi^{p_1}\Big(\xi_0^{s_1}\cdots\varphi^{p_{q-1}}\big(\xi_0^{s_{q-1}}(\varphi^{p_q}(\xi_0^{s_q}))\big)\cdots\Big). \tag{5.67}$$

Розширимо лінійне відображення $v : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^n$ на алгебру $\widetilde{\mathcal{A}}$, визначивши $v(y\xi_{-1}^m) = 0$ для всіх $m \geq 1$ і $y \in \mathcal{A}^e$ (або, еквівалентно, $v(y) = 0$ для всіх $y \in P$). Тоді з (5.67) випливає

$$v(\xi_0^{s_0}\xi_{-1}^{p_1}\xi_0^{s_1}\cdots\xi_{-1}^{p_{q-1}}\xi_0^{s_{q-1}}\xi_{-1}^{p_q}\xi_0^{s_q}) = v\bigg(\xi_0^{s_0}\varphi^{p_1}\Big(\xi_0^{s_1}\cdots\varphi^{p_{q-1}}\big(\xi_0^{s_{q-1}}(\varphi^{p_q}(\xi_0^{s_q}))\big)\cdots\Big)\bigg). \tag{5.68}$$

Отже, відображення v визначене на $\widetilde{\mathcal{A}}$ однозначно, і за множиною (5.61) можна знайти множину

$$\{v_{j_1\dots j_k} \in \mathbb{R}^n : j_1, \dots, j_k \in \{-1, 0\},\ k \geq 1\}. \tag{5.69}$$

Розширимо фазовий простір і розглянемо відображення $\hat{v} : \widetilde{\mathcal{A}} \to \mathbb{R}^{n+1}$, яке задається множиною

$$\{\hat{v}_{j_1\dots j_k} \in \mathbb{R}^{n+1} : j_1 \dots j_k \in \{-1, 0\}, k \geq 1\},$$
$$\text{де } \hat{v}_{-1} = (1, v_{-1})^\mathsf{T} = (1, 0)^\mathsf{T},\ \hat{v}_{j_1\dots j_k} = (0, v_{j_1\dots j_k})^\mathsf{T} \text{ при } \{j_1 \dots j_k\} \neq \{-1\}. \tag{5.70}$$

Розглянемо таку задачу.

(iv′) Автономна $(n+1)$-вимірна задача: для множини (5.70) знайти дійсно-аналітичні в околі нуля векторні поля $\hat{a}(z)$, $\hat{b}(z)$, такі, що

$$\hat{v}_{j_1\dots j_k} = L_{j_1}\cdots L_{j_k}E(0),\ j_1, \dots, j_k \in \{-1, 0\}, k \geq 1,$$

де $L_{-1} = L_{\hat{a}}$, $L_0 = L_{\hat{b}}$.

Аналогічно теоремі 5.6, отримуємо умови розв'язності задачі (iv′).

Лема 5.9. *Нехай за множиною* (5.61)*, яка задовольняє умову* (5.62)*, побудовано множини* (5.69) *і* (5.70)*. Задача (iv′) розв'язна тоді і тільки тоді, коли*

(a) *існують додатні константи C_1 і C_2, для яких*

$$\|v_{j_1\dots j_k}\| \le k!C_1C_2^k$$

для всіх $k \ge 1$ і всіх $j_1, \dots, j_k \in \{-1, 0\}$;

(b) *для будь-якого $\ell \in \mathcal{L}_{\mathcal{A}}$, що задовольняє рівність $v(\ell) = 0$, виконується $v(\ell y) = 0$ для всіх $y \in \mathcal{A}$.*

На відміну від задач (i), (ii), в задачі (iv′) у виразі для $\hat{v}_{j_1\dots j_m}$ порядок операторів L_{j_i} збігається з порядком індексів $\hat{v}_{j_1\dots j_m}$. Отже, замість множини $\hat{v}_{j_k\dots j_1}$ треба розглянути множину $\widetilde{v}_{j_1\dots j_k} = \hat{v}_{j_k\dots j_1}$ і повторити доведення теореми 5.6 (з $\mathcal{L}_{\widetilde{\mathcal{A}}}$ замість $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}$, $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}$ замість $\mathcal{L}'_{\mathcal{F}}$, $\{\xi_{-1}, \xi_0\}$ замість $\{\eta_0, \eta_1\}$ і (5.65) замість (5.60)).

Наслідок 5.10. *Умови леми* 5.9 *необхідні і достатні для розв'язності задачі (iv).*

Доведення. Аналогічно наслідку 5.9, ураховуючи, що $\hat{v}(y\xi_{-1}) = 0$ для будь-якого $y \in \mathcal{A}$, неважко показати, що $\hat{a}(z) \equiv (1,0)^{\mathsf{T}}$, $\hat{b}(z) = (0, b(z))^{\mathsf{T}}$ (де $\hat{a}(z)$, $\hat{b}(z)$ розв'язують задачу (iv′)). Отже,

$$m_1!\dots m_k! v(\xi_{m_1\dots m_k}) = v(\mathrm{ad}_{\xi_{-1}}^{m_1}\xi_0 \cdots \mathrm{ad}_{\xi_{-1}}^{m_1}\xi_0) = \mathrm{ad}_{R_0}^{m_1} R_1 \cdots \mathrm{ad}_{R_0}^{m_k} R_1 E(0),$$

де $R_1\phi(z) = L_{\hat{b}}\phi(z) = \phi_x(t,x)b(t,x)$, $R_0\phi(t,x) = L_{\hat{a}}\phi(z) = \phi_t(t,x)$, тобто векторні поля $a(t,x) \equiv 0$ і $b(t,x)$ розв'язують задачу (iv). ■

Зауважимо, що в умові (a) леми 5.9 використана множина (5.69) замість вихідної множини (5.61), що незручно для задачі (iv). У наступній теоремі цей недолік виправлений.

Теорема 5.7. *Нехай множина* (5.61) *задовольняє умову* (5.62)*. Задача (iv) розв'язна тоді і тільки тоді, коли*

(a) *існують додатні константи* C_1 *і* C_2, *для яких*

$$\|v_{m_1\dots m_k}\| \le k!C_1C_2^{m_1+\dots+m_k+k}$$

для всіх $k \ge 1$ *і всіх* $m_1, \dots, m_k \ge 0$;

(b) *для будь-якого* $\ell \in \mathcal{L}_{\mathcal{A}}$, *що задовольняє рівність* $v(\ell) = 0$, *виконується* $v(\ell y) = 0$ *для всіх* $y \in \mathcal{A}$.

Доведення. Необхідність випливає з теореми 1.1 і оцінки (2.31).

Достатність. Ми покажемо, що з умови (a) теореми 5.7 випливає умова (a) леми 5.9 (умови (b) цих тверджень збігаються). Розглянемо довільний елемент $\xi_{j_1\dots j_k}$, де $j_1, \dots, j_k \in \{-1, 0\}$. Його можна подати у вигляді $\xi_0^{s_0}\xi_{-1}^{p_1}\xi_0^{s_1}\cdots\xi_{-1}^{p_q}\xi_0^{s_q}$, де $q \ge 0$, $s_0, s_q \ge 0$, $s_1, \dots, s_{q-1}, p_1, \dots, p_q \ge 1$ і $s_0 + \dots + s_q + p_1 + \dots + p_q = k$. Якщо $s_q = 0$, то $v_{j_1\dots j_k} = 0$, тобто треба розглядати лише випадок $s_q \ge 1$.

Тепер урахуємо рівність (5.68): $v_{j_1\dots j_k} = v(\xi_{j_1\dots j_k})$ дорівнює правій частині (5.68). Підрахуємо кількість доданків у правій частині (5.68).

За означенням, $\varphi(\xi_j) = (j+1)\xi_{j+1}$, тобто містить $j+1$ доданків ξ_{j+1}. Аналогічно, $\varphi(\xi_{j_1\dots j_q})$ містить $j_1 + \dots + j_q + q$ доданків вигляду $\xi_{i_1\dots i_q}$, де $i_1 + \dots + i_q = j_1 + \dots + j_q + 1$, а тоді $\varphi^p(\xi_{j_1\dots j_q})$ містить $\prod\limits_{i=0}^{p-1}(j_1 + \dots + j_q + q + i)$ доданків вигляду $\xi_{i_1\dots i_q}$, де $i_1 + \dots + i_q = j_1 + \dots + j_q + p$. Отже, з (5.68) отримуємо, що $v_{j_1\dots j_k}$ дорівнює сумі N доданків вигляду $v_{i_1\dots i_h}$, де $i_1, \dots, i_h \ge 0$, причому $i_1 + \dots + i_h + h = s_0 + \dots + s_q + p_1 + \dots + p_q = k$, $h = s_0 + \dots + s_q$,

$$N = \prod_{j=1}^{q} N_j, \quad \text{де } N_j = \prod_{i=0}^{p_j-1}(s_q + p_q + \dots + s_{j+1} + p_{j+1} + s_j + i).$$

Тоді з умови (a) теореми 5.7 випливає

$$\|v_{j_1\dots j_k}\| = \|v(\xi_0^{s_0}\xi_{-1}^{p_1}\cdots\xi_0^{s_{q-1}}\xi_{-1}^{p_q}\xi_0^{s_q})\| \le Nh!C_1C_2^k.$$

Оцінимо $Nh!$. Позначимо $M_j = \prod\limits_{i=0}^{s_j-1}(s_q + \dots + s_{j+1} + i)$ при $j \le q-1$ і

$M_q = (s_q - 1)!$ і подамо $h!$ у такому вигляді:

$$h! = \underbrace{1 \cdots (s_q - 1)}_{=M_q} \cdot \underbrace{s_q \cdots (s_q + s_{q-1}) - 1)}_{=M_{q-1}} \times$$

$$\times \cdots \underbrace{(s_q + \cdots + s_1) \cdots (s_q + \cdots + s_0 - 1)}_{=M_0} \underbrace{(s_q + \cdots + s_0)}_{=h} = h \prod_{j=0}^{q} M_j.$$

Тепер позначимо $M_j' = \prod_{i=0}^{s_j - 1} (s_q + p_q + \cdots + s_{j+1} + p_{j+1} + i)$ при $j \leq q - 1$ і $M_q' = (s_q - 1)!$ і зауважимо, що $M_j \leq M_j'$ і $h \leq p_1 + \cdots + p_q + s_0 + \cdots + s_q = k$. Оскільки

$$N_j M_j' = (s_q + p_q + \cdots + s_{j+1} + p_{j+1}) \cdots (s_q + p_q + \cdots + s_{j+1} + p_{j+1} + s_j + p_j - 1) =$$

$$= \prod_{i=0}^{s_j + p_j - 1} (s_q + p_q + \cdots + s_{j+1} + p_{j+1} + i),$$

отримуємо $M_0' \prod_{j=1}^{q} N_j M_j' = (s_q + p_q + \cdots + s_1 + p_1 + s_0 - 1)! = (k - 1)!$. Отже,

$$Nh! = hM_0 \prod_{j=0}^{q} N_j M_j \leq hM_0' \prod_{j=0}^{q} N_j M_j' \leq k!,$$

звідки випливає умова (a) леми 5.9. ■

Повернемось до задачі (iii). Побудуємо інше розширення відображення $v : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^n$ на алгебру $\widetilde{\mathcal{A}}$: цього разу визначимо $v(\xi_{-1}^m y) = 0$ для всіх $m \geq 1$ і всіх $y \in \mathcal{A}^e$. Як і раніше, кожний елемент $z \in \widetilde{\mathcal{A}}$ можна подати як лінійну комбінацію елементів вигляду $\xi_{-1}^m y$, $y \in \mathcal{A}^e$, $m \geq 0$, отже, відображення v визначене на $\widetilde{\mathcal{A}}$ однозначно і за (5.61) можна побудувати множину

$$\{v_{j_1 \ldots j_k} : j_1, \ldots, j_k \in \{-1, 0\},\ k \geq 1\}. \tag{5.71}$$

(iii′) Автономна задача: для множини (5.71) знайти дійсно-аналітичні в околі нуля векторні поля $a(x)$, $b(x)$, такі, що

$$v_{j_1 \ldots j_k} = L_{j_1} \cdots L_{j_k} E(0),\ j_1, \ldots, j_k \in \{-1, 0\},\ k \geq 1,$$

де $L_{-1} = L_a$, $L_0 = L_b$.

Зауважимо, що з умови $v_{-1} = 0$ випливає $a(0) = 0$.

Лема 5.10. *Нехай за множиною* (5.61), *яка задовольняє умову* (5.62), *побудовано множину* (5.71). *Задача (iii′) розв'язна тоді і тільки тоді, коли*

(a) *існують додатні константи C_1 і C_2, для яких*

$$\|v_{j_1\ldots j_k}\| \le k!C_1C_2^k$$

для всіх $k \ge 1$ і всіх $j_1,\ldots,j_k \in \{-1,0\}$;

(b) *для будь-якого $\ell \in \mathcal{L}_{\widetilde{\mathcal{A}}}$, що задовольняє рівність $v(\ell) = 0$, виконується $v(\ell y) = 0$ для всіх $y \in \widetilde{\mathcal{A}}$.*

Тепер переформулюємо умови леми в термінах алгебри $\mathcal{A}$. Оскільки кожний елемент $z \in \tilde{\mathcal{A}}$ можна подати як лінійну комбінацію елементів вигляду $\xi_{-1}^m y$, де $y \in \mathcal{A}^e$, $m \ge 0$, отримуємо еквівалентну форму умови (b):

(b′) для будь-якого $\ell \in \mathcal{L}_{\mathcal{A}}$, що задовольняє рівність $v(\ell) = 0$, виконується $v(\ell\xi_{-1}^m y) = 0$ для всіх $y \in \mathcal{A}$ і $m \ge 0$.

Введемо підпростір, аналогічний (5.66),

$$P' = \mathrm{Lin}\{\xi_{-1}\xi_{j_1\ldots j_k} :\ k \ge 0\}$$

і будемо писати $\omega_1 \cong' \omega_2$, якщо $\omega_1 - \omega_2 \in P'$. За означенням, якщо $\omega_1 \cong' \omega_2$, то $v(\omega_1) = v(\omega_2)$. Аналогічно властивості відношення $\cong$, отримуємо, що $y\xi_{-1} \cong' \varphi(y)$ для всіх $y \in \mathcal{A}$, зокрема, $\ell\xi_{-1}^m y \cong' \varphi^m(\ell)y$, звідки $v(\ell\xi_{-1}^m y) = v(\varphi^m(\ell)y)$. Отже, отримуємо ще один варіант умови (b):

(b″) для будь-якого $\ell \in \mathcal{L}_{\mathcal{A}}$, що задовольняє рівність $v(\ell) = 0$, виконується $v(\varphi^m(\ell)y) = 0$ для всіх $y \in \mathcal{A}^e$ і $m \ge 0$.

Зауважимо, що $\varphi(\ell) \in \mathcal{L}_{\mathcal{A}}$, якщо $\ell \in \mathcal{L}_{\mathcal{A}}$. Тому зручнішим є таке еквівалентне формулювання:

(b‴) для будь-якого $\ell \in \mathcal{L}_{\mathcal{A}}$, що задовольняє рівність $v(\ell) = 0$, виконується $v(\varphi(\ell)) = 0$ і $v(\ell y) = 0$ для всіх $y \in \mathcal{A}$.

Що стосується умови (a), то її можна переформулювати в термінах алгебри Лі $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}$ аналогічно теоремі 5.7. Отже, отримуємо наступний результат.

Теорема 5.8. *Нехай множина* (5.61) *задовольняє умову* (5.62). *Задача (iii) розв'язна тоді і тільки тоді, коли*

(a) *існують додатні константи* C_1 *і* C_2, *для яких* $\|v_{m_1\ldots m_k}\| \leq k!C_1C_2^{m_1+\cdots+m_k+k}$ *для всіх* $k \geq 1$ *і всіх* $m_1, \ldots, m_k \geq 0$;

(b) *для будь-якого* $\ell \in \mathcal{L}_{\mathcal{A}}$, *що задовольняє рівність* $v(\ell) = 0$, *виконується* $v(\varphi(\ell)) = 0$ *і* $v(\ell y) = 0$ *для всіх* $y \in \mathcal{A}$.

Отже, умова автономної реалізовності накладає додаткову вимогу на відображення v: разом з будь-яким елементом ℓ з алгебри Лі $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}$, що входить до ядра відображення v, до цього ядра входить не тільки правий ідеал, породжений цим елементом, а ще й елемент $\varphi(\ell)$. Тобто в певному сенсі для рядів нелінійних степеневих моментів (на відміну від рядів ітерованих інтегралів) більш природними є умови неавтономної реалізовності.

Виявляється, що векторні поля, які розв'язують автономні задачі, є єдиними, а неавтономні — ні. Методи побудови таких полів обговорюються у наступному пункті.

5.3.3 Відновлення системи по ряду нелінійних степеневих моментів

У цьому пункті ми покажемо, як побудувати векторні поля, що задовольняють рівності (5.63) або (5.64), якщо відповідні умови реалізовності виконано. Результати пункту опубліковано в роботі [13].

5.3.3.1 Автономний випадок

Лема 5.11. *Нехай* $a(x)$, $b(x)$ — *дійсно-аналітичні в околі нуля вектор-функції,* $a(0) = 0$, *вектори* $v_{m_1\ldots m_k}$ *задаються рівністю* (5.63) *і лінійне відображення* $v : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^n$ *задається на базисних елементах формулою* $v(\xi_{m_1\ldots m_k}) = v_{m_1\ldots m_k}$. *Тоді*

$$a(S) = -\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\substack{m_1+\cdots+m_k+k=m \\ k\geq 1,\ m_i\geq 0}} v(\varphi(\xi_{m_1\ldots m_k}))\xi_{m_1\ldots m_k}, \tag{5.72}$$

$$b(S) = -v(\xi_0) - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\substack{m_1+\dots+m_k+k=m \\ k\geq 1,\ m_i\geq 0}} v(\psi_0(\xi_{m_1\dots m_k}))\xi_{m_1\dots m_k}. \tag{5.73}$$

Тут $a(S)$ і $b(S)$ — формальні ряди, які визначаються аналогічно (3.17).

Цю лему можна довести, використовуючи *операторні* ряди, які відповідають зображенню (1.22) [2]. Ми наведемо інше доведення.

Доведення. Розглянемо траєкторію системи

$$\dot{x} = a(x) + b(x)u(t),\ x(0) = x^0,\ x(\theta) = 0,$$

і зробимо заміну змінних $y(t) = x(t+\delta)$, де $0 < \delta < \theta$ довільне фіксоване число. Отримуємо

$$\dot{y} = a(y) + u(t+\delta)b(y),\ y(0) = x(\delta),\ y(\theta-\delta) = 0.$$

Для скорочення запису для сум, аналогічних (5.72), (5.73), будемо писати просто позначку $\sum$. Тоді за теоремою 1.1

$$x(\delta) = S(\theta_\delta, u_\delta) = \sum v_{m_1\dots m_k}\xi_{m_1\dots m_k}(\theta_\delta, u_\delta). \tag{5.74}$$

Розглянемо керування, неперервні на $[0,\delta_0]$. Диференціюючи (5.74) по δ, переходячи до границі при $\delta\to +0$ і враховуючи лему 5.4, отримуємо

$$\frac{d}{d\delta}x(\delta)|_{\delta=+0} = -\sum v_{m_1\dots m_k}\varphi'(\xi_{m_1\dots m_k})(\theta,u) - u(0)\sum v_{m_1\dots m_k}\psi_0'(\xi_{m_1\dots m_k})(\theta,u).$$

З іншого боку, $\frac{d}{d\delta}x(\delta) = a(x(\delta)) + u(\delta)b(x(\delta))$, а отже, при $\delta\to +0$ маємо

$$\frac{d}{d\delta}x(\delta)|_{\delta=+0} = a(x(0)) + u(0)b(x(0)).$$

З отриманих рівностей для $i = 1,\dots,n$ випливає

$$a_i(S(\theta,u)) + u(0)b_i(S(\theta,u)) = -\varphi'(S_i)(\theta,u) - u(0)\psi_0'(S_i)(\theta,u), \tag{5.75}$$

що має місце при довільних керуваннях, неперервних на $[0,\delta_0]$ (тут лінійні відображення φ', φ_0' розширено на формальні ряди елементів $\mathcal{A}$ природним чином).

Розглядаючи довільні керування, для яких $u(0) = 0$, отримуємо, що

$$a_i(S(\theta, u)) = -\varphi'(S_i)(\theta, u). \tag{5.76}$$

А оскільки будь-яке керування з $L_\infty[0, \theta]$ можна наблизити керуванням, неперервним на $[0, \delta_0]$, отримуємо, що (5.76) виконується для довільних керувань. А тоді з (5.75) випливає, що для довільних керувань, неперервних на $[0, \delta_0]$, має місце рівність

$$b_i(S(\theta, u)) = -\psi_0'(S_i)(\theta, u). \tag{5.77}$$

Аналогічно, будь-яке керування з $L_\infty[0, \theta]$ можна наблизити керуванням, неперервним на $[0, \delta_0]$, а отже, (5.77) виконується для довільних керувань.

З наслідку 2.2 випливає, що такі рівності виконуються і в алгебрі $\mathcal{A}$:

$$a_i(S) = -\varphi'(S_i), \quad b(S_i) = -\psi_0'(S_i), \quad i = 1, \dots, n.$$

(Замість того, щоб наближати довільні керування неперервними, можна згадати доведення леми 2.4 і розглядати лише кусково-сталі керування.)

Тепер скористаємось лемою 5.1. Записуючи $v_i(z) = \langle S_i, z \rangle$ для будь-якого $z \in \mathcal{A}$ (де v_i позначає i-ту компоненту вектора v), отримуємо

$$\varphi'(S_i) = \sum \langle \varphi'(S_i), \xi_{m_1 \dots m_k} \rangle \xi_{m_1 \dots m_k} =$$
$$= \sum \langle S_i, \varphi(\xi_{m_1 \dots m_k}) \rangle \xi_{m_1 \dots m_k} = \sum v_i(\varphi(\xi_{m_1 \dots m_k})) \xi_{m_1 \dots m_k},$$

$$\psi_0'(S_i) = \sum \langle \psi_0'(S_i), \xi_{m_1 \dots m_k} \rangle \xi_{m_1 \dots m_k} =$$
$$= \sum \langle S_i, \psi_0(\xi_{m_1 \dots m_k}) \rangle \xi_{m_1 \dots m_k} = \sum v_i(\psi_0(\xi_{m_1 \dots m_k})) \xi_{m_1 \dots m_k}.$$

звідки випливає твердження леми. ∎

Нагадаємо, що одна з умов теореми 5.8 — умова (5.62) — має вигляд $v(\mathcal{L}_\mathcal{A}) = \mathbb{R}^n$. Нехай вона виконується; виберемо елементи $\ell_1, \dots, \ell_n \in \mathcal{L}_\mathcal{A}$, для яких $v(\ell_1), \dots, v(\ell_n)$ лінійно незалежні, доповнимо цю послідовність до базису алгебри Лі $\mathcal{L}_\mathcal{A}$, вибравши елементи $\{\ell_j\}_{j=n+1}^\infty$, і побудуємо базис Пуанкаре-Біркгофа-Вітта (3.37). При цьому виберемо послідовність $\{\ell_j\}_{j=1}^\infty$ так, щоб базис (3.37) мав спряжений базис (для цього достатньо обирати однорідні елементи ℓ_i). Тепер скористаємось теоремою 1.6, знайдемо спряжений базис і запишемо S у цьому базисі:

$$S = \sum_{q_i \geq 0} v(\ell_{i_1}^{q_1} \cdots \ell_{i_r}^{q_r}) \frac{1}{q_1! \cdots q_r!} d_{i_1}^{ш q_1} ш \cdots ш\, d_{i_r}^{ш q_r}.$$

Тепер ми обмежимося лише тими членами ряду, які містять тільки елементи $d_1, \ldots, d_n$, аналогічно тому, як це було зроблено у пункті 3.3.1.

Детальніше, розглянемо формальний ряд, до якого входять $d_1, \ldots, d_n$:

$$\hat{S} = \sum_{q_i \geq 0} v(\ell_1^{q_1} \cdots \ell_n^{q_n}) \frac{1}{q_1! \cdots q_n!} d_1^{ш q_1} ш \cdots ш\, d_n^{ш q_n},$$

і формальні ряди

$$\hat{S}_1 = -\sum_{q_i \geq 0} v(\varphi(\ell_1^{q_1} \cdots \ell_n^{q_n})) \frac{1}{q_1! \cdots q_n!} d_1^{ш q_1} ш \cdots ш\, d_n^{ш q_n},$$

$$\hat{S}_2 = -\sum_{q_i \geq 0} v(\psi_0(\ell_1^{q_1} \cdots \ell_n^{q_n})) \frac{1}{q_1! \cdots q_n!} d_1^{ш q_1} ш \cdots ш\, d_n^{ш q_n}$$

(зауважимо, що $\hat{S}_2$ містить доданок $-v_0$). Тоді $S = \hat{S} + \hat{T}$, $-\varphi'(S) = \hat{S}_1 + \hat{T}_1$, $-\phi_0'(S) = \hat{S}_2 + \hat{T}_2$, де кожний член рядів T, T_1, T_2 містить хоча б один доданок d_j, $j \geq n+1$. Тоді

$$a(S) = a(\hat{S} + \hat{T}) = a(\hat{S}) + \hat{T}_1' = \hat{S}_1 + \hat{T}_1, \ b(S) = b(\hat{S} + \hat{T}) = b(\hat{S}) + \hat{T}_2' = \hat{S}_2 + \hat{T}_2,$$

де кожний член рядів T_1', T_2' містить хоча б один доданок d_j, $j \geq n+1$. Отже,

$$a(\hat{S}) = \hat{S}_1, \ b(\hat{S}) = \hat{S}_2.$$

Тепер розглянемо відображення $\Phi, \Phi_1, \Phi_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ вигляду

$$\Phi(x) = \sum_{q_i \geq 0} v(\ell_1^{q_1} \cdots \ell_n^{q_n}) \frac{1}{q_1! \cdots q_n!} x_1^{q_1} \cdots x_n^{q_n}, \tag{5.78}$$

$$\Phi_1(x) = -\sum_{q_i \geq 0} v(\varphi(\ell_1^{q_1} \cdots \ell_n^{q_n})) \frac{1}{q_1! \cdots q_n!} x_1^{q_1} \cdots x_n^{q_n},$$

$$\Phi_2(x) = -\sum_{q_i \geq 0} v(\psi_0(\ell_1^{q_1} \cdots \ell_n^{q_n})) \frac{1}{q_1! \cdots q_n!} x_1^{q_1} \cdots x_n^{q_n}$$

(при цьому $\Phi_2(0) = -v_0$). При виконанні умов теореми 5.8 ці ряди абсолютно збігаються в околі нуля. Крім того, оскільки $v(\ell_i)$ лінійно незалежні, відображення $\Phi(x)$ зворотне в околі нуля (стовпці матриці $\Phi_x(0)$ дорівнюють $v(\ell_i)$). Оскільки $a(x)$ і $b(x)$ діють однаково на S і на x, отримуємо тотожності в $\mathbb{R}^n$:

$$a(\Phi(x)) = \Phi_1(x), \quad b(\Phi(x)) = \Phi_2(x). \tag{5.79}$$

Оскільки $\Phi(x)$ зворотне, з них можна знайти $a(x)$ і $b(x)$:

$$a(x) = \Phi_1(\Phi^{-1}(x)), \quad b(x) = \Phi_2(\Phi^{-1}(x)).$$

Зокрема, це означає, що $a(x)$ і $b(x)$ відновлюються однозначно.

Але для практичного знаходження зручніші явні формули для похідних $a(x)$ і $b(x)$, які можна отримати з тотожностей (5.79). А саме,

$$v(\ell_1^{q_1} \cdots \ell_n^{q_n}) = \left. \frac{\partial^{q_1+\cdots+q_n}\Phi(x)}{\partial x_1^{q_1} \cdots \partial x_n^{q_n}} \right|_{x=0},$$

або, що те ж саме,

$$v(\ell_{j_1} \cdots \ell_{j_r}) = \left. \frac{\partial^r \Phi(x)}{\partial x_{j_1} \cdots \partial x_{j_r}} \right|_{x=0}, \quad 1 \le j_1 \le \cdots \le j_r \le n,$$

і аналогічні рівності мають місце для Φ_1 і Φ_2, тому з рівності $a(\Phi(x)) = \Phi_1(x)$ отримуємо

$$\sum_{i=1}^{r} \frac{1}{i!} a^{(i)}(0) \left. \frac{\partial^r (\Phi(x))^i}{\partial x_{j_1} \cdots \partial x_{j_r}} \right|_{x=0} = -v(\varphi(\ell_{j_1} \cdots \ell_{j_r})).$$

Тоді, знаходячи похідну від добутку $(\Phi(x))^i$, отримуємо

$$\sum_{i=1}^{r} a^{(i)}(0) {\sum}' v(\ell_{j_1}^{p_{11}} \cdots \ell_{j_r}^{p_{r1}}) \cdots v(\ell_{j_1}^{p_{1i}} \cdots \ell_{j_r}^{p_{ri}}) = -v(\varphi(\ell_{j_1} \cdots \ell_{j_r})),$$

де сума $\sum'$ береться по всіх таких наборах $\{p_{km}\}$, що p_{km} дорівнює 0 або 1, причому $\sum\limits_{m=1}^{i} p_{km} = 1$, $\sum\limits_{k=1}^{r} p_{km} > 0$ і послідовність множників у кожному доданку суми $\sum'$ фіксована, тобто будь-який набір множників ураховується тільки один раз. Звідси отримуємо рекурентну формулу для знаходження похідних $a(x)$ в нулі:

$$a^{(r)}(0)v(\ell_{j_1})\cdots v(\ell_{j_r}) =$$
$$= -\sum_{i=1}^{r-1} a^{(i)}(0){\sum}' v(\ell_{j_1}^{p_{11}}\cdots \ell_{j_r}^{p_{r1}})\cdots v(\ell_{j_1}^{p_{1i}}\cdots \ell_{j_r}^{p_{ri}}) - v(\varphi(\ell_{j_1}\cdots \ell_{j_r})). \tag{5.80}$$

Аналогічно з рівності $b(\Phi(x)) = \Phi_2(x)$ отримуємо

$$\sum_{i=1}^{r} b^{(i)}(0){\sum}' v(\ell_{j_1}^{p_{11}}\cdots \ell_{j_r}^{p_{r1}})\cdots v(\ell_{j_1}^{p_{1i}}\cdots \ell_{j_r}^{p_{ri}}) = -v(\psi_0(\ell_{j_1}\cdots \ell_{j_r})),$$

де ${\sum}'$ і $\{p_{km}\}$ такі, як і вище. Рекурентна формула має вигляд

$$b(0) = -v_0,$$
$$b^{(r)}(0)v(\ell_{j_1})\cdots v(\ell_{j_r}) =$$
$$= -\sum_{i=1}^{r-1} b^{(i)}(0){\sum}' v(\ell_{j_1}^{p_{11}}\cdots \ell_{j_r}^{p_{r1}})\cdots v(\ell_{j_1}^{p_{1i}}\cdots \ell_{j_r}^{p_{ri}}) - v(\psi_0(\ell_{j_1}\cdots \ell_{j_r})),\ \ r \geq 1. \tag{5.81}$$

Умови (a) і (b) теореми 5.8 гарантують, що значення похідних $a^{(i)}(0)$ і $b^{(i)}(0)$ не залежать від вибору базису $\ell_1, \ldots, \ell_n$.

Отже, отримали такий результат.

Теорема 5.9. *Нехай множина $v_{m_1\ldots m_k}$ задовольняє умови теореми 5.8. Тоді векторні поля $a(x)$, $b(x)$, які розв'язують задачу реалізовності, єдині і можуть бути знайдені за неявними формулами (5.79), або їх похідні в нулі можуть бути знайдені рекурентно за явними формулами (5.80), (5.81).*

5.3.3.2 Неавтономний випадок

Лема 5.12. *Нехай $a(t,x) \equiv 0$, $b(t,x)$ — дійсно-аналітична в околі нуля вектор-функція, множина $v_{m_1\ldots m_k}$ задається рівністю (5.61) і лінійне відображення $v : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^n$ задається на базисних елементах формулою $v(\xi_{m_1\ldots m_k}) = v_{m_1\ldots m_k}$. Тоді*

$$\frac{\partial^m}{\partial t^m} b(0,S) = -m!\psi_m'(S), \quad m \geq 1. \tag{5.82}$$

Доведення. Отже, нехай $a(t,x)\equiv 0$. Розглянемо траєкторію системи

$$\dot{x}=b(t,x)u(t),\ x(0)=x^0,\ x(\theta)=0, \tag{5.83}$$

і аналогічно доведенню леми 5.11 зробимо заміну змінних $y(t)=x(t+\delta)$, де $0<\delta<\theta$. Отримуємо

$$\dot{y}=u(t+\delta)b(t+\delta,y),\ y(0)=x(\delta),\ y(\theta-\delta)=0.$$

За теоремою 1.1

$$x(\delta)=S(\theta_\delta,u_\delta)=\sum v^\delta_{m_1\dots m_k}\xi_{m_1\dots m_k}(\theta_\delta,u_\delta), \tag{5.84}$$

де $\theta_\delta=\theta-\delta$, $u_\delta(t)=u(t+\delta)$, $t\in[0,\theta_\delta]$,

$$v^\delta_{m_1\dots m_k}=\frac{(-1)^m}{m_1!\dots m_k!}\mathrm{ad}^{m_1}_{R_a}R_b\cdots\mathrm{ad}^{m_k}_{R_a}R_bE(0)\big|_{t=\delta},\ m_1,\dots,m_k\geq 0,\ k\geq 1.$$

Оскільки $a(t,x)\equiv 0$, то $R_a\phi(t,x)=\phi_t(t,x)$ для довільної функції $\phi(t,x)$, звідки

$$\frac{d}{d\delta}v^\delta_{m_1\dots m_k}=\frac{(-1)^m}{m_1!\dots m_k!}R_a\mathrm{ad}^{m_1}_{R_a}R_b\cdots\mathrm{ad}^{m_k}_{R_a}R_bE(0)\big|_{t=\delta}.$$

Неважко довести за індукцією, що

$$R_a\mathrm{ad}^{m_1}_{R_a}R_b\cdots\mathrm{ad}^{m_k}_{R_a}R_b=$$

$$=\sum_{i=1}^k\mathrm{ad}^{m_1}_{R_a}R_b\cdots\mathrm{ad}^{m_i+1}_{R_a}R_b\cdots\mathrm{ad}^{m_k}_{R_a}R_b+\mathrm{ad}^{m_1}_{R_a}R_b\cdots\mathrm{ad}^{m_k}_{R_a}R_bR_a.$$

Але $R_aE(x)\equiv 0$, тому

$$\frac{d}{d\delta}v^\delta_{m_1\dots m_k}=\frac{(-1)^m}{m_1!\dots m_k!}R_a\mathrm{ad}^{m_1}_{R_a}R_b\cdots\mathrm{ad}^{m_k}_{R_a}R_bE(0)\big|_{t=\delta}=$$

$$=\sum_{i=1}^k\frac{(-1)^m}{m_1!\dots(m_i+1)!\dots m_k!}(m_i+1)\mathrm{ad}^{m_1}_{R_a}R_b\cdots\mathrm{ad}^{m_i+1}_{R_a}R_b\cdots\mathrm{ad}^{m_k}_{R_a}R_bE(0)\big|_{t=\delta}=$$

$$=v^\delta(\varphi(\xi_{m_1\dots m_k})). \tag{5.85}$$

Урахуємо, що

$$v^\delta_i(\varphi(\xi_{m_1\dots m_k}))=\langle S^\delta_i,\varphi(\xi_{m_1\dots m_k})\rangle=\langle\varphi'(S^\delta_i),\xi_{m_1\dots m_k}\rangle,\quad i=1,\dots,n,$$

де v_i позначає i-ту компоненту вектора v.

Розглянемо керування, неперервні на $[0,\delta_0]$. Диференціюючи (5.84) по δ і враховуючи рівність (5.83) і лему 5.4, отримуємо

$$\begin{aligned} b_i(\delta, S^\delta(\theta_\delta,u_\delta))u(\delta) = \\ = \sum \frac{d}{d\delta} v_i^\delta(\xi_{m_1\dots m_k})\xi_{m_1\dots m_k}(\theta_\delta,u_\delta) + \sum v_i^\delta(\xi_{m_1\dots m_k})\frac{d}{d\delta}\xi_{m_1\dots m_k}(\theta_\delta,u_\delta) = \\ = \underbrace{\sum \langle \varphi'(S_i^\delta),\xi_{m_1\dots m_k}\rangle \xi_{m_1\dots m_k}(\theta_\delta,u_\delta)}_{=\varphi'(S_i^\delta)(\theta_\delta,u_\delta)} - \underbrace{\sum \langle S_i^\delta,\xi_{m_1\dots m_k}\rangle \varphi'(\xi_{m_1\dots m_k})(\theta_\delta,u_\delta)}_{=\varphi'(S_i^\delta)(\theta_\delta,u_\delta)} - \\ - u(\delta)\underbrace{\sum (v^\delta_{m_1\dots m_k})_i \psi_0'(\xi_{m_1\dots m_k})(\theta_\delta,u_\delta)}_{=\psi_0'(S_i^\delta)(\theta_\delta,u_\delta)}, \end{aligned} \tag{5.86}$$

звідки

$$b_i(\delta, S^\delta(\theta_\delta,u_\delta))u(\delta) = -u(\delta)\psi_0'(S_i^\delta)(\theta_\delta,u_\delta).$$

Для будь-якого керування, що задовольняє $u(\delta)\neq 0$, отримуємо

$$b(\delta, S^\delta(\theta_\delta,u_\delta)) = -\psi_0'(S^\delta)(\theta_\delta,u_\delta), \tag{5.87}$$

а оскільки будь-яке керування можна наблизити неперервним і таким, що $u(\delta)\neq 0$, рівність (5.87) виконується для довільних керувань.

Тепер доведемо, що для всіх $i=1,\dots,n$ і всіх $m\geq 0$ мають місце рівності

$$\frac{\partial^m}{\partial t^m} b_i(\delta, S^\delta(\theta_\delta,u_\delta)) = -m!\psi_m'(S_i^\delta)(\theta_\delta,u_\delta). \tag{5.88}$$

Скористаємось індукцією по m. При $m=0$ рівність (5.88) збігається з (5.87). Нехай при деякому $m\geq 0$ рівність (5.88) виконана. Диференціюючи її по δ, отримуємо

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{m+1}}{\partial t^{m+1}} b_i(\delta, S^\delta(\theta_\delta,u_\delta)) + \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^m}{\partial t^m} b_i(\delta, S^\delta(\theta_\delta,u_\delta))\frac{d}{d\delta}(S^\delta(\theta_\delta,u_\delta)) = \\ = -m!\frac{d}{d\delta}(\psi_m'(S_i^\delta)(\theta_\delta,u_\delta)). \end{aligned} \tag{5.89}$$

Ураховуючи (5.83) і (5.84), отримуємо

$$\frac{d}{d\delta}(S^\delta(\theta_\delta,u_\delta)) = u(\delta)b(\delta, S^\delta(\theta_\delta,u_\delta)). \tag{5.90}$$

Знайдемо вираз для правої частини (5.89). Ураховуючи (5.85) і лему 5.4, аналогічно (5.86) отримуємо

$$\frac{d}{d\delta}(\psi'_m(S_i^\delta)(\theta_\delta,u_\delta)) = \sum \frac{d}{d\delta}(v_i^\delta(\psi_m(\xi_{m_1\dots m_k}))\xi_{m_1\dots m_k}(\theta_\delta,u_\delta)) =$$
$$= \psi'_m(\varphi'(S_i^\delta))(\theta_\delta,u_\delta) - \varphi'(\psi'_m(S_i^\delta))(\theta_\delta,u_\delta) - u(\delta)\psi'_0(\psi'_m(S_i^\delta))(\theta_\delta,u_\delta). \tag{5.91}$$

Тепер зауважимо, що

$$\varphi(\psi_m(\xi_{m_1\dots m_k})) - \psi_m(\varphi(\xi_{m_1\dots m_k})) = \varphi(\xi_{m_1\dots m_k}\xi_m) - \varphi(\xi_{m_1\dots m_k})\xi_m =$$
$$= \xi_{m_1\dots m_k}\varphi(\xi_m) = (m+1)\xi_{m_1\dots m_k}\xi_{m+1} = (m+1)\psi_{m+1}(\xi_{m_1\dots m_k}).$$

Отже,

$$\psi'_m(\varphi'(S_i^\delta)) - \varphi'(\psi'_m(S_i^\delta)) =$$
$$= \sum\langle\psi'_m(\varphi'(S_i^\delta)),\xi_{m_1\dots m_k}\rangle\xi_{m_1\dots m_k} - \sum\langle\varphi'(\psi'_m(S_i^\delta)),\xi_{m_1\dots m_k}\rangle\xi_{m_1\dots m_k} =$$
$$= \sum\langle S_i^\delta,\varphi(\psi_m(\xi_{m_1\dots m_k}))\rangle\xi_{m_1\dots m_k} - \sum\langle S_i^\delta,\psi_m(\varphi(\xi_{m_1\dots m_k}))\rangle\xi_{m_1\dots m_k} =$$
$$= (m+1)\sum\langle S_i^\delta,\psi_{m+1}(\xi_{m_1\dots m_k})\rangle\xi_{m_1\dots m_k} = (m+1)\psi'_{m+1}(S_i^\delta). \tag{5.92}$$

Підставляючи (5.90), (5.91), (5.92) до (5.89) і враховуючи, що для довільного δ функцію $u(t)$ можна наблизити функціями, для яких $u(\delta)=0$, отримуємо

$$\frac{\partial^{m+1}}{\partial t^{m+1}}b_i(\delta,S^\delta(\theta_\delta,u_\delta)) = -(m+1)!\psi'_{m+1}(S_i^\delta)(\theta_\delta,u_\delta),$$

що доводить (5.88) за індукцією.

Перейдемо до границі при $\delta\to+0$ у виразах (5.88); враховуючи наслідок 2.2, отримуємо (5.82). ■

Тепер можна застосувати метод підпункту 5.3.3.1 для побудування векторних полів $\frac{\partial^m}{\partial t^m}b(0,x)$, $m\geq 0$, а отже, і $b(t,x)$.

Нехай v задовольняє умови теореми 5.7. Разом з відображенням (5.78) розглянемо відображення $\Psi_m:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, $m\geq 0$, вигляду

$$\Psi_m(x) = -\sum_{q_i\geq 0} v(\psi_m(\ell_1^{q_1}\cdots\ell_n^{q_n}))\frac{1}{q_1!\cdots q_n!}x_1^{q_1}\cdots x_n^{q_n}$$

(зауважимо, що випадок $q_1 = \dots = q_n = 0$ не виключається; відповідний доданок у сумі для $\Psi_m(x)$ дорівнює $v(\psi_m(1)) = v(\xi_m) = v_m$). Тоді з (5.82) випливають такі тотожності в $\mathbb{R}^n$:

$$\frac{\partial^m}{\partial t^m} b(0, \Phi(x)) = m!\Psi_m(x),\ \ m \geq 1,$$

тобто

$$b(t, \Phi(x)) = \sum_{m=0}^{\infty} t^m \Psi_m(x). \tag{5.93}$$

Оскільки $\Phi(x)$ зворотне, можна знайти $b(t,x)$:

$$b(t,x) = \sum_{m=0}^{\infty} t^m \Psi_m(\Phi^{-1}(x));$$

зокрема, $b(t,x)$ визначається однозначно. Для явного знаходження похідних $b(t,x)$ аналогічно теоремі 5.9 отримуємо такі формули:

$$\sum_{i=1}^{r} \frac{\partial^m}{\partial t^m} b^{(i)}(0,0) {\sum}' v(\ell_{j_1}^{p_{11}} \cdots \ell_{j_r}^{p_{r1}}) \cdots v(\ell_{j_1}^{p_{1i}} \cdots \ell_{j_r}^{p_{ri}}) = -v(\psi_m(\ell_{j_1} \cdots \ell_{j_r})),$$

де сума ${\sum}'$ береться по всіх таких наборах $\{p_{km}\}$, що p_{km} дорівнює 0 або 1, причому $\sum\limits_{m=1}^{i} p_{km} = 1$, $\sum\limits_{k=1}^{r} p_{km} > 0$ і послідовність множників у кожному доданку суми ${\sum}'$ фіксована, тобто будь-який набір множниківураховується тільки один раз (тут $b^{(i)}(0,0)$ позначає i-ту похідні по x).

Звідси отримуємо рекурентну формулу для знаходження похідних $b(t,x)$ в нулі:

$$\frac{\partial^m}{\partial t^m} b(0,0) = -m! v_m,$$

$$\frac{\partial^m}{\partial t^m} b^{(r)}(0,0) v(\ell_{j_1}) \cdots v(\ell_{j_r}) =$$

$$= -\sum_{i=1}^{r-1} b^{(i)}(0,0) {\sum}' v(\ell_{j_1}^{p_{11}} \cdots \ell_{j_r}^{p_{r1}}) \cdots v(\ell_{j_1}^{p_{1i}} \cdots \ell_{j_r}^{p_{ri}}) - v(\psi_m(\ell_{j_1} \cdots \ell_{j_r})),\ r \geq 1, \tag{5.94}$$

де $m \geq 0$, а ${\sum}'$ і $\{p_{km}\}$ такі, як і вище.

Теорема 5.10. *Нехай множина $v_{m_1 \dots m_k}$ задовольняє умови теореми 5.7. Векторне поле $b(t,x)$, таке, що пара $a(t,x) \equiv 0$, $b(t,x)$ розв'язує* *задачу реалізовності, едине і може бути знайдене за неявною формулою* (5.93)*, або його похідні в нулі можуть бути знайдені рекурентно за явними формулами* (5.94)*.*

Нарешті, опишемо всі пари $a(t,x)$, $b(t,x)$, які розв'язують задачу реалізовності.

Нехай $\tilde{a}(t,x)$, $\tilde{b}(t,x)$ — така пара, тоді виконуються рівності

$$v_{m_1\dots m_k} = \frac{(-1)^k}{m_1!\dots m_k!}\mathrm{ad}_{R_{\tilde a}}^{m_1}R_{\tilde b}\cdots\mathrm{ad}_{R_{\tilde a}}^{m_k}R_{\tilde b}E(x)\Big|_{t=0,x=0}. \tag{5.95}$$

Покладемо $a(t,x)\equiv 0$ і розглянемо векторне поле

$$b(\tau,x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\tau^k\left(\mathrm{ad}_{R_{\tilde a}}^{k}R_{\tilde b}E(x)\Big|_{t=0}\right). \tag{5.96}$$

Якщо $\tilde{a}(t,x)$, $\tilde{b}(t,x)$ дійсно-аналітичні в околі нуля, то цей ряд абсолютно збігається при малих t і x, а отже, $b(\tau,x)$ дійсно-аналітична в околі нуля. Тоді

$$\mathrm{ad}_{R_a}^{k}R_bE(x)\Big|_{t=0} = \frac{\partial^k}{\partial t^k}b(0,x) = \mathrm{ad}_{R_{\tilde a}}^{k}R_{\tilde b}E(x)\Big|_{t=0}.$$

Оскільки

$$\mathrm{ad}_{R_a}^{k}R_b\phi(t,x) = \phi_x(t,x)\mathrm{ad}_{R_a}^{k}R_bE(x),$$

то для знаходження правої частини рівності (5.96) можна знайти спочатку оператори $\mathrm{ad}_{R_a}^{k}R_b\big|_{t=0}$, а потім знаходити їх композицію. А оскільки

$$\mathrm{ad}_{R_{\tilde a}}^{m_1}R_{\tilde b}\cdots\mathrm{ad}_{R_{\tilde a}}^{m_k}R_{\tilde b}E(x)\Big|_{t=0} = \mathrm{ad}_{R_a}^{m_1}R_b\cdots\mathrm{ad}_{R_a}^{m_k}R_bE(x)\Big|_{t=0},$$

то, враховуючи (5.95), отримуємо, що пара $a(t,x)\equiv 0$, $b(t,x)$ розв'язує задачу реалізовності. Як випливає з теореми 5.10, при $a(t,x)\equiv 0$ таке $b(t,x)$ єдине.

Навпаки, нехай пара $a(t,x)\equiv 0$, $b(t,x)$ розв'язує задачу реалізовності. Виберемо довільне $\tilde{a}(t,x)$ (таке, що $\tilde{a}(t,0)\equiv 0$) і знайдемо $\tilde{b}(t,x)$ з формули (5.96), послідовно знаходячи похідні $\frac{\partial^k}{\partial t^k}\tilde{b}(0,x)$, $k\geq 0$. Оскільки таке $b(t,x)$ єдине, то $\tilde{b}(t,x)$ теж єдине.

Опишемо інший спосіб задати $\tilde{b}(t,x)$. Розглянемо розв'язок $F(t,x)$ рівняння

$$F_t(t,x) + F_x(t,x)\tilde{a}(t,x) = 0, \tag{5.97}$$

такий, що $F(0,x) = x$; тоді $F(t,x)$ дійсно-аналітичне і $F_x(t,x)$ зворотне при малих t, x. Визначимо $\tilde{b}(t,x) = (F_x(t,x))^{-1}b(t,F(t,x))$ і покажемо, що $\tilde{b}(t,x)$ задовольняє (5.96). Дійсно, означення $\tilde{b}(t,x)$ еквівалентне рівності

$$b(t,F(t,x)) = F_x(t,x)\tilde{b}(t,x), \tag{5.98}$$

з якої отримуємо

$$b_t(t,F(t,x)) + b_x(t,F(t,x))F_t(t,x) = F_{tx}(t,x)\tilde{b}(t,x) + F_x(t,x)\tilde{b}_t(t,x),$$

$$b_x(t,F(t,x))F_x(t,x) = F_{xx}(t,x)\tilde{b}(t,x) + F_x(t,x)\tilde{b}_x(t,x).$$

З рівняння (5.97) отримуємо

$$F_{tx}(t,x) + F_{xx}(t,x)\tilde{a}(t,x) + F_x(t,x)\tilde{a}_x(t,x) = 0,$$

отже,

$$b_t(t,F(t,x)) = \Big(-F_{xx}(t,x)\tilde{a}(t,x) - F_x(t,x)\tilde{a}_x(t,x)\Big)\tilde{b}(t,x)+$$
$$+F_x(t,x)\tilde{b}_t(t,x)+\Big(F_{xx}(t,x)\tilde{b}(t,x)+F_x(t,x)\tilde{b}_x(t,x)\Big)F_x^{-1}(t,x)F_x(t,x)\tilde{a}(t,x) =$$
$$= F_x(t,x)\Big(\tilde{b}_x(t,x)\tilde{a}(t,x) + \tilde{b}_t(t,x) - \tilde{a}_x(t,x)\tilde{b}(t,x)\Big) =$$
$$= F_x(t,x)\mathrm{ad}_{R_{\tilde{a}}}R_{\tilde{b}}E(x),$$

тобто $b_t(t,F(t,x)) = F_x(t,x)\mathrm{ad}_{R_{\tilde{a}}}R_{\tilde{b}}E(x)$. Продовжуючи аналогічно, отримуємо по індукції

$$\frac{\partial^k}{\partial t^k}b(t,F(t,x)) = F_x(t,x)\mathrm{ad}^k_{R_{\tilde{a}}}R_{\tilde{b}}E(x),\ \ k \ge 0.$$

Враховуючи, що $F(0,x) = 0$, при $t = 0$ отримуємо

$$\frac{\partial^k}{\partial t^k}b(0,x) = \mathrm{ad}^k_{R_{\tilde{a}}}R_{\tilde{b}}E(x)\Big|_{t=0},\ \ k \ge 0,$$

тобто $b(t,x)$ і $\tilde{b}(t,x)$ пов'язані рівністю (5.96). Зокрема, звідси випливає, що $\tilde{b}(t,x)$ дійсно-аналітичне.

Наслідок 5.11. *Нехай множина $v_{m_1\ldots m_k}$ задовольняє умови теореми 5.7. Для довільного дійсно-аналітичного векторного поля $a(t,x)$ (такого, що $a(t,0)\equiv 0$) існує єдине дійсно-аналітичне векторне поле $b(t,x)$, таке, що пара $a(t,x)$, $b(t,x)$ розв'язує задачу реалізовності.*

Зауваження 5.10. *Запропоновані у даному пункті методи відновлення систем мають відношення до канонічних координат другого роду, відомих у теорії груп і алгебр Лі [100]. А саме, для автономного випадку отримані формули можуть бути записані як*

$$a(v(e^{x_1\ell_{q_1}}\cdots e^{x_n\ell_{q_n}})) = -v(\varphi(e^{x_1\ell_{q_1}}\cdots e^{x_n\ell_{q_n}})),$$

$$b(v(e^{x_1\ell_{q_1}}\cdots e^{x_n\ell_{q_n}})) = -v(e^{x_1\ell_{q_1}}\cdots e^{x_n\ell_{q_n}}\xi_0),$$

а у неавтономному — як

$$b(t, v(e^{x_1\ell_{q_1}}\cdots e^{x_n\ell_{q_n}})) = -v(e^{x_1\ell_{q_1}}\cdots e^{x_n\ell_{q_n}}e^{t\varphi}(\xi_0)),$$

де формальні експоненти визначаються так:

$$e^{x_1\ell_{q_1}}\cdots e^{x_n\ell_{q_n}} = \sum_{j_1,\ldots,j_n\geq 0}\frac{x_1^{j_1}\cdots x_n^{j_n}}{j_1!\cdots j_n!}\ell_{q_1}^{j_1}\cdots\ell_{q_n}^{j_n}, \quad e^{t\varphi} = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{t^j}{j!}\varphi^j.$$

Приклад 5.6. Розглянемо систему

$$\dot{x}_1 = u, \ \dot{x}_2 = \tfrac{1}{2}tx_1^2u,$$

тобто $a(t,x)\equiv 0$, $b(t,x) = \left(1, \frac{1}{2}tx_1^2\right)^{\mathsf{T}}$. Як легко бачити, відповідний ряд нелінійних степеневих моментів має вигляд $S = (-\xi_0, -\xi_{001})^{\mathsf{T}}$, тобто $v_0 = (-1,0)^{\mathsf{T}}$, $v_{001} = (0,-1)^{\mathsf{T}}$, а решта коефіцієнтів дорівнює нулю. Покажемо, як за цими коефіцієнтами відновити вихідну систему, в якій $a(t,x)\equiv 0$.

Виберемо $\ell_1 = -\xi_0$, $\ell_2 = -[\xi_0,[\xi_0,\xi_1]]$, тоді $v(\ell_1) = e_1$, $v(\ell_2) = e_2$, $\Phi(x) = (x_1,x_2)^{\mathsf{T}}$ — тотожне відображення, $\Psi_0(x) = (1,0)^{\mathsf{T}}$, $\Psi_1(x) = (0,\frac{1}{2}x_1^2)^{\mathsf{T}}$, решта відображень $\Psi_m(x)$ дорівнюють нулю. За формулою (5.93) отримуємо $b(t,x) = \Psi_0(x) + t\Psi_1(x) = (1,\frac{1}{2}tx_1^2)^{\mathsf{T}}$, що збігається з означенням $b(t,x)$.

Скористаємось тепер рекурентною формулою (5.94): маємо $b(0,0) = -v_0$ і $\frac{\partial^m}{\partial t^m}b(0,0) = 0$ для всіх $m\geq 1$, тобто $b(t,0) = e_1$. При $r=1$ усі похідні дорівнюють нулю, а при $r=2$ отримуємо $\frac{\partial}{\partial t}b''(0,0)v(\ell_1)v(\ell_1)=-v(\ell_1^2\xi_1)$, $b''(0,0)e_1e_1=\frac{\partial^2 b(0,0)}{\partial x_1^2}=e_2$ (тут $m=1$). Решта похідних дорівнюють нулю, тобто $b'(t,0)=0$, $b''(t,0)e_1e_1=te_2$, $b^{(i)}(t,0)=0$. Отже, $b(t,x)=b(t,0)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 b(t,0)}{\partial x_1^2}x_1^2=e_1+\frac{1}{2}x_1^2te_2$.

Знайдемо іншу реалізацію цього ряду. Виберемо, наприклад, $\tilde{a}(t,x)=(0,x_1)^{\mathsf{T}}$. Знайдемо два незалежні розв'язки рівняння $h_t+h_{x_2}x_1=0$, наприклад, $h_1(t,x)=x_1$, $h_2(t,x)=tx_1-x_2$, тоді $F(t,x)=(x_1,x_2-tx_1)^{\mathsf{T}}$ (нагадаємо, що за означенням $F(0,x)=x$), а тоді рівність (5.98) набуває вигляду

$$\begin{pmatrix}1\\ \frac{1}{2}x_1^2t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\-t&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{b}_1(t,x)\\ \tilde{b}_2(t,x)\end{pmatrix},$$

звідки $\tilde{b}(t,x)=\left(1,\frac{1}{2}x_1^2t+t\right)^{\mathsf{T}}$. Такого ж висновку можна дійти, використовуючи формулу (5.96). Послідовно знаходимо: $b(0,x)=e_1=\tilde{b}(0,x)$,

$$b_t(t,x)=\tfrac{1}{2}x_1^2e_2=\mathrm{ad}_{R_{\tilde{a}}}R_{\tilde{b}}E(x)\Big|_{t=0}=\underbrace{\tilde{b}_x(0,x)}_{=0}\tilde{a}(0,x)+\tilde{b}_t(0,x)-\tilde{a}_x(0,x)\tilde{b}(0,x)=$$

$$=\tilde{b}_t(0,x)-\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\tilde{b}_t(0,x)-e_2,$$

звідки $\tilde{b}_t(0,x)=(1+\frac{1}{2}x_1^2)e_2$, а решта похідних дорівнює нулю. Отже,

$$\tilde{b}(t,x)=\tilde{b}(0,x)+t\tilde{b}_t(0,x)=e_1+t(1+\tfrac{1}{2}x_1^2)e_2,$$

що збігається з отриманим вище. Тобто реалізацією даного відображення є також система

$$\dot{x}_1=u,\ \ \dot{x}_2=x_1+tu+\tfrac{1}{2}tx_1^2u.$$

Нарешті, зауважимо, що відображення v задовольняє умови теореми 5.8, тому ми можемо побудувати автономну систему за теоремою 5.9. Оскільки $\Phi(x)=x$, $\Phi_1(x)=-\frac{1}{6}v(\varphi(\xi_0^3))x_1^3=\frac{1}{6}x_1^3e_2$, $\Phi_2(x)=-v(\psi_0(1))=-v_0=e_1$, з формул (5.79) випливає, що $a(x)=\frac{1}{6}x_1^3e_2$, $b(x)=e_1$, тобто реалізацією даного відображення є також автономна система

$$\dot{x}_1=u,\ \ \dot{x}_2=\tfrac{1}{6}x_1^3.$$

Висновки до розділу 5

У розділі 5 розглянута задача апроксимації для нелінійних дійсно-аналітичних систем, які є афінними за керуванням. У підрозділі 5.1 застосовано результати розділу 3 до побудування і дослідження головної частини ряду нелінійних степеневих моментів і однорідної апроксимації таких систем. А саме, введені і досліджені поняття ядерної підалгебри Лі і правого ідеалу, які породжуються системою, і показано, що кожний з цих об'єктів визначає однорідну апроксимацію системи. Запропоновані безкоординатне означення однорідної апроксимації, надана класифікація однорідних апроксимацій і запропонований метод їх побудови.

У підрозділі 5.2 досліджено задачу швидкодії для систем, афінних за керуванням. Зокрема, доведено, що за деяких додаткових умов розв'язок задачі швидкодії для однорідної апроксимації наближає розв'язок задачі швидкодії для вихідної системи в околі нуля. Вивчене і зворотне питання: знайдені умови, за яких з еквівалентності у сенсі швидкодії для двох систем випливає їх алгебраїчна еквівалентність.

У підрозділі 5.3 встановлено зв'язок між алгеброю ітерованих інтегралів, що вивчалася в розділі 4, і алгеброю нелінійних степеневих моментів. Крім того, отримані умови реалізовності ряду нелінійних степеневих моментів як ряду для відображення до початку траєкторії деякої (автономної або неавтономної) керованої системи, а також запропонований метод відновлення такої системи.

У підрозділі переважно розглядається випадок одновимірного керування, але всі результати щодо однорідної апроксимації припускають узагальнення на випадок багатовимірного керування та більш загальних обмежень на керування; відповідні зауваження зроблено у пункті 5.1.3.

Основні результати розділу опубліковані у роботах [35, 13, 14, 17, 37, 128, 129, 130, 131, 140, 85].

РОЗДІЛ 6

КЛАСИФІКАЦІЯ ВЕКТОРІВ ЗРОСТУ СИСТЕМ, ЛІНІЙНИХ ЗА КЕРУВАННЯМ

У цьому розділі ми розвиваємо методи розділу 3 для дослідження векторів зросту систем, лінійних за керуванням. У підрозділі 6.1 ми даємо опис ядерних підалгебр Лі як вільних алгебр Лі. Як наслідок, отриманий повний опис усіх векторів зросту систем.

У підрозділі 6.2 ми вивчаємо множину всіх ядерних підалгебр Лі систем, які мають один і той самий вектор зросту. Для випадку двовимірного керування отриманий повний опис векторів зросту, для яких множина таких систем (з точністю до невироджених замін змінних і керування) є скінченною.

Результати розділу опубліковані в роботах [82, 83].

6.1 Реалізовні вектори зросту і опис ядерних підалгебр Лі

6.1.1 Реалізовні вектори зросту

Повернемось до поняття вектора зросту (означення 2.6): вектор зросту $v = (v_1, \dots, v_p)$ будь-якої повністю неголономної системи є неспадною послідовністю цілих додатних чисел:

$$v = (v_1, \dots, v_p),\ 1 \le v_1 \le \dots \le v_{p-1} < v_p = n, \tag{6.1}$$

де p — степінь неголономності системи. Для зручності позначимо $v_0 = 0$.

Розглянемо наступне питання: для заданої неспадної послідовності цілих додатних чисел визначити, чи є вона вектором зросту деякої системи, лінійної за керуванням. Виявляється, що ця задача тісно пов'язана з властивостями ядерних підалгебр Лі.

Нагадаємо, що вектор зросту в певному сенсі описує поведінку системи в околі початку координат. А саме, розглянемо множину досяжності з початку координат за час θ для системи (2.1) з керуваннями з B^θ, тобто множину $D(\theta) = \{\mathcal{E}_{X_1,\dots,X_m}(\theta, u) : u \in B^\theta\}$. Тоді у привілейованих координатах для досить малих θ має місце наступна оцінка («Ball-Box Theorem» [50, 92]):

$$B_v(c_1, \theta) \subset D(\theta) \subset B_v(c_2, \theta)$$

, де $B_v(c, \theta)$ — це паралелепіпед

$$B_v(c, \theta) = \{z \in \mathbb{R}^n : |z_i| \le c\theta^k \text{ для } v_{k-1} + 1 \le i \le v_k,\ k = 1, \dots, p\},$$

а $0 < c_1 < c_2$ — деякі константи. Але точний опис поведінки системи в термінах траєкторій надається ядерною підалгеброю Лі.

У цьому пункті ми вважаємо, що $n \ge 2$, $m \ge 2$.

Означення 6.1. *Нехай задані послідовність цілих чисел* (6.1) *і ціле число m. Ми кажемо, що* (6.1) *реалізується як вектор зросту (системи з m керуваннями), якщо існує система вигляду* (2.1)*, для якої* (6.1) *є її вектором зросту.*

Означення 6.2. *Підалгебру Лі, що породжується підпростором $\sum\limits_{q=1}^{k} \mathcal{P}^q$ (тобто мінімальну за включенням підалгебру Лі, яка містить цей підпростір), ми називаємо зведеною ядерною підалгеброю Лі до порядку k, що відповідає системі* (2.1)*. Ми позначаємо її $\mathcal{L}^{[k]}_{X_1,\dots,X_m}$.*

Для $k = 0$ позначимо $\mathcal{L}^{[0]}_{X_1,\dots,X_m} = \{0\}$. Очевидно,

$$\mathcal{L}^{[0]}_{X_1,\dots,X_m} \subset \mathcal{L}^{[1]}_{X_1,\dots,X_m} \subset \dots \subset \mathcal{L}^{[k-1]}_{X_1,\dots,X_m} \subset \mathcal{L}^{[k]}_{X_1,\dots,X_m} \subset \dots \subset \mathcal{L}_{X_1,\dots,X_m}.$$

Послідовність зведених ядерних підалгебр Лі дає певне обмеження для можливих значень компонент вектора зросту (6.1). Дійсно, для будь-якого $k \ge 1$ всі елементи $\mathcal{L}^{[k-1]}_{X_1,\dots,X_m} \cap \mathcal{L}^k$ *обов'язково* належать $\mathcal{P}^k$. Отже,

$$v_k - v_{k-1} \le \dim \mathcal{L}^k - \dim(\mathcal{L}^{[k-1]}_{X_1,\dots,X_m} \cap \mathcal{L}^k), \quad 1 \le k \le p.$$

У цьому розділі ми використовуємо позначення $d_k = v_k - v_{k-1}$ для *величини k-го кроку* послідовності (6.1), $k = 1, \dots, p$. Якщо $d_1 = 0$, то $X_1(0) = \dots = X_m(0) = 0$, а тоді $v_1 = \dots = v_p = 0$, що суперечить повній неголономності системи. Таким чином, далі ми вважаємо, що $v_1 = d_1 \geq 1$.

6.1.2 Ядерна підалгебра Лі як вільна алгебра

Ядерна підалгебра Лі $\mathcal{L}_{X_1,\dots,X_m}$ була визначена як (пряма) сума однорідних підпросторів $\mathcal{P}^k$ (означення 4.1). Але $\mathcal{L}_{X_1,\dots,X_m}$ як підалгебра вільної алгебри Лі сама є вільною алгеброю Лі [43, 158]. У цьому пункті ми вкажемо вільний *породжувальний базис* для $\mathcal{L}_{X_1,\dots,X_m}$, тобто множину «літер», за якими $\mathcal{L}_{X_1,\dots,X_m}$ будується як вільна алгебра Лі.

Основним інструментом є теорема 1.7 про виключення. У цій теоремі множина I є довільною; у нас це буде множина мультиіндексів. Нагадаємо, що $\mathrm{Lie}\{\mathcal{Q}\}$ означає вільну алгебру Лі, яка вільно породжується множиною $\mathcal{Q}$.

Лема 6.1. *Нехай система (2.1) є повністю неголономною і (6.1) є її вектором зросту. Тоді існують такі лінійно незалежні елементи $\zeta_1, \dots, \zeta_n \in \mathcal{L}$, що для будь-якого $k = 1, \dots, p$*

$$\mathrm{ord}(\zeta_{v_k+q}) = k + 1 \ \textit{для} \ \ k = 0, \dots, p-1, \ \ q = 1, \dots, d_{k+1},$$

і мають місце наступні рівності: прямий розклад

$$\mathcal{L} = \mathrm{Lin}\{\zeta_1, \dots, \zeta_{v_k}\} + \mathrm{Lie}\{\eta^{i_{v_k} \dots i_1 j} \, : \, (i_{v_k}, \dots, i_1, j) \in \Omega_{v_k}\} \tag{6.2}$$

і зображення

$$\mathcal{L}^{[k]}_{X_1,\dots,X_m} = \mathrm{Lie}\Big\{\eta^{i_{v_k} \dots i_1 j} \, : \, (i_{v_k}, \dots, i_1, j) \in \Omega_{v_k}, \, \mathrm{ord}(\eta^{i_{v_k} \dots i_1 j}) \leq k\Big\}, \tag{6.3}$$

де Ω_{v_k} — множини мультиіндексів і

$$\mathrm{ord}(\eta^{i_{v_k} \dots i_1 j}) = \sum_{q=1}^{k} q\Big(\sum_{r=v_{q-1}+1}^{v_q} i_r\Big) + 1. \tag{6.4}$$

Доведення. Використаємо індукцію. Нехай $k = 1$; позначимо $m_1 = m$. Оскільки $\dim \mathcal{L}^1 = m_1$, то, враховуючи (4.4), отримуємо $\dim \mathcal{P}^1 = m_1 - d_1$. Позначимо $\mathcal{N}^1 = \mathcal{P}^1$, оберемо базис $\mathcal{N}^1$ і позначимо його елементи $\widetilde{\eta}^{d_1+1}, \ldots, \widetilde{\eta}^{m_1}$; нехай $\widetilde{\eta}^1, \ldots, \widetilde{\eta}^{d_1}$ — деяке доповнення цього базису до базису $\mathcal{L}^1$, тобто $\mathcal{L}^1 = \mathcal{N}^1 + \mathrm{Lin}\{\widetilde{\eta}^1, \ldots, \widetilde{\eta}^{d_1}\}$.

Позначимо $\Omega_0 = \Omega_0^1 = \{1, \ldots, m_1\}$, тоді

$$\mathcal{L} = \mathrm{Lie}\{\eta_j : j \in \Omega_0\} = \mathrm{Lie}\{\widetilde{\eta}^j : j \in \Omega_0\}.$$

Отже, множина $\{\widetilde{\eta}^j : j \in \Omega_0\}$ також є вільним породжувальним базисом $\mathcal{L}$. Позначимо $\zeta_1 = \widetilde{\eta}^1$. Застосовуючи теорему 1.7 до алгебри Лі $\mathcal{L}$ з $\ell_h = \widetilde{\eta}^h$, $I = \Omega_0$ і $h_0 = 1$, отримуємо

$$\mathcal{L} = \mathrm{Lin}\{\zeta_1\} + \mathrm{Lie}\{\mathrm{ad}_{\zeta_1}^{i_1} \widetilde{\eta}^j : i_1 \geq 0, \ j \in \Omega_0 \backslash \{1\}\}.$$

Введемо позначення $\Omega_1 = \{(i_1, j) : i_1 \geq 0, \ j \in \Omega_0 \backslash \{1\}\}$ і $\eta^{i_1 j} = \mathrm{ad}_{\zeta_1}^{i_1} \widetilde{\eta}^j$, тоді отримуємо прямий розклад

$$\mathcal{L} = \mathrm{Lin}\{\zeta_1\} + \mathrm{Lie}\{\eta^{i_1 j} : \ (i_1, j) \in \Omega_1\}. \tag{6.5}$$

Нехай $d_1 \geq 2$. Позначимо $\zeta_2 = \eta^{02}$ (що насправді дорівнює $\zeta_2 = \mathrm{ad}_{\zeta_1}^0 \widetilde{\eta}^2 = \widetilde{\eta}^2$). Тепер ми застосовуємо теорему 1.7 до вільної алгебри Лі у правій частині (6.5) з $I = \Omega_1$, $h_0 = (0, 2)$ і $\ell_h = \eta^{i_1 j}$ для всіх мультиіндексів $h = (i_1, j) \in \Omega_1$. Отримуємо прямий розклад

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \mathrm{Lin}\{\zeta_1, \zeta_2\} + \mathrm{Lie}\{\mathrm{ad}_{\zeta_2}^{i_2} \eta^{i_1 j} : i_2 \geq 0, (i_1, j) \in \Omega_1 \backslash \{(0, 2)\}\} = \\ &= \mathrm{Lin}\{\zeta_1, \zeta_2\} + \mathrm{Lie}\{\eta^{i_2 i_1 j} : (i_2, i_1, j) \in \Omega_2\}, \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} \Omega_2 &= \{(i_2, i_1, j) : i_2 \geq 0, (i_1, j) \in \Omega_1 \backslash \{(0, 2)\}\} = \\ &= \{(i_2, i_1, j) : i_2, i_1 \geq 0, j \in \Omega_0, \ j \neq 1, (i_1, j) \neq (0, 2)\} \end{aligned}$$

і $\eta^{i_2 i_1 j} = \mathrm{ad}_{\zeta_2}^{i_2} \eta^{i_1 j} = \mathrm{ad}_{\zeta_2}^{i_2} \mathrm{ad}_{\zeta_1}^{i_1} \widetilde{\eta}^j$. Продовжуючи, після d_1 таких кроків отримуємо

$$\mathcal{L} = \mathrm{Lin}\{\zeta_1, \ldots, \zeta_{v_1}\} + \mathrm{Lie}\{\eta^{i_{v_1} \ldots i_1 j} : (i_{v_1}, \ldots, i_1, j) \in \Omega_{v_1}\}, \tag{6.6}$$

де $\zeta_j = \widetilde{\eta}^j$, $j = 1, \dots, v_1$, $\eta^{i_{v_1} \dots i_1 j} = \mathrm{ad}_{\zeta_{v_1}}^{i_{v_1}} \cdots \mathrm{ad}_{\zeta_1}^{i_1} \widetilde{\eta}^j$ і

$$\Omega_{v_1} = \Big\{(i_{v_1}, \dots, i_1, j) : \ i_{v_1}, \dots, i_1 \geq 0, \ j \in \Omega_0, \\ j \neq 1, \ (i_1, j) \neq (0, 2), \\ \dots, \ (i_{v_1 - 1}, \dots, i_1, j) \neq (0, \dots, 0, d_1), \Big\}$$

що збігається з (6.2) при $k = 1$.

Знайдемо зведену алгебру $\mathcal{L}^{[1]}_{X_1, \dots, X_m}$; за означенням, вона породжується підпростором $\mathcal{P}^1 = \mathcal{N}^1$, тобто $\mathcal{L}^{[1]}_{X_1, \dots, X_m} = \mathrm{Lie}\{\widetilde{\eta}^{d_1 + 1}, \dots, \widetilde{\eta}^{m_1}\}$. Доведемо, що

$$\mathcal{L}^{[1]}_{X_1, \dots, X_m} = \mathrm{Lie}\{\eta^{i_{v_1} \dots i_1 j} : (i_{v_1}, \dots, i_1, j) \in \Omega_{v_1}, \mathrm{ord}(\eta^{i_{v_1} \dots i_1 j}) = 1\}. \qquad (6.7)$$

Зауважимо, що порядок елемента $\eta^{i_{v_1} \dots i_1 j} = \mathrm{ad}_{\zeta_{v_1}}^{i_{v_1}} \cdots \mathrm{ad}_{\zeta_1}^{i_1} \widetilde{\eta}^j$ дорівнює $\mathrm{ord}(\eta^{i_{v_1} \dots i_1 j}) = i_{v_1} + \dots + i_1 + 1$. Зокрема, це означає, що $\mathrm{ord}(\eta^{i_{v_1} \dots i_1 j}) = 1$ тоді і тільки тоді, коли $i_{v_1} = \dots = i_1 = 0$. Отже, $\eta^{i_{v_1} \dots i_1 j} = \mathrm{ad}_{\zeta_{v_1}}^{0} \cdots \mathrm{ad}_{\zeta_1}^{0} \widetilde{\eta}^j = \widetilde{\eta}^j$. За означенням множини Ω_{v_1}, з умови $(i_{v_1}, \dots, i_1, j) = (0, \dots, 0, j) \in \Omega_{v_1}$ випливає, що j може бути довільним елементом Ω_0 *крім* $\{1, \dots, d_1\}$. Отже, множина (вільних) породжувальних елементів у правій частині (6.7) дорівнює $\{\widetilde{\eta}^{d_1+1}, \dots, \widetilde{\eta}^{m_1}\}$. З цього випливає (6.7), що збігається з (6.3) при $k = 1$.

Крок індукції «від k до $k + 1$». Припустимо, що (6.2) і (6.3) виконані для деякого k, такого що $1 \leq k < p$. Розглянемо підпростір $\mathcal{L}^{k+1}$. За припущенням індукції, $\mathcal{L}^{k+1} \cap \mathrm{Lin}\{\zeta_1, \dots, \zeta_{v_k}\} = \{0\}$. Отже, з (6.2) і (6.3) випливає

$$\mathcal{L}^{k+1} = (\mathrm{Lin}\{\eta^{i_{v_k} \dots i_1 j} : (i_{v_k}, \dots, i_1, j) \in \Omega_{v_k}\} \cap \mathcal{L}^{k+1}) + (\mathcal{L}^{[k]}_{X_1, \dots, X_m} \cap \mathcal{L}^{k+1}). \quad (6.8)$$

Цей розклад є прямим, оскільки породжувальні елементи в (6.2) є вільними, а отже, породжувальні елементи $\eta^{i_{v_k} \dots i_1 j} \in \mathcal{L}^{k+1}$ не залежать від елементів (6.3). Нагадаємо, що за припущенням індукції порядок $\eta^{i_{v_k} \dots i_1 j}$ визначається (6.4), і розглянемо множину

$$\Omega^{k+1}_{v_k} = \Omega_{v_k} \cap \Big\{(i_{v_k}, \dots, i_1, j) : \sum_{q=1}^{k} q \Big(\sum_{r = v_{q-1} + 1}^{v_q} i_r \Big) + 1 = k + 1 \Big\}. \qquad (6.9)$$

Тоді прямий розклад (6.8) набуває вигляду

$$\mathcal{L}^{k+1} = \mathrm{Lin}\{\eta^{i_{v_k}\dots i_1 j} : (i_{v_k}, \dots, i_1, j) \in \Omega_{v_k}^{k+1}\} + (\mathcal{L}_{X_1,\dots,X_m}^{[k]} \cap \mathcal{L}^{k+1}), \qquad (6.10)$$

де елементи $\eta^{i_{v_k}\dots i_1 j}$ у першому доданку правої частини лінійно незалежні. Тепер розглянемо підпростір $\mathcal{P}^{k+1} \subset \mathcal{L}^{k+1}$. За означенням $\mathcal{P}^{k+1}$ і $\mathcal{L}_{X_1,\dots,X_m}^{[k]}$,

$$(\mathcal{L}_{X_1,\dots,X_m}^{[k]} \cap \mathcal{L}^{k+1}) \subset \mathcal{P}^{k+1}.$$

Отже, з (6.10) випливає прямий розклад

$$\mathcal{P}^{k+1} = \mathcal{N}^{k+1} + (\mathcal{L}_{X_1,\dots,X_m}^{[k]} \cap \mathcal{L}^{k+1}), \qquad (6.11)$$

$$\text{де} \ \ \mathcal{N}^{k+1} = \mathrm{Lin}\{\eta^{i_{v_k}\dots i_1 j} : (i_{v_k}, \dots, i_1, j) \in \Omega_{v_k}^{k+1}\} \cap \mathcal{P}^{k+1}.$$

Знайдемо $\dim \mathcal{N}^{k+1}$. Нехай m_{k+1} позначає кількість елементів у множині $\Omega_{v_k}^{k+1}$. Тоді з (6.10) і (6.11) випливає

$$\dim \mathcal{L}^{k+1} = m_{k+1} + \dim(\mathcal{L}_{X_1,\dots,X_m}^{[k]} \cap \mathcal{L}^{k+1}),$$

$$\dim \mathcal{P}^{k+1} = \dim \mathcal{N}^{k+1} + \dim(\mathcal{L}_{X_1,\dots,X_m}^{[k]} \cap \mathcal{L}^{k+1}).$$

Беручи до уваги (4.4) (з $k+1$ замість k), остаточно отримуємо $\dim \mathcal{N}^{k+1} = m_{k+1} - d_{k+1}$. Отже, зокрема, $m_{k+1} \geq d_{k+1}$.

Спочатку припустимо, що $d_{k+1} = v_{k+1} - v_k > 0$. Випадок $d_{k+1} = 0$ буде обговорений нижче.

Виберемо новий базис підпростору $\mathrm{Lin}\{\eta^{i_{v_k}\dots i_1 j} : (i_{v_k}, \dots, i_1, j) \in \Omega_{v_k}^{k+1}\}$, щоб $m_{k+1} - d_{k+1}$ його елементів утворювали базис $\mathcal{N}^{k+1}$. Зручно індексувати елементи нового базису аналогічно елементам вихідного базису — множиною $\Omega_{v_k}^{k+1}$. Запишемо мультиіндекси з $\Omega_{v_k}^{k+1}$ у *деякому* порядку і використаємо наступне позначення для них: $\Omega_{v_k}^{k+1} = \{\langle 1\rangle, \langle 2\rangle, \dots, \langle m_{k+1}\rangle\}$. Тепер виберемо базис $\mathcal{N}^{k+1}$ і позначимо його елементи $\widetilde{\eta}^{\langle d_{k+1}+1\rangle}, \dots, \widetilde{\eta}^{\langle m_{k+1}\rangle}$. Далі виберемо елементи $\widetilde{\eta}^{\langle 1\rangle}, \dots, \widetilde{\eta}^{\langle d_{k+1}\rangle}$, які доповнюють цей базис, тобто

$$\mathrm{Lin}\{\eta^{i_{v_k}\dots i_1 j} : (i_{v_k}, \dots, i_1, j) \in \Omega_{v_k}^{k+1}\} = \mathcal{N}^{k+1} + \mathrm{Lin}\{\widetilde{\eta}^{\langle 1\rangle}, \dots, \widetilde{\eta}^{\langle d_{k+1}\rangle}\}.$$

Позначимо також $\widetilde{\eta}^{i_{v_k}\dots i_1 j} = \eta^{i_{v_k}\dots i_1 j}$ для всіх $(i_{v_k}, \dots, i_1, j) \in \Omega_{v_k} \backslash \Omega_{v_k}^{k+1}$. Тоді

$$\mathrm{Lie}\{\eta^{i_{v_k}\dots i_1 j} : (i_{v_k}, \dots, i_1, j) \in \Omega_{v_k}\} = \mathrm{Lie}\{\widetilde{\eta}^{i_{v_k}\dots i_1 j} : (i_{v_k}, \dots, i_1, j) \in \Omega_{v_k}\}. \tag{6.12}$$

Тепер застосуємо теорему 1.7 до вільної алгебри в правій частині (6.12). А саме, нехай $\zeta_{v_k+q} = \widetilde{\eta}^{\langle q\rangle}$, $q = 1, \dots, d_{k+1}$. Міркуючи як і у випадку $k = 1$ і застосовуючи теорему 1.7 (d_{k+1} разів), отримуємо прямий розклад

$$\begin{gathered}\mathrm{Lie}\{\widetilde{\eta}^{i_{v_k}\dots i_1 j} : (i_{v_k}, \dots, i_1, j) \in \Omega_{v_k}\} = \\ = \mathrm{Lin}\{\zeta_{v_k+1}, \dots, \zeta_{v_{k+1}}\} + \mathrm{Lie}\{\eta^{i_{v_{k+1}}\dots i_1 j} : (i_{v_{k+1}}, \dots, i_1, j) \in \Omega_{v_{k+1}}\},\end{gathered} \tag{6.13}$$

де $\eta^{i_{v_{k+1}}\dots i_1 j} = \mathrm{ad}_{\zeta_{v_{k+1}}}^{i_{v_{k+1}}} \cdots \mathrm{ad}_{\zeta_{v_k+1}}^{i_{v_k+1}} \widetilde{\eta}^{i_{v_k}\dots i_1 j}$ і множина $\Omega_{v_{k+1}}$ має вигляд

$$\begin{aligned}\Omega_{v_{k+1}} = \Big\{ & (i_{v_{k+1}}, \dots, i_1, j) : i_{v_{k+1}}, \dots, i_{v_k+1} \geq 0,\ (i_{v_k}, \dots, i_1, j) \in \Omega_{v_k}, \\ & (i_{v_k}, \dots, i_1, j) \neq \langle 1\rangle, \\ & (i_{v_k+1}, i_{v_k}, \dots, i_1, j) \neq (0, \langle 2\rangle), \\ & \dots \\ & (i_{v_{k+1}-1}, \dots, i_{v_k+1}, i_{v_k}, \dots, i_1, j) \neq (0, \dots, 0, \langle d_{k+1}\rangle)\Big\}.\end{aligned}$$

Оскільки $\mathrm{ord}(\zeta_{v_k+1}) = \dots = \mathrm{ord}(\zeta_{v_{k+1}}) = k+1$, то

$$\mathrm{ord}(\eta^{i_{v_{k+1}}\dots i_1 j}) = (k+1)(i_{v_{k+1}} + \dots + i_{v_k+1}) + \mathrm{ord}(\widetilde{\eta}^{i_{v_k}\dots i_1 j}) = \sum_{q=1}^{k+1} q\Big(\sum_{r=v_{q-1}+1}^{v_q} i_r\Big) + 1.$$

Отже, враховуючи (6.2), (6.12) і (6.13), отримуємо прямий розклад

$$\mathcal{L} = \mathrm{Lin}\{\zeta_1, \dots, \zeta_{v_{k+1}}\} + \mathrm{Lie}\{\eta^{i_{v_{k+1}}\dots i_1 j} : (i_{v_{k+1}}, \dots, i_1, j) \in \Omega_{v_{k+1}}\}, \tag{6.14}$$

звідки випливає (6.2) і (6.4) для $k+1$.

Тепер повернемось до зображення зведеної ядерної підалгебри $\mathcal{L}^{[k+1]}_{X_1,\dots,X_m}$. За означенням, вона породжується множиною $\sum\limits_{q=1}^{k+1} \mathcal{P}^q$ або, як випливає з (6.11), множиною $\mathcal{N}^{k+1} + \mathcal{L}^{[k]}_{X_1,\dots,X_m}$. З припущення індукції (6.3) випливає, що як множину породжувальних елементів для $\mathcal{L}^{[k+1]}_{X_1,\dots,X_m}$ можна обрати

$$\{\eta^{i_{v_k}\dots i_1 j} : (i_{v_k}, \dots, i_1, j) \in \Omega_{v_k}, \mathrm{ord}(\eta^{i_{v_k}\dots i_1 j}) \leq k\} \cup \{\widetilde{\eta}^{\langle d_{k+1}+1\rangle}, \dots, \widetilde{\eta}^{\langle m_{k+1}\rangle}\}. \tag{6.15}$$

Покажемо, що ця множина збігається з

$$\{\eta^{i_{v_k}\dots i_1 j} : (i_{v_{k+1}},\dots,i_1,j)\in\Omega_{v_{k+1}}, \operatorname{ord}(\eta^{i_{v_{k+1}}\dots i_1 j})\le k+1\}, \tag{6.16}$$

яка є вільною, оскільки є частиною вільного породжувального базису з правої частини (6.14). Дійсно, перепишемо нерівність $\operatorname{ord}(\eta^{i_{v_{k+1}}\dots i_1 j})\le k+1$ у вигляді

$$(k+1)(i_{v_{k+1}}+\dots+i_{v_k+1})+k(i_{v_k}+\dots+i_{v_{k-1}+1})+\dots+(i_{v_1}+\dots+i_1)+1\le k+1,$$

звідки $i_{v_{k+1}}=\dots=i_{v_k+1}=0$, а отже, множина (6.16) складається з таких елементів $\eta^{0\dots 0 i_{v_k}\dots i_1 j}=\widetilde{\eta}^{i_{v_k}\dots i_1 j}$, що $(0,\dots,0,i_{v_k},\dots,i_1,j)\in\Omega_{v_{k+1}}$ і $\operatorname{ord}(\widetilde{\eta}^{i_{v_k}\dots i_1, j})\le k+1$.

Припустимо, що $\operatorname{ord}(\widetilde{\eta}^{i_{v_k}\dots i_1 j})\le k$, тоді за побудовою $\widetilde{\eta}^{i_{v_k}\dots i_1 j}=\eta^{i_{v_k}\dots i_1 j}$ і мультиіндекс $(i_{v_k},\dots,i_1,j)$ пробігає множину Ω_{v_k}. Отже, ці елементи збігаються з породжувальними елементами $\mathcal{L}^{[k]}_{X_1,\dots,X_m}$, тобто

$$\{\eta^{i_{v_{k+1}}\dots i_1 j} : (i_{v_{k+1}},\dots,i_1,j)\in\Omega_{v_{k+1}}, \operatorname{ord}(\eta^{i_{v_{k+1}}\dots i_1 j})\le k\} =$$
$$= \{\eta^{i_{v_k}\dots i_1 j} : (i_{v_k},\dots,i_1,j)\in\Omega_{v_k}, \operatorname{ord}(\eta^{i_{v_k}\dots i_1 j})\le k\}.$$

Нехай $\operatorname{ord}(\widetilde{\eta}^{i_{v_k}\dots i_1 j})=k+1$. Оскільки $(0,\dots,0,i_{v_k},\dots,i_1,j)\in\Omega_{v_{k+1}}$, то за означенням $\Omega_{v_{k+1}}$ отримуємо, що мультиіндекс $(i_{v_k},\dots,i_1,j)$ може бути довільним елементом $\Omega^{k+1}_{v_k}$ крім $\{\langle 1\rangle,\dots,\langle d_{k+1}\rangle\}$. Отже,

$$\{\eta^{i_{v_{k+1}}\dots i_1 j} : (i_{v_{k+1}},\dots,i_1,j)\in\Omega_{v_{k+1}}, \operatorname{ord}(\eta^{i_{v_{k+1}}\dots i_1 j})=k+1\} =$$
$$= \{\widetilde{\eta}^{\langle d_{k+1}+1\rangle},\dots,\widetilde{\eta}^{\langle m_{k+1}\rangle}\}.$$

Таким чином, множина (6.15) збігається з (6.16), а отже,

$$\mathcal{L}^{[k+1]}_{X_1,\dots,X_m}=\operatorname{Lie}\Big\{\eta^{i_{v_{k+1}}\dots i_1 j} : (i_{v_{k+1}},\dots,i_1,j)\in\Omega_{v_{k+1}}, \operatorname{ord}(\eta^{i_{v_{k+1}}\dots i_1 j})\le k+1\Big\}$$

що дає (6.3) для $k+1$.

Ми повністю розглянули випадок $d_{k+1}>0$. Нехай тепер $d_{k+1}=0$. Очевидно, в цьому випадку зображення (6.2) для k і $k+1$ збігаються (оскільки $v_{k+1}=v_k$). Ураховуючи (6.8) і рівність $\mathcal{L}^{k+1}=\mathcal{P}^{k+1}$, маємо

$$\mathcal{P}^{k+1}=\operatorname{Lin}\{\eta^{i_{v_k}\dots i_1 j} : (i_{v_k},\dots,i_1,j)\in\Omega_{v_k}, \operatorname{ord}(\eta^{i_{v_k}\dots i_1 j})=k+1\} +$$

$$+(\mathcal{L}^{[k]}_{X_1,\dots,X_m} \cap \mathcal{L}^{k+1}).$$

Оскільки $v_{k+1} = v_k$, з припущення індукції (6.3) випливає, що множина

$$\{\eta^{i_{v_{k+1}}\dots i_1 j} : \ (i_{v_{k+1}}, \dots, i_1, j) \in \Omega_{v_{k+1}}, \mathrm{ord}(\eta^{i_{v_{k+1}}\dots i_1 j}) \le k+1\}$$

породжує $\mathcal{L}^{[k+1]}_{X_1,\dots,X_m}$ і є вільною, звідки отримуємо (6.3) для $k+1$. ■

Теорема 6.1. *Ядерна підалгебра Лі $\mathcal{L}_{X_1,\dots,X_m}$ вільно породжується множиною*

$$\{\eta^{i_n\dots i_1 j} : \ (i_n, \dots, i_1, j) \in \Omega_n\},$$

де елементи $\eta^{i_n\dots i_1 j}$ і множина $\Omega_n = \Omega_{v_p}$ описані в лемі 6.1.

Доведення. Дійсно, вибираючи $k = p$ у лемі 6.1, отримуємо

$$\mathcal{L} = \mathrm{Lin}\{\zeta_1, \dots, \zeta_n\} + \mathrm{Lie}\{\eta^{i_n\dots i_1 j} : (i_n, \dots, i_1, j) \in \Omega_n\}, \tag{6.17}$$

$$\mathcal{L}^{[p]}_{X_1,\dots,X_m} = \mathrm{Lie}\Big\{\eta^{i_n\dots i_1 j} : (i_n, \dots, i_1, j) \in \Omega_n, \mathrm{ord}(\eta^{i_n\dots i_1 j}) \le p\Big\}. \tag{6.18}$$

Доведемо, що

$$\mathcal{L}_{X_1,\dots,X_m} = \mathrm{Lie}\{\eta^{i_n\dots i_1 j} : (i_n, \dots, i_1, j) \in \Omega_n\}. \tag{6.19}$$

За означенням, $\sum\limits_{k=1}^{p} \mathcal{P}^k \subset \mathcal{L}^{[p]}_{X_1,\dots,X_m}$ і, завдяки (6.18), $\mathcal{L}^{[p]}_{X_1,\dots,X_m}$ входить до правої частини (6.19). Отже, $\sum\limits_{k=1}^{p} \mathcal{P}^k$ входить до правої частини (6.19). Оскільки $\mathrm{ord}(\zeta_i) \le p$, $i = 1, \dots, n$, то з (6.17) випливає, що $\sum\limits_{k=p+1}^{\infty} \mathcal{P}^k$ також входить до правої частини (6.19). Отже,

$$\mathcal{L}_{X_1,\dots,X_m} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{P}^k \subset \mathrm{Lie}\{\eta^{i_n\dots i_1 j} : (i_n, \dots, i_1, j) \in \Omega_n\}.$$

Навпаки, розглянемо породжувальні елементи $\eta^{i_n\dots i_1 j}$. У випадку $\mathrm{ord}(\eta^{i_n\dots i_1 j}) \le p$ завдяки (6.18) маємо $\eta^{i_n\dots i_1 j} \in \mathcal{L}^{[p]}_{X_1,\dots,X_m} \subset \mathcal{L}_{X_1,\dots,X_m}$. У випадку $\mathrm{ord}(\eta^{i_n\dots i_1 j}) = r \ge p+1$ маємо $\eta^{i_n\dots i_1 j} \in \mathcal{L}^r = \mathcal{P}^r \subset \mathcal{L}_{X_1,\dots,X_m}$. Отже,

$$\mathrm{Lie}\{\eta^{i_n\dots i_1 j} : \ (i_n, \dots, i_1, j) \in \Omega_n\} \subset \mathcal{L}_{X_1,\dots,X_m},$$

оскільки $\mathcal{L}_{X_1,\dots,X_m}$ є алгеброю Лі. ■

Зауваження 6.1. *Добре відомо, що теорема 1.7 використовується для побудування однорідного градуйованого базису вільної алгебри Лі [120, 153]. Це класичне застосування відповідає «вільному» випадку, коли* $d_k = m_k$, $k = 1, \dots, p$. *Тоді елементи* $\zeta_1, \dots, \zeta_n$ *є першими* n *елементами однорідного базису алгебри Лі* $\mathcal{L}$.

Лема 6.1 і теорема 6.1 дають необхідні умови реалізовності послідовності (6.1) як вектора зросту. Дійсно, як було показано у доведенні леми 6.1, якщо послідовність (6.1) є вектором зросту, то $d_k \le m_k$ для будь-якого $k = 1, \dots, p$, де m_k — кількість елементів у множині $\Omega^k_{m_{k-1}}$. Але множини $\Omega^2_{v_1}, \dots, \Omega^p_{v_{p-1}}$ можуть бути побудовані без використання алгебри Лі, лише виходячи з чисел $v_1, \dots, v_p$ (і m). Такий алгоритм описаний явно в наступному наслідку.

Наслідок 6.1. *Якщо послідовність (6.1) є вектором зросту деякої системи вигляду (2.1), то мають місце нерівності* $d_k = v_k - v_{k-1} \le m_k$ *для всіх* $k = 1, \dots, p$, *де* $v_0 = 0$, *а числа* m_k *можуть бути знайдені за таким алгоритмом.*

Початкові позначення: $m_1 = m$, $\Omega_{v_0} = \Omega^1_{v_0} = \{1, \dots, m_1\}$.

k*-й крок* ($k = 1, \dots, p-1$)*:*

(a) *якщо* $v_k > v_{k-1}$, *то перенумерувати елементи множини* $\Omega^k_{v_{k-1}}$

$$\Omega^k_{v_{k-1}} = \{\langle 1\rangle, \dots, \langle m_k\rangle\}$$

і покласти

$$\begin{aligned}\Omega_{v_k} = \Big\{ (i_{v_k}, \dots, i_1, j) : {} & i_{v_k}, \dots, i_{v_{k-1}+1} \ge 0,\ (i_{v_{k-1}}, \dots, i_1, j) \in \Omega_{v_{k-1}}, \\ & (i_{v_{k-1}}, \dots, i_1, j) \ne \langle 1\rangle, \\ & (i_{v_{k-1}+1}, i_{v_{k-1}}, \dots, i_1, j) \ne (0, \langle 2\rangle), \\ & \dots \\ & (i_{v_k-1}, \dots, i_{v_{k-1}}, i_{v_{k-1}+1} \dots, i_1, j) \ne (0, \dots, 0, \langle d_k\rangle) \Big\};\end{aligned}$$

якщо $v_k = v_{k-1}$, *то* $\Omega_{v_k} = \Omega_{v_{k-1}}$;

(b) *позначити* m_{k+1} *кількість елементів у множині*

$$\Omega_{v_k}^{k+1} = \Omega_{v_k} \cap \Big\{(i_{v_k}, \ldots, i_1, j) : \sum_{q=1}^{k} q\Big(\sum_{r=v_{q-1}+1}^{v_q} i_r\Big) + 1 = k+1\Big\}. \qquad (6.20)$$

Зауважимо, що для побудови множини Ω_n з теореми 6.1 треба ще виконати пункт (a) на p-му кроці алгоритму.

Очевидно, що множина Ω_{v_k} задається підпослідовністю $(v_1, \ldots, v_k)$, а не тільки числом v_k, але ми використовуємо позначення Ω_{v_k} для скорочення запису.

Побудований алгоритм є досить громіздким, але чисто комбінаторним. Це означає, що можна отримати явну формулу, яка виражає m_{k+1} через m і $v_1, \ldots, v_k$, за допомогою аналізу множини $\Omega_{v_k}^{k+1}$. Але такі формули стають дуже складними навіть для малих k. Це пов'язано з тим, що означення $\Omega_{v_k}^{k+1}$ включає два різні обмеження: обмеження порядку і нерівності, які виключають деякі мультиіндекси (що задаються не тільки на k-му кроці, але й на попередніх кроках, коли будуються множини $\Omega_{v_1}, \ldots, \Omega_{v_k}$). Тому, записуючи обмеження порядку

$$k(i_{v_k}+\cdots+i_{v_{k-1}+1})+(k-1)(i_{v_{k-1}}+\cdots+i_{v_{k-2}+1})+\cdots+(i_{v_2}+\cdots+i_{v_1})+1 = k+1,$$

ми знаходимо всі варіанти розкласти $k+1$ у спеціальну суму v_k+1 невід'ємних доданків (що є досить стандартною задачею), але потім мусимо врахувати, що деякі мультиіндекси заборонені і мають бути виключені.

Ми отримаємо таку явну формулу в пункті 6.1.4. Зауважимо, що її можна отримати іншим, чисто комбінаторним шляхом, якщо скористатися результатами роботи [95].

6.1.3 Побудова системи з даним вектором зросту

Наслідок 6.1 дає необхідні умови реалізовності вектора зросту. У цьому пункті ми доведемо, що ці умови також є достатніми.

Припустимо, що виконано нерівності $d_k = v_k - v_{k-1} \le m_k$ для всіх $k = 1, \ldots, p$, де числа m_k знайдені за алгоритмом з наслідку 6.1. Застосовуючи цей алгоритм, отримаємо множини $\Omega_{v_1}, \ldots, \Omega_{v_{p-1}}$ і $\Omega^2_{v_1}, \ldots, \Omega^p_{v_{p-1}}$. Виконаємо ще пункт (a) на p-му кроці і побудуємо множину $\Omega_{v_p} = \Omega_n$.

Лема 6.2. *Припустимо, що для послідовності* (6.1) *і числа m виконуються нерівності $d_k = v_k - v_{k-1} \le m_k$ при $k = 1, \ldots, p$, де числа m_k знайдені за алгоритмом з наслідку 6.1. Тоді існують такі лінійно незалежні однорідні елементи $\zeta_1, \ldots, \zeta_n \in \mathcal{L}$, що $\mathrm{ord}(\zeta_{v_k+q}) = k+1$ для $q = 1, \ldots, d_{k+1}$, $k = 0, \ldots, p-1$, і має місце наступний прямий розклад*

$$\mathcal{L} = \mathrm{Lin}\{\zeta_1, \ldots, \zeta_{v_k}\} + \mathrm{Lie}\{\eta^{i_{v_k}\ldots i_1 j} : (i_{v_k}, \ldots, i_1, j) \in \Omega_{v_k}\} \tag{6.21}$$

для $k = 1, \ldots, p$, де

$$\mathrm{ord}(\eta^{i_{v_k}\ldots i_1 j}) = \sum_{q=1}^{k} q\Big(\sum_{r=v_{q-1}+1}^{v_q} i_r\Big) + 1. \tag{6.22}$$

Доведення. Розглянемо алгебру Лі $\mathcal{L} = \mathrm{Lie}\{\eta_1, \ldots, \eta_m\} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathcal{L}^k$. Міркуємо за індукцією, аналогічно доведенню леми 6.2.

Для $k = 1$ позначимо $m_1 = m$ і $d_1 = v_1$ і виберемо довільний базис $\widetilde{\eta}^1, \ldots, \widetilde{\eta}^{m_1}$ підпростору $\mathcal{L}^1$. За припущенням, $d_1 \le m_1$. Позначимо $\zeta_j = \widetilde{\eta}^j$, $j = 1, \ldots, d_1$. Застосовуючи теорему 1.7 (d_1 разів), отримуємо прямий розклад

$$\mathcal{L} = \mathrm{Lin}\{\zeta_1, \ldots, \zeta_{v_1}\} + \mathrm{Lie}\{\eta^{i_{v_1}\ldots i_1 j} : (i_{v_1}, \ldots, i_1, j) \in \Omega_{v_1}\},$$

де $\eta^{i_{v_1}\ldots i_1 j} = \mathrm{ad}^{i_{v_1}}_{\zeta_{v_1}} \cdots \mathrm{ad}^{i_1}_{\zeta_1} \widetilde{\eta}^j$, що дає (6.21), (6.22) при $k = 1$.

Крок індукції «від k до $k+1$». Припустимо, що зображення (6.21), (6.22) мають місце для деякого k, такого що $1 \le k < p$. Розглянемо множину

$$\Omega^{k+1}_{v_k} = \Omega_{v_k} \cap \Big\{(i_{v_k}, \ldots, i_1, j) : \sum_{q=1}^{k} q\Big(\sum_{r=v_{q-1}+1}^{v_q} i_r\Big) + 1 = k+1\Big\}$$

і підпростір

$$\mathrm{Lin}\{\eta^{i_{v_k}\ldots i_1 j} : (i_{v_k}, \ldots, i_1, j) \in \Omega^{k+1}_{v_k}\}. \tag{6.23}$$

За припущенням, $d_{k+1} \le m_{k+1}$, де m_{k+1} позначає кількість елементів у множині $\Omega^{k+1}_{v_k}$. Запишемо цю множину як $\Omega^{k+1}_{v_k} = \{\langle 1\rangle, \ldots, \langle m_{k+1}\rangle\}$.

Виберемо довільний базис підпростору (6.23) і позначимо його елементи $\widetilde{\eta}^{\langle 1\rangle},\ldots,\widetilde{\eta}^{\langle m_{k+1}\rangle}$. Також позначимо $\widetilde{\eta}^{i_{v_k}\ldots i_1 j}=\eta^{i_{v_k}\ldots i_1 j}$ для всіх $(i_{v_k},\ldots,i_1,j)\in\Omega_{v_k}\backslash\Omega_{v_k}^{k+1}$ і введемо $\zeta_{v_k+q}=\widetilde{\eta}^{\langle q\rangle}$, $q=1,\ldots,d_{k+1}$. Застосуємо теорему 1.7 (d_{k+1} разів); це *можна* зробити, оскільки $d_{k+1}\le m_{k+1}$. Отримуємо прямий розклад

$$\mathrm{Lie}\{\eta^{i_{v_k}\ldots i_1 j}:(i_{v_k},\ldots,i_1,j)\in\Omega_{v_k}\}=$$

$$=\mathrm{Lin}\{\zeta_{v_k+1},\ldots,\zeta_{v_{k+1}}\}+\mathrm{Lie}\{\eta^{i_{v_{k+1}}\ldots i_1 j}:(i_{v_{k+1}},\ldots,i_1,j)\in\Omega_{v_{k+1}}\},$$

де $\eta^{i_{v_{k+1}}\ldots i_1 j}=\mathrm{ad}_{\zeta_{v_{k+1}}}^{i_{v_{k+1}}}\cdots\mathrm{ad}_{\zeta_{v_k+1}}^{i_{v_k+1}}\widetilde{\eta}^{i_{v_k}\ldots i_1 j}$ і множина $\Omega_{v_{k+1}}$ визначається, як у пункті (a) алгоритму з наслідку 6.1. За вибором, $\mathrm{ord}(\zeta_{v_k+q})=k+1$, $q=1,\ldots,d_{k+1}$, і $\mathrm{ord}(\eta^{i_{v_{k+1}}\ldots i_1 j})=(k+1)(i_{v_{k+1}}+\cdots+i_{v_k+1})+\mathrm{ord}(\widetilde{\eta}^{i_{v_k}\ldots i_1 j})$, звідки очевидно випливає (6.21), (6.22) при $k+1$. ∎

Теорема 6.2. *Послідовність (6.1) реалізовна як вектор зросту системи вигляду (2.1) тоді і тільки тоді, коли мають місце нерівності $d_k=v_k-v_{k-1}\le m_k$ для всіх $k=1,\ldots,p$, де $v_0=0$ і числа m_k знаходяться за алгоритмом з наслідку 6.1.*

Доведення. Необхідність випливає з наслідку 6.1.

Достатність. Припустимо, що задані послідовність (6.1) і число m, для яких виконуються нерівності $d_k=v_k-v_{k-1}\le m_k$, $k=1,\ldots,p$. Ми покажемо, як побудувати систему вигляду (2.1), яка має вектор зросту (6.1).

За лемою 6.2, існують такі лінійно незалежні елементи $\zeta_1,\ldots,\zeta_n\in\mathcal{L}$, що $\mathrm{ord}(\zeta_{v_k+q})=k+1$ для $q=1,\ldots,d_{k+1}$, $k=0,\ldots,p-1$, і

$$\mathcal{L}=\mathrm{Lin}\{\zeta_1,\ldots,\zeta_n\}+\mathrm{Lie}\{\eta^{i_n\ldots i_1 j}:(i_n,\ldots,i_1,j)\in\Omega_n\}.$$

Виберемо однорідний базис підпростору

$$\mathrm{Lie}\{\eta^{i_n\ldots i_1 j}:(i_n,\ldots,i_1,j)\in\Omega_n\}\tag{6.24}$$

і позначимо його елементи $\{\zeta_q\}_{q=n+1}^{\infty}$. Без обмеження загальності будемо вважати, що $\mathrm{ord}(\zeta_{q_1})\ge\mathrm{ord}(\zeta_{q_2})$ при $q_1>q_2\ge n+1$.

Нехай асоціативна алгебра $\mathcal{F}$ є універсальною огортоючою для $\mathcal{L}$ [19, 120]. Розглянемо базис Пуанкаре-Біркгофа-Вітта

$$\{\zeta_{q_k}\cdots\zeta_{q_1}:\ q_k\geq\cdots\geq q_1\geq 1,\quad k\geq 1\}\tag{6.25}$$

і побудуємо лінійне відображення $c:\mathcal{F}\to\mathbb{R}^n$, для якого

$$c(\zeta_s)=\begin{cases} e_s & \text{при}\ \ 1\leq s\leq n,\\ 0 & \text{при}\ \ s\geq n+1,\end{cases}\tag{6.26}$$

де $e_s=(0,\ldots,1,\ldots,0)$ (одиниця на s-му місці), і

$$c(\zeta_{q_k}\cdots\zeta_{q_1})=0,\quad q_k\geq\cdots\geq q_1\geq 1,\ k\geq 2.\tag{6.27}$$

Це відображення задовольняє умови теореми 1.8, а отже, існують такі дійсно-аналітичні в околі нуля векторні поля $X_1(x),\ldots,X_m(x)$, що

$$c(a)=H(a)E(0)\ \ \text{для всіх}\ a\in\mathcal{F},$$

де H — анти-гомоморфізм (2.20). Розглянемо векторні поля $Y_s=H(\zeta_s)$, $s\geq 1$, тоді

$$Y_s(0)=\begin{cases} e_s & \text{при}\ \ 1\leq s\leq n,\\ 0 & \text{при}\ \ s\geq n+1,\end{cases}\tag{6.28}$$

$$Y_{q_k}\cdots Y_{q_1}(0)=0,\quad q_k\geq\cdots\geq q_1\geq 1,\ k\geq 2.\tag{6.29}$$

Отже, вектор зросту системи $\dot{x}=\sum\limits_{i=1}^m u_iX_i(x)$ дорівнює (6.1). Крім того, ядерна підалгебра Лі $\mathcal{L}_{X_1,\ldots,X_m}$ цієї системи збігається з (6.24).

Векторні поля $X_1(x),\ldots,X_m(x)$ можна знайти за формулами

$$X_j\Big(\exp(x_nY_n)\cdots\exp(x_1Y_1)(0)\Big)=\exp(x_nY_n)\cdots\exp(x_1Y_1)X_j(0),$$

$j=1,\ldots,m$, якщо скористатися означенням операторної експоненти (1.33); разом з (6.28), (6.29) це дає

$$X_j^{(s)}(0)e_{q_s}\cdots e_{q_1}=Y_{q_s}\cdots Y_{q_1}X_j(0),\quad s\geq 1,\ \ n\geq q_s\geq\cdots\geq q_1\geq 1,$$

тобто

$$X_j(x)=\sum_{i_1,\ldots,i_n\geq 0}\frac{x_1^{i_1}\cdots x_n^{i_n}}{i_1!\cdots i_n!}Y_n^{i_n}\cdots Y_1^{i_1}X_j(0),\quad j=1,\ldots,m.\tag{6.30}$$

Ураховуючи означення Y_i, отримуємо зображення

$$X_j(x) = \sum_{i_1,\dots,i_n \geq 0} \frac{x_1^{i_1}\cdots x_n^{i_n}}{i_1!\cdots i_n!} c(\zeta_n^{i_n}\cdots\zeta_1^{i_1}\eta_j)(0),\ j = 1,\dots,m. \tag{6.31}$$

Оскільки $\zeta_n^{i_n}\cdots\zeta_1^{i_1}\eta_j$ можна подати як лінійні комбінації елементів (6.25), за побудовою (6.26), (6.27) векторні поля $X_j(x)$ є поліноміальними. А саме, якщо

$$\zeta_n^{i_n}\cdots\zeta_1^{i_1}\eta_j = \sum \alpha_{q_k\dots q_1}^{i_n\dots i_1 j}\zeta_{q_k}\cdots\zeta_{q_1},$$

де сума береться по $q_k \geq \cdots \geq q_1$, то

$$X_j(x) = \sum_{q=1}^{n} {\sum}' \frac{x_1^{i_1}\cdots x_n^{i_n}}{i_1!\cdots i_n!}\alpha_q^{i_n\dots i_1 j} e_q,\ j = 1,\dots,m, \tag{6.32}$$

де сума $\sum'$ береться по всіх $i_1,\dots,i_n \geq 0$, таких що $\sum\limits_{k=1}^{n} i_k \operatorname{ord}(\zeta_k) + 1 = \operatorname{ord}(\zeta_q)$, $q = 1,\dots,n$. Це означає, що компоненти X_j є однорідними, якщо $\operatorname{ord}(\zeta_q)$ збігається з вагою координати x_q, $q = 1,\dots,n$. ■

Зауваження 6.2. *У доведенні леми 6.2 позначимо*

$$\mathcal{N}^k = \operatorname{Lin}\{\widetilde{\eta}^{\langle d_k+1\rangle},\dots,\widetilde{\eta}^{\langle m_k\rangle}\},\ k = 1,\dots,p.$$

За побудовою $\mathcal{N}^k$ може бути довільним $(m_k - d_k)$-вимірним підпростором простору

$$\operatorname{Lin}\{\eta^{i_{v_{k-1}}\dots i_1 j} : (i_{v_{k-1}},\dots,i_1,j) \in \Omega_{v_{k-1}}^k\}.$$

Отже, з теореми 6.2 випливає, що будь-яка множина підпросторів

$$\mathcal{N}^k \subset \operatorname{Lin}\{\eta^{i_{v_{k-1}}\dots i_1 j} : (i_{v_{k-1}},\dots,i_1,j) \in \Omega_{v_{k-1}}^k\},\ \dim\mathcal{N}^k = m_k - d_k,$$

$k = 1,\dots,p$, породжує систему вигляду (2.1) з вектором зросту (6.1).

6.1.4 Умови реалізовності в термінах твірної функції

У цьому пункті ми сформулюємо іншу форму умов реалізовності вектора зросту. Для заданого вектора (6.1) побудуємо послідовність

$$w = (w_1,\dots,w_n) = (\underbrace{1,\dots,1}_{d_1},\underbrace{2,\dots,2}_{d_2},\dots,\underbrace{p,\dots,p}_{d_p}). \tag{6.33}$$

Тоді $w_q = \operatorname{ord}(\zeta_q) = k$ при $v_{k-1}+1 \le q \le v_k$, $q = 1,\dots,n$ (а отже, w_q є вагою координати x_q з (6.32)).

Повернемось до множин Ω_{v_k} і $\Omega_{v_k}^{k+1}$, побудованих у наслідку 6.1. Зауважимо, що

$$\sum_{q=1}^{k} q\Big(\sum_{r=v_{q-1}+1}^{v_q} i_r\Big) + 1 = \sum_{t=1}^{v_k} i_t w_t + 1.$$

Множини $\Omega_{v_1},\dots,\Omega_{v_p}$ можна включити до послідовності $\Omega_0,\dots,\Omega_n$, для якої $\Omega_0 = \{1,\dots,m\}$ і

$$\Omega_q = \{(i_q,\dots,i_1,j) : i_q \ge 0, (i_{q-1},\dots,i_1,j) \in \Omega_{q-1}\backslash \operatorname{el}(\Omega_{q-1}^{w_q})\},\ q = 1,\dots,n,$$

де

$$\Omega_{q-1}^r = \left\{(i_{q-1},\dots,i_1,j) \in \Omega_{q-1} : \sum_{t=1}^{q-1} i_t w_t + 1 = r\right\}$$

і $\operatorname{el}(\Omega_{q-1}^r)$ означає одноелементну множину, яка містить довільний елемент з Ω_{q-1}^r.

Нехай $s_q(r)$ позначає кількість елементів у множині Ω_q^r, $q = 0,\dots,n$. Для спрощення припустимо, що $-\infty < r < \infty$, і позначимо $s_q(r) = 0$ при $r \le 0$. Наша мета — побудувати послідовності $\{s_q(r)\}_{r=-\infty}^{\infty}$, $q = 0,\dots,n$.

На першому кроці введемо послідовність $\{s_0(r)\}_{r=-\infty}^{\infty}$ вигляду

$$s_0(r) = \begin{cases} 0 & \text{при } r \ne 1, \\ m & \text{при } r = 1. \end{cases}$$

Очевидно, $s_0(r)$ дорівнює кількості елементів у множині Ω_0^r, яку можна подати як $\Omega_0^r = \{j \in \Omega_0 :\ 1 = r\}$.

Припустимо, що послідовність $\{s_q(r)\}_{r=-\infty}^{\infty}$, де $0 \le q < n$, уже відома, Знайдемо $\{s_{q+1}(r)\}_{r=-\infty}^{\infty}$. Маємо

$$\Omega_{q+1}^r = \left\{(i_{q+1},\dots,i_1,j) : i_{q+1} \ge 0, (i_q,\dots,i_1,j) \in \Omega_q \backslash \operatorname{el}(\Omega_q^{w_{q+1}}), \sum_{t=1}^{q+1} i_t w_t + 1 = r\right\},$$

отже, $\sum\limits_{t=1}^{q} i_t w_t + 1 = r - i_{q+1} w_{q+1}$. Це означає, що для будь-якого фіксованого $i_{q+1} \ge 0$ мультиіндекс $(i_q,\dots,i_1,j)$ може бути *довільним* елементом

$\Omega_q^{r-i_{q+1}w_{q+1}}$ *крім одного елемента* множини $\Omega_q^{w_{q+1}}$ (який позначений вище як $\mathrm{el}(\Omega_q^{w_{q+1}})$). Отже, щоб знайти $\{s_{q+1}(r)\}_{r=-\infty}^{\infty}$, покладемо

$$\widetilde{s}_q(r) = \begin{cases} s_q(r) & \text{при } r \neq w_{q+1}, \\ s_q(r) - 1 & \text{при } r = w_{q+1}, \end{cases} \tag{6.34}$$

$$s_{q+1}(r) = \sum_{i \geq 0} \widetilde{s}_q(r - iw_{q+1}). \tag{6.35}$$

Оскільки $s_q(r) = 0$ для $r \leq 0$, тільки скінченна кількість доданків у сумі в правій частині не дорівнює нулю.

Повторюючи такі кроки, побудуємо послідовності $\{s_q(r)\}_{r=-\infty}^{\infty}$ для всіх $q = 1, \dots, n$.

Лема 6.3. *Послідовність* (6.1) *реалізовна як вектор зросту тоді і тільки тоді, коли всі елементи послідовності* $\{s_n(r)\}_{r=-\infty}^{\infty}$ *невід'ємні. Більш того, ця умова виконується тоді і тільки тоді, коли всі елементи* $s_n(1), \dots, s_n(p)$ *невід'ємні.*

Доведення. Необхідність. Нехай (6.1) реалізовна, тоді $m_k \geq d_k$, $k = 1, \dots, p$. Покажемо, що всі елементи всіх послідовностей $s_0(r), \dots, s_n(r)$ невід'ємні.

Усі елементи $s_0(r) = s_{v_0}(r)$ невід'ємні. Припустимо, що для деякого $0 \leq k \leq p-1$ усі елементи $s_{v_k}(r)$ невід'ємні. Припустимо, що $d_{k+1} \geq 1$, і доведемо цю властивість для послідовності $s_{v_k+1}(r), \dots, s_{v_{k+1}}(r)$.

Зауважимо, що $w_q = k+1$ при $q = v_k + 1, \dots v_{k+1}$. Оскільки $s_q(w_q) = \widetilde{s}_{q-1}(w_q) = s_{q-1}(w_q) - 1$, маємо

$$s_{v_{k+1}}(k+1) = s_{v_{k+1}-1}(k+1) - 1 = \dots = s_{v_k}(k+1) - d_{k+1} = m_{k+1} - d_{k+1}. \tag{6.36}$$

За припущенням, $m_{k+1} - d_{k+1} \geq 0$, отже,

$$s_q(k+1) \geq 1, \qquad q = v_k, \dots, v_{k+1} - 1. \tag{6.37}$$

Завдяки (6.34), (6.35), якщо всі елементи $s_q(r)$ невід'ємні і $s_q(w_{q+1}) \geq 1$, то всі елементи $s_{q+1}(r)$ теж невід'ємні. Ураховуючи це, можна легко довести за індукцією, що з припущення $s_{v_k}(r) \geq 0$ для всіх r і нерівностей (6.37) випливає невід'ємність усіх елементів послідовностей $s_{v_k+1}(r), \dots, s_{v_{k+1}}(r)$.

Достатність. Припустимо, що $s_n(1), \dots, s_n(p)$ невід'ємні, але (6.1) не є реалізовною, тоді $m_{k+1} < d_{k+1}$ для деякого $k+1 \leq p$. Використовуючи (6.36), отримуємо $s_{v_{k+1}}(k+1) = m_{k+1} - d_{k+1} < 0$. Тоді $s_q(k+1) = s_{v_{k+1}}(k+1) < 0$ для всіх $q \geq v_{k+1}$ і, зокрема, $s_n(k+1) < 0$, що суперечить припущенню. ■

Підкреслимо, що числа $m_k = s_{v_{k-1}}(k)$ можуть бути знайдені з єдиної послідовності $s_n(r)$. А саме, оскільки $s_n(k) = s_{v_{k-1}}(k) - d_k$, маємо $m_k = s_n(k) + d_k$, $k = 1, \dots, p$.

Зауваження 6.3. *Нагадаємо, що ядерна підалгебра Лі $\mathcal{L}_{X_1,\dots,X_m}$ є вільною алгеброю, що породжується множиною $\{\eta^{i_n \dots i_1 j} : (i_n, \dots, i_1, j) \in \Omega_n\}$. Кожний елемент цієї множини є однорідним,* $\mathrm{ord}(\eta^{i_n \dots i_1 j}) = \sum_{t=1}^{n} i_t w_t + 1$. *Кількість елементів порядку r у цій множині дорівнює $s_n(r)$. Отже, $\mathcal{L}_{X_1,\dots,X_m}$ є градуйованою алгеброю Лі, яка вільно породжується градуйованим підпростором $\sum_{r=1}^{\infty} V_r$, де $V_r = \mathrm{Lin}\{\eta^{i_n \dots i_1 j} : (i_n, \dots, i_1, j) \in \Omega_n^r\}$ і* $\dim V_r = s_n(r)$.

Наслідок 6.2. *Якщо $m \geq n$, то умови реалізовності виконуються автоматично.*

Доведення. Нехай $m \geq n$. Доведемо, що $s_q(r) \geq n - q$, $r \geq 1$, для всіх $q = 1, \dots, n$.

Тут ми суттєво використовуємо, що $w_1 = 1$, звідки випливає $s_1(r) = m - 1 \geq n - 1$ для $r \geq 1$.

Припустимо, що $s_q(r) \geq n - q$ для деякого $1 \leq q \leq n-1$. За означенням $s_q(r)$, якщо елементи $s_q(r)$ додатні, то $s_{q+1}(r) \geq s_q(r) - 1$. Оскільки за припущенням індукції $s_q(r) \geq n - q > 0$, то $s_{q+1}(r) \geq s_q(r) - 1 \geq n - q - 1$.

Застосовуючи індукцію, отримуємо, що $s_q(r) \geq n - q$ для $1 \leq q \leq n$. Зокрема, $s_n(r) \geq 0$ для всіх $r \geq 1$ і умови реалізовності виконуються. ■

Тепер знайдемо твірну функцію для послідовності $s_n(r)$. Очевидно, твірна функція для $s_0(r)$ дорівнює $f_0(z) = mz$. Нехай $f_q(z)$ — твірна функція для послідовності $s_q(r)$. Тоді $\widetilde{f}_q(z) = f_q(z) - z^{w_{q+1}}$ є твірною функцією для $\widetilde{s}_q(r)$, а

$$f_{q+1}(z) = \widetilde{f}_q(z) \sum_{i \geq 0} z^{iw_{q+1}} = \frac{\widetilde{f}_q(z)}{1 - z^{w_{q+1}}} = \frac{f_q(z) - z^{w_{q+1}}}{1 - z^{w_{q+1}}} = \frac{f_q(z) - 1}{1 - z^{w_{q+1}}} + 1$$

є твірною функцією для $s_{q+1}(r)$. Отже,

$$f_{q+1}(z) - 1 = \frac{f_q(z) - 1}{1 - z^{w_{q+1}}}, \quad q = 0, \ldots, n-1.$$

Таким чином,

$$f_n(z) - 1 = \frac{f_{n-1}(z) - 1}{1 - z^{w_n}} = \frac{f_{n-2}(z) - 1}{(1 - z^{w_n})(1 - z^{w_{n-1}})} = \cdots = \frac{f_0(z) - 1}{(1 - z^{w_n}) \cdots (1 - z^{w_1})}.$$

Оскільки $\prod\limits_{i=1}^{n} (1 - z^{w_i}) = \prod\limits_{k=1}^{p} (1 - z^k)^{d_k}$, отримуємо два зображення для твірної функції $f_n(z)$:

$$f_n(z) = \frac{mz - 1}{\prod\limits_{i=1}^{n} (1 - z^{w_i})} + 1 = \frac{mz - 1}{\prod\limits_{k=1}^{p} (1 - z^k)^{d_k}} + 1. \tag{6.38}$$

Ураховуючи теорему 6.2 і лему 6.3, отримуємо такий результат.

Наслідок 6.3. *Послідовність* (6.1) *реалізовна як вектор зросту тоді і тільки тоді, коли всі коефіцієнти ряду Тейлора функції* (6.38) *в точці* $z = 0$ *невід'ємні. Більш того, ця умова виконується тоді і тільки тоді, коли тільки коефіцієнти* $z^1, \ldots, z^p$ *невід'ємні.*

Зауваження 6.4. *Як згадано в зауваженні 6.1, у вільному випадку, коли* $d_k = m_k$, $k = 1, \ldots, p$, *наш алгоритм дає перші* n *елементів однорідного базису алгебри Лі* $\mathcal{L}$*; отже,* $d_k = \dim \mathcal{L}^k$*. У цьому випадку всі коефіцієнти* $z^1, \ldots, z^p$ *ряду Тейлора функції* $f_n(z)$ *в точці* $z = 0$ *дорівнюють нулю. Отже,*

$$\frac{1 - mz}{\prod\limits_{k=1}^{p} (1 - z^k)^{d_k}} = 1 + \bar{o}(z^p).$$

Беручи логарифм від обох частин і розглядаючи тільки члени до степеня p, отримуємо рівності $m^q = \sum_{k|q} kd_k$, $q = 1, \ldots, p$, звідки, після застосування формули обернення, отримуємо відому формулу $d_k = \dim \mathcal{L}^k = \frac{1}{k} \sum_{q|k} \mu(q) m^{k/q}$, де $\mu(q)$ є функцією Мебіуса [120, 153].

Зауважимо, що за допомогою формули (6.38) можна одночасно розв'язати задачі реалізовності для всіх $m \geq 2$ (і фіксованої послідовності (6.1)). За наслідком 6.2, для довільної послідовності (6.1) існує таке m, для якого виконуються умови реалізовності. Розглянемо задачу «мінімальної реалізовності»: для заданої послідовності (6.1) знайти *мінімальне* число m, для якого (6.1) реалізовна як вектор зросту. Розглянемо ряд

$$\frac{1}{\prod_{i=1}^{n}(1 - z^{w_i})} = \frac{1}{\prod_{k=1}^{p}(1 - z^k)^{d_k}} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k, \tag{6.39}$$

тоді $f_n(z) = \sum_{k=1}^{\infty}(mc_{k-1} - c_k)z^k$. Оскільки $w_1 = 1$, то $c_k \geq 1$ для всіх $k \geq 0$. Тоді шукане мінімальне число m_{min} дорівнює

$$m_{min} = \left\lceil \max\left\{\frac{c_k}{c_{k-1}},\ k = 1, \ldots, p\right\}\right\rceil, \tag{6.40}$$

де $\lceil x \rceil$ позначає найменше ціле число, не менше, ніж x. Очевидно, для $n \geq 2$ отримуємо $m_{min} \geq 2$.

Вкажемо ще одне узагальнення. Припустимо, що векторні поля $X_1, \ldots, X_m$ мають різну (цілу додатну) вагу $r_1, \ldots, r_m$ відповідно. Це породжує нове градуювання в алгебрі Лі $\mathcal{L}$ і, як наслідок, в ядерній підалгебрі Лі $\mathcal{L}_{X_1,\ldots,X_m}$, а саме, $\operatorname{ord}(\eta_i) = r_i$, $i = 1, \ldots, m$. Тоді задача реалізовності формулюється таким чином: для заданої послідовності (6.1) визначити, чи існують такі векторні поля фіксованої ваги $r_1, \ldots, r_m$, що (6.1) є вектором зросту системи (2.1).

Ця задача може бути розв'язана за допомогою твірної функції вигляду

$$f_n(z) = \frac{\sum_{k=1}^{m} z^{r_k} - 1}{\prod_{i=1}^{n}(1 - z^{w_i})} + 1.$$

А саме, (6.1) реалізовна як вектор зросту в зазначеному сенсі тоді і тільки тоді, коли всі коефіцієнти ряду Тейлора функції (6.38) в точці $z = 0$ невід'ємні.

6.1.5 Опис усіх ядерних підалгебр Лі з заданим вектором зросту

У цьому пункті ми отримаємо опис усіх можливих ядерних підалгебр Лі (повністю неголономних) систем вигляду (2.1) із заданим вектором зросту.

Як згадано в зауваженні 6.2, будь-яка послідовність підпросторів

$$\mathcal{N}^k \subset \mathrm{Lin}\{\eta^{i_{v_{k-1}}\dots i_1 j} : (i_{v_{k-1}}, \dots, i_1, j) \in \Omega^k_{v_{k-1}}\}, \quad \dim \mathcal{N}^k = m_k - d_k,$$

$k = 1, \dots, p$, породжує деяку систему з вектором зросту (6.1). Але множини $\mathrm{Lin}\{\eta^{i_{v_{k-1}}\dots i_1 j} : (i_{v_{k-1}}, \dots, i_1, j) \in \Omega^k_{v_{k-1}}\}$ залежать від вибору базисних елементів $\zeta_1, \dots, \zeta_{v_{k-1}}$. Опишемо інваріантний аналог підпросторів $\mathcal{N}^k$.

Нагадаємо, що $\mathrm{Gr}_i(V)$ позначає грассманіан (многовид Грассмана), тобто множину всіх i-вимірних лінійних підпросторів лінійного простору V; у випадку $V = \mathbb{R}^j$ використовується позначення Gr_i^j. Ми будемо вважати, що якщо V — j-вимірний простір над $\mathbb{R}$, то $\mathrm{Gr}_i(V) = \mathrm{Gr}_i^j$

Теорема 6.3. *Множина всіх ядерних підалгебр Лі, які відповідають системам вигляду* (2.1) *з фіксованим вектором зросту* (6.1), *знаходиться у взаємно однозначній відповідності з* $\sum\limits_{k=1}^{p} d_k(m_k - d_k)$*-вимірним многовидом* $\mathrm{Gr}^{m_1}_{m_1-d_1} \times \dots \times \mathrm{Gr}^{m_p}_{m_p-d_p}$.

Доведення. Зауважимо, що $\mathcal{N}^1$ може бути довільним (m_1-d_1)-вимірним підпростором m_1-вимірного векторного простору $\mathcal{L}^1 = \mathrm{Lin}\{\eta_1, \dots, \eta_m\}$. Іншими словами, $\mathcal{N}^1$ може бути довільним елементом грассманіана $\mathrm{Gr}^{m_1}_{m_1-d_1} = \mathrm{Gr}_{m_1-d_1}(\mathcal{L}^1)$.

Припустимо, що $\mathcal{N}^1$ обраний; побудуємо підалгебру Лі $\mathcal{L}^{[1]}_{X_1,\dots,X_m}$, яка породжується $\mathcal{N}^1$. Розглянемо підпростір $\mathcal{L}^2$. Він припускає прямий розклад

$$\mathcal{L}^2 = (\mathrm{Lin}\{\eta^{i_{v_1}\dots i_1 j} : (i_{v_1}, \dots, i_1, j) \in \Omega_{v_1}\} \cap \mathcal{L}^2) + (\mathcal{L}^{[1]}_{X_1,\dots,X_m} \cap \mathcal{L}^2),$$

а $\mathcal{N}^2$ може бути довільним $(m_2 - d_2)$-вимірним підпростором m_2-вимірного простору $\mathrm{Lin}\{\eta^{i_{v_1}\dots i_1 j} : (i_{v_1}, \dots, i_1, j) \in \Omega^2_{v_1}\}$, який залежить від вибору $\zeta_1, \dots, \zeta_{v_1}$. Але фактор-підпростір $\mathcal{L}^2/\mathcal{L}^{[1]}_{X_1,\dots,X_m}$ (який є m_2-вимірним) залежить тільки від $\mathcal{N}^1$. Тоді $\mathcal{N}^2$ визначає фактор-підпростір $[\mathcal{N}^2] \subset \mathcal{L}^2/\mathcal{L}^{[1]}_{X_1,\dots,X_m}$ (де $[\mathcal{N}^2]$ означає підпростір класів еквівалентності елементів $\mathcal{M}^2$). Отже, $[\mathcal{N}^2]$ може бути довільним елементом грассманіана $\mathrm{Gr}^{m_2}_{m_2-d_2} = \mathrm{Gr}_{m_2-d_2}(\mathcal{L}^2/\mathcal{L}^{[1]}_{X_1,\dots,X_m})$.

Далі, побудуємо $\mathcal{L}^{[2]}_{X_1,\dots,X_m}$ як підалгебру Лі, яка породжена $\mathcal{N}^1$ і будь-яким представником $\mathcal{N}^2$ класу $[\mathcal{N}^2]$ (очевидно, $\mathcal{L}^{[2]}_{X_1,\dots,X_m}$ не залежить від вибору цього представника). Тоді $[\mathcal{N}^2] = (\mathcal{L}^{[2]}_{X_1,\dots,X_m} \cap \mathcal{L}^2)/\mathcal{L}^{[1]}_{X_1,\dots,X_m}$. Для зручності позначимо $[\mathcal{N}^1] = \mathcal{N}^1$.

Припустимо, що $[\mathcal{N}^1], \dots, [\mathcal{N}^k]$ вже обрані і $\mathcal{L}^{[k]}_{X_1,\dots,X_m}$ побудована. Розглянемо $\mathcal{L}^{k+1}$, що припускає прямий розклад (6.8), і фактор-підпростір $\mathcal{L}^{k+1}/\mathcal{L}^{[k]}_{X_1,\dots,X_m}$, що залежить тільки від $[\mathcal{N}^1], \dots, [\mathcal{N}^k]$. Тоді $\mathcal{N}^{k+1}$ визначає фактор-підпростір $[\mathcal{N}^{k+1}] \subset \mathcal{L}^{k+1}/\mathcal{L}^{[k]}_{X_1,\dots,X_m}$, який може бути довільним елементом грассманіана $\mathrm{Gr}^{m_{k+1}}_{m_{k+1}-d_{k+1}} = \mathrm{Gr}_{m_{k+1}-d_{k+1}}(\mathcal{L}^{k+1}/\mathcal{L}^{[k]}_{X_1,\dots,X_m})$. Оберемо $[\mathcal{N}^{k+1}]$ і побудуємо $\mathcal{L}^{[k+1]}_{X_1,\dots,X_m}$ як алгебру Лі, що породжена $\mathcal{N}^1, \dots, \mathcal{N}^{k+1}$ (де $\mathcal{N}^j$ є представниками класів $[\mathcal{N}^j]$ і, очевидно, $\mathcal{L}^{[k+1]}_{X_1,\dots,X_m}$ не залежить від вибору цих представників). Тоді $[\mathcal{N}^{k+1}] = (\mathcal{L}^{[k+1]}_{X_1,\dots,X_m} \cap \mathcal{L}^{k+1})/\mathcal{L}^{[k]}_{X_1,\dots,X_m}$.

Так, після p кроків, ми оберемо p підпросторів $[\mathcal{N}^1], \dots, [\mathcal{N}^p]$, які породжують підалгебру Лі $\mathcal{L}^{[p]}_{X_1,\dots,X_m}$. Оскільки $\mathcal{L}^r \subset \mathcal{L}_{X_1,\dots,X_m}$ для всіх $r \geq p+1$, ядерна підалгебра Лі повністю визначена.

Зворотно, ядерна підалгебра Лі $\mathcal{L}_{X_1,\dots,X_m}$ породжує послідовність зведених ядерних підалгебр Лі $\mathcal{L}^{[k]}_{X_1,\dots,X_m}$. Тоді $[\mathcal{N}^k] = (\mathcal{L}^{[k]}_{X_1,\dots,X_m} \cap \mathcal{L}^k)/\mathcal{L}^{[k-1]}_{X_1,\dots,X_m}$ є $(m_k - d_k)$-вимірними фактор-підпросторами m_k-вимірних фактор-просторів $\mathcal{L}^k/\mathcal{L}^{[k-1]}_{X_1,\dots,X_m}$, $k = 1, \dots, p$. Отже, $\mathcal{L}_{X_1,\dots,X_m}$ визначає елемент многовиду

$$\mathrm{Gr}_{m_1-d_1}(\mathcal{L}^1) \times \mathrm{Gr}_{m_2-d_2}(\mathcal{L}^2/\mathcal{L}^{[1]}_{X_1,\dots,X_m}) \times \dots \times \mathrm{Gr}_{m_p-d_p}(\mathcal{L}^p/\mathcal{L}^{[p-1]}_{X_1,\dots,X_m}).$$

$\blacksquare$

У наступному підрозділі ми використаємо теорему 6.3 в задачі A-еквівалентності за зворотним зв'язком.

Приклад 6.1. Розглянемо таку послідовність:

$$v = (2, 2, 5, 5, 6).$$

Спочатку знайдемо, для яких m вона реалізується як вектор зросту (при $n = 6$). Розглянемо ряд (6.39) і використаємо оцінку (6.40). Оскільки $w = (1, 1, 3, 3, 3, 5)$, отримуємо

$$\frac{1}{(1-z)^2(1-z^3)^3(1-z^5)} = 1 + 2z + 3z^2 + 7z^3 + 11z^4 + 16z^5 + \cdots,$$

звідки випливає

$$m_{min} = \left\lceil \max\left\{2, \tfrac{3}{2}, \tfrac{7}{3}, \tfrac{11}{7}, \tfrac{16}{11}\right\}\right\rceil = 3.$$

Це означає, що для $m \geq 3$ послідовність v реалізовна як вектор зросту.

Нехай $m = 3$, тоді

$$f_6(z) = \frac{3z-1}{(1-z)^2(1-z^3)^3(1-z^5)} + 1 =$$
$$= z + 3z^2 + 2z^3 + 10z^4 + 17z^5 + 21z^6 + 43z^7 + 62z^8 + \cdots.$$

Це означає, що $\{s_6(k)\}_{k=1}^{\infty} = (1, 3, 2, 10, 17, 21, 43, 62, \ldots)$. Тепер знайдемо числа $m_1, \ldots, m_5$ за формулою $m_k = s_6(k) + d_k$. Оскільки $d = (2, 0, 3, 0, 1)$, маємо

$$m_1 = 3,\ m_2 = 3,\ m_3 = 5,\ m_4 = 10,\ m_5 = 18.$$

Отже, простір усіх ядерних підалгебр Лі для систем з таким вектором зросту є $2 + 6 + 17 = 25$-вимірним. Також отримуємо, що послідовність

$$(2, 2, 5, 5, \underbrace{6, \ldots, 6}_{q \geq 1}, v_{q+5})$$

реалізується як вектор зросту (з $m = 3$) тоді і тільки тоді, коли $v_{q+5} \leq 6 + s_6(q+5)$. Наприклад, для $q = 1$ маємо $v_6 \leq 27$.

Тепер знайдемо яку-небудь систему з вектором зросту v (як показано вище, множина однорідних апроксимацій *всіх* таких систем є 25-вимірним многовидом). Виберемо $\zeta_1 = \eta_1$, $\zeta_2 = \eta_2$, $\zeta_3 = \mathrm{ad}^2_{\zeta_1}\eta_2$, $\zeta_4 = \mathrm{ad}^2_{\zeta_1}\eta_3$, $\zeta_5 = \mathrm{ad}_{\zeta_2}\mathrm{ad}_{\zeta_1}\eta_2$ і $\zeta_6 = \mathrm{ad}^4_{\zeta_1}\eta_2$. За методом пункту 6.1.3 отримуємо однорідну систему

$$\dot{x}_1 = u_1,\ \dot{x}_2 = u_2,\ \dot{x}_3 = \tfrac{1}{2}x_1^2u_2,\ \dot{x}_4 = \tfrac{1}{2}x_1^2u_3,\ \dot{x}_5 = x_1x_2u_2,\ \dot{x}_6 = \tfrac{1}{24}x_1^4u_2.$$

6.2 А-еквівалентність і нормалізація однорідних апроксимацій

У цьому підрозділі ми використовуємо теорему 6.3 і розвиваємо деякі ідеї робіт [47, 46, 112]. Пропонується означення А-нормального і А-простого вектора зросту і дається повний опис А-нормальних і А-простих векторів зросту для випадку систем з двовимірним керуванням. Результати підрозділу опубліковані в [83].

6.2.1 А-еквівалентні та А-прості вектори зросту

Означення 6.3. *Ми кажемо, що дві системи вигляду* (2.1) *є А-еквівалентними, якщо їх ядерні підалгебри Лі збігаються.*

Таким чином, дві системи є А-еквівалентними, якщо вони мають одну й ту саму однорідну апроксимацію.

Детальніше, властивість А-еквівалентності може бути пояснена таким чином. Припустимо, що нам задані дві вільні алгебри Лі $\mathcal{L} = \mathrm{Lie}\{\eta_1, \ldots, \eta_m\}$ і $\mathcal{L}' = \mathrm{Lie}\{\eta_1', \ldots, \eta_m'\}$. Нехай дві системи вигляду (2.1) визначають ядерні підалгебри Лі $\mathcal{L}_{X_1,\ldots,X_m} \subset \mathcal{L}$ і $\mathcal{L}_{X_1',\ldots,X_m'} \subset \mathcal{L}'$ відповідно. Введемо ізоморфізм ψ між вільними алгебрами Лі за правилом $\psi(\eta_i) = \eta_i'$, $i = 1, \ldots, m$. Тоді дані системи є А-еквівалентними, якщо $\psi(\mathcal{L}_{X_1,\ldots,X_m}) = \mathcal{L}_{X_1',\ldots,X_m'}$.

Очевидно, заміна змінних в системі не змінює її класу еквівалентності.

У багатьох задачах теорії керування природно розглядати системи вигляду (2.1) не тільки з точністю до заміни змінних, але й з точністю до заміни керування у вигляді зворотного зв'язку. Ми розглядаємо заміни керування вигляду

$$u_i = \sum_{j=1}^{m} g_{ji}(x)\widehat{u}_j, \quad i = 1, \ldots, m, \quad \det\{g_{ij}(0)\} \neq 0, \tag{6.41}$$

де $g_{ji}(x)$ — дійсно-аналітичні функції в околі нуля. Тобто систему (2.1) можна ідентифікувати з *модулем* векторних полів $(X_1, \ldots, X_m)$, що породжений $X_1, \dots, X_m$, над множиною дійсно-аналітичних функцій. Зауважимо, що вектор зросту інваріантний відносно такої заміни керування.

Означення 6.4. *Ми кажемо, що дві системи вигляду* (2.1) *є A-еквівалентними за зворотним зв'язком, якщо вони стають A-еквівалентними після деякої заміни керування вигляду* (6.41) *в одній з цих систем.*

Іншими словами, дві множини векторних полів $\{X_1, \dots, X_m\}$ і $\{Y_1, \dots, Y_m\}$ є A-еквівалентними за зворотним зв'язком, якщо існує такий базис $\widehat{X}_1, \dots, \widehat{X}_m$ модуля $(X_1, \dots, X_m)$, що $\mathcal{L}_{\widehat{X}_1,\dots,\widehat{X}_m} = \mathcal{L}_{Y_1,\dots,Y_m}$.

Приклад 6.2. Повернемось до прикладу 2.2. Для систем (2.45) – (2.48) маємо $\mathcal{P}^1 = \{0\}$, $\mathcal{P}^2 = \mathrm{Lin}\{[\eta_1, \eta_2]\}$, $\mathcal{P}^k = \mathcal{L}^k$ при $k \geq 4$. Проте для системи (2.46) маємо $\mathcal{P}^3 = \mathrm{Lin}\{[\eta_2, [\eta_1, \eta_2]]\}$, а для систем (2.45), (2.47) і (2.48) маємо $\mathcal{P}^3 = \mathrm{Lin}\{[\eta_2, [\eta_1, \eta_2]] + [\eta_1, [\eta_1, \eta_2]]\}$. Отже, системи (2.47) і (2.48) є однорідними апроксимаціями для (2.45), а система (2.46) — ні. Таким чином, (2.45), (2.47) і (2.48) є A-еквівалентними, а (2.46) не є A-еквівалентною їм.

Але всі ці системи є A-еквівалентними за зворотним зв'язком. Дійсно, розглянемо заміну керування $u_1 = \widehat{u}_2 - \widehat{u}_1$, $u_2 = \widehat{u}_2 + \widehat{u}_1$, тоді система (2.46) набуває вигляду

$$\dot{y}_1 = \widehat{u}_2 - \widehat{u}_1, \quad \dot{y}_2 = \widehat{u}_2 + \widehat{u}_1, \quad \dot{y}_3 = (\tfrac{1}{2}y_1^2 - y_1 y_2)(\widehat{u}_2 + \widehat{u}_1).$$

Після заміни змінних $z_1 = \frac{1}{2}(y_2 - y_1)$, $z_2 = \frac{1}{2}(y_2 + y_1)$, отримуємо

$$\dot{z}_1 = \widehat{u}_1, \quad \dot{z}_2 = \widehat{u}_2, \quad \dot{y}_3 = (\tfrac{3}{2}z_1^2 - \tfrac{1}{2}z_2^2 - z_1 z_2)(\widehat{u}_2 + \widehat{u}_1).$$

Нарешті, нехай $z_3 = \frac{1}{4}(y_3 + \frac{1}{2}(z_1^2 z_2 + z_1 z_2^2) + \frac{1}{6}z_2^3 - \frac{1}{2}z_1^3)$, тоді $\dot{z}_3 = \frac{1}{2}z_1^2 \widehat{u}_2$. Отже, (2.46) A-еквівалентна (2.45) за зворотним зв'язком.

Очевидно, що для розглядання еквівалентності однорідних апроксимацій достатньо замість (6.41) розглядати заміни керування вигляду

$$u_i = \sum_{j=1}^{m} g_{ji} \widehat{u}_j, \quad i = 1, \dots, m, \quad \det\{g_{ij}\} \neq 0. \tag{6.42}$$

Зауважимо, що заміна керування (6.42) зводить (2.1) до системи

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{m} \widehat{u}_i \widehat{X}_i(x), \qquad \text{де } \widehat{X}_i(x) = \sum_{j=1}^{m} g_{ij} X_j(x).$$

Отже, з точки зору вільної алгебри $\mathcal{F}$ властивість A-еквівалентності за зворотним зв'язком можна пояснити таким чином. Дві множини векторних полів $\{X_1, \ldots, X_m\}$ і $\{Y_1, \ldots, Y_m\}$ є A-еквівалентними за зворотним зв'язком, якщо існує такий базис в алгебрі Лі $\mathcal{L}$

$$\widehat{\eta}_i = \sum_{j=1}^{m} g_{ij} \eta_j, \ i = 1, \ldots, m, \ \det\{g_{ij}\} \neq 0, \tag{6.43}$$

що ізоморфізм $\psi : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$, який задається формулою $\psi(\widehat{\eta}_i) = \eta_i$, $i = 1, \ldots, m$, переводить ядерну підалгебру Лі, що відповідає одній множині векторних полів, у ядерну підалгебру Лі, що відповідає іншій множині: $\psi(\mathcal{L}_{X_1,\ldots,X_m}) = \mathcal{L}_{Y_1,\ldots,Y_m}$.

Іншими словами, загальна лінійна група GL_m діє на множині ядерних підалгебр Лі, і дві системи є A-еквівалентними за зворотним зв'язком тоді і тільки тоді, коли їх ядерні підалгебри Лі належать одній і тій самій орбіті.

Розглянемо довільний вектор зросту (6.1). (Нагадаємо, що вектор зросту є інваріантним відносно замін керування (6.42), тобто всі елементи орбіти деякої ядерної підалгебри Лі мають однаковий вектор зросту.)

Означення 6.5. *Ми кажемо, що вектор зросту v є A-нормальним, якщо множина ядерних підалгебр Лі всіх систем з цим вектором зросту покривається скінченною кількістю орбіт.*

Іншими словами, це означає, що v є A-нормальним, якщо існує така скінченна множина Σ систем, що будь-яка система вигляду (2.1) з цим вектором зросту є A-еквівалентною за зворотним зв'язком деякій системі з Σ. Ми називаємо системи з Σ *A-нормальними формами.*

Наступний крок — розглянути малі збурення систем вигляду (2.1). Ми кажемо, що множина повністю неголономних систем з векторними полями $X'_1, \ldots, X'_m$, для яких $\|X_i(0) - X'_i(0)\| \leq \varepsilon$, $i = 1, \ldots, m$, утворює *окіл* (2.1).

Означення 6.6. *Ми кажемо, що вектор зросту v є А-простим, якщо для будь-якої системи з цим вектором зросту існує такий окіл, що множина ядерних підалгебр Лі всіх систем з об'єднання всіх цих околів покривається скінченною кількістю орбіт.*

Іншими словами, v є А-простим, якщо якщо існує така скінченна множина Σ' систем, що для будь-якої системи вигляду (2.1) з цим вектором зросту будь-яке її мале збурення є А-еквівалентним за зворотним зв'язком деякій системі з Σ'. Підкреслимо, що в цьому означенні ми не цікавимось властивістю А-простоти *окремої* системи, а накладаємо вимоги на множину *всіх* систем з даним вектором зросту.

Зокрема, як добре відомо, *вільні* вектори зросту, тобто такі, для яких $d_k = \dim \mathcal{L}^k$, є А-простими.

Далі ми описуємо всі А-нормальні і А-прості вектори зросту для систем з двома керуваннями, тобто при $m = 2$.

Нагадаємо, що теорема 6.3 описує множину всіх ядерних підалгебр Лі, які відповідають системам з фіксованим вектором зросту, за допомогою $\sum\limits_{k=1}^{p} d_k(m_k - d_k)$-вимірного многовиду

$$G = \mathrm{Gr}^{m_1}_{m_1-d_1} \times \cdots \times \mathrm{Gr}^{m_p}_{m_p-d_p}.$$

Якщо переписати підпростори $\{[\mathcal{N}^1], \ldots, [\mathcal{N}^p]\}$ у новому базисі (6.43), отримаємо іншу точку G, в якої локальні координати є поліномами від g_{ij}. Тобто загальна лінійна група GL_m діє на G, а властивість А-нормальності вектора зросту означає, що скінченна кількість орбіт цієї дії покриває весь многовид, а отже, якась з орбіт має повну вимірність. Грассманаін Gr^j_i має вимірність $i(j-i)$, а отже, вимірність многовиду G дорівнює $\sum\limits_{q=1}^{p} d_q(m_q - d_q)$. У певному сенсі числа $d_k(m_k - d_k)$, $k = 1, \ldots, p$, грають роль «степенів свободи» для множини однорідних апроксимацій.

Числа $m_1, \ldots, m_p$ можна знайти з формули (6.38): коефіцієнт при z^i у розвиненні в ряд Тейлора функції $f_n(z)$ в точці $z = 0$ дорівнює $m_i - d_i$ для $i = 1, \ldots, p$.

Оскільки невироджені матриці, які пропорційні одиничній матриці, зберігають всі точки вказаного многовиду, необхідною умовою A-нормальності вектора зросту є така умова:

$$\sum_{q=1}^{p} d_q(m_q - d_q) \le m - 1. \tag{6.44}$$

Означення 6.7. *Ми кажемо, що k-й крок вектора зросту v тривіальний, якщо $d_k = 0$, і є вільним, якщо $d_k = m_k$. У супротивному разі k-й крок називається обмеженим.*

Ми кажемо, що вектор зросту є вільним, якщо всі його кроки вільні. Ми кажемо, що вектор зросту є псевдо-вільним, якщо всі його кроки вільні або тривіальні (зокрема, вільні вектори зросту є псевдо-вільними).

Іншими словами, тривіальний крок є нульовим, а вільний крок є максимально можливим. Вектор зросту є вільним, якщо всі його кроки максимальні (тоді коефіцієнти при $z, \ldots, z^p$ у ряді Тейлора функції $f(z)$ в точці $z = 0$ дорівнюють нулю).

Отже, можна запропонувати такий метод для знаходження всіх A-нормальних векторів зросту. Спочатку для заданого вектора зросту знайти всі такі k, для яких $d_k(m_k - d_k) \neq 0$ (обмежені кроки) і виразити всі відповідні $[\mathcal{N}^k]$ (або їх представників) за допомогою $\sum\limits_{k=1}^{p} d_k(m_k - d_k)$ довільних параметрів. Потім знайти, як ці параметри перетворюються при заміні базису (6.43). Якщо будь-яка множина параметрів може бути зведена до однієї зі скінченної кількості множин, тоді вектор зросту є A-нормальним.

Зауваження 6.5. *Якщо деяка система має вектор зросту v, то її досить мале збурення має такий вектор зросту $\widehat{v} = (\widehat{v}_1, \ldots, \widehat{v}_{\widehat{p}})$, що*

$$\widehat{p} \le p \quad \text{і} \;\; \widehat{v}_k \ge v_k \;\; \text{для всіх } k = 1, \ldots, \widehat{p}. \tag{6.45}$$

У такому разі ми пишемо $\widehat{v} \ge v$. Оскільки $\widehat{v}_{\widehat{p}} = n$, існує тільки скінченна кількість векторів $\widehat{v}$, які задовольняють нерівність $\widehat{v} \ge v$. Отже, достатньою умовою A-простоти вектора зросту є A-нормальність усіх таких реалізовних векторів $\widehat{v}$, що $\widehat{v} \ge v$.

6.2.2 Опис А-нормальних і А-простих векторів зросту для систем з двовимірним керуванням

Далі у цьому підрозділі розглядатимемо системи з двовимірним керуванням, тобто випадок $m = 2$:

$$\dot{x} = X_1(x)u_1 + X_2(x)u_2, \quad x \in \mathbb{R}^n, \; u_1, u_2 \in \mathbb{R}. \tag{6.46}$$

і заміни керування вигляду

$$u_i = g_{1i}\widehat{u}_1 + g_{2i}\widehat{u}_2, \quad i = 1, 2, \quad g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21} \neq 0. \tag{6.47}$$

Необхідна умова (6.44) набуває вигляду

$$\sum_{q=1}^{p} d_q(m_q - d_q) \leq 3. \tag{6.48}$$

З неї випливає:

(a) А-нормальні вектори зросту мають не більше трьох обмежених кроків;

(b) якщо i-й крок обмежений, то $m_i \leq 4$; якщо $m_i = 4$, то цей обмежений крок єдиний і $d_i = 1$ і $d_i = 3$;

(c) якщо обмежених кроків три, скажімо, i_1-й, i_2-й і i_3-й, то $m_{i_j} = 2$ і $d_{i_j} = 1$, $j = 1, 2, 3$.

Крім того, всі псевдо-вільні вектори зросту є А-нормальними.

Зафіксуємо $q \geq 1$ і розглянемо множини

$$\Omega^q_{v_k} = \Omega_{v_k} \cap \left\{(i_{v_k}, \ldots, i_1) : \sum_{h=1}^{k} h\Bigl(\sum_{r=v_{h-1}+1}^{v_h} i_r\Bigr) + 1 = q\right\}, \quad k = 1, \ldots, q-1.$$

Як легко бачити, кількість елементів у множині $\Omega^q_{v_{q-1}}$ не менша, ніж кількість елементів у множині $\Omega^q_{v_1}, \ldots, \Omega^q_{v_{q-2}}$. Дійсно, якщо $(i_{v_k}, \ldots, i_1) \in \Omega^q_{v_k}$, де $k \leq q-2$, то обов'язково $(0, \ldots, 0, i_{v_k}, \ldots, i_1) \in \Omega^q_{v_{q-1}}$. Оскільки m_q — кількість елементів у $\Omega^q_{v_{q-1}}$, то множини $\Omega^q_{v_1}, \ldots, \Omega^q_{v_{q-2}}$ дають нижню оцінку для m_q.

З іншого боку, кількість елементів у множині $\Omega^q_{v_k}$, $k \leq q-1$, дорівнює коефіцієнту z^q у розвиненні

$$f_k(z) = \frac{2z-1}{\prod\limits_{i=1}^{k}(1-z^i)^{d_i}} + 1. \tag{6.49}$$

Отже, отримуємо наступне зауваження.

Нехай $(v_1, \ldots, v_k)$ є початковим сегментом деякого вектора зросту, $k < p$. Тоді

(i) число m_{k+1} дорівнює коефіцієнту z^{k+1} у розвиненні (6.49);

(ii) для будь-якого $q \geq k+1$ число m_{q+1} не менше, ніж коефіцієнт z^{q+1} у розвиненні (6.49).

Зокрема, якщо $(q+1)$-й крок обмежений і для деякого $1 \leq k \leq q$ коефіцієнт z^{q+1} більше 4, то вектор зросту не є A-нормальним.

Випадок $n = 2$. Усі вектори зросту мають вигляд

$$v = (\underbrace{1, \ldots, 1}_{s}, 2), \qquad s \geq 0. \tag{6.50}$$

Теорема 6.4. *Усі вектори зросту вигляду (6.50) є A-нормальними і A-простими.*

Доведення. Якщо $s = 0$, маємо вектор зросту $v = (2)$, який є простим.

Нехай $s \geq 1$. Тоді перший крок v обмежений, оскільки $m_1 = 2$ і $d_1 = 1$. Отже, $\mathcal{N}^1$ є одновимірним підпростором $\mathrm{Lin}\{\eta_1, \eta_2\}$. Це означає, що $\mathcal{N}^1 = \mathrm{Lin}\{a_1\eta_1 + a_2\eta_2\}$, де $a_1^2 + a_2^2 \neq 0$. Виберемо новий базис $\widehat{\eta}_1$, $\widehat{\eta}_2$ вигляду

$$\begin{pmatrix} \widehat{\eta}_1 \\ \widehat{\eta}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 & -a_1 \\ a_1 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}. \tag{6.51}$$

Тоді $\mathcal{N}^1$ набуває нормальної форми $\mathcal{N}^1 = \mathrm{Lin}\{\widehat{\eta}_2\}$. Позначимо $\zeta_1 = \widehat{\eta}_1$.

Розглядаючи функцію $f_s(z) = \frac{2z-1}{1-z} + 1$ (тобто (6.49) з $k = s$), отримуємо $m_{s+1} = 1$. Отже, $d_{s+1} = m_{s+1} = 1$, а тоді $(s+1)$-й крок вектора зросту (6.50) є вільним. Отже, v є A-нормальним.

Доведемо тепер, що всі вектори (6.50) є A-простими. Дійсно, будь-який вектор $\widehat{v}$, для якого $\widehat{v} \geq v$, теж має вигляд (6.50) з $\widehat{s}$ замість s, де $\widehat{s} \leq s$, а отже, є A-нормальним. За зауваженням 6.5, усі вектори зросту (6.50) є A-простими. ■

Як нормальні форми, можна запропонувати такі системи:

$$\dot{x} = u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{s!}x_1^s \end{pmatrix}. \tag{6.52}$$

Випадок $n = 3$. Усі вектори зросту мають вигляд

$$v = (\underbrace{1, \ldots, 1}_{s}, \underbrace{2, \ldots, 2}_{r-s}, 3), \quad s \geq 0, \quad r \geq s + 1. \tag{6.53}$$

Теорема 6.5. *Вектори зросту вигляду (6.53) є A-нормальними тоді і тільки тоді, коли:*

(a) $s = 0$ з $1 \leq r \leq 4$;

або

(b) $s \geq 1$ і $s + 1 \leq r \leq 3s + 2$ або $r = 4s + 3$.

A-простими є наступні вектори зросту:

$$\begin{array}{llll} v^1 = (2,3); & v^2 = (2,2,3); & v^3 = (2,2,2,3); & v^4 = (2,2,2,2,3); \\ v^5 = (1,2,3); & v^6 = (1,2,2,3); & v^7 = (1,1,2,3); & v^8 = (1,2,2,2,3); \\ v^9 = (1,1,2,2,3); & v^{10} = (1,1,1,2,3). & & \end{array}$$

Доведення. Зауважимо, що для вектора зросту (6.53) має виконуватися умова $r \geq s + 1$ (тобто вектор $v = (1, \ldots, 1, 3)$ не є реалізовним). Дійсно, для $s = 0$ це так, оскільки $m = 2$. Щодо $s \geq 1$, у доведенні теореми 6.4 було показано, що $m_{s+1} = 1$. Отже, $d_{s+1} = 1$, а тоді $r \geq s + 1$.

Ми розіб'ємо доведення на дві частини.

Перший крок є вільним, тобто $s = 0$:

$$v = (\underbrace{2, \ldots, 2}_{r}, 3), \ r \geq 1. \tag{6.54}$$

Можна вибрати $\zeta_1 = \eta_1$, $\zeta_2 = \mathrm{ad}^0_{\zeta_1}\eta_2 = \eta_2$. Для того, щоб знайти m_{r+1}, розглянемо функцію $f_r(z) = \frac{2z-1}{(1-z)^2} + 1$, тоді $m_{r+1} = r$. Оскільки $d_{r+1} = 1$, то за умовою (6.48), якщо вектор зросту A-нормальний, то $m_{r+1} - 1 \leq 3$, тобто $r \leq 4$.

Отже вибирається $(r-1)$-вимірний підпростір $\mathcal{N}^r$ у r-вимірному просторі $\mathrm{Lin}\{\eta^{i_2 i_1} : (i_2, i_1) \in \Omega_2^{r+1}\}$, де $\eta^{i_2 i_1} = \mathrm{ad}_{\eta_2}^{i_2}\mathrm{ad}_{\eta_1}^{i_1}\eta_2$ і $\Omega_2^{r+1} = \{(i_2, i_1) : i_1, i_2 \geq 0, i_1 \neq 0, i_2 + i_1 = r\}$. Введемо позначення $b_i = \eta^{\langle i\rangle}$, де $\langle i\rangle$ позначає i-й елемент множини Ω_2^{r+1} (у лексикографічному порядку). Тоді довільний елемент $\mathrm{Lin}\{\eta^{i_2 i_1} : (i_2, i_1) \in \Omega_2^{r+1}\}$ можна виразити через базис $b_1, \ldots, b_r$ як $\sum\limits_{i=1}^{r} z_i b_i$, $z = (z_1, \ldots, z_r)^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^r$. А тоді можна описати $\mathcal{N}^r$ за допомогою його анігілятору, тобто r-вимірного ненульового рядка $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_r)$, такого що $\gamma z = 0$ для тих $z = (z_1, \ldots, z_r)^{\mathsf{T}}$, які задовольняють $\sum\limits_{i=1}^{r} z_i b_i \in \mathcal{N}^r$. Зауважимо, що анігілятор визначається з точністю до ненульового множника.

Виберемо новий базис $\widehat{\eta}_1$, $\widehat{\eta}_2$:

$$\begin{pmatrix} \widehat{\eta}_1 \\ \widehat{\eta}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}, \ \delta = g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21} \neq 0. \tag{6.55}$$

Тоді елементи $\widehat{b}_1, \ldots, \widehat{b}_r$ вигляду $\widehat{b}_i = \widehat{\eta}^{\langle i\rangle}$, де $\widehat{\eta}^{i_2 i_1} = \mathrm{ad}_{\widehat{\eta}_2}^{i_2}\mathrm{ad}_{\widehat{\eta}_1}^{i_1}\widehat{\eta}_2$, виражаються через $b_1, \ldots, b_r$ як $\widehat{b}_i = \sum\limits_{j=1}^{r} f_{ji} b_j$, $i = 1, \ldots, r$, де матрицю $F = \{f_{ij}\}_{i,j=1}^{r}$ може бути знайдено за допомогою матриці $G = \{g_{ij}\}_{i,j=1}^{2}$. Тоді $\sum\limits_{i=1}^{r} z_i b_i = \sum\limits_{i=1}^{r} \widehat{z}_i \widehat{b}_i$, де $z = F\widehat{z}$. Отже, у новому базисі підпростір $\mathcal{N}^r$ описується анігілятором $\widehat{\gamma} = \gamma F$. Наша мета — нормалізувати $\widehat{\gamma}$. Розглянемо чотири можливі випадки $r \leq 4$.

(i) $r = 1$. Оскільки $d_2 = m_2 = 1$, то вектор зросту $v = (2, 3)$ є вільним, а отже, A-нормальним.

(ii) $r = 2$. У цьому випадку $\mathcal{N}^2 \subset \mathrm{Lin}\{\eta^{02}, \eta^{11}\}$, де $\eta^{02} = \mathrm{ad}_{\eta_1}^{2}\eta_2 = [\eta_1, [\eta_1, \eta_2]]$ і $\eta^{11} = \mathrm{ad}_{\eta_2}\mathrm{ad}_{\eta_1}\eta_2 = [\eta_2, [\eta_1, \eta_2]]$. У новому базисі

$$\widehat{\eta}^{02} = [\widehat{\eta}_1, [\widehat{\eta}_1, \widehat{\eta}_2]] = [g_{11}\eta_1 + g_{12}\eta_2, [g_{11}\eta_1 + g_{12}\eta_2, g_{21}\eta_1 + g_{22}\eta_2]] = \delta(g_{11}\eta^{02} + g_{12}\eta^{11}),$$

$$\widehat{\eta}^{11} = [\widehat{\eta}_2, [\widehat{\eta}_1, \widehat{\eta}_2]] = [g_{21}\eta_1 + g_{22}\eta_2, [g_{11}\eta_1 + g_{12}\eta_2, g_{21}\eta_1 + g_{22}\eta_2]] = \delta(g_{21}\eta^{02} + g_{22}\eta^{11}).$$

Позначимо $b_1 = \eta^{02}$, $b_2 = \eta^{11}$ і $\widehat{b}_1 = \widehat{\eta}^{02}$, $\widehat{b}_2 = \widehat{\eta}^{11}$, тоді

$$\widehat{b}_1 = \delta(g_{11}b_1 + g_{12}b_2), \qquad \widehat{b}_2 = \delta(g_{21}b_1 + g_{22}b_2),$$

тобто $F = \delta G^{\mathsf{T}}$. Тоді $\widehat{\gamma} = \gamma F = \delta\gamma G^{\mathsf{T}}$, де $\delta = g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21} \neq 0$, причому без обмеження загальності можна вибрати $\gamma_1^2+\gamma_2^2=1$. Виберемо $g_{11}=g_{22}=\gamma_1$, $g_{12}=-g_{21}=\gamma_2$, тоді $\widehat{\gamma}=(1,0)$, а отже, $\mathcal{N}^2=\mathrm{Lin}\{\widehat{\eta}^{11}\}$.

(iii) $r=3$. У цьому випадку $\mathcal{N}^3\subset\mathrm{Lin}\{\eta^{03},\eta^{12},\eta^{21}\}$ є двовимірним. Виберемо

$$b_1=\eta^{03}=\mathrm{ad}^3_{\eta_1}\eta_2,\quad b_2=\eta^{12}=\mathrm{ad}_{\eta_2}\mathrm{ad}^2_{\eta_1}\eta_2,\quad b_3=\eta^{21}=\mathrm{ad}^2_{\eta_2}\mathrm{ad}_{\eta_1}\eta_2.$$

Виконуючи заміну базису (6.55) і враховуючи тотожність

$$[\eta_1,[\eta_2,[\eta_1,\eta_2]]]=[\eta_2,[\eta_1,[\eta_1,\eta_2]]]=\eta^{12}, \tag{6.56}$$

отримуємо

$$\widehat{b}_1=\widehat{\eta}^{03}=\delta(g_{11}^2\eta^{03}+2g_{11}g_{12}\eta^{12}+g_{12}^2\eta^{21})=\delta(g_{11}^2b_1+2g_{11}g_{12}b_2+g_{12}^2b_3),$$

$$\widehat{b}_2=\widehat{\eta}^{12}=\delta(g_{11}g_{21}\eta^{03}+(g_{12}g_{21}+g_{11}g_{22})\eta^{12}+g_{12}g_{22}\eta^{21})=$$

$$=\delta(g_{11}g_{21}b_1+(g_{12}g_{21}+g_{11}g_{22})b_2+g_{12}g_{22}b_3),$$

$$\widehat{b}_3=\widehat{\eta}^{21}=\delta(g_{21}^2\eta^{03}+2g_{21}g_{22}\eta^{12}+g_{22}^2\eta^{21})=\delta(g_{21}^2b_1+2g_{21}g_{22}b_2+g_{22}^2b_3).$$

Отже,

$$F=\delta\begin{pmatrix} g_{11}^2 & g_{11}g_{21} & g_{21}^2\\ 2g_{11}g_{12} & g_{12}g_{21}+g_{11}g_{22} & 2g_{21}g_{22}\\ g_{12}^2 & g_{12}g_{22} & g_{22}^2\end{pmatrix}, \tag{6.57}$$

$$(\widehat{\gamma}_1,\widehat{\gamma}_2,\widehat{\gamma}_3)=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)F. \tag{6.58}$$

Зручно подати цю рівність в іншій формі. Введемо позначення $\gamma_{11}=\gamma_1$, $\gamma_{12}=\gamma_{21}=\gamma_2$, $\gamma_{22}=\gamma_3$, and the same notations for $\widehat{\gamma}_{ij}$, $i,j=1,2$, і розглянемо дві симетричні матриці $\Gamma=\{\gamma_{ij}\}_{i,j=1}^2$ і $\widehat{\Gamma}=\{\widehat{\gamma}_{ij}\}_{i,j=1}^2$. Тоді (6.57), (6.58) зводяться до вигляду

$$\widehat{\Gamma}=\delta G\Gamma G^{\mathsf{T}} \tag{6.59}$$

Отже, задачу зведено до нормалізації симетричної 2×2 матриці. Як добре відомо, для довільного $\gamma\neq0$ існує така невироджена матриця G, що $\widehat{\gamma}$ дорівнює $(1,0,\pm1)$ або $(1,0,0)$. Це означає, що $\mathcal{N}^3=\mathrm{Lin}\{\widehat{\eta}^{12},\widehat{\eta}^{21}\mp\widehat{\eta}^{03}\}$ або $\mathcal{N}3=\mathrm{Lin}\{\widehat{\eta}^{12},\widehat{\eta}^{21}\}$.

(iv) $r=4$. У цьому випадку $\mathcal{N}^4\subset \mathrm{Lin}\{\eta^{04},\eta^{13},\eta^{22},\eta^{31}\}$ є тривимірним. Виберемо

$$b_1=\eta^{04}=\mathrm{ad}^4_{\eta_1}\eta_2,\quad b_2=\eta^{13}=\mathrm{ad}_{\eta_2}\mathrm{ad}^3_{\eta_1}\eta_2,$$

$$b_3=\eta^{22}=\mathrm{ad}^2_{\eta_2}\mathrm{ad}^2_{\eta_1}\eta_2,\quad b_4=\eta^{31}=\mathrm{ad}^3_{\eta_2}\mathrm{ad}_{\eta_1}\eta_2.$$

Виконаємо заміну базису (6.55) і врахуємо (6.56) і таку властивість:

$$[\eta_1,[\eta_2,[\eta_i,[\eta_1,\eta_2]]]]=[\eta_2,[\eta_1,[\eta_i,[\eta_1,\eta_2]]]]+\ell_i',$$

де $\ell_i'=[[\eta_1,\eta_2],[\eta_i,[\eta_1,\eta_2]]]\in\mathcal{L}^{[3]}_{X_1,X_2}$, $i=1,2$. Отримуємо

$$\begin{aligned}
\widehat{b}_1=\widehat{\eta}^{04} &= \delta(g_{11}^3\eta^{04}+3g_{11}^2g_{12}\eta^{13}+3g_{11}g_{12}^2\eta^{22}+g_{12}^3\eta^{31})+\ell_1,\\
\widehat{b}_2=\widehat{\eta}^{13} &= \delta(g_{11}^2g_{21}\eta^{04}+(g_{11}^2g_{22}+2g_{11}g_{12}g_{21})\eta^{13}+\\
&\qquad +(2g_{11}g_{12}g_{22}+g_{12}^2g_{21})\eta^{22}+g_{12}^2g_{22}\eta^{31})+\ell_2,\\
\widehat{b}_3=\widehat{\eta}^{22} &= \delta(g_{11}g_{21}^2\eta^{04}+(2g_{11}g_{21}g_{22}+g_{21}^2g_{12})\eta^{13}+\\
&\qquad +(g_{11}g_{22}^2+2g_{12}g_{21}g_{22})\eta^{22}+g_{12}g_{22}^2\eta^{31})+\ell_3,\\
\widehat{b}_4=\widehat{\eta}^{31} &= \delta(g_{21}^3\eta^{04}+3g_{21}^2g_{22}\eta^{13}+3g_{21}g_{22}^2\eta^{22}+g_{22}^3\eta^{31})+\ell_4,
\end{aligned}$$

де $\ell_1,\ldots,\ell_4\in\mathcal{L}^{[3]}_{X_1,X_2}$. Присутність ℓ_i означає, що заміна базису не зберігає підпростір $\mathrm{Lin}\{\eta^{04},\eta^{13},\eta^{22},\eta^{31}\}$. Але нагадаємо, що ми нормалізуємо фактор-підпростір $[\mathcal{N}^4]=\mathcal{M}^4|\mathcal{L}^{[3]}_{X_1,X_2}$, а не $\mathcal{N}^4$.

Міркуючи аналогічно попередньому випадку, отримуємо

$$F=\delta\begin{pmatrix}
g_{11}^3 & g_{11}^2g_{21} & g_{11}g_{21}^2 & g_{21}^3\\
3g_{11}^2g_{12} & g_{11}^2g_{22}+2g_{11}g_{12}g_{21} & 2g_{11}g_{21}g_{22}+g_{21}^2g_{12} & 3g_{21}^2g_{22}\\
3g_{11}g_{12}^2 & 2g_{11}g_{12}g_{22}+g_{12}^2g_{21} & g_{11}g_{22}^2+2g_{12}g_{21}g_{22} & 3g_{21}g_{22}^2\\
g_{12}^3 & g_{12}^2g_{22} & g_{12}g_{22}^2 & g_{22}^3
\end{pmatrix},$$

$$(\widehat{\gamma}_1,\widehat{\gamma}_2,\widehat{\gamma}_3,\widehat{\gamma}_4)=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4)F. \tag{6.60}$$

Введемо позначення

$$\gamma_{111}=\gamma_1,\ \gamma_{112}=\gamma_{121}=\gamma_{211}=\gamma_2,\ \gamma_{122}=\gamma_{212}=\gamma_{221}=\gamma_3,\ \gamma_{222}=\gamma_4,$$

а також аналогічні позначення для $\widehat{\gamma}_{ijk}$, $i, j, k = 1, 2$. Тоді (6.60) набуває вигляду

$$\widehat{\gamma}_{i_1 i_2 i_3} = \delta \sum_{j_1, j_2, j_3 = 1}^{2} \gamma_{j_1 j_2 j_3} g_{i_1 j_1} g_{i_2 j_2} g_{i_3 j_3}, \quad i_1, i_2, i_3 = 1, 2. \tag{6.61}$$

Отже, задачу зведено до нормалізації симетричного (нетривіального) тензора рангу 3. Як відомо [156], існує така невироджена матриця, що $\widehat{\gamma}$ набуває одного з чотирьох наступних виглядів: $(1, 0, 0, 1)$, $(1, 0, -1, 0)$, $(0, 0, 1, 0)$, $(1, 0, 0, 0)$. Отже, $\mathcal{N}^4 \cong \mathrm{Lin}\{\widehat{\eta}^{13}, \widehat{\eta}^{22}, \widehat{\eta}^{04} - \widehat{\eta}^{31}\}$, $\mathcal{N}^4 \cong \mathrm{Lin}\{\widehat{\eta}^{13}, \widehat{\eta}^{31}, \widehat{\eta}^{04} + \widehat{\eta}^{22}\}$, $\mathcal{N}^4 \cong \mathrm{Lin}\{\widehat{\eta}^{04}, \widehat{\eta}^{13}, \widehat{\eta}^{31}\}$ або $\mathcal{N}^4 \cong \mathrm{Lin}\{\widehat{\eta}^{13}, \widehat{\eta}^{22}, \widehat{\eta}^{31}\}$ (позначка $\cong$ означає представників одного й того самого фактор-підпростору).

Перший крок є обмеженим, тобто $s \geq 1$:

$$v = (\underbrace{1, \ldots, 1}_{s}, \underbrace{2, \ldots, 2}_{r-s}, 3), \qquad s \geq 1, \ r \geq s + 1, \tag{6.62}$$

причому $r \geq s + 1$.

Лема 6.4. *Нехай $r = (s+1)q + p$, де $0 \leq p \leq s$ і $q \geq 0$ (p і q є цілими). Тоді*

$$m_{r+1} = \begin{cases} q + 1, & \text{якщо} \ \ p \leq s - 1, \\ q, & \text{якщо} \ \ p = s. \end{cases}$$

Доведення. Нагадаємо, що m_{r+1} — кількість елементів у множині $\Omega_{v_r}^{r+1} = \Omega_2^{r+1}$. Розглянемо множину $\Omega_2 = \{(i_2, i_1) : i_1, i_2 \geq 0, i_1 \neq \langle 1 \rangle\}$, де $\langle 1 \rangle$ є (єдиним) елементом множини $\Omega_1^{s+1} = \{s\}$. Тоді $\Omega_2 = \{(i_2, i_1) : i_1, i_2 \geq 0, i_1 \neq s\}$ і

$$\Omega_2^{r+1} = \{(i_2, i_1) : i_1, i_2 \geq 0, i_1 \neq s, \ (s+1)i_2 + i_1 + 1 = r + 1\}. \tag{6.63}$$

Отже, отримуємо $r = (s+1)q + p = (s+1)i_2 + i_1$, а тоді $i_1 = (s+1)(q - i_2) + p$. Якщо $0 \leq p \leq s - 1$, тоді пара (i_2, i_1) належить Ω_2^{r+1} тоді і тільки тоді, коли i_2 набуває значень від 0 до q. Якщо $p = s$, то (i_2, i_1) належить Ω_2^{r+1} тоді і тільки тоді, коли i_2 набуває значень від 0 до $q - 1$. ∎

Наслідок 6.4. *Нехай вектор зросту* (6.62) *є А-нормальним. Тоді* $r \le 3s+2$ *або* $r = 4s+3$.

Доведення. Оскільки $m_1 = 2$, $d_1 = 1$ і $d_{r+1} = 1$, з необхідної умови А-нормальності (6.48) випливає, що $d_1(m_1-d_1)+d_{r+1}(m_{r+1}-d_{r+1}) = 1+(m_{r+1}-1) \le 3$, тобто $m_{r+1} \le 3$. З іншого боку, завдяки лемі 6.4

$$m_{r+1} = 1 \quad \text{при} \quad r = 2s+1, \tag{6.64}$$

$$m_{r+1} = 2 \quad \text{при} \quad s+1 \le r \le 2s \ \text{ or } r = 3s+2, \tag{6.65}$$

$$m_{r+1} = 3 \quad \text{при} \quad 2s+2 \le r \le 3s+1 \ \text{ or } r = 4s+3. \tag{6.66}$$

У решті випадків $m_{r+1} \ge 4$, отже, вектор зросту не є А-нормальним. ∎

Нехай вектор зросту задовольняє умовам наслідку 6.4. Підпростір $\mathcal{N}^1$ є одновимірним, тобто $\mathcal{N}^1 = \mathrm{Lin}\{a_1\eta_1 + a_2\eta_2\}$, де $a_1^2 + a_2^2 \ne 0$. Виберемо $\widetilde{\eta}^1 = a_2\eta_1 - a_1\eta_2$ і $\widetilde{\eta}^2 = a_1\eta_1 + a_2\eta_2$, тоді $\zeta_1 = \widetilde{\eta}^1$, $\mathcal{N}^1 = \mathrm{Lin}\{\widetilde{\eta}^2\}$.

Далі ми шукатимемо новий базис $\widehat{\eta}_1$, $\widehat{\eta}_2$ у вигляді

$$\begin{pmatrix} \widehat{\eta}_1 \\ \widehat{\eta}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 + c_2 a_1 & -a_1 + c_2 a_2 \\ c_1 a_1 & c_1 a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}, \quad c_1 \ne 0, \tag{6.67}$$

де числа c_1 і c_2 будуть вказані нижче. Тоді

$$\begin{aligned} \widehat{\eta}_1 &= a_2\eta_1 - a_1\eta_2 + c_2a_1\eta_1 + c_2a_2\eta_2 = \widetilde{\eta}^1 + c_2\widetilde{\eta}^2, \\ \widehat{\eta}_2 &= c_1a_1\eta_1 + c_1a_2\eta_2 = c_1\widetilde{\eta}^2, \end{aligned} \tag{6.68}$$

а отже, підпростір $\mathcal{N}^1$ є нормалізованим: $\mathcal{N}^1 = \mathrm{Lin}\{\widehat{\eta}_2\}$.

Нагадаємо, що $(s+1)$-й крок вектора зросту (6.62) є вільним. Перейдемо до його $(r+1)$-го кроку і розглянемо $\mathcal{N}^{r+1}$ як підпростір $\mathrm{Lin}\{\eta^{i_2 i_1} : (i_2, i_1) \in \Omega_2^{r+1}\}$, де Ω_2^{r+1} має вигляд (6.63) і $\eta^{i_2 i_1} = \mathrm{ad}_{\zeta_2}^{i_2}\mathrm{ad}_{\zeta_1}^{i_1}\widetilde{\eta}^2$, де $\zeta_1 = \widetilde{\eta}^1$, $\zeta_2 = \mathrm{ad}_{\zeta_1}^s\widetilde{\eta}^2$. Для того, щоб знайти нормалізуючий базис, виразимо довільний $\mathcal{N}^{r+1}$ як підпростір $\mathrm{Lin}\{\widehat{\eta}^{i_2 i_1} : (i_2, i_1) \in \Omega_2^{r+1}\}$, де $\widehat{\eta}^{i_2 i_1} = \mathrm{ad}_{\widehat{\zeta}_2}^{i_2}\mathrm{ad}_{\widehat{\zeta}_1}^{i_1}\widehat{\eta}^2$ і $\widehat{\zeta}_1 = \widehat{\eta}_1$, $\widehat{\zeta}_2 = \mathrm{ad}_{\widehat{\zeta}_1}^s\widehat{\eta}_2$.

Розглянемо можливі випадки, вказані у наслідку 6.4.

Випадок $r = 2s+1$. Маємо $d_{r+1} = m_{r+1} = 1$, отже, $(r+1)$-й крок вільний. Тоді вектор зросту має єдиний (перший) обмежений крок. Будь-який базис вигляду (6.67) дає $\mathcal{N}^1 = \mathrm{Lin}\{\widehat{\eta}_2\}$, отже, вектор зросту є A-нормальним (наприклад, можна вибрати $c_1 = 1$ і $c_2 = 0$ і отримати базис (6.51).

Випадок $s+1 \le r \le 2s$ або $r = 3s+2$. Підпростір $\mathcal{N}^{r+1}$ є одновимірним підпростором $\mathrm{Lin}\{\eta^{0r}, \eta^{1(r-s-1)}\}$, тобто $\mathcal{N}^{r+1} = \mathrm{Lin}\{z_1\eta^{0r} + z_2\eta^{1(r-s-1)}\}$, де $z_1^2 + z_2^2 \ne 0$.

Розглянемо новий базис (6.67) і запишемо елементи $\widehat{\eta}^{0r}$ і $\widehat{\eta}^{1(r-s-1)}$ з використанням (6.68):

$$\begin{gathered}
\widehat{\eta}^{0r} = \mathrm{ad}^r_{\widehat{\eta}_1}\widehat{\eta}_2 = [\underbrace{\widehat{\eta}_1 \cdots [\widehat{\eta}_1}_{r}, \widehat{\eta}_2] \cdots] = [\underbrace{(\widetilde{\eta}^1 + c_2\widetilde{\eta}^2) \cdots [(\widetilde{\eta}^1 + c_2\widetilde{\eta}^2)}_{r}, c_1\widetilde{\eta}^2] \cdots] = \\
= c_1[\underbrace{\widetilde{\eta}^1 \cdots [\widetilde{\eta}^1}_{r}, \widetilde{\eta}^2] \cdots] + c_1c_2\sum_{p=0}^{r-2}[\underbrace{\widetilde{\eta}^1, \cdots [\widetilde{\eta}^1}_{p}, [\widetilde{\eta}^2, [\underbrace{\widetilde{\eta}^1, \cdots, [\widetilde{\eta}^1}_{r-p-1}, \widetilde{\eta}^2] \cdots] + \ell_1 = \\
= c_1\eta^{0r} + c_1c_2\sum_{p=0}^{r-2}\mathrm{ad}^p_{\zeta_1}[\widetilde{\eta}^2, \mathrm{ad}^{r-p-1}_{\zeta_1}\widetilde{\eta}^2] + \ell_1,
\end{gathered} \tag{6.69}$$

$$\begin{gathered}
\widehat{\eta}^{1(r-s-1)} = \mathrm{ad}_{\widehat{\zeta}_2}\mathrm{ad}^{r-s-1}_{\widehat{\zeta}_1}\widehat{\eta}_2 = [\mathrm{ad}^s_{\widehat{\zeta}_1}\widehat{\eta}_2, \mathrm{ad}^{r-s-1}_{\widehat{\zeta}_1}\widehat{\eta}_2] = \\
= [[\underbrace{\widehat{\eta}_1 \cdots [\widehat{\eta}_1}_{s}, \widehat{\eta}_2] \cdots], [\underbrace{\widehat{\eta}_1 \cdots [\widehat{\eta}_1}_{r-s-1}, \widehat{\eta}_2] \cdots]] = \\
= [[\underbrace{(\widetilde{\eta}^1 + c_2\widetilde{\eta}^2) \cdots [(\widetilde{\eta}^1 + c_2\widetilde{\eta}^2)}_{s}, c_1\widetilde{\eta}^2] \cdots], [\underbrace{(\widetilde{\eta}^1 + c_2\widetilde{\eta}^2) \cdots [(\widetilde{\eta}^1 + c_2\widetilde{\eta}^2)}_{r-s-1}, c_1\widetilde{\eta}^2] \cdots]] = \\
= c_1^2[\mathrm{ad}^s_{\zeta_1}\widetilde{\eta}^2, \mathrm{ad}^{r-s-1}_{\zeta_1}\widetilde{\eta}^2] + \ell_2 = c_1^2\eta^{1(r-s-1)} + \ell_2,
\end{gathered} \tag{6.70}$$

де ℓ_1 і ℓ_2 включають доданки вигляду $[\widetilde{\eta}^{i_1} \cdots [\widetilde{\eta}^{i_r}, \widetilde{\eta}^{i_{r+1}}] \cdots]$, де більш ніж два індекси i_j дорівнюють 2. Кожен з них дорівнює лінійній комбінації дужок, які містять три або більше елементів вигляду $\mathrm{ad}^q_{\zeta_1}\widetilde{\eta}^2$. Можна показати, що за умови $s+1 \le r \le 2s$ або $r = 3s+2$ вони належать $\mathcal{L}^{[r]}_{X_1,X_2}$.

З іншого боку, кожний елемент вигляду $\mathrm{ad}^p_{\zeta_1}[\widetilde{\eta}^2, \mathrm{ad}^{r-p-1}_{\zeta_1}\widetilde{\eta}^2]$ дорівнює лінійній комбінації дужок вигляду $[\mathrm{ad}^{q_1}_{\zeta_1}\widetilde{\eta}^2, \mathrm{ad}^{q_2}_{\zeta_1}\widetilde{\eta}^2]$, де $q_1 + q_2 + 1 = r$. Такі дужки належать $\mathcal{L}^{[r]}_{X_1,X_2}$, якщо $q_1 \ne$ і $q_2 \ne s$. Якщо один з індексів q_1, q_2 дорівнює s, тоді інший дорівнює $r-s-1$, отже, дужки дорівнюють $\pm\eta^{1(r-s-1)}$.

Отже,

$$\sum_{p=0}^{r-2} \mathrm{ad}_{\zeta_1}^p [\widetilde{\eta}^2, \mathrm{ad}_{\zeta_1}^{r-p-1} \widetilde{\eta}^2] = \mu_1 \eta^{1(r-s-1)} + \ell_3,$$

де $\ell_3 \in \mathcal{L}^{[r]}_{X_1,X_2}$. Щоб знайти μ_1, застосуємо таку комбінаторну лему.

Лема 6.5. *Нехай ℓ_1, ℓ_2 — елементи алгебри Лі. Позначимо*

$$N_p^r = \mathrm{ad}_{\ell_1}^p [\ell_2, \mathrm{ad}_{\ell_1}^{r-p-1} \ell_2], \quad p \geq 0, \ r \geq p+2. \tag{6.71}$$

Тоді $N_p^r = \sum\limits_{i=0}^{p} C_p^i \,[\mathrm{ad}_{\ell_1}^i \ell_2, \mathrm{ad}_{\ell_1}^{r-i-1} \ell_2]$ *де* $C_p^i = \frac{p!}{i!(p-i)!}$.

Доведення можна легко отримати за індукцією.

Покладемо $\ell_1 = \zeta_1$, $\ell_2 = \widetilde{\eta}^2$, тоді з леми 6.5 випливає тотожність

$$\sum_{p=0}^{r-2} \mathrm{ad}_{\zeta_1}^p [\widetilde{\eta}^2, \mathrm{ad}_{\zeta_1}^{r-p-1} \widetilde{\eta}^2] = \sum_{p=0}^{r-2} N_p^r = \sum_{p=0}^{r-2} \sum_{i=0}^{p} C_p^i \,[\mathrm{ad}_{\zeta_1}^i \widetilde{\eta}^2, \mathrm{ad}_{\zeta_1}^{r-i-1} \widetilde{\eta}^2] =$$
$$= \sum_{i=0}^{r-2} \left(\sum_{p=i}^{r-2} C_p^i \right) [\mathrm{ad}_{\zeta_1}^i \widetilde{\eta}^2, \mathrm{ad}_{\zeta_1}^{r-i-1} \widetilde{\eta}^2] = \sum_{i=0}^{r-2} C_{r-1}^{i+1} [\mathrm{ad}_{\zeta_1}^i \widetilde{\eta}^2, \mathrm{ad}_{\zeta_1}^{r-i-1} \widetilde{\eta}^2] =$$
$$= (C_{r-1}^{s+1} - C_{r-1}^{r-s}) [\mathrm{ad}_{\zeta_1}^s \widetilde{\eta}^2, \mathrm{ad}_{\zeta_1}^{r-s-1} \widetilde{\eta}^2] + \ell_3 = (C_{r-1}^{s+1} - C_{r-1}^{r-s}) \eta^{1(r-s-1)} + \ell_3, \tag{6.72}$$

де $\ell_3 \in \mathcal{L}^{[r]}_{X_1,X_2}$ (ми вважаємо, що $C_i^j = 0$ при $j > i$). Отже, з (6.69), (6.70) і (6.72) отримуємо

$$\begin{aligned} \widehat{\eta}^{0r} &= c_1 \eta^{0r} + c_1 c_2 \mu_1 \eta^{1(r-s-1)} + \ell_1', \\ \widehat{\eta}^{1(r-s-1)} &= c_1^2 \eta^{1(r-s-1)} + \ell_2, \end{aligned} \tag{6.73}$$

де $\ell_1', \ell_2 \in \mathcal{L}^{[r]}_{X_1,X_2}$ і $\mu_1 = C_{r-1}^{s+1} - C_{r-1}^{r-s} \neq 0$, оскільки $r \neq 2s+1$. Зображення (6.73) дає

$$\mathcal{N}^{r+1} = \mathrm{Lin}\{z_1 \eta^{0r} + z_2 \eta^{1(r-s-1)}\} \cong \mathrm{Lin}\{z_1 c_1 \widehat{\eta}^{0r} + (z_2 - z_1 c_2 \mu_1) \widehat{\eta}^{1(r-s-1)}\},$$

де $z_1^2 + z_2^2 \neq 0$. Маємо два випадки. Якщо $z_1 = 0$ (а, отже, $z_2 \neq 0$), то будь-який вибір c_1, c_2 у (6.67) (наприклад, $c_1 = 1$, $c_2 = 0$) дає $\mathcal{N}^{r+1} \cong \mathrm{Lin}\{\widehat{\eta}^{1(r-s-1)}\}$. Якщо $z_1 \neq 0$, то виберемо $c_1 = 1$ і $c_2 = \frac{z_2}{z_1 \mu_1}$, тоді $\mathcal{N}^{r+1} \cong \mathrm{Lin}\{\widehat{\eta}^{0r}\}$.

Отже, ми нормалізували $[\mathcal{N}^{r+1}]$.

Випадок $2s+2 \le r \le 3s+1$ *або* $r = 4s+3$. Підпростір $\mathcal{N}^{r+1}$ є двовимірним підпростором $\mathrm{Lin}\{\eta^{0r}, \eta^{1(r-s-1)}, \eta^{2(r-2s-2)}\}$. Міркуючи як у попередньому випадку, для базису (6.67) отримуємо

$$\begin{aligned}
\widehat{\eta}^{0r} &= c_1\eta^{0r} + c_1c_2\sum_{p=0}^{r-2}\mathrm{ad}^p_{\zeta_1}[\widetilde{\eta}^2, \mathrm{ad}^{r-p-1}_{\zeta_1}\widetilde{\eta}^2] + \\
&+ c_1c_2^2\sum_{p=0}^{r-3}\sum_{q=0}^{r-3-p}\mathrm{ad}^p_{\zeta_1}[\widetilde{\eta}^2, \mathrm{ad}^q_{\zeta_1}[\widetilde{\eta}^2, \mathrm{ad}^{r-p-q-2}_{\zeta_1}\widetilde{\eta}^2]] + \ell_1 = \\
&= c_1\eta^{0r} + \mu_1c_1c_2\eta^{1(r-s-1)} + \mu_2c_1c_2^2\eta^{2(r-2s-2)} + \ell_1',
\end{aligned} \tag{6.74}$$

$$\begin{aligned}
&\widehat{\eta}^{1(r-s-1)} = c_1^2\eta^{1(r-s-1)} + c_1^2c_2\sum_{p=0}^{s-2}[\mathrm{ad}^p_{\zeta_1}[\widetilde{\eta}^2, \mathrm{ad}^{s-p-1}_{\zeta_1}\widetilde{\eta}^2], \mathrm{ad}^{r-s-1}_{\zeta_1}\widetilde{\eta}^2] + \\
&+ c_1^2c_2\sum_{p=0}^{r-s-3}[\mathrm{ad}^s_{\zeta_1}\widetilde{\eta}^2, \mathrm{ad}^p_{\zeta_1}[\widetilde{\eta}^2, \mathrm{ad}^{r-s-p-2}_{\zeta_1}\widetilde{\eta}^2]] + \ell_2 = \\
&= c_1^2\eta^{1(r-s-1)} + \mu_3c_1^2c_2\eta^{2(r-2s-2)} + \ell_2',
\end{aligned} \tag{6.75}$$

$$\widehat{\eta}^{2(r-2s-2)} = c_1^3\eta^{2(r-2s-2)} + \ell_3, \tag{6.76}$$

де $\ell_1, \ell_1', \ell_2, \ell_2', \ell_3 \in \mathcal{L}^{[r]}_{X_1,X_2}$.

Аналогічно попередньому випадку, $\mu_1 = C^{s+1}_{r-1} - C^{r-s}_{r-1} \neq 0$, оскільки $r \neq 2s+1$. Знайдемо μ_3. Використовуючи лему 6.5 і міркуючи як у (6.72), отримуємо

$$\begin{aligned}
&\sum_{p=0}^{s-2}[\underbrace{\mathrm{ad}^p_{\zeta_1}[\widetilde{\eta}^2, \mathrm{ad}^{s-p-1}_{\zeta_1}\widetilde{\eta}^2]}_{N_p^s}, \mathrm{ad}^{r-s-1}_{\zeta_1}\widetilde{\eta}^2] + \sum_{p=0}^{r-s-3}[\mathrm{ad}^s_{\zeta_1}\widetilde{\eta}^2, \underbrace{\mathrm{ad}^p_{\zeta_1}[\widetilde{\eta}^2, \mathrm{ad}^{r-s-p-2}_{\zeta_1}\widetilde{\eta}^2]}_{N_p^{r-s-1}}] = \\
&= \sum_{i=0}^{s-2}C^{i+1}_{s-1}[[\mathrm{ad}^i_{\zeta_1}\widetilde{\eta}^2, \mathrm{ad}^{s-i-1}_{\zeta_1}\widetilde{\eta}^2], \mathrm{ad}^{r-s-1}_{\zeta_1}\widetilde{\eta}^2] + \\
&+ \sum_{i=0}^{r-s-3}C^{i+1}_{r-s-2}[\mathrm{ad}^s_{\zeta_1}\widetilde{\eta}^2, [\mathrm{ad}^i_{\zeta_1}\widetilde{\eta}^2, \mathrm{ad}^{r-s-i-2}_{\zeta_1}\widetilde{\eta}^2]].
\end{aligned} \tag{6.77}$$

Кожний елемент вигляду $[\mathrm{ad}^{q_1}_{\zeta_1}\widetilde{\eta}^2, [\mathrm{ad}^{q_2}_{\zeta_1}\widetilde{\eta}^2, \mathrm{ad}^{q_3}_{\zeta_1}\widetilde{\eta}^2]]$, де $q_1+q_2+q_3+2 = r$, належить $\mathcal{L}^{[r]}_{X_1,X_2}$, якщо $q_1 \neq s$, отже, перша сума (6.77) належить $\mathcal{L}^{[r]}_{X_1,X_2}$ (оскільки $r \neq 2s+1$). Нехай $q_1 = s$; за тотожністю Якобі, елементи

$[\mathrm{ad}^s_{\zeta_1}\widetilde{\eta}^2, [\mathrm{ad}^{q_2}_{\zeta_1}\widetilde{\eta}^2, \mathrm{ad}^{q_3}_{\zeta_1}\widetilde{\eta}^2]]$ належать $\mathcal{L}^{[r]}_{X_1,X_2}$, якщо $q_2 \neq s$ і $q_3 \neq s$. Якщо $q_2 = s$, то $q_3 = r-2s-2$, і навпаки, отже, відповідні дужки дорівнюють $\pm\eta^{2(r-s-2)}$.

Отже, з (6.75) і (6.77) випливає $\mu_3 = C^{s+1}_{r-s-2} - C^{r-2s-1}_{r-s-2}$. Якщо $r = 2s+2$, то $\mu_3 = -C^{r-2s-1}_{r-s-2} = -C^1_s \neq 0$ (нагадаємо, що $s \geq 1$). Якщо $r \geq 2s+3$, то $\mu_3 = C^{s+1}_{r-s-2} - C^{r-2s-1}_{r-s-2} \neq 0$, оскільки $r \neq 3s+2$. Отже, $\mu_3 \neq 0$.

Для того, щоб знайти μ_2 у виразі (6.74), скористаємось наступною комбінаторною лемою.

Лема 6.6. *Нехай ℓ_1, ℓ_2 — елементи алгебри Лі. Позначимо*

$$M^r_{pq} = \mathrm{ad}^p_{\ell_1}[\ell_2, N^{r-p-1}_q], \quad p \geq 0,\ q \geq 0,\ r \geq p+q+3, \tag{6.78}$$

де N^{r-p-1}_q визначаються (6.71). Тоді $M^r_{pq} = \sum\limits_{i=0}^{p} C^i_p\,[\mathrm{ad}^i_{\ell_1}\ell_2, N^{r-i-1}_{p+q-i}]$.

Підставляючи $\ell_1 = \zeta_1$, $\ell_2 = \widetilde{\eta}^2$, отримуємо з лем 6.6 і 6.6 тотожність

$$\sum_{p=0}^{r-3}\sum_{q=0}^{r-3-p} \overbrace{\mathrm{ad}^p_{\zeta_1}[\widetilde{\eta}^2, \underbrace{\mathrm{ad}^q_{\zeta_1}[\widetilde{\eta}^2, \mathrm{ad}^{r-p-q-2}_{\zeta_1}\widetilde{\eta}^2]]}_{N^{r-p-1}_q}}^{M^r_{pq}} = \sum_{p=0}^{r-3}\sum_{q=0}^{r-3-p}\sum_{i=0}^{p} C^i_p\,[\mathrm{ad}^i_{\zeta_1}\widetilde{\eta}^2, N^{r-i-1}_{p+q-i}] =$$

$$= \sum_{i=0}^{r-3}\sum_{j=0}^{r-3-i}\left(\sum_{p=i}^{r-3} C^i_p \sum_{(p+q-i)=j}^{r-3-i} C^k_{p+q-i}\right)[\mathrm{ad}^i_{\zeta_1}\widetilde{\eta}^2, [\mathrm{ad}^j_{\zeta_1}\widetilde{\eta}^2, \mathrm{ad}^{r-i-j-2}_{\zeta_1}\widetilde{\eta}^2]] =$$

$$= \sum_{i=0}^{r-3}\sum_{j=0}^{r-3-i} C^{i+1}_{r-2}C^{j+1}_{r-i-2}[\mathrm{ad}^i_{\zeta_1}\widetilde{\eta}^2, [\mathrm{ad}^j_{\zeta_1}\widetilde{\eta}^2, \mathrm{ad}^{r-i-j-2}_{\zeta_1}\widetilde{\eta}^2]]. \tag{6.79}$$

Як було показано вище, всі доданки (6.79) належать $\mathcal{L}^{[r]}_{X_1,X_2}$, крім тих, що відповідають $i = j = s$ або $i = s$, $j = r-2s-2$. Отже, з (6.74) і (6.79) отримуємо $\mu_2 = C^{s+1}_{r-2}\left(C^{s+1}_{r-s-2} - C^{r-2s-1}_{r-s-2}\right) = C^{s+1}_{r-2}\mu_3$. Оскільки $s \geq 1$ і $r \geq 2s+2$, маємо $C^{s+1}_{r-2} \neq 0$, а отже, $\mu_2 \neq 0$.

Таким чином, з (6.74)–(6.76) випливає

$$\begin{aligned} \widehat{\eta}^{0r} &= c_1\eta^{0r} + \mu_1 c_1 c_2 \eta^{1(r-s-1)} + \mu_2 c_1 c_2^2 \eta^{2(r-2s-2)} + \ell_1', \\ \widehat{\eta}^{1(r-s-1)} &= c_1^2\eta^{1(r-s-1)} + \mu_3 c_1^2 c_2 \eta^{2(r-2s-2)} + \ell_2', \\ \widehat{\eta}^{2(r-2s-2)} &= c_1^3\eta^{2(r-2s-2)} + \ell_3, \end{aligned} \tag{6.80}$$

де $\ell'_1, \ell'_2, \ell_3 \in \mathcal{L}^{[r]}_{X_1,X_2}$ і ненульові константи μ_1, μ_2, μ_3 не залежать від c_1, c_2.

Нехай підпростір $[\mathcal{N}^{r+1}]$ описаний анігілятором $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \neq 0$, тоді $\gamma z = 0$ при $z_1\eta^{0r} + z_2\eta^{1(r-s-1)} + z_3\eta^{2(r-2s-2)} + \ell \in \mathcal{N}^{r+1}$, де$\ell \in \mathcal{L}^{[r]}_{X_1,X_2}$. Завдяки (6.80), у новому базисі анігілятор набуває вигляду $\widehat{\gamma} = (\widehat{\gamma}_1, \widehat{\gamma}_2, \widehat{\gamma}_3)$, де

$$\widehat{\gamma}_1 = c_1\gamma_1 + \mu_1 c_1 c_2 \gamma_2 + \mu_2 c_1 c_2^2 \gamma_3, \quad \widehat{\gamma}_2 = c_1^2\gamma_2 + \mu_3 c_1^2 c_2 \gamma_3, \quad \widehat{\gamma}_3 = c_1^3\gamma_3,$$

і γ і $\widehat{\gamma}$ визначені з точністю до ненульового множника. Маємо кілька випадків. (i) Нехай $\gamma_3 = 0$.

— Якщо $\gamma_2 = 0$, то виберемо $c_1 = 1$, $c_2 = 0$ і отримаємо $\widehat{\gamma} = (1, 0, 0)$.

— Якщо $\gamma_2 \neq 0$, то виберемо $c_1 = 1$, $c_2 = -\frac{\gamma_1}{\mu_1\gamma_2}$ і отримаємо $\widehat{\gamma} = (0, 1, 0)$.

(ii) Нехай $\gamma_3 \neq 0$. Виберемо $c_2 = -\frac{\gamma_2}{\mu_3\gamma_3}$ і розглянемо число $K = \gamma_1 + \mu_1 c_2\gamma_2 + \mu_2 c_2^2\gamma_3 = \gamma_1 + \frac{\gamma_2^2}{\gamma_3\mu_3^2}(\mu_2 - \mu_1\mu_3)$.

— Якщо $K = 0$, то виберемо $c_1 = 1$ і отримаємо $\widehat{\gamma} = (0, 0, 1)$.

— Якщо $K \neq 0$, то виберемо $c_1 = \sqrt{\left|\frac{K}{\gamma_3}\right|}$ і отримаємо $\widehat{\gamma} = (\pm 1, 0, 1)$.

Отже, $\mathcal{N}^{r+1} \cong \mathrm{Lin}\{\widehat{\eta}^{1(r-s-1)}, \widehat{\eta}^{2(r-2s-2)}\}$, $\mathcal{N}^{r+1} \cong \mathrm{Lin}\{\widehat{\eta}^{0r}, \widehat{\eta}^{2(r-2s-2)}\}$, $\mathcal{N}^{r+1} \cong \mathrm{Lin}\{\widehat{\eta}^{0r}, \widehat{\eta}^{1(r-s-1)}\}$ або $\mathcal{N}^{r+1} \cong \mathrm{Lin}\{\widehat{\eta}^{0r} \mp \widehat{\eta}^{2(r-2s-2)}, \widehat{\eta}^{1(r-s-1)}\}$.

Для доведення теореми 6.5 залишилось отримати перелік А-простих векторів зросту, що легко зробити з урахуванням зауваження 6.5. ■

Наведемо перелік А-нормальних форм тривимірних систем, побудованих за методом підрозділу 6.1.3.

Перший крок є вільним, тобто вектор зросту має вигляд (6.54).

Для $r = 1$:

$$\dot{x} = u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ x_1 \end{pmatrix},$$

для $r = 2$:

$$\dot{x} = u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{2}x_1^2 \end{pmatrix},$$

для $r = 3$:

$$\dot{x} = u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{6}x_1^3 \pm \frac{1}{2}x_1x_2^2 \end{pmatrix}, \quad \dot{x} = u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{6}x_2^3 \end{pmatrix},$$

для $r = 4$:

$$\dot{x} = u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{24}x_1^4 + \frac{1}{6}x_1x_2^3 \end{pmatrix}, \quad \dot{x} = u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{24}x_1^4 - \frac{1}{4}x_1^2x_2^2 \end{pmatrix},$$

$$\dot{x} = u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{4}x_1^2x_2^2 \end{pmatrix}, \quad \dot{x} = u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{24}x_1^4 \end{pmatrix}.$$

Перший крок є обмеженим, тобто вектор зросту має вигляд (6.62).

Для $r = 2s + 1$:

$$\dot{x} = u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{s!}x_1^s \\ \frac{1}{r!}x_1^r \end{pmatrix}, \tag{6.81}$$

для $s + 1 \le r \le 2s$ або $r = 3s + 2$: (6.81) і

$$\dot{x} = u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{s!}x_1^s \\ \frac{1}{(r-s-1)!}x_1^{r-s-1}x_2 \end{pmatrix}, \tag{6.82}$$

для $2s + 2 \le r \le 3s + 1$ або $r = 4s + 3$: (6.81), (6.82) і

$$\dot{x} = u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{s!}x_1^s \\ \frac{1}{2(r-2s-2)!}x_1^{r-2s-2}x_2^2 \end{pmatrix},$$

$$\dot{x} = u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{s!}x_1^s \\ \frac{1}{r!}x_1^r \pm \frac{1}{2(r-2s-2)!}x_1^{r-2s-2}x_2^2 \end{pmatrix}.$$

Загальний випадок. У наступній теоремі ми описуємо всі A-нормальні вектори зросту для довільного $n \geq 2$. Ми наводимо кілька перших кроків кожного вектора зросту; *усі подальші кроки мають бути тривіальними або вільними.* Зокрема, це означає, що кожний тип векторів зросту може існувати тільки в окремих вимірностях.

Теорема 6.6. *Для довільного $n \geq 2$ вектор зросту є A-нормальним тоді і тільки тоді, коли він псевдо-вільний або має одну з наступних форм (зокрема, він може бути початковим сегментом одної з цих форм):*

$$(2,2,3,\ldots), \qquad (2,3,4,\ldots), \tag{A1}$$

$$(2,2,2,v_4,\ldots),\ v_4 = 3 \textit{ або } 4, \qquad (2,2,4,v_4,\ldots),\ v_4 = 5 \textit{ або } 6, \tag{A2}$$

$$(2,3,3,v_4,\ldots),\ v_4 = 4 \textit{ або } 5, \qquad (2,3,5,v_4,\ldots),\ v_4 = 6 \textit{ або } 7, \tag{A3}$$

$$(2,2,3,v_4,\ldots),\ v_4 = 4 \textit{ або } 5, \qquad (2,3,4,v_4,\ldots),\ v_4 = 5 \textit{ або } 6, \tag{A4}$$

$$(2,2,2,2,v_5,\ldots),\ v_5 = 3 \textit{ або } 5, \tag{A5}$$

$$(2,2,2,5,v_5,\ldots),\ v_5 = 6 \textit{ або } 8, \tag{A6}$$

$$v = (1,\ldots), \tag{B0}$$

$$v = (\underbrace{1,\ldots,1}_{s},\underbrace{2,\ldots,2}_{r-s},3,\ldots), \quad s+1 \leq r \leq 2s, \tag{B1}$$

$$v = (\underbrace{1,\ldots,1}_{s},\underbrace{2,\ldots,2}_{k-s},\underbrace{4,\ldots,4}_{2s+1-k},v_{2s+2},\ldots),\ v_{2s+2} = 5 \textit{ або } 6,\ s+1 \leq k \leq 2s, \tag{B2}$$

$$v = (\underbrace{1,\ldots,1}_{s},\underbrace{2,\ldots,2}_{k-s},\underbrace{3,\ldots,3}_{2s+1-k},4,\ldots), \quad s+1 \leq k \leq 2s, \tag{B3}$$

$$v = (\underbrace{1,\ldots,1}_{s},\underbrace{2,\ldots,2}_{r-2s-1},\underbrace{4,\ldots,4}_{s+1},v_{r+1},\ldots),\ v_{r+1} = 5 \textit{ or } 6,\ 2s+2 \leq r \leq 3s+1, \tag{B4}$$

$$v = (\underbrace{1,\ldots,1}_{s},\underbrace{2,\ldots,2}_{r-s},v_{r+1},\ldots), \quad v_{r+1} = 3 \textit{ або } 4,\ 2s+2 \leq r \leq 3s+1, \tag{B5}$$

$$v = (\underbrace{1,\ldots,1}_{s},\underbrace{2,\ldots,2}_{2s+2},3,\ldots), \tag{B6}$$

$$v = (\underbrace{1,\dots,1}_{s}, \underbrace{2,\dots,2}_{s+1}, \underbrace{3,\dots,3}_{s+1}, 4, \dots), \tag{B7}$$

$$v = (\underbrace{1,\dots,1}_{s}, \underbrace{2,\dots,2}_{k-s}, \underbrace{4,\dots,4}_{3s+2-k}, v_{3s+3}, \dots),\ \ v_{3s+3} = 5 \text{ або } 6,\ \ 2k = 3s+1, \tag{B8}$$

$$v = (\underbrace{1,\dots,1}_{s}, \underbrace{2,\dots,2}_{k-s}, \underbrace{4,\dots,4}_{2s+1-k}, \underbrace{7,\dots,7}_{s+1}, v_{3s+3}, \dots), v_{3s+3} = 8 \text{ або } 9,\ \ 2k{=}3s{+}1, \tag{B9}$$

$$v = (\underbrace{1,\dots,1}_{s}, \underbrace{2,\dots,2}_{3s+3}, v_{4s+4}, \dots),\ \ v_{4s+4} = 3 \text{ або } 4, \tag{B10}$$

$$v = (\underbrace{1,\dots,1}_{s}, \underbrace{2,\dots,2}_{s+1}, \underbrace{3,\dots,3}_{2s+2}, v_{4s+4}, \dots),\ \ v_{4s+4} = 4 \text{ або } 5, \tag{B11}$$

$$v = (\underbrace{1,\dots,1}_{s}, \underbrace{2,\dots,2}_{2s+2}, \underbrace{4,\dots,4}_{s+1}, v_{4s+4}, \dots),\ \ v_{4s+4} = 5 \text{ або } 6, \tag{B12}$$

$$v = (\underbrace{1,\dots,1}_{s}, \underbrace{2,\dots,2}_{s+1}, \underbrace{3,\dots,3}_{s+1}, \underbrace{5,\dots,5}_{s+1}, v_{4s+4}, \dots),\ \ v_{4s+4} = 6 \text{ або } 7, \tag{B13}$$

де у випадках (B1)–(B13) вважається, що $s \geq 1$. *У випадках (B8) і (B9) вважається, що* s *непарне.*

A-простими, крім перерахованих векторів при $n = 2$ *і* $n = 3$, *є такі вектори зросту:*

при $n = 4$:

$$v^1 = (2,2,2,4);\ \ v^2 = (2,2,4);\ \ v^3 = (2,2,3,4);\ \ v^4 = (2,3,3,4);$$
$$v^5 = (2,3,4);\ \ v^6 = (1,2,4);\ \ v^7 = (1,2,3,4);\ \ v^8 = (1,1,2,4);$$

при $n = 5$:

$$v^1 = (2,2,2,5);\ \ v^2 = (2,2,3,5);\ \ v^3 = (2,2,4,5);\ \ v^4 = (2,3,3,5);$$
$$v^5 = (2,3,4,5);\ \ v^6 = (2,3,5);\ \ v^7 = (1,2,3,5);\ \ v^8 = (1,2,4,5);$$

при $n = 6$:

$$v^1 = (2,2,3,6);\ \ v^2 = (2,2,4,6);\ \ v^3 = (2,3,3,6);\ \ v^4 = (2,3,4,6);$$
$$v^5 = (2,3,5,6);\ \ v^6 = (1,2,4,6)$$

при $n = 7$:

$$v^1 = (2,2,4,7);\ \ v^2 = (2,3,4,7);\ \ v^3 = (2,3,5,7);\ \ v^4 = (1,2,4,7).$$

При $n \geq 8$ тільки вільні вектори зросту (якщо вони існують) є А-простими.

Доведення теореми 6.6 схоже на доведення теореми 6.5, але є більш громіздким; воно міститься в роботі [83]. Тут ми обговоримо лише отримання всіх А-простих векторів зросту.

(a) Розглянемо вимірність $n \geq 4$, яка не припускає вільного вектора зросту. Знайдемо максимальне $n' < n$ і мінімальне $n'' > n$, які припускають вільний вектор зросту; позначимо ці вектори $v' = (v'_1, \dots, v'_{p'})$ і $v'' = (v'_1, \dots, v'_{p'}, v'_{p'+1})$, тоді $n' = v'_{p'}$ і $n'' = v'_{p'+1}$. Введемо *максимальний* вектор зросту у вимірності n, який дорівнює $\widehat{v} = (v'_1, \dots, v'_{p'}, n)$. Очевидно, він є реалізовним і його $(p'+1)$-й крок є обмеженим, $m_{p'+1} = n'' - n' < d_{p'+1} = n - n'$. Наприклад, для $n = 7$ маємо $n' = 5$, $n'' = 8$ і $v' = (2,3,5)$, $v'' = (2,3,5,8)$, $\widehat{v} = (2,3,5,7)$ і $m_4 = 3$.

Ми покажемо, що будь-яка система вигляду (6.46) має довільно мале збурення з вектором зросту $\widehat{v}$. Нехай $v = (v_1, \dots, v_p)$, $v_p = n$, — вектор зросту системи (6.46). Припустимо, що систему зведено (заміною змінних) до *трикутного* вигляду $X_1(x) = (1, 0, \dots, 0)^\top$ і $X_2(x) = (R_1, P_2 + R_2, \dots, P_n + R_n)^\top$, де $P_i = P_i(x_1, \dots, x_{i-1})$ — однорідні поліноми відносно порядку $w_i - 1$, де вага координат визначається послідовністю (6.33), і R_i включають доданки порядку більше $w_i - 1$.

Припустимо, що початковий сегмент $(v_1, \dots, v_{k-1})$ при $k < p$ є вільним вектором зросту, а $d_k < m_k$ (ми не виключаємо випадок $k = 1$). Розглянемо вектор зросту $(v_1, \dots, v_{k-1}, v_k + 1)$; очевидно, він є реалізовним. Позначимо $\widetilde{n} = v_k + 1 \leq n$ і розглянемо $\widetilde{n}$-вимірну систему (з векторними полями $Y_1(x)$ і $Y_2(x)$) з цим вектором зросту. Наприклад, можемо вибрати $Y_1(x) = (1, 0, \dots, 0)^\top$ і $Y_2(x) = (0, \widetilde{P}_2, \dots, \widetilde{P}_{\widetilde{n}})^\top$, де $\widetilde{P}_i = \widetilde{P}_i(x_1, \dots, x_{i-1})$ — однорідні поліноми і, крім того, $\widetilde{P}_i$ і P_i мають однаковий порядок для $i \leq \widetilde{n} - 1$ і порядок $\widetilde{P}_{\widetilde{n}}$ менший, ніж порядок $P_{\widetilde{n}}$.

Тепер розглянемо мале збурення векторного поля X_2 вигляду $\widetilde{X}_2 = X_2 + \varepsilon \widetilde{Y}$, де $\widetilde{Y} = (0, \widetilde{P}_2, \dots, \widetilde{P}_{\widetilde{n}}, 0, \dots, 0)^\top$. Якщо ε досить мале, система з векторними полями X_1 і $\widetilde{X}_2$ має вектор зросту $\widetilde{v} = (v_1, \ldots, v_{k-1}, \widetilde{v}_k, \ldots, \widetilde{v}_{\widetilde{p}})$, $\widetilde{v}_{\widetilde{p}} = n$, де $\widetilde{v}_k \geq v_k + 1$. Отже, $\widetilde{v} > v$. Певна заміна змінних (а саме, координат $x_{\widetilde{n}+1}, \ldots, x_n$) зводить збурену систему до трикутної форми, в якій вага координат визначається $\widetilde{v}$.

Після скінченної кількості таких кроків отримуємо систему, яка є малим збуренням вихідної системи, з максимально можливим вектором зросту $\widehat{v}$. Припустимо, що вона зведена до трикутної форми, нехай $\widehat{X}_1$, $\widehat{X}_2$ — відповідні векторні поля.

Тепер розглянемо n''-вимірну систему з вектором зросту v''; нехай Z_1, Z_2 відповідні векторні поля. А саме, припустимо $Z_1(x) = (1, 0, \ldots, 0)^{\mathsf{T}}$ і $Z_2(x) = (0, P'_2, \ldots, P'_{n''})^{\mathsf{T}}$, де $P'_i = P'_i(x_1, \ldots, x_{i-1})$ — однорідні поліноми (порядку $w''_i - 1$, де вага координат w''_j визначається v''). Виберемо $Q_i(x) = P'_i + \sum\limits_{k=n+1}^{n''} \varepsilon^i_k P'_k$, $i = n' + 1, \ldots, n$; це однорідні поліноми (порядку p'). Тоді система з векторними полями $\widehat{X}_1$ і $\widehat{X}_2 + \varepsilon Z'$, де $Z' = (0, P'_2, \ldots, P'_{n'}, Q_{n'+1}, \ldots, Q_n)^{\mathsf{T}}$, є малим збуренням вихідної системи.

Оскільки ε^i_j є *довільними* параметрами, що задовольняють оцінку $|\varepsilon^i_j| \leq 1$, отримуємо, що окіл вихідної системи містить многовид вимірності $(n - n')(n'' - n) = d_{p'+1}(m_{p'+1} - d_{p'+1})$. Якщо він покривається скінченною кількістю орбіт GL_2, то $m_{p'+1} \leq 4$.

(б) Тепер розглянемо вимірність $n \geq 3$, яка припускає вільний вектор зросту $v' = (v'_1, \ldots, v'_{p'})$, $v'_{p'} = n$. Введемо *майже максимальний* вектор зросту $\widehat{v} = (v'_1, \ldots, v'_{p'-1}, n-1, n)$; він реалізовний і його $(p'+1)$-й крок обмежений. Нехай система вигляду (6.46) має вектор зросту $v = (v_1, \ldots, v_p)$, $v_p = n$. Аналогічно попередньому випадку, припустимо, що система трикутна, тобто $X_1(x) = (1, 0, \ldots, 0)^{\mathsf{T}}$ і $X_2(x) = (R_1, P_2 + R_2, \ldots, P_n + R_n)^{\mathsf{T}}$, де $P_i = P_i(x_1, \ldots, x_{i-1})$ — однорідні поліноми відносно порядку $w_i - 1$ і R_i містить доданки порядку більше ніж $w_i - 1$. Серед всіх таких систем оберемо систему з $P_n = x_1^{p-1}$ і $R_n = 0$; очевидно, вона існує. Зауважимо, що оскільки v не є вільним, вага x_n більша, ніж вага p', тобто $p > p'$.

Покажемо, що ця система має довільно мале збурення з вектором зросту

$\widehat{v}$. Спочатку розглянемо $(n-1)$-вимірні векторні поля $X_1' = (1,0,\dots,0)^\mathsf{T}$ і $X_2' = (R_1, P_2 + R_2, \dots, P_{n-1} + R_{n-1})^\mathsf{T}$. Міркуючи аналогічно попередньому випадку, знайдемо мале збурення $\widetilde{X}_2'$, таке, що система з векторними полями X_1' і $\widetilde{X}_2' = (R_1', P_2' + R_2', \dots, P_{n-1}' + R_{n-1}')^\mathsf{T}$ має вектор зросту $(v_1', \dots, v_{p'-1}', n-1)$, який є максимальним у вимірності $n-1$ (крім випадку $n=3$, де така конструкція очевидна). Підкреслимо, що всі перетворення (в тому числі заміни змінних) не змінюють координати x_1 і x_n.

Розглянемо n-вимірне векторне поле $\widetilde{X}_2 = (R_1', P_2' + R_2', \dots, P_{n-1}' + R_{n-1}', x_1^{p-1})^\mathsf{T}$; воно є малим збуренням X_2. Оскільки $p > p'$, вага x_n більша, ніж p'. Отже, вектор зросту системи з векторними полями X_1 і $\widetilde{X}_2$ не є вільним. Нарешті, виберемо $Y = (0,\dots,0,x_1^{p'})^\mathsf{T}$; тоді система з X_1 and $\widetilde{X}_2 + \varepsilon Y$ має вектор зросту $\widehat{v}$.

Аналогічно попередньому випадку можна показати, що окіл вихідної системи містить $(m_{p'+1}-1)$-вимірний многовид, отже, якщо v є А-простим, то $m_{p'+1} \le 4$.

(в) Таким чином, в обох випадках (а) і (б), якщо v є А-простим, то $m_{p'+1} \le 4$. Знайдемо вимірності, в яких виконується ця умова. Для $n=3$ отримуємо $\widehat{v} = (2,2,3)$ і $m_3 = 2$. Нехай $n \ge 4$, тоді $\widehat{v} = (2,3,\dots)$. Для того, щоб оцінити $m_{p'+1}$, використаємо зауваження 6.5. Розглянемо функцію

$$f_2(z) = \frac{2z-1}{(1-z)^2(1-z^2)} + 1 =$$

$$= 2z^3 + 3z^4 + 6z^5 + \dots + k(k+1)z^{2k+1} + k(k+2)z^{2k+2} + \cdots$$

Оскільки $m_{p'+1}$ не менше, ніж коефіцієнт $z^{p'+1}$ у цьому ряді, то з умови $m_{p'+1} \le 4$ випливає, що $p'+1 \le 4$. Тобто якщо $\widehat{v}$ є А-нормальним, то $n \le 7$.

Отже, А-прості вектори зросту, які не є вільними, можуть існувати лише у вимірностях $n \le 7$.

(г) Розглянемо $4 \le n \le 7$. Аналогічно сказаному вище у пункті (б), для довільного вектора зросту $v = (v_1, \dots, v_p)$, який не є вільним, існує система з цим вектором зросту, яка в будь-якому околі містить систему з вектором зросту $v' = (2,3,\dots,v_p')$ *такої самої довжини* p. Якщо v є А-простим, то v' є А-нормальним. За міркуваннями пункту (в) або $p \le 4$, або

p-й крок є вільним. Припустимо, що p-й крок є вільним; оскільки $m_p \geq 6$ для $p \geq 5$, отримуємо $d_p = m_p \geq 6$, що неможливо для $n \leq 7$. Отже, якщо v є A-простим, то $p \leq 4$.

Для $n = 3$ аналогічні міркування дають $p \leq 5$.

Залишилося виписати всі реалізовні вектори зросту довжини не більше 5 для $n = 3$ і не більше 4 для $4 \leq n \leq 7$; вони перераховані в теоремах 6.5 і 6.6. За теоремами 6.5 і 6.6 вони є A-нормальними, а за зауваженням 6.5 вони є A-простими.

У наведених вище міркуваннях ми, по суті, побудували *огороджувальні* вектори зросту [161]. А саме, для $n \geq 8$ максимальний або майже максимальний вектор зросту є огороджувальним: він не є A-простим і для будь-якого іншого (крім вільних) вектора зросту існує система, для якої довільно мале збурення має цей огороджувальний вектор зросту (тобто усі інші вектори зросту межують з ним). З цього й випливає, що всі вектори зросту, крім вільних, не є A-простими.

Для $3 \leq n \leq 7$ огороджувальними є вектори $(2,2,2,2,2,3)$, $(2,3,3,3,4)$, $(2,3,4,4,5)$, $(2,3,5,5,6)$ і $(2,3,5,6,7)$.

Приклад 6.3. Розглянемо вектор зросту $v = (1,1,2,2,3,5)$. Його початковий сегмент $(1,1,2,2,3)$ має вигляд (B1) з $s = 2$, $r = 4$. Коефіцієнт z^6 у ряді Тейлора функції (6.49) в точці $z = 0$ дорівнює нулю, отже, $m_6 = d_6 = 2$, тобто 6-й крок є вільним. За теоремою 6.6, v є A-нормальним.

Але v не є A-простим. Покажемо це явно. Розглянемо систему вигляду (6.46) з $X_1(x) = (1,0,0,0,0)^\mathsf{T}$ і $X_2(x) = (0, x_1^2, x_1^4, x_3, x_1^5)^\mathsf{T}$; її вектор зросту дорівнює v. Вона має мале збурення з $\widehat{X}_1 = X_1$ і $\widehat{X}_2 = X_2 + \varepsilon Y$, де $Y(x) = (0,1,0,0,0)^\mathsf{T}$. Очевидно, його вектор зросту дорівнює $\widehat{v} = (2,2,2,2,3,5)$. Проте для цього вектора $m_6 = 5$, отже, його 6-й крок не є вільним, і за теоремою 6.6 $\widehat{v}$ не є A-нормальним. Більш того, вихідна система має мале збурення з $\widehat{X}_2' = X_2 + \varepsilon Y'$, де $Y'(x) = (0,1,0,\varphi_1(x),\varphi_2(x))^\mathsf{T}$ і $\varphi_i(x) = \varepsilon_1^i x_1^3 x_2^2 + \varepsilon_2^i x_1^2 x_2^3 + \varepsilon_3^i x_1 x_2^4$, де ε_j^i є *довільними* параметрами, які задовольняють $|\varepsilon_j^i| \leq 1$. Системи з різними наборами параметрів ε_j^i мають різні ядерні підалгебри Лі. Отже, окіл вихідної системи містить 6-вимірний многовид; його не можна покрити скінченню кількістю орбіт GL_2.

Означення 6.8. *Скажемо, що система (2.1) є A-простою, якщо вона має такий окіл, що множина ядерних підалгебр Лі усіх систем з цього околу покривається скінченною кількістю орбіт.*

Опис A-простих систем виявляється значно складнішим питанням, ніж опис A-простих векторів зросту, що показано в наступному прикладі.

Приклад 6.4. Розглянемо систему

$$\dot{x}_1 = u_1,\ \dot{x}_2 = x_1^2 u_2,\ \dot{x}_3 = x_1^5 u_2. \tag{6.83}$$

Її вектор зросту дорівнює $v = (1, 1, 2, 2, 2, 3)$ і є A-нормальним за теоремою 6.5, хоча не є A-простим. Будь-який окіл (6.83) містить систему з $X_1' = (1, 0, 0)^\mathsf{T}$ і $X_2' = (0, x_1^2 + \varepsilon, x_1^5 + \varphi(x))^\mathsf{T}$, де $\varphi(x) = \varepsilon_1 x_1^4 x_2 + \varepsilon_2 x_1^3 x_2^2 + \varepsilon_3 x_1^2 x_2^3 + \varepsilon_4 x_1 x_2^4$ (у якої вектор зросту дорівнює $v' = (2, 2, 2, 2, 2, 3)$ і не є A-нормальним). Тобто окіл містить 4-вимірний многовид і тому не може бути покритий скінченною кількістю орбіт. Отже, система (6.83) не є A-простою.

Тепер розглянемо систему

$$\dot{x}_1 = u_1,\ \dot{x}_2 = x_1^2 u_2,\ \dot{x}_3 = (x_1^5 + x_1^3 x_2) u_2. \tag{6.84}$$

Її однорідна апроксимація збігається з (6.83). Зокрема, її вектор зросту дорівнює v і не є A-простим. Але можна показати, що усі малі збурення системи (6.84) мають вектор зросту (6.53) з $s = 0$, $1 \le r \le 4$ або $1 \le s \le 2$, $s + 1 \le r \le 5$, які є A-нормальними. Отже, система (6.84) є A-простою.

Цей приклад показує, що властивість A-простоти треба вивчати для систем, а не для їх однорідних апроксимацій.

Сформулюємо кілька властивостей A-простих систем для випадку $m = 2$, які випливають з отриманих результатів.

(i) Якщо вектор зросту є A-простим, то всі системи з цим вектором зросту є A-простими.

(ii) Якщо вектор зросту не є A-простим, то існує система з цим вектором зросту, яка не є A-простою.

Отже, *вектор зросту є A-простим тоді і тільки тоді, коли всі системи з цим вектором зросту є A-простими.* Але якщо вектор зросту не є A-простим, то *можуть існувати* A-прості системи з цим вектором зросту (як у прикладі 6.4).

(iii) Якщо $n \geq 9$ не припускає вільного вектора зросту, то *всі системи* цієї вимірності не є A-простими.

(iv) Якщо $n \geq 8$ припускає вільний вектор зросту, то *існують* системи цієї вимірності, які не є A-простими.

Припустимо, що дана система вигляду (6.46). Можна показати, що *будь-який* її окіл містить $\sum\limits_{k=1}^{p} d_k(m_k - d_k)$-вимірний многовид. Отже, отримуємо таку властивість.

(v) Якщо система є A-простою, то її вектор зросту є A-нормальним.

Зауважимо, що в цьому напрямку залишаються відкриті питання, а приклад 6.4 показує, що їх дослідження потребує нових методів, які виходять за межі дослідження однорідних апроксимацій.

Висновки до розділу 6

У розділі 6 розглянута задача класифікації векторів зросту нелінійних систем, лінійних за керуванням. У підрозділі 6.1 отриманий критерій реалізовності вектора як вектора зросту деякої повністю неголономної системи; дослідження спирається на отриманий опис ядерної підалгебри Лі як вільної алгебри Лі.

У підрозділі 6.2 розглядається еквівалентність систем з точністю до заміни змінних і (невиродженої) заміни керування. Введені поняття A-нормального і A-простого вектора зросту. Для систем з двовимірним керуванням отримано повний опис A-нормальних і A-простих векторів зросту.

Результати розділу опубліковані в роботах [82, 83].

РОЗДІЛ 7
ЗАДАЧА ВІДОБРАЖУВАНОСТІ ТА ПОБУДУВАННЯ ОПТИМАЛЬНИХ КЕРУВАНЬ

7.1 Відображуваність у класі C^1

У цьому підрозділі ми розглядаємо задачу відображення систем за допомогою заміни змінних і заміни керування на лінійні системи і системи спеціального вигляду. Задача відображення на лінійні системи добре досліджена для нескінченно-диференційовних або дійсно-аналітичних систем [104, 91, 81, 119, 123]. Дослідження задач відображуваності в класі C^1 розпочато в роботі [22]. Результати даного підрозділу опубліковані в роботах [143, 15, 144].

7.1.1 Відображуваність на лінійні системи

У цьому пункті ми розглянемо автономні керовані системи вигляду

$$\dot{x} = f(x,u),\ x \in Q \subset \mathbb{R}^n,\ u \in \mathbb{R}^r,\ f(x,u) \in C^1(Q \times \mathbb{R}^r), \tag{7.1}$$

де $Q \subset \mathbb{R}^n$ — фіксована область. Будемо застосовувати заміни змінних вигляду

$$z = F(x) \in C^2(Q), \quad \det F_x(x) \neq 0,\ x \in Q, \tag{7.2}$$

і заміни керування вигляду

$$v = g(x,u) \in C^1(Q \times \mathbb{R}^r), \quad g(x, \mathbb{R}^r) = \mathbb{R}^r, \quad \det g_u(x,u) \neq 0,\ x \in Q, u \in \mathbb{R}^r. \tag{7.3}$$

Зауважимо, що вимоги щодо гладкості f, F і g узгоджені. Якщо до системи класу C^1 застосувати заміну змінних (7.2) і заміну керування (7.3), вона залишиться в класі C^1. З іншого боку, якщо система за допомогою заміни змінних (7.2) і заміни керування (7.3) зводиться до лінійної системи, то вона, очевидно, належить класу C^1.

Означення 7.1. *Система (7.1) локально лінеаризовна за зворотним зв'язком в області Q, якщо існує заміна змінних (7.2) і заміна керування (7.3), які зводять систему до вигляду*

$$\dot{z} = Az + Bv, \ \operatorname{rank}(B, AB, \ldots, A^{n-1}B) = n, \ \operatorname{rank}(B) = r. \tag{7.4}$$

Відзначимо очевидну властивість систем, лінеаризовних за зворотним зв'язком.

Лема 7.1. *Якщо система (7.1) локально лінеаризовна за зворотним зв'язком в області Q, то вона має вигляд*

$$\dot{x} = a(x) + B(x)\phi(x, u) = a(x) + \sum_{i=1}^{r} b_i(x)\phi_i(x, u), \tag{7.5}$$

де

$$\begin{aligned} &a(x), B(x) \in C^1(Q), \ \phi(x, u) \in C^1(Q \times \mathbb{R}^r), \phi(x, \mathbb{R}^r) = \mathbb{R}^r, \\ &\det \phi_u(x, u) \neq 0, \ x \in Q, \ u \in \mathbb{R}^r. \end{aligned} \tag{7.6}$$

Доведення. Якщо система лінеаризовна за зворотним зв'язком, то $\dot{z} = F_x(x)f(x, u) = Az + Bv = AF(x) + Bg(x, u)$, звідки $a(x) = (F_x(x))^{-1}AF(x)$, $B(x) = (F_x(x))^{-1}B$, $\phi(x, u) = g(x, u)$. ■

Очевидно, при лінеаризації за зворотним зв'язком вибір $a(x)$, $B(x)$, $\phi(x, u)$ у (7.5) неєдиний. Розглянемо два різні зображення $f(x, u) = a(x) + B(x)\phi(x, u) = \widetilde{a}(x) + \widetilde{B}(x)\widetilde{\phi}(x, u)$. Тоді $B(x)\phi_u(x, u) = \widetilde{B}(x)\widetilde{\phi}_u(x, u)$, звідки $\widetilde{B}(x) = B(x)\lambda(x)$ з невиродженою $\lambda(x) = \phi_u(x, u_0)(\widetilde{\phi}_u(x, u_0))^{-1}$, де $u_0 \in \mathbb{R}^r$ довільне. Оскільки $B(x)$ має максимальний ранг, $\lambda(x) \in C^1(Q)$ і $\widetilde{a}(x) = a(x) + B(x)\rho(x)$, де $\rho(x) = \phi(x, u_0) - \lambda(x)\widetilde{\phi}(x, u_0) \in C^1(Q)$. Легко бачити, що умови наступних леми і теореми для $\widetilde{a}(x)$, $\widetilde{B}(x)$ випливають з таких умов для $a(x)$, $B(x)$.

Як зазначено в пункті 1.4, кожну лінійну систему (1.56), що задовольняє вимоги (1.57), можна звести до вигляду (1.58), отже, в задачі лінеаризації за зворотним зв'язком достатньо розглядати саме такі лінійні системи. При цьому індекси керованості $n_1, \dots, n_r$ є інваріантними відносно *лінійних* замін змінних і керування [159]. Але можна розглядати *нелінійні* заміни, що зводять одну лінійну систему до іншої лінійної. Наприклад, система

$$\dot{x}_1 = x_2, \ \dot{x}_2 = u_1, \ \dot{x}_3 = x_1 + u_2$$

відображується на систему $\dot{z}_1 = z_2$, $\dot{z}_2 = v_1$, $\dot{z}_3 = v_2$ нелінійною заміною $z_1 = x_1$, $z_2 = x_2$, $z_3 = x_3 + |x_3|^3$, $v_1 = u_1$, $v_2 = (1 + 3|x_3|x_3)(x_1 + u_2)$ в області $Q = \{x \in \mathbb{R}^3 : 1 + 3|x_3|x_3 > 0\}$. Виникає питання: чи збігаються індекси керованості цих систем. Інваріантність індексів керованості в класі C^∞ майже очевидна. У наступній теоремі цей факт встановлюється в класі C^1.

Теорема 7.1. *Нехай заміна змінних (7.2) і заміна керування (7.3) зводять лінійну систему (7.4) до лінійної системи*

$$\dot{z} = \widetilde{A}z + \widetilde{B}v. \tag{7.7}$$

Тоді обидві системи можуть бути зведені до канонічної форми (1.58) з одним і тим самим набором індексів керованості $n_1 \geq \dots \geq n_r$.

Наступна теорема дає необхідні і достатні умови лінеаризовності за зворотним зв'язком для систем з багатовимірним керуванням.

Теорема 7.2. *Нелінійна керована система вигляду (7.1) локально лінеаризовна за зворотним зв'язком в області Q тоді і тільки тоді, коли виконуються наступні умови:*

(A) *система має вигляд (7.5), (7.6);*

(B_1) *для деякого цілого числа n_1 існують неперервні функції $\mu_{ki}^{sp}(x)$, для яких векторні поля $\chi_i^k(x)$, $k = 0, \dots, n_1 - 1$, $i = 1, \dots, r$, що визначаються рекурентно за формулами*

$$\begin{aligned}
&\chi_i^0(x) = b_i(x), \\
&\chi_i^{k+1}(x) = [a(x), \chi_i^k(x)] + \sum_{s=0}^{k} \sum_{p=1}^{r} \mu_{ki}^{sp}(x)\chi_p^s(x), \quad k = 0, \dots, n_1 - 2,
\end{aligned}$$

існують і належать класу $C^1(Q)$;

(B_2) $\operatorname{rank}\{\chi_1^0(x),\ldots,\chi_r^0(x),\ldots,\chi_1^{j-1}(x),\ldots,\chi_r^{j-1}(x)\} = const = w_j$, $x\in Q$, *для всіх* $j=1,\ldots,n_1$, *де* $r=w_1<\cdots<w_{n_1}=n$;

(B_3) $[\chi_p^k(x),\chi_q^j(x)] = \sum\limits_{s=1}^{r}\sum\limits_{i=0}^{k}\eta_{kjpq}^{is}(x)\chi_s^i(x)$, $x\in Q$, *для всіх* $0\le j\le k\le n_1-2$ *і* $p,q=1,\ldots,r$, *де* $\eta_{kjpq}^{is}(x)$ *— деякі неперервні функції;*

(B_4) *для всіх* $i=1,\ldots,r$ *існує розв'язок* $\varphi_i(x)$ *системи*

$$\varphi_x(x)\chi_s^j(x)=0,\ x\in Q,\ s=1,\ldots,r,\ j=0,\ldots,n_i-2, \tag{7.8}$$

де $n_i=\max\{j: w_j-w_{j-1}\ge i\}$, *причому*

$$L_a^k\varphi_i(x)\in C^2(Q),\quad k=0,\ldots,n_i-1, \tag{7.9}$$

що задовольняє таку властивість: рядки

$$H_i(x)=(\varphi_i(x))_x\left(\chi_1^{n_i-1}(x),\ldots,\chi_r^{n_i-1}(x)\right),\quad i=1,\ldots,r,$$

лінійно незалежні при $x\in Q$.

За даних умов, $n_1,\ldots,n_r$ *— індекси керованості системи* (7.4).

Оскільки доведення теорем 7.1 і 7.2 отримані у співавторстві з К. В. Скляр, вони винесені у додаток В.

Підкреслимо, що умова (B_4) не випливає з решти умов теореми 7.2; відповідний приклад для $r=1$ наведений у роботі [143, p. 1105].

Приклад 7.1. Розглянемо систему класу C^1

$$\dot x_1=x_2,\ \dot x_2=x_3,\ \dot x_3=u_1|x_1|\sin x_1+u_2\cos x_1,\ \dot x_4=u_1\cos x_1-u_2|x_1|\sin x_1$$

в області $Q=\{x:\|x\|\le 10\}$. Ця система, очевидно, лінеаризовна за зворотним зв'язком. Але дуже проста заміна змінних (наприклад, $z_1=x_1(x_3+20)$, $z_2=x_2(20-x_4)$, $z_3=x_3$, $z_4=x_4$) суттєво ускладнює систему, і її лінеаризовність стає неочевидною.

Виберемо $\chi_1^0(x)=b_1(x)$, $\chi_2^0(x)=b_2(x)$, тоді

$$\operatorname{ad}_a b_1(x)=(0,\ -|x_1|\sin x_1,\ x_2(|x_1|\cos x_1+\operatorname{sign}(x_1)\sin x_1),\ -x_2\sin x_1)^{\mathsf T},$$

$$\mathrm{ad}_a b_2(x) = (0,\ -\cos x_1,\ -x_2 \sin x_1,\ -x_2(|x_1|\cos x_1 + \mathrm{sign}(x_1)\sin x_1))^{\mathsf{T}}.$$

Отже, $\mathrm{ad}_a b_1(x), \mathrm{ad}_a b_2(x)$ не належить класу $C^1(Q)$ і $\mathrm{ad}_a^2 b_j(x)$ не існують. Але існують $\mu_1(x), \mu_2(x) \in C(Q)$, для яких

$$\begin{aligned}
&x_2(|x_1|\cos x_1 + \mathrm{sign}(x_1)\sin x_1) = \mu_1(x)|x_1|\sin x_1 + \mu_2(x)\cos x_1,\\
&-x_2 \sin x_1 = \mu_1(x)\cos x_1 - \mu_2(x)|x_1|\sin x_1,
\end{aligned}$$

оскільки ця система лінійних рівнянь відносно $\mu_1(x)$, $\mu_2(x)$ з неперервними коефіцієнтами має невироджену матрицю. Виберемо $\chi_1^1(x) = [a(x), \chi_1^0(x)] - \mu_1(x)\chi_1^0(x) - \mu_2(x)\chi_2^0(x) = (0, -|x_1|\sin x_1, 0, 0)^{\mathsf{T}}$. Аналогічно, $\chi_2^1(x) = (0, -\cos x_1, 0, 0)^{\mathsf{T}}$. Кожне з полів $\chi_1^1(x)$, $\chi_2^1(x)$ може дорівнювати нулю, але в кожній точці принаймні одне з них лінійно незалежне від $\chi_1^0(x)$, $\chi_2^0(x)$.

Міркуючи аналогічно, оберемо $\chi_1^2(x) = (|x_1|\sin x_1, 0, 0, 0)^{\mathrm{T}}$, $\chi_2^2(x) = (\cos x_1, 0, 0, 0)^{\mathrm{T}}$; тоді $w_1 = 2$, $w_2 = 3$, $w_3 = 4 = n$, і (B$_1$)–(B$_3$) виконуються з $n_1 = 3$, $n_2 = 1$. В умові (B$_4$) маємо $(\varphi_1(x))_x(\chi_1^0(x), \chi_2^0(x), \chi_1^1(x), \chi_2^1(x)) = 0$, тоді виберемо $\varphi_1(x) = \varphi_1(x_1)$. Також з (B$_4$) отримуємо $\varphi_1(x_1) \in C^3(Q)$, $\varphi_2(x) \in C^2(Q)$. Нарешті,

$$H(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1'(x_1) & 0 \\ \frac{\partial \varphi_2(x)}{\partial x_3} & \frac{\partial \varphi_2(x)}{\partial x_4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |x_1|\sin x_1 & \cos x_1 \\ \cos x_1 & -|x_1|\sin x_1 \end{pmatrix},$$

тому рядки $H_1(x)$ і $H_2(x)$ лінійно незалежні, якщо $\varphi_1'(x_1) \cdot \frac{\partial \varphi_2(x)}{\partial x_4} \neq 0$, $x \in Q$.

Отже, всі умови теореми 7.2 виконуються з довільними $\varphi_1(x) \in C^3(Q)$ і $\varphi_2(x) \in C^2(Q)$, для яких $\varphi_1(x) = \varphi_1(x_1)$, $\varphi_1'(x_1) \neq 0$, $\frac{\partial \varphi_2(x)}{\partial x_4} \neq 0$, $x \in Q$, тобто дана система локально лінеаризовна за зворотним зв'язком.

7.1.2 Відображуваність на системи з прямим зв'язком

У цьому пункті розглядається задача відображуваності на системи спеціального вигляду. Результати опубліковано в роботі [15].

Розглянемо клас систем з прямим зв'язком (feedforward) вигляду

$$\dot{y}_k = \psi_k(y_1, \ldots, y_{k-1}, u), \qquad k = 1, \ldots, n. \tag{7.10}$$

Важливою властивістю таких систем є можливість за заданим керуванням $u = u(t)$ знайти траєкторію, послідовно виконуючи інтегрування: якщо $y_1(t), \ldots, y_{i-1}(t)$ вже знайдені, то $y_i(t)$ знаходиться за явною формулою $y_i(t) = y_i(0) + \int_0^t \psi_i(y_1(\tau), \ldots, y_{i-1}(\tau), u(\tau))d\tau$. Системи з прямим зв'язком активно досліджуються і часто виникають у застосуваннях [49, 48, 105]). Зокрема, системи, що є однорідними апроксимаціями афінних за керуванням систем, є системами з прямим зв'язком.

Узагальненням цього класу є «нестрогі» системи з прямим зв'язком вигляду

$$\dot{y}_k = \psi_k(y_1, \ldots, y_k, u), \qquad k = 1, \ldots, n. \tag{7.11}$$

Для таких систем за заданим керуванням $u = u(t)$ можна знайти траєкторію, послідовно розв'язуючи диференціальні рівняння: якщо $y_1(t), \ldots, y_{i-1}(t)$ вже знайдені, то для знаходження $y_i(t)$ треба знайти розв'язок *одного* диференціального рівняння

$$\dot{y}_i = \psi_i(y_1(t), \ldots, y_{i-1}(t), y_i, u(t)) = \widehat{\psi}_i(t, y_i)$$

відносно невідомої функції $y_i = y_i(t)$.

7.1.2.1 Відображуваність без заміни керування

Далі $[Q]_k$ позначає проекцію області Q на k-вимірний підпростір, побудований за першими k координатними векторами, тобто

$$[Q]_k = \{z = (x_1, \ldots, x_k) : x = (x_1, \ldots, x_n) \in Q\}.$$

Означення 7.2. *Ми кажемо, що система*

$$\dot{x} = f(x, u), \quad x \in Q \subset \mathbb{R}^n, \ u \in \mathbb{R}^1, \ f(x, u) \in C^1(Q \times \mathbb{R}), \tag{7.12}$$

локально відображується на систему з прямим зв'язком класу C^1 в області Q, якщо існує заміна змінних

$$y = F(x) \in C^2(Q), \qquad \det F_x(x) \neq 0, \quad x \in Q, \tag{7.13}$$

яка зводить систему (7.12) *до вигляду* (7.10), *де* $\psi_k \in C^1([F(Q)]_{k-1} \times \mathbb{R})$, $k = 1, \ldots, n$.

Зазначимо, що «локальна відображуваність в області Q» означає, що відображення $y = F(x)$ є зворотним, взагалі кажучи, локально, у деякому околі кожної точки області Q.

Далі ми розглядаємо $f(x, u)$ як векторне поле відносно x, вважаючи u параметром; зокрема $[Z(x), f(x, u)]$ позначає дужку Лі вигляду $[Z(x), f(x, u)] = f_x(x, u)Z(x) - Z_x(x)f(x, u)$.

Теорема 7.3. *Система* (7.12) *локально відображується на систему з прямим зв'язком класу* C^1 *в області* Q *тоді і тільки тоді, коли існують такі векторні поля* $Z^1(x), \ldots, Z^n(x) \in C^1(Q)$, *що:*

(i) *для деяких функцій* $\mu_{ki}(x, u) \in C(Q \times \mathbb{R})$ *виконано*

$$[Z^k(x), f(x, u)] = \sum_{i=k+1}^{n} \mu_{ki}(x, u) Z^i(x), \quad k = 1, \ldots, n;$$

(ii) *для кожного* $k = 1, \ldots, n$ *система*

$$\begin{aligned} \varphi_x(x) Z^k(x) &= 1, \\ \varphi_x(x) Z^j(x) &= 0, \quad j = k+1, \ldots, n, \end{aligned} \tag{7.14}$$

має розв'язок у класі $C^2(Q)$.

Доведення. Достатність. Нехай умови (i), (ii) виконані. Для кожного $k = 1, \ldots, n$ нехай $\varphi^k(x) \in C^2(Q)$ — розв'язок системи (7.14). Розглянемо заміну змінних $y_k = F_k(x) = \varphi^k(x)$, $k = 1, \ldots, n$, у системі (7.12). З умови (ii) випливає, що

$$F_x(x)(Z^1(x), \ldots, Z^n(x)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ * & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ * & * & * & \ldots & 1 \end{pmatrix} \tag{7.15}$$

де позначка $*$ означає деякі (взагалі кажучи, різні) функції класу C^1. Зокрема, рівність (7.15) означає, що $\det F_x(x) \neq 0$, $x \in Q$. Тоді

$$\dot{y}_k = \varphi_x^k(x) f(x,u), \qquad k = 1,\ldots,n.$$

Покажемо, що $\varphi_x^k(x) f(x,u)$ є функцією від $F_1(x),\ldots,F_{k-1}(x)$ і u. Оскільки $\varphi^k(x) \in C^2(Q)$, то

$$(\varphi_x^k(x) f(x,u))_x Z^j(x) = \varphi_x^k(x)[Z^j(x), f(x,u)] + (\varphi_x^k(x) Z^j(x))_x f(x,u). \quad (7.16)$$

Оскільки $\varphi^k(x)$ є розв'язком системи (7.14), то $\varphi_x^k(x) Z^j(x) = const$ при $j \geq k$, отже, $(\varphi_x^k(x) Z^j(x))_x = 0$, $j \geq k$. Ураховуючи (i), отримуємо з (7.16)

$$\left(\varphi_x^k(x) f(x,u)\right)_x Z^j(x) = \varphi_x^k(x)[Z^j(x), f(x,u)] = \sum_{i=j+1}^{n} \mu_{ji}(x,u) \varphi_x^k(x) Z^i(x) = 0$$

при $j \geq k$. Це означає, що при кожному фіксованому u функція $\varphi(x) = \varphi_x^k(x) f(x,u)$ є розв'язком системи

$$\varphi_x(x) Z^j(x) = 0, \quad j = k,\ldots,n. \quad (7.17)$$

За умовою (ii), система (7.17) має $k-1$ незалежних розв'язків $\varphi^1(x),\ldots,\varphi^{k-1}(x)$. З (7.15) випливає, що $\operatorname{rank}\{Z^k(x),\ldots,Z^n(x)\} = n-k+1$, $x \in Q$, тому будь-який розв'язок системи (7.17) (класу C^1) є функцією (класу C^1) від цих розв'язків. Тобто існує така функція $\psi_k \in C^1$, що

$$\varphi_x^k f(x,u) = \psi_k(\varphi^1(x),\ldots,\varphi^{k-1}(x),u).$$

Отже, заміна змінних $y_k = F_k(x) = \varphi^k(x)$, $k = 1,\ldots,n$, приводить систему (7.12) до системи з прямим зв'язком (7.10).

Необхідність. Нехай система (7.12) локально відображується на систему (7.10) класу C^1 за допомогою заміни змінних (7.13). Це означає, що

$$(F_k(x))_x f(x,u) = \psi_k(F_1(x),\ldots,F_{k-1}(x),u), \quad k = 1,\ldots,n,$$

де $f(x,u)$ і $\psi_1,\ldots,\psi_n$ належать класу C^1.

Покладемо

$$Z^k(x) = (F_x(x))^{-1}e_k \in C^1(Q), \quad k = 1, \dots, n,$$
$$\varphi^k(x) = F_k(x) \in C^2(Q), \qquad\quad k = 1, \dots, n, \tag{7.18}$$

і покажемо, що векторні поля $Z^1, \dots, Z^n$ і функції $\varphi^1, \dots, \varphi^n$ задовольняють умови (i) і (ii) теореми 7.3.

Маємо

$$\varphi^k_x(x) Z^j(x) = (F_k(x))_x (F_x(x))^{-1} e_j = \delta_{kj},$$

де δ_{kj} — символ Кронекера, звідки випливає (ii).

Оскільки $F(x) \in C^2(Q)$, то

$$F_x(x)[Z^k(x), f(x,u)] = (F_x(x) f(x,u))_x Z^k(x) - (F_x(x) Z^k(x))_x f(x,u). \tag{7.19}$$

За означенням (7.18), $F_x(x)Z^k(x) = e_k$, отже, $(F_x(x)Z^k(x))_x f(x,u) = 0$. Розглянемо далі

$$(F_x(x) f(x,u))_x Z^k(x) = \sum_{j=1}^{n} e_j ((F_j(x))_x f(x,u))_x Z^k(x).$$

Оскільки $(F_j(x))_x f(x,u) = \psi_j(F_1(x), \dots, F_{j-1}(x), u)$, то

$$((F_j(x))_x f(x,u))_x = \sum_{i=1}^{j-1} \frac{\partial \psi_j(y_1, \dots, y_{j-1}, u)}{\partial y_i}\Big|_{y=F(x)} (F_i(x))_x$$

Позначимо

$$\mu_{ij}(x,u) = \frac{\partial \psi_j(y_1, \dots, y_{j-1}, u)}{\partial y_i}\Big|_{y=F(x)} \in C(Q \times \mathbb{R}),$$

тоді

$$((F_j(x))_x f(x,u))_x Z^k(x) = \sum_{i=1}^{j-1} \mu_{ij}(x,u)(F_i(x))_x (F_x(x))^{-1} e_k =$$

$$= \sum_{i=1}^{j-1} \mu_{ij}(x,u)\delta_{ik} = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad j \le k, \\ \mu_{kj}(x,u) & \text{при} \quad j \ge k+1. \end{cases}$$

Отже,

$$((F_x(x) f(x,u))_x Z^k(x) = \sum_{j=1}^{n} e_j ((F_j(x))_x f(x,u))_x Z^k(x) = \sum_{j=k+1}^{n} \mu_{kj}(x,u) e_j.$$

Остаточно, отримуємо з (7.19)

$$[Z^k(x), f(x,u)] = (F_x(x))^{-1}((F_x(x)f(x,u))_x Z^k(x) =$$

$$= \sum_{j=k+1}^{n} \mu_{kj}(x,u)(F_x(x))^{-1}e_j = \sum_{j=k+1}^{n} \mu_{kj}(x,u)Z^j(x),$$

що збігається з (i). ■

Зазначимо, що аналогічно [143] в умові (ii) замість рівності $\varphi_x(x)Z^k(x) = 1$ достатньо вимагати, щоб

$$\varphi_x(x)Z^k(x) = c_k(\varphi(x)), \tag{7.20}$$

де $c_k(\tau) \in C^1(\varphi(Q))$ – деякі функції, для яких $c_k(\tau) \neq 0$, $\tau \in \varphi(Q)$. Справді, нехай функція $\varphi(x)$ задовольняє рівняння $\varphi_x(x)Z^j(x) = 0$, $j = k+1, \ldots, n$, і умову (7.20). Тоді функція $\widetilde{\varphi}(x) = \Phi_k(\varphi(x)) \in C^2(Q)$, де $\Phi_k(t) = \int \frac{1}{c_k(\tau)} d\tau \in C^2(\varphi(Q))$, очевидно, задовольняє систему (7.14).

Крім того, системи (7.14) можна замінити на системи

$$\varphi_x(x)Z^j(x) = \delta_{kj}, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Дійсно, нехай векторні поля $Z^1, \ldots, Z^n$ задовольняють умови теореми 7.3, і нехай $\varphi^k(x) \in C^2(Q)$, $k = 1, \ldots, n$ — розв'язки систем (7.14). Побудуємо векторні поля $\widetilde{Z}^1, \ldots, \widetilde{Z}^n$, що задовольняють умову (i) теореми 7.3 і рівності $\varphi_x^k(x)\widetilde{Z}^j(x) = \delta_{kj}$ при $k, j = 1, \ldots, n$. А саме, шукаємо $\widetilde{Z}^k(x)$ у вигляді $\widetilde{Z}^k(x) = Z^k(x) + \sum\limits_{i=k+1}^{n} \alpha_{ki}(x)Z^i(x)$, де $\alpha_{ki}(x) \in C^1(Q)$. Тоді умова (i) для цих векторних полів, очевидно, виконана. Далі, для кожного $k = 1, \ldots, n$ маємо $\varphi_x^k(x)\widetilde{Z}^k(x) = 1$ і $\varphi_x^j(x)\widetilde{Z}^k(x) = 0$ при $j \leq k-1$. Нарешті, для $j = k+1, \ldots, n$ будемо вимагати, щоб

$$\varphi_x^j(x)\widetilde{Z}^k(x) = \varphi_x^j(x)Z^k(x) + \sum_{i=k+1}^{j-1} \alpha_{ki}(x)\varphi_x^j(x)Z^i(x) + \alpha_{kj}(x) = 0,$$

звідки послідовно знаходимо $\alpha_{kj}(x) \in C^1(Q)$, $j = k+1, \ldots, n$.

Розглянемо тепер відображуваність на нестрогі системи з прямим зв'язком.

Означення 7.3. *Ми кажемо, що система (7.12) локально відображується на нестрогу систему з прямим зв'язком класу C^1 в області Q, якщо існує заміна змінних (7.13), яка зводить систему (7.12) до вигляду (7.11), де $\psi_k \in C^1([F(Q)]_k \times \mathbb{R})$, $k = 1, \ldots, n$.*

Теорема 7.4. *Система (7.12) локально відображується на нестрогу систему з прямим зв'язком класу C^1 в області Q тоді і тільки тоді, коли існують такі векторні поля $Z^1(x), \ldots, Z^n(x) \in C^1(Q)$, що:*

(i) *для деяких функцій $\mu_{ki}(x,u) \in C(Q \times \mathbb{R})$ виконано*

$$[Z^k(x), f(x,u)] = \sum_{i=k}^{n} \mu_{ki}(x,u) Z^i(x), \quad k = 1, \ldots, n;$$

(ii) *для кожного $k{=}1, \ldots, n$ система (7.14) має розв'язок у класі $C^2(Q)$.*

Доведення аналогічне доведенню теореми 7.3.

Зазначимо, що в умові (ii) замість рівності $\varphi_x(x) Z^k(x) = 1$ достатньо вимагати, щоб $\varphi_x(x) Z^k(x) \neq 0$ при $x \in Q$. Справді, нехай векторні поля $Z^1(x), \ldots, Z^n(x)$ такі, що системи

$$\varphi_x(x) Z^j(x) = 0, \quad j = k+1, \ldots, n,$$

мають розв'язки $\varphi^k(x) \in C^2(Q)$, для яких $\varphi^k_x(x) Z^k(x) \neq 0$ при $x \in Q$. Введемо функції $\alpha_k(x) = (\varphi^k_x(x) Z^k(x))^{-1} \in C^1(Q)$ і розглянемо векторні поля $\widetilde{Z}^k(x) = \alpha_k(x) Z^k(x) \in C^1(Q)$. Ці векторні поля і функції $\varphi^1(x), \ldots, \varphi^n(x)$, очевидно, задовольняють (7.14). Далі,

$$[\widetilde{Z}^k(x), f(x,u)] = \alpha_k(x)[Z^k(x), f(x,u)] - (\alpha^k_x(x) f(x,u)) Z^k(x) =$$

$$= \left(\mu_{kk}(x,u) - \tfrac{\alpha^k_x(x) f(x,u)}{\alpha_k(x)} \right) \widetilde{Z}^k(x) + \sum_{i=k+1}^{n} \tfrac{\alpha_k(x)}{\alpha_i(x)} \mu_{ki}(x,u) \widetilde{Z}^i(x),$$

звідки випливає, що виконується умова (i) теореми 7.4 для векторних полів $\widetilde{Z}_1(x), \ldots, \widetilde{Z}_n(x)$.

Для афінних за керуванням систем отримуємо такі наслідки.

Наслідок 7.1. *Афінна система*

$$\dot{x} = a(x) + b(x)u, \qquad x \in Q \subset \mathbb{R}^n,\ u \in \mathbb{R}^1,\ a(x), b(x) \in C^1(Q), \tag{7.21}$$

локально відображується на систему з прямим зв'язком класу C^1 в області Q тоді і тільки тоді, коли існують такі векторні поля $Z^1(x), \dots, Z^n(x) \in C^1(Q)$, що:

(i) *для деяких функцій $\mu^1_{ki}(x)$, $\mu^2_{ki}(x) \in C(Q)$ виконано*

$$[Z^k(x), a(x)] = \sum_{i=k+1}^{n} \mu^1_{ki}(x) Z^i(x),\ \ [Z^k(x), b(x)] = \sum_{i=k+1}^{n} \mu^2_{ki}(x) Z^i(x),\ \ k = 1, \dots, n;$$

(ii) *для кожного $k=1,\dots,n$ система* (7.14) *має розв'язок у класі $C^2(Q)$.*

У цьому випадку система (7.10) *також афінна, тобто має вигляд*

$$\dot{y}_k = \psi^1_k(y_1, \dots, y_{k-1}) + \psi^2_k(y_1, \dots, y_{k-1})u, \quad k = 1, \dots, n.$$

Доведення. Достатньо показати, що умова (i) наслідку випливає з умов теореми 7.3.

З умови (i) теореми 7.3 для системи (7.21) отримуємо

$$[Z^k(x), a(x)] + [Z^k(x), b(x)]u = \sum_{i=k+1}^{n} \mu_{ki}(x, u) Z^i(x), \quad k = 1, \dots, n.$$

Розглянемо матричнозначну функцію $M(x) = (Z^1(x), \dots, Z^n(x)) \in C^1(Q)$. З умови (ii) теореми 7.3 випливає, що $\det M(x) \neq 0$. Маємо $(M(x))^{-1} Z^i(x) = e_i$, отже,

$$(M(x))^{-1}[Z^k(x), a(x)] + (M(x))^{-1}[Z^k(x), b(x)]u = \sum_{i=k+1}^{n} \mu_{ki}(x, u) e_i,$$

звідки отримуємо $\mu_{ki}(x, u) = \mu^1_{ki}(x) + \mu^2_{ki}(x)u$, де $\mu^1_{kj}(x), \mu^2_{kj}(x) \in C(Q)$, що й дає умову (i) наслідку 7.1. ∎

Наслідок 7.2. *Афінна система* (7.21) *локально відображується на нестрогу систему з прямим зв'язком класу C^1 в області Q тоді і тільки тоді, коли існують такі векторні поля $Z^1(x), \dots, Z^n(x) \in C^1(Q)$, що:*

(i) *для деяких функцій* $\mu^1_{ki}(x)$, $\mu^2_{ki}(x) \in C(Q)$ *виконано*

$$[Z^k(x), a(x)] = \sum_{i=k}^{n} \mu^1_{ki}(x) Z^i(x), \ \ [Z^k(x), b(x)] = \sum_{i=k}^{n} \mu^2_{ki}(x) Z^i(x), \ \ k = 1, \dots, n;$$

(ii) *для кожного* $k=1,\dots,n$ *система* (7.14) *має розв'язок у класі* $C^2(Q)$. *У цьому випадку система* (7.10) *також афінна, тобто має вигляд*

$$\dot{y}_k = \psi^1_k(y_1, \dots, y_k) + \psi^2_k(y_1, \dots, y_k)u, \quad k = 1, \dots, n.$$

7.1.2.2 Відображуваність із заміною керування

Далі $[Q]'_k$ позначає проекцію $n+1$-вимірної області Q на $(k+1)$-вимірний підпростір, побудований за першими k і останнім координатними векторами, тобто

$$[Q]'_k = \{z = (x_1, \dots, x_k, x_{n+1}) : x = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in Q\}.$$

Означення 7.4. *Ми кажемо, що система* (7.12) *локально відображується на систему з прямим зв'язком класу* C^1 *в області* Q *із заміною керування, якщо існує заміна змінних* (7.13) *і заміна керування*

$$v = g(x, u) \in C^1(Q \times \mathbb{R}), \qquad g_u(x, u) \neq 0, \quad x \in Q, \ u \in \mathbb{R}, \tag{7.22}$$

які зводять систему (7.12) *до вигляду*

$$\dot{y}_k = \psi_k(y_1, \dots, y_{k-1}, v), \quad k = 1, \dots, n, \tag{7.23}$$

де $\psi_k \in C^1([\hat{F}(Q \times \mathbb{R})]'_{k-1})$, $k = 1, \dots, n$, *а відображення* $\hat{F}$ *має вигляд* $\hat{F}(x, u) = (F(x), g(x, u))^{\mathsf{T}}$.

Зауваження 7.1. *Означення 7.4 не передбачає, взагалі кажучи, що* $g(x, \mathbb{R}) = \mathbb{R}$. *Це означає, що задача з необмеженим керуванням для вихідної системи* (7.12) *може бути зведена до задачі з обмеженим керуванням системи* (7.23).

Теорема 7.5. *Система* (7.12) *локально відображується на систему з прямим зв'язком класу* C^1 *в області* Q *із заміною керування тоді і тільки тоді, коли існують такі векторні поля* $Z^1(x), \ldots, Z^n(x) \in C^1(Q)$ *і функції* $Z_0^1(x,u), \ldots, Z_0^n(x,u) \in C(Q \times \mathbb{R})$, *що:*

(i) *для деяких функцій* $\mu_{ki}(x,u) \in C(Q \times \mathbb{R})$ *виконано*

$$[Z^k(x), f(x,u)] + f_u(x,u)Z_0^k(x,u) = \sum_{i=k+1}^{n} \mu_{ki}(x,u)Z^i(x), \quad k = 1, \ldots, n;$$

(ii) *для кожного* $k = 1, \ldots, n$ *система* (7.14) *має розв'язок у класі* $C^2(Q)$, *а також система*

$$\varphi_x(x,u)Z^k(x) + \varphi_u(x,u)Z_0^k(x,u) = 0, \quad k = 1, \ldots, n, \tag{7.24}$$

має нетривіальний розв'язок у класі $C^1(Q \times \mathbb{R})$.

Доведення. Достатність. Нехай умови теореми виконані, і нехай $\varphi^k(x) \in C^2(Q)$ — розв'язки (7.14), $k = 1, \ldots, n$, а $g(x,u) \in C^1(Q \times \mathbb{R})$ — нетривіальний розв'язок (7.24). Розглянемо заміну змінних $y_k = F_k(x) = \varphi^k(x)$, $k = 1, \ldots, n$, у системі (7.12). З умови (ii) випливає рівність (7.15), звідки отримуємо, що $\det F_x(x) \neq 0$ і $\operatorname{rank}\{Z^1(x), \ldots, Z^n(x)\} = n$, $x \in Q$. Зокрема, для нетривіального розв'язку (7.24) маємо $g_u(x,u) \neq 0$ при $x \in Q$, $u \in \mathbb{R}$. Тоді

$$\dot{y}_k = \varphi_x^k(x)f(x,u), \quad k = 1, \ldots, n.$$

Покажемо, що $\varphi_x^k(x)f(x,u)$ є функцією від $F_1(x), \ldots, F_{k-1}(x)$ і $g(x,u)$. Розглянемо довільні функції $Z_0^k(x,u,\varepsilon)$, неперервно диференційовні по x, u і такі, що $Z_0^k(x,u,\varepsilon) \to Z_0^k(x,u)$ при $\varepsilon \to 0$. Позначимо $z = (x,u)$ і розглянемо «розширені» векторні поля

$$\widetilde{f}(z) = \begin{pmatrix} f(x,u) \\ 0 \end{pmatrix}, \ \widetilde{Z}^k(z) = \begin{pmatrix} Z^k(x) \\ Z_0^k(x,u) \end{pmatrix}, \ \widetilde{Z}^k(z,\varepsilon) = \begin{pmatrix} Z^k(x) \\ Z_0^k(x,u,\varepsilon) \end{pmatrix}$$

і функції $\widetilde{\varphi}^k(z) = \varphi^k(x)$, $k = 1, \ldots, n$. Очевидно, маємо $\widetilde{\varphi}_z^k(z)\widetilde{f}(z) = \varphi_x^k f(x,u)$ і $\widetilde{\varphi}_z^k(z)\widetilde{Z}^j(z,\varepsilon) = \varphi_x^k(x)Z^j(x)$. Оскільки $\widetilde{\varphi}^k(z) \in C^2(Q \times \mathbb{R})$, то

$$(\widetilde{\varphi}_z^k(z)\widetilde{f}(z))_z\widetilde{Z}^j(z,\varepsilon) = \widetilde{\varphi}_z^k(z)[\widetilde{Z}^j(z,\varepsilon), \widetilde{f}(z)] + (\widetilde{\varphi}_z^k(z)\widetilde{Z}^j(z,\varepsilon))_z\widetilde{f}(z). \tag{7.25}$$

Оскільки $\varphi^k(x)$ — розв'язок (7.14), то $\widetilde{\varphi}^k_z(z)\widetilde{Z}^j(z,\varepsilon) = \varphi^k_x(x)Z^j(x) = const$ при $j \geq k$, тому $(\widetilde{\varphi}^k_z(z)\widetilde{Z}^j(z,\varepsilon))_z\widetilde{f}(z) = 0$ при $j \geq k$. Далі,

$$[\widetilde{Z}^j(z,\varepsilon),\widetilde{f}(z)] = \begin{pmatrix} [Z^j(x), f(x,u)] + f_u(x,u)Z^j_0(x,u,\varepsilon) \\ -(Z^j_0(x,u,\varepsilon))_x f(x,u) \end{pmatrix}.$$

Оскільки $\widetilde{\varphi}_k(z)$ не залежить від u, маємо

$$\widetilde{\varphi}^k_z(z)[\widetilde{Z}^j(z,\varepsilon),\widetilde{f}(z)] = \varphi^k_x(x)\left([Z^j(x), f(x,u)] + f_u(x,u)Z^j_0(x,u,\varepsilon)\right).$$

Отже, з (7.25) отримуємо

$$(\widetilde{\varphi}^k_z(z)\widetilde{f}(z))_z\widetilde{Z}^j(z,\varepsilon) = \varphi^k_x(x)\left([Z^j(x), f(x,u)] + f_u(x,u)Z^j_0(x,u,\varepsilon)\right), \ j \geq k.$$

Переходячи до границі при $\varepsilon \to 0$ і застосовуючи умову (i) теореми 7.5, отримуємо

$$(\widetilde{\varphi}^k_z(z)\widetilde{f}(z))_z\widetilde{Z}^j(z) = \varphi^k_x(x)\left([Z^j(x), f(x,u)] + f_u(x,u)Z^j_0(x,u)\right) =$$

$$= \sum_{i=j+1}^{n} \mu_{ji}(x,u)\varphi^k_x(x)Z^i(x) = 0 \quad \text{при} \quad j \geq k.$$

Отже, функція $\varphi^k_x(x)f(x,u) = \widetilde{\varphi}^k_z(z)\widetilde{f}(z)$ є розв'язком системи

$$\widetilde{\varphi}_z(z)\widetilde{Z}^j(z) = 0, \quad j = k,\dots,n.$$

Це — система з $n-k+1$ рівнянь відносно функції від $n+1$ невідомого. Як було показано вище, $\mathrm{rank}\{Z^k(x),\dots,Z^n(x)\} = n-k+1$, а отже, $\mathrm{rank}\{\widetilde{Z}^k(z),\dots,\widetilde{Z}^n(z)\} = n-k+1$. За умовою (ii), ця система має k незалежних розв'язків $\varphi^1(x),\dots,\varphi^{k-1}(x), g(x,u)$ класу C^1, тому будь-який її розв'язок (класу C^1) є функцією (класу C^1) від цих розв'язків. Отже, знайдеться така функція $\psi_k \in C^1$, що

$$\varphi^k_x(x)f(x,u) = \psi_k(\varphi^1(x),\dots,\varphi^{k-1}(x), g(x,u)).$$

Тобто при $v = g(x,u)$ система (7.12) у нових змінних має вигляд (7.23).

Необхідність. Нехай система (7.12) локально відображується на систему (7.23) класу C^1 за допомогою заміни змінних (7.13) і заміни керування (7.22). Тоді, як було зазначено вище, $f(x,u) \in C^1(Q \times \mathbb{R})$ і

$$(F_k(x))_x f(x,u) = \psi_k(F_1(x), \ldots, F_{k-1}(x), g(x,u)), \quad k = 1, \ldots, n.$$

Позначимо

$$\begin{aligned} &Z^k(x) = (F_x(x))^{-1} e_k \in C^1(Q),\ \varphi_k(x) = F_k(x) \in C^2(Q), \quad k = 1, \ldots, n, \\ &Z_0^k(x,u) = -\tfrac{1}{g_u(x,u)}\, g_x(x,u) Z^k(x) \in C(Q \times \mathbb{R}). \end{aligned} \tag{7.26}$$

Очевидно, що введені векторні поля і функції задовольняють умову (ii) теореми 7.5. Оскільки $F(x) \in C^2(Q)$, то, з урахуванням (7.26), отримуємо

$$F_x(x)[Z^k(x), f(x,u)] = (F_x(x) f(x,u))_x Z^k(x). \tag{7.27}$$

Розглянемо $(F_x(x) f(x,u))_x Z^k(x) = \sum\limits_{j=1}^{n} e_j ((F_j(x))_x f(x,u))_x Z^k(x)$. Оскільки

$$(F_j(x))_x f(x,u) = \psi_j(F_1(x), \ldots, F_{j-1}(x), g(x,u)), \tag{7.28}$$

то, позначаючи

$$\mu_{ij}(x,u) = \frac{\partial \psi_j(y_1, \ldots, y_{j-1}, g(x,u))}{\partial y_i}\Big|_{y=F(x)} \in C(Q \times \mathbb{R}), \quad i = 1, \ldots, j-1,$$

$$\mu_{0j}(x,u) = \frac{\partial \psi_j(F_1(x), \ldots, F_{j-1}(x), v)}{\partial v}\Big|_{v=g(x,u)} \in C(Q \times \mathbb{R}),$$

і враховуючи (7.26), отримуємо

$$\begin{gathered} ((F_j(x))_x f(x,u))_x Z^k(x) = \\ = \sum_{i=1}^{j-1} \mu_{ij}(x,u)(F_i(x))_x Z^k(x) + \mu_{0j}(x,u) g_x(x,u) Z^k(x) = \\ = \sum_{i=1}^{j-1} \mu_{ij}(x,u)\delta_{ik} - \mu_{0j}(x,u) g_u(x,u) Z_0^k(x,u). \end{gathered}$$

Крім того, з (7.28) випливає, що $(F_j(x))_x f_u(x,u) = \mu_{0j}(x,u) g_u(x,u)$, тому

$$((F_j(x))_x f(x,u))_x Z^k(x) = \begin{cases} -(F_j(x))_x f_u(x,u) Z_0^k(x,u), & j \le k, \\ \mu_{kj}(x,u) - (F_j(x))_x f_u(x,u) Z_0^k(x,u), & j \ge k+1. \end{cases}$$

Отже, з (7.27) отримуємо

$$[Z^k(x), f(x,u)] = (F_x(x))^{-1} \sum_{j=k+1}^{n} e_j \, \mu_{kj}(x,u) -$$
$$- \sum_{j=1}^{n} (F_x(x))^{-1} e_j (F_j(x))_x f_u(x,u) Z_0^k(x,u) =$$
$$= \sum_{j=k+1}^{n} \mu_{kj}(x,u) Z^j(x) - f_u(x,u) Z_0^k(x,u),$$

що збігається з (i). ■

7.2 Оптимальні за швидкодією керування для одного класу систем спеціального вигляду

У цьому підрозділі розглядається задача швидкодії для одного класу систем спеціального вигляду. Отриманий опис множини можливих оптимальних керувань. Наведено конкретний приклад повного аналітичного розв'язання задачі швидкодії для одної суттєво нелінійної тривимірної системи. Результати опубліковано в роботах [142, 84].

7.2.1 Загальний вигляд оптимальних керувань

Розглянемо задачу швидкодії для нелінійних керованих систем вигляду

$$\dot{x}_1 = u, \quad \dot{x}_i = P_i(x_1), \; i = 2, \ldots, n, \quad P_2(0) = \cdots = P_n(0) = 0, \qquad (7.29)$$

$$|u(t)| \le 1, \; t \in [0, \theta], \qquad x(0) = x^0, \qquad x(\theta) = 0, \qquad \theta \to \min, \qquad (7.30)$$

де $P_2(z), \ldots, P_n(z)$ — дійсно-аналітичні функції в околі нуля в $\mathbb{R}$.

Зафіксуємо початкову точку $x^0 \ne 0$ з околу нуля і припустимо, що $\widehat{\theta} > 0$ — оптимальний час і $\widehat{u}(t)$, $t \in [0, \widehat{\theta}]$ — оптимальне керування у задачі (7.29), (7.30); нехай $\widehat{x}(t) = (\widehat{x}_1(t), \ldots, \widehat{x}_n(t))$ — відповідна оптимальна траєкторія і $\widehat{x}_1(t) \in [-\alpha, \alpha]$, $t \in [0, \widehat{\theta}]$. Застосуємо принцип максимуму Понтрягіна:

введемо $H = \psi_1 u + \sum_{i=2}^n \psi_i P_i(x_1)$ і розглянемо спряжену систему

$$\dot{\psi}_1 = -\sum_{i=2}^{n} \psi_i P_i'(\widehat{x}_1(t)),\ \dot{\psi}_2 = 0, \quad \ldots, \quad \dot{\psi}_n = 0, \tag{7.31}$$

з якої випливає, що $\psi_2(t), \ldots, \psi_n(t)$ є сталими, $\psi_k(t) = \psi_k$, $k = 2, \ldots, n$. За принципом максимуму, існує $\psi_0 \leq 0$ і нетривіальний розв'язок системи (7.31), для яких

$$\widehat{u}(t) = \mathrm{sign}(\psi_1(t)) \text{ a. e. for all } t \text{ such that } \psi_1(t) \neq 0, \tag{7.32}$$

$$\psi_0 + \psi_1(t)\widehat{u}(t) + \sum_{i=2}^{n} \psi_i P_i(\widehat{x}_1(t)) = 0, \quad t \in [0, \widehat{\theta}]. \tag{7.33}$$

Оскільки $\psi(t) = (\psi_1(t), \psi_2, \ldots, \psi_n)$ не дорівнює нулю, маємо

$$(\psi_1(t))^2 + \psi_2^2 + \ldots + \psi_n^2 > 0, \quad t \in [0, \widehat{\theta}], \tag{7.34}$$

а отже, з (7.32), (7.33) отримуємо

$$\psi_0^2 + \psi_2^2 + \ldots + \psi_n^2 > 0. \tag{7.35}$$

Розглянемо функцію

$$P(z) = -\psi_0 - \sum_{i=2}^{n} \psi_i P_i(z), \quad z \in [-\alpha, \alpha]; \tag{7.36}$$

зауважимо, що коефіцієнти $\psi_0, \psi_2, \ldots, \psi_n$ визначаються не тільки за початковою точкою x^0, але і за оптимальним керуванням $\widehat{u}(t)$.

Отже, з (7.32), (7.33) випливає, що

$$|\psi_1(t)| = P(\widehat{x}_1(t)), \quad t \in [0, \widehat{\theta}]. \tag{7.37}$$

Оскільки $P_2(z), \ldots, P_n(z)$ лінійно незалежні і $P_2(0) = \cdots = P_n(0) = 0$, з нерівності (7.35) отримуємо, що $P(z)$ не є тотожним нулем. Зазначимо, що $\widehat{x}_1(t)$ належить зв'язній компоненті множини $\{z : P(z) \geq 0\}$, що містить точку $z = 0$.

Припустимо, що існує таке $\bar{t} \in [0, \widehat{\theta}]$, для якого $\psi_1(\bar{t}) = 0$, тоді з (7.34) маємо

$$\psi_2^2 + \ldots + \psi_n^2 > 0.$$

У цьому випадку $P(z)$ не є тотожною константою, тобто її похідна $P'(z)$ не є тотожним нулем.

Відзначимо майже очевидну властивість оптимального керування: якщо $\psi_1(t) \equiv 0$ на деякому відрізку $t \in [t_1, t_2]$, де $0 \le t_1 < t_2 \le \widehat{\theta}$, то $\widehat{u}(t) = 0$ при $t \in [t_1, t_2]$. Справді, з (7.37) випливає, що $\widehat{x}_1(t)$ — корінь функції $P(z)$ для довільного $t \in [t_1, t_2]$. Оскільки $\widehat{x}_1(t)$ неперервна, вона тотожно дорівнює одному з цих коренів при $t \in [t_1, t_2]$, тобто $\widehat{x}_1(t) \equiv const$, звідки $\widehat{u}(t) = \dot{\widehat{x}}_1(t) \equiv 0$ при $t \in [t_1, t_2]$.

Лема 7.2. *Нехай $\psi_1(\bar{t}) = 0$, де $\bar{t} \in [0, \widehat{\theta}]$. Тоді існує $\varepsilon > 0$, для якого $\operatorname{sign}(\psi_1(t)) = const$ при всіх $t \in (\bar{t} - \varepsilon, \bar{t})$ (якщо $\bar{t} > 0$) і при всіх $t \in (\bar{t}, \bar{t} + \varepsilon)$ (якщо $\bar{t} < \widehat{\theta}$).*

Доведення. Припустимо супротивне: наприклад, нехай для довільного $\varepsilon > 0$ функція $\psi_1(t)$ змінює знак на $(\bar{t}, \bar{t} + \varepsilon)$, тобто для довільного $\varepsilon > 0$ існують точки $t_1, t_2 \in (\bar{t}, \bar{t} + \varepsilon)$, для яких $\psi(t_1) = 0$ і $\psi(t_2) \neq 0$. Тоді існують такі послідовності $t'_k \to +\bar{t}$ і $t''_k \to +\bar{t}$, що $t'_k < t''_k$, $\psi_1(t'_k) = \psi_1(t''_k) = 0$, але $\psi_1(t) \neq 0$ при $t \in (t'_k, t''_k)$, $k \ge 1$.

Оскільки $\psi_1(t) \neq 0$ при $t \in (t'_k, t''_k)$, отримуємо, що $|\dot{\widehat{x}}_1(t)| = |\widehat{u}(t)| = 1$ при $t \in (t'_k, t''_k)$, а отже, $|\widehat{x}_1(t'_k) - \widehat{x}_1(t''_k)| = t''_k - t'_k$, тобто $\widehat{x}_1(t'_k)$ і $\widehat{x}_1(t''_k)$ — *різні* точки, і відстань між парами точок $\widehat{x}_1(t'_k)$ і $\widehat{x}_1(t''_k)$ прямує до нуля при $k \to \infty$. А оскільки $\psi_1(t'_k) = \psi_1(t''_k) = 0$, то $\widehat{x}_1(t'_k)$ і $\widehat{x}_1(t''_k)$ — різні корені функції $P_1(z)$, що суперечить її аналітичності. ∎

З леми 7.2 випливає, що функція $\psi_1(t)$ має скінченну кількість коренів на відрізку $[0, \widehat{\theta}]$, причому

$$\widehat{u}(t) = \operatorname{sign}(\psi_1(t)), \quad t \in [0, \widehat{\theta}] \text{ м. в.,} \tag{7.38}$$

де вважається що $\operatorname{sign}(0) = 0$. Отже, отримуємо такий результат.

Теорема 7.6. *Оптимальне керування $\widehat{u}(t)$, $t \in [0, \widehat{\theta}]$ у задачі швидкодії (7.29), (7.30) є кусково-сталим, набуває значень -1, 0, $+1$ і має скінченну кількість перемикань.*

Нехай $0 < t_1 < \cdots < t_N < \widehat{\theta}$ — точки перемикань $\widehat{u}(t)$ (з одного зі значень $-1, 0, +1$ на якесь інше). Як показано вище, $\widehat{x}_1(t_i)$ — корені функції $P(z)$. Припустимо, що $\widehat{u}(t) \equiv 0$ при $t \in (t_i, t_{i+1})$, тоді $\widehat{x}_1(t) \equiv \widehat{x}_1(t_i)$ при $t \in [t_i, t_{i+1}]$. З (7.38) випливає, що $\psi_1(t) \equiv 0$, а тоді (7.31) означає, що $\dot{\psi}_1(t) = -P'(\widehat{x}_1(t)) \equiv 0$, тобто $\widehat{x}_1(t_i)$ — корінь функції $P'(z)$. Це означає, що $\widehat{x}_1(t_i)$ — кратний корінь функції $P(z)$.

Іншими словами, оптимальне керування $\widehat{u}(t)$ і перша компонента оптимальної траєкторії $\widehat{x}_1(t)$ пов'язані таким чином: керування має перемикання у такі моменти часу t_i, для яких $\widehat{x}_1(t_i)$ є коренем функції $P(z)$; оптимальне керування перемикається на значення 0 тільки у такі моменти часу t_i, для яких $\widehat{x}_1(t_i)$ є кратним коренем функції $P(z)$ (тоді $\widehat{x}_1(t)$ є сталою на інтервалі (t_i, t_{i+1})).

Тепер обговоримо можливу кількість перемикань.

Нагадаємо, що $\widehat{x}_1(t)$ — неперервна кусково-лінійна функція. Припустимо, що існують три моменти часу $0 < t_1 < t_1 + \delta_1 < t_1 + \delta_1 + \delta_2 < \widehat{\theta}$, які *не є точками перемикання* оптимального керування $\widehat{u}(t)$, але для яких $\widehat{x}_1(t_1) = \widehat{x}_1(t_1 + \delta_1) = \widehat{x}_1(t_1 + \delta_1 + \delta_2)$. Розглянемо тоді таке керування:

$$\widetilde{u}(t) = \begin{cases} \widehat{u}(t), & t \in [0, t_1), \\ \widehat{u}(t + \delta_1), & t \in [t_1, t_1 + \delta_2), \\ \widehat{u}(t - \delta_2), & t \in [t_1 + \delta_2, t_1 + \delta_1 + \delta_2), \\ \widehat{u}(t), & t \in [t_1 + \delta_1 + \delta_2, \widehat{\theta}], \end{cases} \tag{7.39}$$

і нехай $\widetilde{x}_1(t)$ — відповідна траєкторія. З вигляду системи (7.29) випливає, що керування $\widetilde{u}(t)$ переводить точку x^0 в 0 за той самий час, що і керування $\widehat{u}(t)$, тобто воно теж є оптимальним. Це означає, що $\widetilde{x}_1(t_1)$ — (простий) корінь функції $P(z)$. Оскільки три вказані моменти часу не є точками перемикання керування $\widehat{u}(t)$, то в околі кожної з них $\widehat{x}_1(t)$ росте або спадає з однаковою швидкістю 1, тобто для деякого $\varepsilon > 0$ для всіх $\tau_1 \in (t_1 - \varepsilon, t_1 - \varepsilon)$ керування, побудоване за формулою (7.39) (з τ_1 замість t_1) теж оптимальне. Зауважимо, що за побудовою $\widetilde{x}_1(\tau_1) = \widehat{x}_1(\tau_1)$; це означає, що нескінченна кількість *різних* $\widehat{x}_1(\tau_1)$ є коренями функції $P(z)$, що неможливе.

Аналогічне міркування можливе і для випадку $t_1 = 0$, $t_1 + \delta_1 + \delta_2 < \widehat{\theta}$, і для випадку $t_1 > 0$, $t_1 + \delta_1 + \delta_2 = \widehat{\theta}$. Отже, якщо деяке керування переводить точку x^0 до нуля вздовж траєкторії $x(t)$, причому $x_1(t)$ набуває якогось значення хоча б тричі (за виключенням випадку, коли $x_1(t) = x_1^0 = 0$), то таке керування не є оптимальним. У вказаному окремому випадку, коли $x_1(t) = x_1^0 = 0$, значення 0 може набуватися тричі.

Крім того, розглядаючи перетворення керувань вигляду (7.39), для будь-якого оптимального керування, можна побудувати таке оптимальне керування, для якого проміжки, де $\widehat{x}_1(t) = const$, лежать між точками екстремумів $\widehat{x}_1(t)$ (причому $\widehat{x}_1(t)$ має не більше одного максимуму і одного мінімуму).

Описані властивості дозволяють обмежити кількість перемикань оптимальних керувань і уточнити їх вигляд.

Зауважимо, що у випадку загальної системи оптимальне керування може бути досить складним: наприклад, може мати нескінченну кількість перемикань, що було виявлено А. Фулером [74]; відповідні приклади детально вивчені у роботах [11, 111, 122].

Однорідні системи (7.29), які є однорідними апроксимаціями, мають вигляд

$$\dot{x}_1 = u, \ \dot{x}_i = x_1^{r_i}, \ i = 2, \dots, n, \tag{7.40}$$

де $1 \le r_2 < \dots < r_n$ — цілі числа. Неважко показати, що система (2.25) має однорідну апроксимацію (7.40) тоді і тільки тоді, коли

(i) $\mathrm{Lin}\{b(0,0)\} + \mathrm{Lin}\{\mathrm{ad}_{R_b}^k R_a E(x)|_{t=0,x=0}\}_{k=1}^{\infty} = \mathbb{R}^n$,

(ii) $[\mathrm{ad}_{R_a}^{m_1} R_b, \cdots [\mathrm{ad}_{R_a}^{m_{j-1}} R_b, \mathrm{ad}_{R_a}^{m_j} R_b]] E(x)|_{t=0,x=0} \in$
$\in \mathrm{Lin}\{b(0,0)\} + \mathrm{Lin}\{\mathrm{ad}_{R_b}^k R_a E(x)|_{t=0,x=0}\}_{k=1}^{m-2}$,

де $m_1 + \dots + m_j + j = m$, для будь-яких $j \ge 2$, $m_1 + \dots + m_j \ge 2$. Вказані умови нагадують умови теореми 1.2, тому в роботі [142] системи (7.29) названі «спряженими до лінійних».

Для деяких тривимірних нелінійних систем певний опис оптимальних за швидкодією керувань був одержаний у роботах [54, 55, 121], але вичерпного розв'язку отримано не було. Для системи

$$\dot{x}_1 = u, \ \dot{x}_2 = x_1, \ \dot{x}_3 = x_1^2$$

у роботі [129] задача оптимальної швидкодії була розв'язана без використання зазначених вище результатів, але цей аналіз виявився досить громіздким. У наступному підпункті отриманий явний опис оптимальних за швидкодією керувань для іншої, більш складної тривимірної системи.

7.2.2 Приклад

Розглянемо задачу швидкодії для системи

$$\dot{x}_1 = u, \ \dot{x}_2 = x_1, \ \dot{x}_3 = x_1^3. \tag{7.41}$$

Функція (7.36) має вигляд $P(z) = -\psi_0 - \psi_2 z - \psi_3 z^3$, отже, вона має не більше трьох простих коренів або не більше одного кратного і одного простого кореня. Крім того, якщо z_1, z_2, z_3 — її корені (можливо, кратні), то $z_1 + z_2 + z_3 = 0$.

На рис. 7.1 показані чотири можливі типи $P(z)$, для яких оптимальні керування можуть мати щонайменше два перемикання (керування з одним перемиканням або без перемикань є оптимальними, але їх можна вважати частковими випадками і не розглядати окремо).

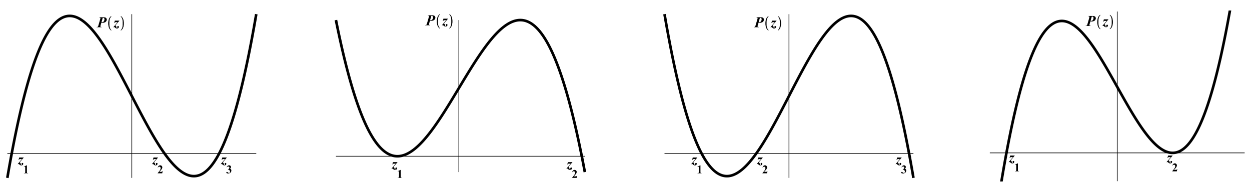

Рис. 7.1 — Чотири можливі типи функції $F(z)$

Нехай $x_1^0 > 0$ (завдяки симетрії випадок $x_1^0 < 0$ повністю аналогічний). Неважко побачити, що керування з принаймні двома перемиканнями, сумісні з вимогами, вказаними вище, розбиваються на 8 видів, наведених на рис. 7.2. (Якщо керування задається чотирма параметрами, між ними виникає зв'язок.)

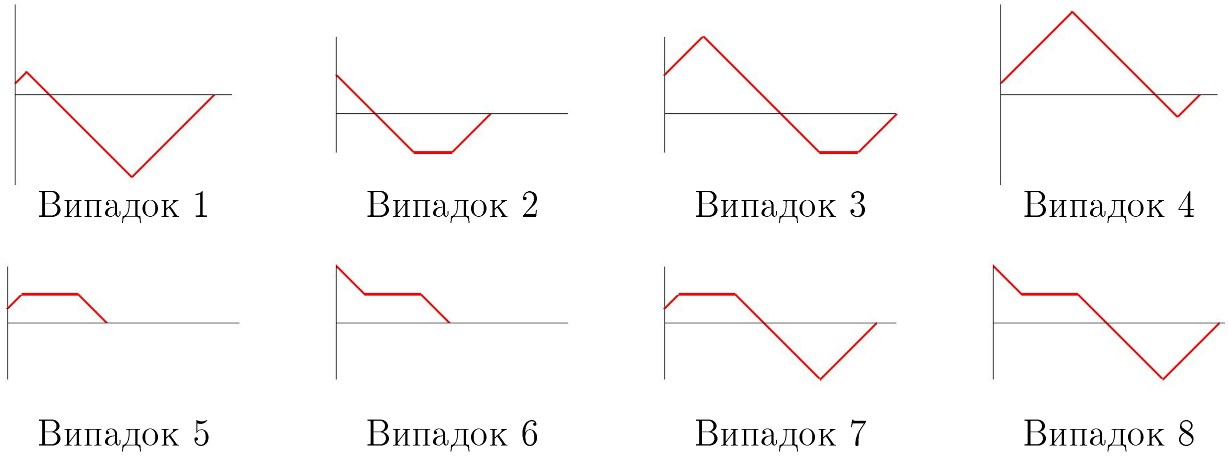

Рис. 7.2 — Можливі види $\widehat{x}_1(t)$

Виявляється, що для знаходження області точок, для яких те чи інше керування припустиме, достатньо розв'язувати лінійні або квадратні рівняння. Деякі з указаних областей перетинаються (по дві), і на їх перетині два керування, сумісних з вимогами, є припустимими. Але можна показати, що обидва вони є оптимальними лише на деяких поверхнях.

Детальне дослідження наведене у роботі [84]. На рис. 7.3 і 7.4 наведений остаточний вигляд областей, у яких керування з рис. 7.2 є оптимальними: на рис. 7.3 показаний перетин цих областей з площиною $x_1 = 1$, а на рис. 7.4 — з площиною $x_1 = 0$. Зазначимо, що завдяки однорідності і симетричності для отримання відповідного перетину при довільному $x_1 > 0$ рис. 7.3 треба розтягнути у x_1^2 разів у горизонтальному напрямку і у x_1^4 разів у вертикальному, а при довільному $x_1 < 0$ — віддзеркалити відносно початку координат.

Можна показати, що в об'єднанні областей, що відповідають випадкам 1,2,7,8, а також в об'єднанні областей, що відповідають випадкам 3,4,5,6, оптимальне керування для будь-якої точки єдине. Отже, з теореми 5.3 і наслідку 5.5 випливає, що у кожному з цих об'єднань система (7.41) у сенсі швидкодії наближає будь-яку систему

$$\dot{x}_1 = u, \ \dot{x}_2 = x_1 + p_2(x_1), \ \dot{x}_3 = x_1^3 + p_3(x_1), \tag{7.42}$$

де p_2 — поліном степеня не нижче 2, а де p_3 — поліном степеня не нижче 4. Тобто оптимальні керування для системи (7.42) можуть мати багато пере-

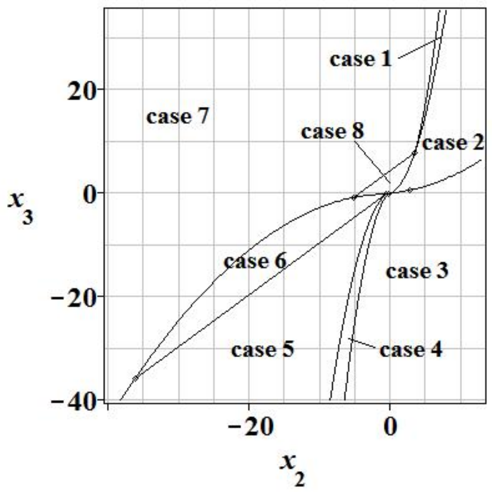

Рис. 7.3 — Оптимальні керування на площині $x_1 = 1$

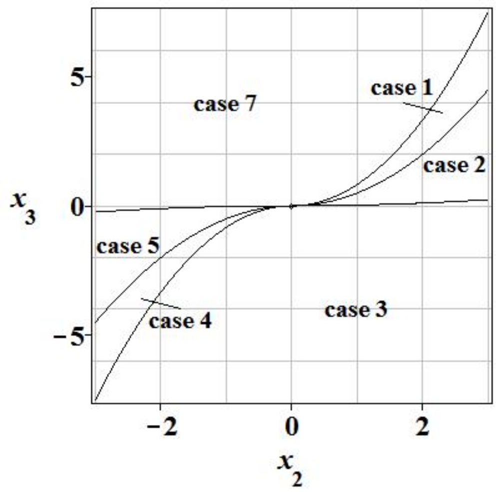

Рис. 7.4 — Оптимальні керування на площині $x_1 = 0$

микань, але при $x^0 \to 0$ вони наближаються (у сенсі (5.18)) керуваннями одного зі вказаних вище 8 видів.

Наведемо приклад конкретної точки, для якої існують два оптимальних керування. Нехай $x_1^0 = 1$, $x_2^0 = -8$.

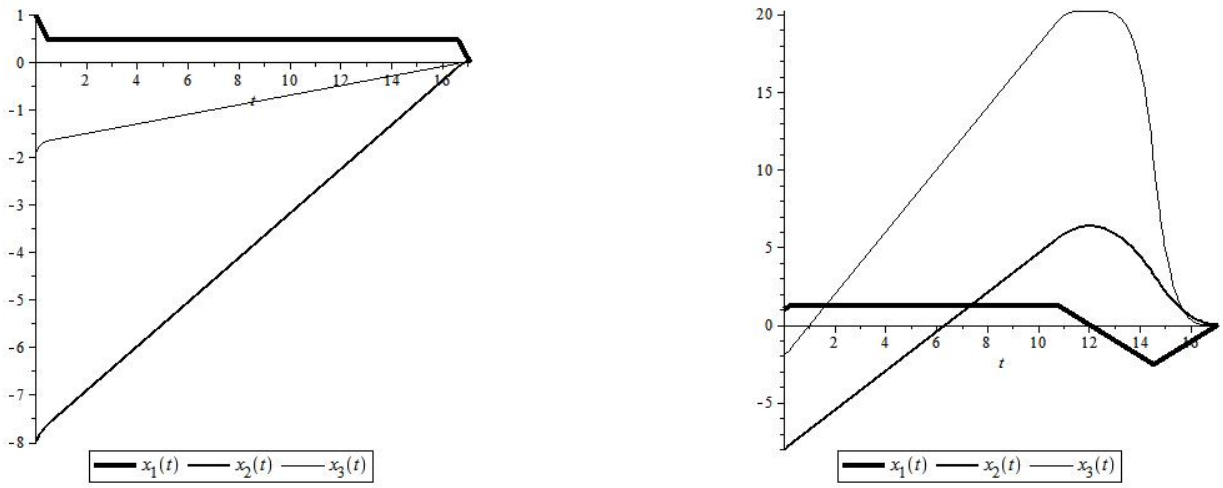

Рис. 7.5 — Дві оптимальні траєкторії для точки $x^0 = (1, -8, -1.879)$

Як показано в роботі [84], для знаходження x_3^0 треба розв'язати рівняння

$$\sqrt{\frac{-375}{2+8z}} + \frac{2}{3} = \frac{34+\sqrt{271-72z}}{\sqrt{2(17+\sqrt{271-72z})}}$$

відносно z на проміжку $[-\frac{15}{4}, -\frac{1}{4})$ (де існує єдиний корінь). Отримуємо $x_3^0 \approx -1.879$. Компоненти траєкторій, що відповідають двом оптимальним керуванням, зображені на рис. 7.5. Оптимальний час дорівнює $\widehat{\theta} \approx 17.092$.

Висновки до розділу 7

У розділі 7 розглянуто задачу відображуваності керованих систем класу C^1 на лінійні системи і на системи одного спеціального класу (системи з прямим зв'язком).

Розв'язок задачі лінеаризовності добре відомий у класі C^∞. Для систем класу C^1 відправною точкою була теорема В. І. Коробова про відображуваність трикутних систем на лінійні. У розділі 7 отримані критерії лінеризовності з заміною керування для систем з багатовимірним керуванням, а також критерій відображуваності на системи з прямим зв'язком.

Крім того, розглянута задача швидкодії для одного спеціального класу нелінійних систем і отриманий повний опис усіх можливих оптимальних керувань.

Основні результати розділу опубліковані в роботах [143, 15, 142, 144, 84].

ВИСНОВКИ

У дисертації запропоновано і розвинуто методи аналізу нелінійних керованих систем, основані на зображенні системи у вигляді ряду елементів вільної алгебри і дослідженні структур у цій вільній алгебрі, які породжує система.

Детальніше, у розділі 2 розглянуто дві задачі: задачу Коші для нелінійних керованих систем, лінійних за керуванням, і задачу потрапляння в точку спокою для нелінійних керованих систем, афінних за керуванням. Для першої з цих задач розглянуте розвинення відображення в кінець траєкторії в ряд ітерованих інтегралів, а для другої — розвинення відображення до початку траєкторії в ряд нелінійних степеневих моментів (в обох випадках розглядаються дійсно-аналітичні системи). Коефіцієнти рядів є сталими векторами, які містять у собі всю інформацію щодо конкретної системи, а функціонали — ітеровані інтеграли або нелінійні степеневі моменти — не залежать від системи і утворюють вільну градуйовану асоціативну алгебру (ми позначаємо її $\mathcal{F}$ у випадку ітерованих інтегралів і $\mathcal{A}$ у випадку нелінійних степеневих моментів).

Одна з основних ідей напрямку, що розвивається, полягає в тому, щоб розглядати ці ряди замість систем, аналогічно тому, як ряд Тейлора розглядається замість дійсно-аналітичної функції. Зокрема, заміни змінних у системі зводяться до перетворення рядів, які відповідають операції тасуючого добутку у відповідній алгебрі, а градуювання визначається обмеженнями на керування. Коефіцієнти ряду породжують лінійне відображення з алгебри до $\mathbb{R}^n$, яке, у свою чергу, індукує певні структури в алгебрі. Зокрема, елементам вільної алгебри Лі $\mathcal{L}$ (в $\mathcal{F}$ або $\mathcal{A}$) відповідають значення дужок Лі у початковій або кінцевій точці.

У розділі 3 розглядається загальна алгебраїчна постановка задачі. А саме, розглядається абстрактна вільна асоціативна градуйована алгебра $\mathfrak{A}$, яка породжується скінченною або зчисленною множиною літер, і вивчаються ряди зі сталими векторними коефіцієнтами елементів з $\mathfrak{A}$, які задовольняють певні умови, що відповідають умовам реалізовності цих рядів як повністю неголономних керованих систем (без урахування вимоги дійсної аналітичності). Кожний такий ряд однозначно визначає лінійне відображення $g : \mathfrak{A} \to \mathbb{R}^n$. Центральними об'єктами дослідження є введена у дисертації ядерна підалгебра Лі $\mathfrak{L}_g$ і односторонній ідеал $\mathfrak{J}_g$, які породжуються відображенням g. Ядерна підалгебра Лі визначається лінійними залежностями між образами $g(\ell)$ елементів $\ell \in \mathfrak{L}$ вільної алгебри Лі, яка породжується тими самими літерами, що й $\mathfrak{A}$. Показано, що ядерні підалгебри Лі — це (всі) градуйовані підалгебри Лі в $\mathfrak{L}$ ковимірності n. Для вказаної абстрактної постановки сформульовано і розв'язано задачу однорідної апроксимації ряду; зокрема, показано, що два ряди мають одну й ту саму однорідну апроксимацію тоді і тільки тоді, коли їх ядерні підалгебри Лі збігаються.

У розділах 4 і 5 ці результати застосовуються до нелінійних керованих систем, лінійних і афінних за керуванням. Введено поняття ядерної підалгебри Лі і одностороннього ідеалу, які породжуються відповідною системою; вони визначаються лінійними залежностями дужок Лі векторних полів у початковій або кінцевій точці і є координатно незалежними. Показано, що саме ядерні підалгебри Лі відповідають за однорідну апроксимацію: дві системи мають одну й ту саму однорідну апроксимацію тоді і тільки тоді, коли їх ядерні підалгебри Лі збігаються. Таким чином, у роботі дане безкоординатне означення і отримана повна класифікація однорідних апроксимацій. Крім того, запропоновані методи побудови однорідних апроксимуючих систем і привілейованих координат (тобто координат, у яких однорідна апроксимуюча система наближає відображення в кінець або до початку траєкторії вихідної системи).

Зокрема, показано, що зображення однорідної апроксимації у вигляді ряду можна отримати без знаходження привілейованих координат, виходячи лише з вигляду ядерної підалгебри Лі, за допомогою ортопроектування в алгебрі $\mathcal{F}$ або $\mathcal{A}$ на ортогональне доповнення до одностороннього ідеалу, побудованого за ядерною підалгеброю Лі.

Одною з вихідних ідей розвитку методу рядів було дослідження задачі швидкодії до точки спокою для систем, афінних за керуванням; першим кроком є зведення такої задача швидкодії до нелінійної min-проблеми моментів Маркова: до відповідного ряду нелінійних степеневих моментів додаються обмеження на керування і умова оптимальності. Дві системи є еквівалентними у сенсі швидкодії, якщо (після заміни змінних в одній з них) їх розв'язки, тобто оптимальний час і оптимальне керування, стають асимптотично еквівалентними як функції початкової точки в околі точки спокою. У дисертації в розділах 4 і 5 досліджено зв'язок однорідної апроксимації і апроксимації у сенсі швидкодії для лінійних і афінних за керуванням систем. А саме, наведено умови, за яких однорідна апроксимація локально еквівалентна вихідний системі у сенсі швидкодії. Це дозволяє отримати оптимальні або майже оптимальні керування для нелінійної системи, розв'язуючи значно простішу задачу швидкодії для однорідної апроксимації. Розглянуто і зворотний зв'язок: наведено умови, за яких системи, що є локально еквівалентними у сенсі швидкодії, мають одну й ту саму однорідну апроксимацію. Зв'язок апроксимації у сенсі швидкодії і однорідної апроксимації досліджений і для систем, лінійних за керуванням.

Заміни керування в системі, на відміну від заміни координат, змінюють ядерну підалгебру Лі, але не змінюють вектор зросту системи. У розділі 6 для систем, лінійних за керуванням, досліджено класифікацію векторів зросту: запропоновані означення A-нормальності і A-простоти і отриманий опис A-нормальних і A-простих векторів зросту для систем з двома керуваннями.

У розділі 7 розглянуто задачі відображуваності для керованих систем у класі C^1. А саме, для нелінійних систем із класу C^1 з багатовимірним керуванням отримано критерій лінеаризовності за зворотним зв'язком, а також для систем з одновимірним керуванням отримано критерії відображуваності на системи спеціального вигляду — системи з прямим зв'язком. Також у розділі 7 для систем одного класу — спряжених до лінійних — отримано опис усіх можливих оптимальних за швидкодією керувань. Однорідні системи з розглянутого класу є однорідними апроксимаціями, отже, вони можуть бути використані для побудови оптимальних або майже оптимальних керувань для всіх систем з такою однорідною апроксимацією.

Загалом, у дисертації запропонований і систематично розвинутий підхід, що залучає метод рядів і вільних алгебр до аналізу таких задач нелінійної теорії керування як задача швидкодії, опис і класифікація однорідних апроксимацій, реалізовність і відновлення систем, нормалізація систем тощо.

Усі основні результати наведено з повними доведеннями. Отримані результати мають теоретичний характер. Запропоновані методи можуть бути застосовані для дослідження і розв’язання різноманітних задач оптимізації і оптимального керування.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

[1] Аграчев, А.А.: Некоторые вопросы субримановой геометрии. Успехи матем. наук **71** (6), 3–36 (2016)

[2] Аграчев, А.А., Гамкрелидзе, Р.В.: Экспоненциальное представление потоков и хронологическое исчисление. Матем. сб. **107(149)**, 467–532 (1978)

[3] Аграчев, А.А., Гамкрелидзе, Р.В.: Ряды Вольтерра и группы подстановок. Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Нов. достиж. **39**, 3–40 (1991)

[4] Аграчев, А.А., Сачков, Ю.Л.: Геометрическая теория управления. М., Физматлит (2005)

[5] Аграчев, А.А., Сарычев, А.В.: Фильтрации алгебры Ли векторных полей и нильпотентная аппроксимация управляемых систем. Доклады АН СССР **295**, 777–781 (1987)

[6] Алексеев, В.Б.: Теорема Абеля в задачах и решениях. М., МЦНМО (2001)

[7] Ахиезер, Н.И., Крейн, М.Г.: О некоторых вопросах теории моментов. ГОНТИ-НТВУ, Харьков (1938)

[8] Бархаев, П.Ю.: О классификации нелинейных систем с ограничениями на управление в окрестности точки покоя. Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина, Харьков (2005)

[9] Болтянский, В.Г., Гамкрелидзе, Р.В., Понтрягин, Л.С.: К теории оптимальных процессов. Доклады АН СССР **110**(1), 7–10 (1956)

[10] Зеленко, І.: *Усне повідомлення*, 2010.

[11] Зеликин, М.И., Борисов, В.Ф.: Режимы учащающихся переключений в задачах оптимального управления. Тр. МИАН СССР **197**, 85–166 (1991)

[12] Ігнатович, С.Ю.: Про асимптотичну поведінку розв'язку задачі швидкодії в околі точки спокою. Дис. ... канд. фіз.-мат. наук. Харківський державний університет, Харків (1995)

[13] Игнатович, С.Ю.: Восстановление управляемой системы, являющейся реализацией ряда нелинейных степенных моментов. Вісник Харківського національного університету, сер. «Матем., прикл. матем. і механіка» **645**, 41–52 (2004)

[14] Игнатович, С.Ю.: О связи аппроксимации нелинейных систем в смысле быстродействия и их алгебраической аппроксимации. Матем. физика, анализ, геометрия **12**(2), 158–172 (2005)

[15] Игнатович, С.Ю.: Об отображаемости нелинейных систем на feedforward системы в классе C^1. Вісник Харківського національного університету, сер. «Матем., прикл. матем. і механіка» **749**, 65–79 (2006)

[16] Игнатович, С.Ю.: Свободные алгебры в задаче однородной аппроксимации: как они возникают и как их можно использовать. In: Материалы Школы-конференции «Геометрическая теория управления и анализ на метрических структурах», сс. 16–19, Республіка Алтай, Росія, 25–30 липня 2014

[17] Игнатович, С.Ю., Бархаев, П.Ю.: Каноническая форма нелинейной управляемой системы и аппроксимирующие градуировки. Вісник Харківського національного університету, сер. «Матем., прикл. матем. і механіка» **602**, 68–76 (2003)

[18] Кавски, М.: Хронологические алгебры: комбинаторика и управление. Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. **64**, 144–178 (1999)

[19] Картье, П.: Теорема Пуанкаре-Биркгофа-Витта. В кн.: Семинар «Софус Ли». Теория алгебр Ли. Топология групп Ли. М., Изд. иностр. лит. (1962)

[20] Кон, П.: Универсальная алгебра. М., Мир (1968)

[21] Коробов, В.И.: О непрерывной зависимости решения задачи оптимального управления со свободным временем от начальных данных. Дифференц. уравнения **2**(6), 1120–1123 (1971)

[22] Коробов, В.И.: Управляемость, устойчивость некоторых нелинейных систем. Дифференц. уравнения **4**(4), 614–619 (1973)

[23] Коробов, В.И., Скляр, Г.М.: Оптимальное быстродействие и степенная проблема моментов. Матем. сб. **134**(2), 186–206 (1987)

[24] Коробов, В.И., Скляр, Г.М.: Точное решение одной n-мерной задачи быстродействия. Доклады АН СССР **298**(6), 1304–1308 (1988)

[25] Коробов, В.И., Скляр, Г.М.: Оптимальное быстродействие и тригонометрическая проблема моментов. Известия АН СССР, сер. Математика **53**(4), 868–885 (1989)

[26] Коробов, В.И., Скляр, Г.М.: Проблема моментов Маркова на минимально возможном отрезке. Доклады АН СССР **308**(3), 525–528 (1989)

[27] Коробов, В.И., Скляр, Г.М.: Min-проблема моментов Маркова и быстродействие. Сибирский матем. журнал **32**(1), 60–71 (1991)

[28] Коробов, В.И., Скляр, Г.М.: Метод порождающей функции в проблеме моментов с периодическими пропусками. Доклады АН СССР **318**(1), 32-35 (1991)

[29] Красовский, Н.Н.: К теории оптимального регулирования. Автомат. и телемех. **18**(11), 960–970 (1957)

[30] Красовский, Н.Н.: Теория управления движением. М., Наука (1968)

[31] Крейн, М.Г., Нудельман, А.А.: Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи: идеи и проблемы П.Л. Чебышева и А.А. Маркова и их дальнейшее развитие. М., Наука (1973)

[32] Понтрягин, Л.С., Болтянский, В.Г., Гамкрелидзе, Р.В., Мищенко, Е.Ф.: Математическая теория оптимальных процессов. М., Физматгиз (1961)

[33] Рашевский, П.К.: О соединимости любых двух точек неголономного пространства допустимой линией. Уч. зап. Моск. пед. ин-та им. Либкнехта. Сер. физ.-мат. наук **2**, 83–94 (1968)

[34] Скляр, Г.М., Игнатович, С.Ю.: Ряды нелинейных степенных моментов и быстродействие. Доклады РАН **365**(6), 742–744 (1999)

[35] Скляр, Г.М., Ігнатович, С.Ю.: Про класифікацію множин керованості нелінійних систем. Доповіді НАН України, сер. «Матем., прир. та техн. науки» № 6, 24–28 (2001)

[36] Скляр, Г.М., Игнатович, С.Ю., Бархаев, П.Ю.: Развитие метода моментов в нелинейной задаче быстродействия. In: Международная конференция «Обратные задачи и нелинейные уравнения», тезисы докладов, сс. 81–83, Харків, Україна, 12-16 серпня, 2002

[37] Скляр, Г.М., Ігнатович, С.Ю., Бархаєв, П.Ю.: Про асимптотичну класифікацію нелінійних керованих систем в околі точки спокою. Допо-

віді НАН України, сер. «Матем., прир. та техн. науки» № 12, 28–34 (2004)

[38] Скляр, Е.В.: Отображение нелинейных управляемых систем на линейные. Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Физико-технический институт низких температур им. Б. И. Веркина, Харьков (2002)

[39] Третьяк, А.И.: О необходимых условиях оптимальности нечетного порядка в задаче быстродействия для систем, линейных по управлению. Матем. сб. 181(5), 625–641 (1990)

[40] Филиппов, А.Ф.: О некоторых вопросах теории оптимального регулирования. Вестник МГУ, Матем. и мех. **2**, 25–32 (1959)

[41] Филиппов, А.Ф.: Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М., Наука (1985)

[42] Хартман, Ф.: Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., Мир (1970)

[43] Ширшов, А.И.: Подалгебры свободных лиевых алгебр. Матем. сб. **33**(75), 441–452 (1953)

[44] Agrachev, A.A., Gamkrelidze, R.V.: The shuffle product and symmetric groups. In: Elworthy, K.D., Everitt, W.N., Lee, E.B. (eds.) Differential Equations: Dynamical Systems, and Control Science: Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics Series, vol. 152, pp. 365–382. CRC Press (1993)

[45] Agrachev, A.A., Gamkrelidze, R.V., Sarychev, A.V.: Local invariants of smooth control systems. Acta Appl. Math. **14**, 191–237 (1989)

[46] Agrachev, A.A., Marigo, A.: Nonholonomic tangent spaces: intrinsic constructions and rigid dimensions. Electr. Res. Ann. Amer. Math. Soc. **9** 111–120 (2003) (electronic)

[47] Agrachev, A.A., Marigo, A.: Rigid Carnot algebras: Classification. J. Dynam. Control Syst. **11**, 449–494 (2005)

[48] Angeli, D., Chitour, Y., Marconi, L.: New results on robust stabilization via saturated feedback. In: Proceedings of the 42nd IEEE Conference on Decision and Control, vol. 6, pp. 4445–4450 (2003)

[49] Arcak, M., Teel, A., Kokotović, P.: Robust nonlinear control of feedforward systems with unmodeled dynamics. Automatica **37** (2), 265–272 (2001)

[50] Bellaïche, A.: The tangent space in sub-Riemannian geometry. In: Sub-Riemannian geometry. Progr. Math. **144**, 1–78 (1996)

[51] Bellaïche, A., Jean, F., Risler J.-J.: Geometry of Nonholonomic Systems. In: Laumond, J.-P. (ed.) Robot Motion Planning and Control. Lecture Notes in Control and Information Sciences, vol. 229, pp. 55–91. Springer (1998)

[52] Bernuau, E., Efimov, D., Perruquetti, W., Polyakov, A.: On homogeneity and its application in sliding mode control. J. of the Franklin Institute **351**(4), 1866–1901 (2014)

[53] Bianchini, R.M., Stefani, G.: Graded approximation and controllability along a trajectory. SIAM J. Control Optim. **28**, 903–924 (1990)

[54] Bonnard, B.: On singular extremals in the time minimal control problem in R^3. SIAM J. Control Optim. **23**, 794–802 (1985)

[55] Bressan, A.: The generic local time-optimal stabilizing controls in dimension 3, SIAM J. Control Optim. **24**, 177–190 (1986)

[56] Brockett, R.: Volterra series and geometric control theory. Automatica **12**, 167–176 (1976)

[57] Brockett, R.: The early days of geometric nonlinear control. Automatica **50**, 2203–2224 (2014)

[58] Brunovský, P.: A classification of linear controllable systems. Kybernetika (Prague) **6**, 173–188 (1970)

[59] Chen, K.T.: Integration of paths a faithful representation of parths by noncommutative formal power series. Trans. Am. Math. Soc. **89**, 395–407 (1958)

[60] Chitour Y., Jean F., Long R.: A global steering method for nonholonomic systems. J. of Differential Equations **254**, 1903–1956 (2013)

[61] Chow, W.L.: Über Systeme von linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. Math. Ann. **117**, 98–105 (1939)

[62] Crouch, P.E.: Solvable approximations to control systems. SIAM J. Control Optimiz. **22**, 40–54 (1984)

[63] Crouch, P.E., Lamnabhi-Lagarrigue, F.: Algebraic and multiple integral identities. Acta Appl. Math. **15**, 235–274 (1989)

[64] Duchamp, G.: Orthogonal projection onto the free Lie algebra. Theor. Comput. Sci. **79**, 227–239 (1991)

[65] Duffaut Espinosa, L.A., Gray, W.S.: Functional series expansions for continuous-time switched systems. J. Dynamical and Control Systems **21**(2), 211–237 (2015)

[66] Eilenberg, S., Mac Lane, S.: On the groups $H(\Pi, n)$, I. The Annals of Mathematics, Second Series **58**(1) 55–106 (1953)

[67] Fliess, M.: Un outil algebrique: les séries formelles non commutatives. In: Marchesini, G., Mitter, S.K. (eds.) Mathematical Systems Theory, Lecture Notes in Economics Mathematical Systems, vol. 131, pp. 122–148. Berlin: Springer-Verlag (1976)

[68] Fliess, M.: Développements fonctionnels en indéterminées non commutatives des solutions d'équations différentielles non linéaires forcées. C. R. Acad. Sci. Paris Ser. A-B **287**, 1133–1135 (1978)

[69] Fliess, M.: Realizations of nonlinear systems and abstract transitive Lie algebras. Bull. Amer. Math. Soc. **2**(3), 444–446 (1980)

[70] Fliess, M.: Fonctionnelles causales non linéaires et indéterminées non commutatives. Bull. Soc. math. France **109**, 3–40 (1981)

[71] Fliess, M.: Réalization locale des systèmes non linéaires, algèbres de Lie filtrées transitives et séries génératrices non commutatives. Invent. Math. **71**, 521–537 (1983)

[72] Fliess, M., Lamnabhi, M., Lamnabhi-Lagarrigue, F.: An algebraic approach to nonlinear functional expansions. IEEE Trans. Circuits and Systems **30** (8), 554–570 (1983)

[73] Foissy, L.: The Hopf algebra of Fliess operators and its dual pre-Lie algebra. Communications in Algebra **43**(10), 4528–4552 (2015)

[74] Fuller, A.T.: Relay control system optimized various perfomance criteria automation and remote control. In: Proceedings of the 1st IFAC World Congress, Moscow, Russia, vol. 1, pp. 510–519 (1960)

[75] Gehrig E., Kawski, M.: A Hopf-algebraic formula for compositions of noncommuting flows. In: Proc. 47th IEEE Conference on Decision and Control, pp. 1569–1574 (2008)

[76] Gilbert, E.G.: Functional expansions for the response of nonlinear differential systems. IEEE Trans. Automatic Control **AC-22**(6), 909–921 (1977)

[77] Goebel, R., Teel, A.R.: Preasymptotic sability and homogeneous approximations of hybrid dynamical systems. SIAM Rev. **52**(1), 87–109 (2010)

[78] Gray, W.S., Ebrahimi-Fard, K.: SISO output affine feedback transformation group and its Faa di Bruno Hopf algebra. SIAM J. Control Optimiz. **55**, 885–912 (2017)

[79] Hermes, H.: Nilpotent approximations of control systems and distributions. SIAM J. Control Optimiz. **24**, 731–736 (1986)

[80] Hermes, H.: Nilpotent and high-order approximations of vector field systems. SIAM Rev. **33**, 238–264 (1991)

[81] Hunt, L.R., Su, R., Meyer, G.: Design for multi-input nonlinear systems. In: Brockett, R.W., Millman, R.S., Sussman, H.J. (eds.) Differential Geometric Control Theory Conference (Houghton, Mich., 1982). Progr. Math., vol. 27, pp. 268–298. Birkhäuser, Boston, Mass. (1983)

[82] Ignatovich, S.Yu.: Realizable growth vectors of affine control systems. J. Dyn. Control Syst. **15**, 557–585 (2009)

[83] Ignatovich, S.Yu.: Normalization of homogeneous approximations of symmetric affine control systems with two controls. J. Dyn. Control Syst. **17**, 1–48 (2011)

[84] Ignatovich, S.Yu.: Explicit solution of the time-optimal control problem for one nonlinear three-dimensional system. Вісник Харківського національного університету ім. В. Н. Каразіна, сер. «Матем., прикл. матем. і механіка» **83**, 21–46 (2016)

[85] Ignatovich, S.Yu.: Approximation of autonomous affine control systems in the sense of time optimality and algebraic approximation. Вісник Харківського національного університету ім. В. Н. Каразіна, сер. «Матем., прикл. матем. і механіка» **84**, 9–21 (2016)

[86] Ignatovich, S.Yu.: Normalization of homogeneous approximations under feedbacks. In: Book of abstracts of the International Conference «Differential Equations and Control Theory» dedicated to the 75-th anni-

versary of professor Korobov V.I., p. 11, Kharkiv, Ukraine, 26-28 September 2016

[87] Isidori, A.: Nonlinear control systems: an introduction. Lecture Notes in Control and Information Sciences, vol. 72. Springer-Verlag, Berlin (1985)

[88] Jakubczyk, B.: Local realizations of nonlinear causal operators. SIAM J. Control Optim. **24**, 230–242 (1986)

[89] Jakubczyk, B.: Realization theory for nonlinear systems; three approaches. In: Fliess, M., Hazewinkel, M. (eds.) Algebraic and Geometric Methods in Nonlinear Control Theory, MAIA, vol. 29, pp. 3-–31. Reidel, Dordrecht (1986).

[90] Jakubczyk, B.: Convergence of power series along vector fields and their commutators; a Cartan-Kähler type theorem. Ann. Polon. Math. **LXXIV**, 117—131 (2000)

[91] Jakubczyk, B., Respondek, W.: On linearization of control systems. Bull. Acad. Sci. Polonaise Ser. Sci. Math. **28**, 517–522 (1980)

[92] Jean, F.: Uniform estimation of sub-Riemannian balls. J. Dynamical and Control Systems **7**(4), 473–500 (2001)

[93] Jurdjevic, V.: Geometric control theory. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 52. Cambridge University Press, Cambridge (1997)

[94] Kalman, R.: On the general theory of control systems. IRE Transactions on Automatic Control **4**(3), 481–492 (1959)

[95] Kang, S.-J., Kim, M.-H.: Dimension formula for graded Lie algebras and its applications. Trans. Amer. Math. Soc. **351**, 4281–4336 (1999)

[96] Kawski, M.: Nonlinear control and combinatorics of words. In: Jakubczyk, B., Respondek, W. (eds.) Geometry of feedback abd optimal control.

Monogr. Textbooks Pure Appl. Math., vol. 207, pp. 305–346. Dekker, N.Y. (1998)

[97] Kawski, M.: The combinatorics of nonlinear controllability and noncommuting flows. In: Abdus Salam ICTP Lecture Notes Series, vol. 8, pp. 223–312 (2002)

[98] Kawski, M.: Control interpretations of products in the Hopf algebra, In: Proc. 48th IEEE Conference on Decision and Control, pp. 7503–7508 (2009)

[99] Kawski, M.: Combinatorial algebra in controllability and optimal control. Preprint. `https://math.la.asu.edu/~kawski/` (2013)

[100] Kawski, M., Sussmann, H.: Noncommutative power series and formal Lie-algebraic techniques in nonlinear control theory. In: Helmke, U., Prätzel-Wolters, D., Zerz E. (eds.) Operators, Systems, and Linear Algebra, pp. 111—128. European Consortium for Mathematics in Industry, Teubner (1997)

[101] Korobov, V.I., Sklyar, G.M.: Markov power min-moment problem with periodic gaps. J. Math. Sci. **80**(1), 1559–1581 (1996)

[102] Korobov, V.I., Bugaevskaya, A.N.: The solution of one time-optimal problem on the basis of the Markov moment min-problem with even gaps. Mat. Fiz. Anal. Geom. **10**, 505-523 (2003)

[103] Korobov, V. I., Sklyar, G. M., Ignatovich, S. Yu.: Solving of the polynomial systems arising in the linear time-optimal control problem. Commun. Math. Anal., Conf. 3, 153–171 (2011)

[104] Krener, A.: On the equivalence of control systems and the linearization of nonlinear systems. SIAM J. Control **11**, 670–676 (1973)

[105] Krstic M.: Feedback linearizability and explicit integrator forwarding controllers for classes of feedforward systems. IEEE Trans. on Automatic Control **49**(10), 1668–1682 (2004)

[106] Lazard, M.: Groupes, anneaux de Lie et problème de Burnside. Technical report, Inst. Mat. dell. Universita Roma (1960)

[107] Lesiak, C., Krener, A.: The existence and uniqueness of Volterra series for nonlinear systems. IEEE Trans. Automat. Control **23**(6), 1090–1095 (1978)

[108] Liu, W. S., Sussmann, H.J.: Shortest paths for sub-Riemannian metrics of rank two distributions. Memoirs AMS, **118**(564) (1995)

[109] Lobry, C.: Dynamical polysystems and control theory. Geometric methods in system theory. Proceedings of the NATO Advanced study institute, Dordrecht-Boston, D. Reidel Publ. Comp. (1973); Перевод: Лобри К. Динамические полисистемы и теория управления. Новое в зарубежной науке: Математика **14** Математические методы в теории систем, 134–173. М., Мир (1979)

[110] Lothaire, M.: Combinatorics on words. Addison-Wesley, Reading, Mass (1983)

[111] Marchal, C.: Chattering arcs and chattering controls. J. Optimization Theory Appl. **11**, 441–468 (1973)

[112] Marigo, A.: Classification of Carnot algebras: the semi-rigid cases. J. Dyn. Control Syst. **13**(1), 95-119 (2007)

[113] Markov, A.A. Nouvelles applications des fractions continues. Math. Ann. **47**, 579–597 (1896)

[114] Melançon, G., Reutenauer, C.: Lyndon words, free algebras and shuffles. Canad. J. Math. **XLI**, 577–591 (1989)

[115] Ménard, T., Moulay, E., Perruquetti, W.: Homogeneous approximations and local observer design. ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations **19**(3), 906–929 (2013)

[116] Nagano, T.: Linear differential systems with singularities and an application to transitive Lie algebras. J. Math. Soc. Japan **18**(4), 398–404 (1966)

[117] Nijmeijer, H., van der Schaft, A.: Nonlinear dynamical control systems. Springer-Verlag, New York (1990)

[118] Ree, R.: Lie elements and an algebra assotiated with shuffles. Annals of Math. **68** (2), 210–220 (1958)

[119] Respondek, W.: Linearization, feedback and Lie brackets. In: Jakubczyk, B., Respondek, W., Tchon (eds.) Geometric theory of nonlinear control systems, pp. 131–166. Scientific papers of the Institute of Technical Cybernetics of the Technical University of Wroclaw, vol. 70 (1985)

[120] Reutenauer, C.: Free Lie Algebras. Clarendon Press, Oxford (1993)

[121] Schättler, H.M.: On the time-optimality of bang-bang trajectories in R^3. Bull. Am. Math. Soc., New Ser. **16**, 113-116 (1987)

[122] Schättler, H., Ledzewicz, U.: Geometric Optimal Control: Theory, Methods and Examples. Interdisciplinary Applied Mathematics, vol. 38. Springer-Verlag New York (2012)

[123] van der Schaft, A.J.: Linearization and input-output decoupling for general nonlinear systems. Systems Control Lett. **5**, 27–33 (1984)

[124] Sklyar, G.M., Fardigola, L.V.: The Markov power moment problem in problems of controllability and frequency extinguishing for the wave equation on a half-axis. J. Math. Anal. Appl. **276** (1), 109–134 (2002)

[125] Sklyar, G.M., Ignatovich, S.Yu.: A classification of linear time-optimal control problems in a neighborhood of the origin. J. Math. Anal. Appl. **203** (3), 791–811 (1996)

[126] Sklyar, G.M., Ignatovich, S.Yu.: Moment approach to nonlinear time optimality. SIAM J. on Control and Optimiz. **38**, 1707–1728 (2000)

[127] Sklyar, G.M., Ignatovich, S.Yu.: A development of the moment method and nonlinear approximation of time-optimal control problem. In: Book of abstracts of International Akhiezer Centenary Conference. Theory of functions and Mathematical Physics, pp. 89–90, Kharkiv, Ukraine, 13-17 August, 2001

[128] Sklyar, G.M., Ignatovich, S.Yu.: Representations of control systems in the Fliess algebra and in the algebra of nonlinear power moments. Syst. Control Lett. **47**, 227–235 (2002)

[129] Sklyar, G.M., Ignatovich, S.Yu.: Approximation of time-optimal control problems via nonlinear power moment min-problems. SIAM J. Control Optim. **42**, 1325–1346 (2003)

[130] Sklyar, G.M., Ignatovich, S.Yu.: Determining of various asymptotics of solutions of nonlinear time optimal problems via right ideals in the moment algebra (Problem 3.8). In: Blondel, V.D., Megretski, A. (eds.) Unsolved Problems in Mathematical Systems and Control Theory, pp. 117–121. Princeton University Press, Princeton (2004)

[131] Sklyar, G.M., Ignatovich, S.Yu.: Development of the Markov moment problem approach in the optimal control theory. Methods of Functional Analysis and Topology **13**(4), 386–400 (2007)

[132] Sklyar, G.M., Ignatovich, S.Yu.: Description of all privileged coordinates in the homogeneous approximation problem for nonlinear control systems. C. R. Math. Acad. Sci. Paris **344**, 109–114 (2007)

[133] Sklyar, G.M., Ignatovich, S.Yu.: Development of the Markov moment problem in the optimal control. In: Book of abstracts of the International Conference «Modern Analysis and Applications» dedicated to the centenary of Mark Krein, pp. 127–128, Odessa, Ukraine, 9-14 April 2007

[134] Sklyar, G.M., Ignatovich, S.Yu.: Fliess series, a generalization of the Ree's theorem, and an algebraic approach to a homogeneous approximation problem. Int. J. Control **81**, 369–378 (2008)

[135] Sklyar, G.M., Ignatovich, S.Yu.: Development of the momrnt approach to the time-optimal control problem for nonlinear systems. In: International conference «Differential Equations and Topology», dedicated to the Centennial Anniversary of L. S. Pontryagin. Book of Abstracts, pp. 292–293, Moscow, Russia, 17-22 June 2008

[136] Sklyar, G.M., Ignatovich, S.Yu.: Series method in nonlinear time optimality. In: Proceedings of the 50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference (CDC-ECC), pp. 3836–3841, Orlando, FL, USA, 12-15 December 2011

[137] Sklyar, G.M., Ignatovich, S.Yu.: Free algebras and noncommutative power series in the analysis of nonlinear control systems: an application to approximation problems. Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.) **504**, 1–88 (2014)

[138] Sklyar, G.M., Ignatovich, S.Yu.: Free algebras and noncommutative power series in the analysis of nonlinear control systems. In: 2-nd International Conference «Differential Equations and Control Theory». Book of Abstracts, p. 16, Świnoujście, Poland, 27-30 September 2017

[139] Sklyar, G.M., Ignatovich, S.Yu., Barkhaev, P.Yu.: Canonical form of nonlinear control system with different constraints. In: Book of abstracts of the First Karazin Scientific Readings dedicated to the bicentenary of

the Karazin Karkiv National University. Mathematical Symposium, pp. 21–22, Kharkiv, Ukraine, 14-16 June, 2004

[140] Sklyar, G.M., Ignatovich, S.Yu., Barkhaev, P.Yu.: Algebraic classification of nonlinear steering problems with constraints on control. In: Oyibo, G. (ed.) Advances in Mathematics Research, vol. 6, pp. 37–96. Nova Science Publishers, Inc, New York (2005)

[141] Sklyar, G.M., Ignatovich, S.Yu., Barkhaev, P.Yu.: Classification of nonlinear steering problems with different constraints on control. In: Тезисы докладов 9-й Международной конференции «Устойчивость, управление и динамика твердого тела», сс. 66–67, Донецьк, Україна, 1-6 вересня, 2005

[142] Sklyar, G.M., Ignatovich, S.Yu., Shugaryov, S.E.: Time-optimal control problem for a special class of control systems: optimal controls and approximation in the sense of time optimality. J. Optim. Theory Appl. **165**, 62–77 (2015)

[143] Sklyar, G.M., Sklyar, K.V., Ignatovich, S.Yu.: On the extension of the Korobov's class of linearizable triangular systems by nonlinear control systems of the class C^1. Syst. Control Lett. **54**, 1097–1108 (2005)

[144] Sklyar, K.V., Ignatovich, S.Yu.: Linearizability of systems of the class C^1 with multi-dimensional control. Syst. Control Lett. **94**, 92–96 (2016)

[145] Sklyar, K.V., Ignatovich, S.Yu., Sklyar, G.M.: Verification of feedback linearizability conditions for control systems of the class C^1. In: Proceedings of the 25th Mediterranean Conference on Control and Automation (MED), pp. 163–168, Valetta, Malta, 3-6 July 2017

[146] Sussmann, H.J.: A product expansion for the Chen series. In: Byrnes, C.I., Lindquist, A. (eds.) Theory and applications of nonlinear control systems, pp. 323–335, Amsterdam: North-Holland (1986)

[147] Sussmann, H.: Existence and uniqueness of minimal realizations of nonlinear systems. Math. Syst. Theory **10**, 263–284 (1977)

[148] Sussmann, H.: Orbits of families of vector fields and integrability of distributions. Trans. Amer. Math. Soc. **180**, 172–188 (1973)

[149] Sussmann, H.: Differential-geometric methods: a powerful set of new tools for optimal control. In: Bensoussan, A., Verjus, J.-P. (eds.) Future tendencies in computer science, control and applied mathematics. Lecture Notes in Comput. Sci. vol. 653, , pp. 301–314. Springer, Berlin (1992)

[150] Tanaka, N.: On differential systems, graded Lie algebras and pseudogroups. J. Math. Kyoto Univ. **10**, 1–82 (1970)

[151] Tretyak, A.I.: Chronological calculus, high-order necessary conditions for optimality, and perturbation methods. J. Dynamical and Control Systems **4**(1), 77–126 (1998)

[152] Vendittelli, M., Oriolo, G., Jean, F., Laumond J.-P.: Nonhomogeneous nilpotent approximations for nonholonomic systems with singularities. IEEE Trans. Automat. Control **49**(2), 261–266 (2004)

[153] Vershik, A.M., Gershkovich, V.Ya.: Nonholonomic dynamical systems, geometry of distributions, and variational problems. Dynamical systems–VII. Encycl. Math. Sci. **16**, 1–81 (1994)

[154] Volterra, V.: Theory of functionals and of integral and integro-differential equations. Blackie & Son (1930); перевод: Вольтерра В. Теория функционалов, интегральных и интегродифференциальных уравнений. М., Наука (1982)

[155] Wang, Y., Sontag, E.D.: Generating series and nonlinear systems: analytic aspects, local realizability, and i/o representations. Forum Math. **4**, 299–322 (1992)

[156] Weinberg, D.A.: Canonical forms for symmetric tensors, Linear Algebra and Its Applic. **57**, 271–282 (1984)

[157] Wiener, N.: Nonlinear problems in random theory. MIT Press (1958); перевод: Винер, Н.: Нелинейные задачи в теории случайных процессов, М., ИЛ (1961)

[158] Witt, E.: Die Unterringe der freien Lieschen Ringe. Mathematische Zeitschrift **64**, 195–216 (1956)

[159] Wonham, W.M.: Linear multivariable control: a geometric approach. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, vol. 101. Springer-Verlag Berlin Heidelberg (1974)

[160] Zelenko, I.: On Tanaka's prolongation procedure for filtered structures of constant type. SIGMA. Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications **5**, 094 (2009)

[161] Zhitomirskii, M.: Fully simple singularities of plane and space curves. Proc. London Math. Soc. **96**(3), 792–812 (2008)

[162] Zuyev, A.: Exponential stabilization of nonholonomic systems by means of oscillating controls. SIAM J. Control Optim. **54**, 1678–1696 (2016)

ДОДАТОК А

Список публікацій здобувача за темою дисертації та відомості про апробацію результатів дисертації

Наукові праці, в яких опубліковані основні наукові результати дисертації

Публікації у фахових виданнях України:

1. Скляр, Г.М., Ігнатович, С.Ю.: Про класифікацію множин керованості нелінійних систем. Доповіді НАН України, сер. «Матем., прир. та техн. науки» № 6, 24–28 (2001)

2. Игнатович, С.Ю., Бархаев, П.Ю.: Каноническая форма нелинейной управляемой системы и аппроксимирующие градуировки. Вісник Харківського національного університету, сер. «Матем., прикл. матем. і механіка» **602**, 68–76 (2003)

3. Скляр, Г.М., Ігнатович, С.Ю., Бархаєв, П.Ю.: Про асимптотичну класифікацію нелінійних керованих систем в околі точки спокою. Доповіді НАН України, сер. «Матем., прир. та техн. науки» № 12, 28–34 (2004)

4. Игнатович, С.Ю.: Восстановление управляемой системы, являющейся реализацией ряда нелинейных степенных моментов. Вісник Харківського національного університету, сер. «Матем., прикл. матем. і механіка» **645**, 41–52 (2004)

5. Игнатович, С.Ю.: О связи аппроксимации нелинейных систем в смысле быстродействия и их алгебраической аппроксимации. Матем. физика, анализ, геометрия **12**(2), 158–172 (2005)

6. Игнатович, С.Ю.: Об отображаемости нелинейных систем на feedforward системы в классе C^1. Вісник Харківського національного університету, сер. «Матем., прикл. матем. і механіка» **749**, 65–79 (2006)

7. Sklyar, G.M., Ignatovich, S.Yu.: Development of the Markov moment problem approach in the optimal control theory. Methods of Functional Analysis

and Topology **13**(4), 386–400 (2007)

8. Ignatovich, S.Yu.: Explicit solution of the time-optimal control problem for one nonlinear three-dimensional system. Вісник Харківського національного університету ім. В. Н. Каразіна, сер. «Матем., прикл. матем. і механіка» **83**, 21–46 (2016)

9. Ignatovich, S.Yu.: Approximation of autonomous affine control systems in the sense of time optimality and algebraic approximation. Вісник Харківського національного університету ім. В. Н. Каразіна, сер. «Матем., прикл. матем. і механіка» **84**, 9–21 (2016)

Публікації у виданнях, які входять до міжнародних наукометричних баз:

10. Sklyar, G.M., Ignatovich, S.Yu.: Representations of control systems in the Fliess algebra and in the algebra of nonlinear power moments. Syst. Control Lett. **47**, 227–235 (2002) (*Scopus, Web of Science*)

11. Sklyar, G.M., Ignatovich, S.Yu.: Approximation of time-optimal control problems via nonlinear power moment min-problems. SIAM J. Control Optim. **42**, 1325–1346 (2003) (*Scopus, Web of Science*)

12. Sklyar, G.M., Ignatovich, S.Yu.: Determining of various asymptotics of solutions of nonlinear time optimal problems via right ideals in the moment algebra (Problem 3.8). In: Blondel, V.D., Megretski, A. (eds.) Unsolved Problems in Mathematical Systems and Control Theory, pp. 117–121. Princeton University Press, Princeton (2004) (*Scopus*)

13. Sklyar, G.M., Sklyar, K.V., Ignatovich, S.Yu.: On the extension of the Korobov's class of linearizable triangular systems by nonlinear control systems of the class C^1. Syst. Control Lett. **54**, 1097–1108 (2005) (*Scopus, Web of Science*)

14. Sklyar, G.M., Ignatovich, S.Yu.: Description of all privileged coordinates in the homogeneous approximation problem for nonlinear control systems. C. R. Math. Acad. Sci. Paris **344**, 109–114 (2007) (*Scopus, Web of Science*)

15. Sklyar, G.M., Ignatovich, S.Yu.: Fliess series, a generalization of the

Ree's theorem, and an algebraic approach to a homogeneous approximation problem. Int. J. Control **81**, 369–378 (2008) (*Scopus, Web of Science*)

16. Ignatovich, S.Yu.: Realizable growth vectors of affine control systems. J. Dyn. Control Syst. **15**, 557–585 (2009) (*Scopus, Web of Science*)

17. Ignatovich, S.Yu.: Normalization of homogeneous approximations of symmetric affine control systems with two controls. J. Dyn. Control Syst. **17**, 1–48 (2011) (*Scopus, Web of Science*)

18. Sklyar, G.M., Ignatovich, S.Yu.: Free algebras and noncommutative power series in the analysis of nonlinear control systems: an application to approximation problems. Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.) **504**, 1-88 (2014) (*Scopus, Web of Science*)

19. Sklyar, G.M., Ignatovich, S.Yu., Shugaryov, S.E.: Time-optimal control problem for a special class of control systems: optimal controls and approximation in the sense of time optimality. J. Optim. Theory Appl. **165**, 62–77 (2015) (*Scopus, Web of Science*)

20. Sklyar, K.V., Ignatovich, S.Yu.: Linearizability of systems of the class C^1 with multi-dimensional control. Syst. Control Lett. **94**, 92–96 (2016) (*Scopus, Web of Science*)

Публікації у спеціалізованих зарубіжних виданнях:

21. Sklyar, G.M., Ignatovich, S.Yu., Barkhaev, P.Yu.: Algebraic classification of nonlinear steering problems with constraints on control. In: Oyibo, G. (ed.) Advances in Mathematics Research, vol. 6, pp. 37–96. Nova Science Publishers, Inc, New York (2005)

Публікації, які засвідчують апробацію дисертації

Публікації у матеріалах міжнародних наукових конференцій, які входять до міжнародних наукометричних баз:

22. Sklyar, G.M., Ignatovich, S.Yu.: Series method in nonlinear time optimality. In: Proceedings of the 50th IEEE Conference on Decision and Control

and European Control Conference (CDC-ECC), pp. 3836–3841, Orlando, FL, USA, 12-15 December 2011 (*Scopus, Web Of Science*)

23. Sklyar, K.V., Ignatovich, S.Yu., Sklyar, G.M.: Verification of feedback linearizability conditions for control systems of the class C^1. In: Proceedings of the 25th Mediterranean Conference on Control and Automation (MED), pp. 163–168, Valetta, Malta, 3-6 July 2017 (*Scopus*)

Публікації у матеріалах міжнародних наукових конференцій:

24. Sklyar, G.M., Ignatovich, S.Yu.: A development of the moment method and nonlinear approximation of time-optimal control problem. In: Book of abstracts of International Akhiezer Centenary Conference. Theory of functions and Mathematical Physics, pp. 89–90, Kharkiv, Ukraine, 13-17 August, 2001

25. Скляр, Г.М., Игнатович, С.Ю., Бархаев, П.Ю. Развитие метода моментов в нелинейной задаче быстродействия. In: Международная конференция «Обратные задачи и нелинейные уравнения», тезисы докладов, сс. 81–83, Харків, Україна, 12-16 серпня, 2002

26. Sklyar, G.M., Ignatovich, S.Yu., Barkhaev, P.Yu.: Canonical form of nonlinear control system with different constraints. In: Book of abstracts of the First Karazin Scientific Readings dedicated to the bicentenary of the Karazin Karkiv National University. Mathematical Symposium, pp. 21–22, Kharkiv, Ukraine, 14-16 June, 2004

27. Sklyar, G.M., Ignatovich, S.Yu., Barkhaev, P.Yu.: Classification of nonlinear steering problems with different constraints on control. In: Тезисы докладов 9-й Международной конференции «Устойчивость, управление и динамика твердого тела», сс. 66–67, Донецьк, Україна, 1-6 вересня, 2005

28. Sklyar, G.M., Ignatovich, S.Yu.: Development of the Markov moment problem in the optimal control. In: Book of abstracts of the International Conference «Modern Analysis and Applications» dedicated to the centenary of Mark Krein, pp. 127–128, Odessa, Ukraine, 9-14 April 2007

29. Sklyar, G.M., Ignatovich, S.Yu.: Development of the momrnt approach

to the time-optimal control problem for nonlinear systems. In: International conference «Differential Equations and Topology», dedicated to the Centennial Anniversary of L. S. Pontryagin. Book of Abstracts, pp. 292–293, Moscow, Russia, 17-22 June 2008

30. Игнатович, С.Ю.: Свободные алгебры в задаче однородной аппроксимации: как они возникают и как их можно использовать. In: Материалы Школы-конференции «Геометрическая теория управления и анализ на метрических структурах», сс. 16–19, Республіка Алтай, Росія, 25–30 липня, 2014

31. Ignatovich, S.Yu.: Normalization of homogeneous approximations under feedbacks. In: Book of abstracts of the International Conference «Differential Equations and Control Theory» dedicated to the 75-th anniversary of professor Korobov V.I., p. 11, Kharkiv, Ukraine, 26-28 September 2016

32. Sklyar, G.M., Ignatovich, S.Yu.: Free algebras and noncommutative power series in the analysis of nonlinear control systems. In: 2-nd International Conference «Differential Equations and Control Theory». Book of Abstracts, p. 16, Świnoujście, Poland, 27-30 September 2017

Відомості про апробацію результатів дисертації

Основні результати дисертації доповідалися та обговорювалися на таких наукових конференціях і семінарах:

1. Міжнародна конференція «Theory of functions and Mathematical Physics», присвячена 100-річчю з дня народження Н. І. Ахієзера, Харків, Україна, 13-17 серпня 2001 р. (форма участі: доповідь співавтора)

2. Міжнародна конференція «Обратные задачи и нелинейные уравнения», Харків, Україна, 12-16 серпня 2002 р. (форма участі: доповідь співавтора)

3. Наукова конференція «First Karazin Scientific Readings dedicated to the bicentenary of the Karazin Karkiv National University. Mathematical Symposium», pp. 21-22, Kharkiv, Ukraine, 14-16 June, 2004 (форма участі: доповідь)

4. Семінар відділу «Functional Analysis and Applications» (керівник А. О. Аграчов), SISSA, Трієст, Італія, 20 квітня 2005 р. і 13 травня 2009 р. (форма участі: доповіді)

5. Міжнародна конференція «Устойчивость, управление и динамика твердого тела», Донецьк, Україна, 1-6 вересня, 2005 р. (форма участі: доповідь співавтора)

6. Міжнародний семінар «Geometry of vector distributions, differential equations, and variational problems», SISSA, Трієст, Італія, 13-15 грудня 2006 р. (форма участі: доповідь)

7. Міжнародна конференція «Современный анализ и приложения», присвячена 100-річчю з дня народження М. Г. Крейна, Одеса, Україна, 9-14 квітня 2007 р. (форма участі: доповідь співавтора)

8. Міжнародна конференція «Дифференциальные уравнения и топология», присвячена 100-річчю з дня народження Л. С. Понтрягіна, Москва, Росія, 17-22 червня 2008 р. (форма участі: доповідь співавтора)

9. Міжнародний семінар «Analysis and Applications», University of Szczecin, Щецин, Польща, 30 вересня-3 жовтня 2009 р. (форма участі: доповідь)

10. Семінар міжнародної програми «Research-in-Teams program of the Trimester Control and Combinatorics», Мадрид, Іспанія, 2-18 червня 2010 р. (форма участі: доповіді)

11. Міжнародна конференція «50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference (CDC-ECC)», Орландо, США, 12-15 грудня 2011 р. (форма участі: заочна)

12. Міжнародний семінар «Analysis, Operator Theory, and Mathematical Physics», Ікстапа, Мексіка, 23-27 січня 2012 р. (форма участі: доповідь співавтора)

13. Міжнародний семінар «Equivalence, Invariants, and Symmetries of Vector Distributions and Related Structures: from Cartan to Tanaka and beyond», Henri Poincaré Institute, Париж, Франція, 9-12 грудня 2014 р.

(форма участі: доповідь)

14. Семінар відділу диференціальних рівнянь Математичного інституту імені В. А. Стеклова (керівник Ілляшенко Ю. С.), Москва, Росія, 23 квітня 2014 р. (форма участі: доповідь)

15. Школа-конференція «Геометрическая теория управления и анализ на метрических структурах», Республіка Алтай, Росія, 25–30 липня 2014 р. (форма участі: доповіді)

16. Міжнародна конференція «Differential Equations and Control Theory», присвячена 75-річчю професора В. І. Коробова, Харків, Україна, 26-28 вересня 2016 р. (форма участі: доповідь)

17. Міжнародна конференція «25th Mediterranean Conference on Control and Automation (MED)», Валетта, Мальта, 3-6 липня 2017 р. (форма участі: доповідь співавтора)

18. Міжнародна конференція «Differential Equations and Control Theory», University of Szczecin, Свіноуйсьце, Польща, 27-30 вересня 2017 р. (форма участі: доповідь)

19. Семінар кафедри диференціальних рівнянь та керування і кафедри прикладної математики (керівник В. І. Коробов), Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, 2000–2017 р.р. (форма участі: доповіді).

ДОДАТОК Б

Доведення деяких відомих результатів

Б.1 Розвинення оператора в кінець траєкторії в ряд ітерованих інтегралів

Наведемо план отримання зображення (1.35). Для зручності будемо писати $X_{i_k} \cdots X_{i_1}(x)$ замість $X_{i_k} \cdots X_{i_1} E(x)$.

Нехай $\theta > 0$ є досить малим, керування $u(t)$ фіксоване, а $x(t) = x(t; u)$ є розв'язком задачі Коші (2.1), (2.2). Інтегруючи рівність (2.1) по t від 0 до θ і враховуючи (2.2), отримуємо

$$x(\theta) = \sum_{i=1}^{m} \int_0^\theta X_i(x(t)) u_i(t) dt. \tag{Б.1}$$

Зауважимо, що

$$\frac{d}{dt} X_i(x(t)) = (X_i(x(t)))'_x \dot{x}(t) =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} (X_i(x(t)))'_x X_j(x(t)) u_j(t) = \sum_{j=1}^{m} X_j X_i(x(t)) u_j(t),$$

$$u_i(t) = -\frac{d}{dt} \int_t^\theta u_i(\tau) d\tau.$$

Тоді, інтегруючи частинами праву частину (Б.1), отримуємо

$$x(\theta) = \sum_{i=1}^{m} \left(-X_i(x(t)) \int_t^\theta u_i(\tau) d\tau \Big|_0^\theta + \int_0^\theta \sum_{j=1}^{m} X_j X_i(x(\tau_1)) u_j(\tau_1) \int_{\tau_1}^\theta u_i(\tau_2) d\tau_2 d\tau_1 \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} c_i \eta_i(\theta, u) + \sum_{1 \le i_1, i_2 \le m} \int_0^\theta X_{i_2} X_{i_1}(x(\tau_1)) u_{i_2}(\tau_1) \int_{\tau_1}^\theta u_{i_1}(\tau_2) d\tau_2 d\tau_1.$$

Ми можемо повторити цю процедуру, інтегруючи частинами другий доданок у правій частині останньої рівності. Після q таких кроків отримуємо

$$x(\theta) = \sum_{k=1}^{q} \sum_{1 \le i_1, \ldots, i_k \le m} c_{i_1 \ldots i_k} \eta_{i_1 \ldots i_k}(\theta, u) + R_q(\theta, u),$$

де

$$R_q(\theta, u) = \sum_{1\le i_1,\dots,i_{q+1}\le m} \int_0^\theta \cdots \int_{\tau_q}^\theta X_{i_{q+1}} \cdots X_{i_1}(x(\tau_1)) u_{i_{q+1}}(\tau_1) \cdots u_{i_1}(\tau_{q+1}) d\tau_{q+1} \cdots d\tau_1.$$

Користуючись дійсною аналітичністю векторних полів $X_1, \dots, X_m$, можна показати, що $R_q(\theta, u) \to 0$ при $q \to \infty$ для будь-якого досить малого $\theta > 0$ і будь-якого $u \in B^\theta$, що й доводить зображення (2.3). Крім того, з дійсної аналітичності $X_1, \dots, X_m$ безпосередньо випливають оцінки (1.47).

Лема 2.1 [70] встановлює, що ітеровані інтеграли є лінійно незалежними. Ми наведемо доведення цієї леми, яке використовує лему 4.5.

Доведення леми 2.1. Використаємо рівність $\eta_{i_1\dots i_k}(T, u) = T^k \eta_{i_1\dots i_k}(1, u^T)$, яка має місце для всіх $T > 0$. Зазначимо, що u пробігає множину B^T тоді і тільки тоді, коли u^T пробігає множину B^1.

Спочатку для будь-якого $\tau \in [0, \theta]$ розглянемо довільне керування $u \in B^\theta$, що задовольняє умову $u(t) = 0$ при $t \in [\tau, \theta]$. Тоді $\eta_{i_1\dots i_k}(\theta, u) = \eta_{i_1\dots i_k}(\tau, u) = \tau^k \eta_{i_1\dots i_k}(1, u^\tau)$ для довільного $u^\tau \in B^1$. З умови (2.8) випливає

$$\sum_{k\ge 1} \tau^k \sum_{1\le i_1,\dots,i_k\le m} \alpha_{i_1\dots i_k} \eta_{i_1\dots i_k}(1, u) = 0, \quad u \in B^1.$$

Для будь-якого фіксованого $u \in B^1$ ліва частина цієї рівності є поліномом по $\tau \in [0, \theta]$, отже, для довільного $k \ge 1$

$$\sum_{1\le i_1,\dots,i_k\le m} \alpha_{i_1\dots i_k} \eta_{i_1\dots i_k}(1, u) = 0, \quad u \in B^1. \tag{Б.2}$$

Таким чином, лему зведено до наступного твердження: якщо рівність (Б.2) виконується для всіх $u \in B^1$, то $\alpha_{i_1\dots i_k} = 0$ для всіх $1 \le i_1, \dots, i_k \le m$.

Ми доведемо це твердження індукцією по k. Для $k = 1$ твердження очевидне. Нехай $k \ge 2$. Припустимо, що з рівності

$$\sum_{1\le i_1,\dots,i_{k-1}\le m} \widetilde{\alpha}_{i_1\dots i_{k-1}} \eta_{i_1\dots i_{k-1}}(1, u) = 0, \quad u \in B^1,$$

випливає $\widetilde{\alpha}_{i_1\dots i_{k-1}} = 0$ для всіх $1 \le i_1, \dots, i_{k-1} \le m$. Візьмемо довільне $t > 0$ і два керування $u^1 \in B^1$ і $u^2 \in B^t$. З (Б.2) випливає, що

$$\sum_{1\le i_1,\dots,i_k\le m} \alpha_{i_1\dots i_k} \eta_{i_1\dots i_k}(T, u) = 0, \quad u \in B^T,$$

для всіх $T>0$. Вибираючи $T=1+t$ і $u=u^1\circ u^2$ і застосовуючи лему 4.5, отримуємо

$$\sum_{1\le i_1,\dots,i_k\le m}\alpha_{i_1\dots i_k}\sum_{j=0}^{k}\eta_{i_1\dots i_j}(t,u^2)\,\eta_{i_{j+1}\dots i_k}(1,u^1)=$$

$$=\sum_{1\le i_1,\dots,i_k\le m}\alpha_{i_1\dots i_k}\sum_{j=0}^{k}t^j\eta_{i_1\dots i_j}(1,(u^2)^t)\,\eta_{i_{j+1}\dots i_k}(1,u^1)=0.$$

Позначимо $u^3=(u^2)^t\in B^1$, отримуємо

$$\sum_{j=0}^{k}t^j\sum_{1\le i_1,\dots,i_k\le m}\alpha_{i_1\dots i_k}\eta_{i_1\dots i_j}(1,u^3)\,\eta_{i_{j+1}\dots i_k}(1,u^1)=0,\qquad u^1,u^3\in B^1.$$

Для фіксованих $u^1,u^3\in B^1$ ліва частина є поліномом від t, а отже,

$$\sum_{1\le i_1,\dots,i_k\le m}\alpha_{i_1\dots i_k}\eta_{i_1\dots i_{k-1}}(1,u^3)\,\eta_{i_k}(1,u^1)=0,\qquad u^1,u^3\in B^1.$$

Для будь-якого фіксованого $u^1\in B^1$ маємо

$$\sum_{1\le i_1,\dots,i_{k-1}\le m}\left(\sum_{1\le i_k\le m}\alpha_{i_1\dots i_k}\eta_{i_k}(1,u^1)\right)\eta_{i_1\dots i_{k-1}}(1,u^3)=$$

$$=\sum_{1\le i_1,\dots,i_{k-1}\le m}\widetilde{\alpha}_{i_1\dots i_{k-1}}\eta_{i_1\dots i_{k-1}}(1,u^3)=0.$$

За припущенням індукції,

$$\widetilde{\alpha}_{i_1\dots i_{k-1}}=\sum_{1\le i_k\le m}\alpha_{i_1\dots i_k}\eta_{i_k}(1,u^1)=0,\quad u^1\in B^1,$$

а отже, $\alpha_{i_1\dots i_k}=0$. ■

Доведення наслідку 2.1 Аналогічно доведенню леми 2.1, з (2.10) отримуємо, що для будь-якого фіксованого $u\in B^1$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\tau^k\sum_{1\le i_1,\dots,i_k\le m}\alpha_{i_1\dots i_k}\eta_{i_1\dots i_k}(1,u)=0,$$

тобто степеневий ряд по τ, який збігається, дорівнює нулю. Отже, для будь-якого $k\ge 1$

$$\sum_{1\le i_1,\dots,i_k\le m}\alpha_{i_1\dots i_k}\eta_{i_1\dots i_k}(1,u)=0,\quad u\in B^1,$$

де сума в лівій частині скінченна. Решта доведення випливає з леми 2.1. ■

Б.2 Розвинення оператора до початку траєкторії в ряд нелінійних степеневих моментів

Наведемо основні міркування щодо доведення теореми 1.1, зокрема, щоб пояснити роль потрапляння саме до точки спокою системи.

Розглянемо спочатку автономний випадок. Для зручності тимчасово позначимо $b_0(x) = a(x)$, $b_1(x) = b(x)$, $R_0\phi(x) = \phi_x(x)a(x)$, $R_1\phi(x) = \phi_x(x)b(x)$, а також $u_0(t) \equiv 1$, $u_1(t) = u(t)$:

$$\dot{x} = b_0(x)u_0(t) + b_1(x)u_1(t), \quad x(0) = x^0, \; x(\theta) = 0.$$

Проінтегруємо цю систему на відрізку $t \in [0, \theta]$ і отримаємо

$$-x^0 = \sum_{j=0,1} \int_0^\theta b_j(x(t))u_j(t)dt = \sum_{j=0,1} \int_0^\theta R_i E(x(t))u_i(t)dt. \tag{Б.3}$$

Зауважимо, що

$$\frac{d}{dt}R_i E(x(t)) = (b_i)_x b_0(x(t))u_0(t) + (b_i)_x b_1(x(t))u_1(t) =$$
$$= R_0 R_i E(x(t))u_0(t) + R_1 R_i E(x(t))u_1(t) = \sum_{j=0,1} R_j R_i E(x(t))u_1(t).$$

Крім того, $u_i(t) = \frac{d}{dt}\int_0^t u_i(\tau)d\tau$. Тоді інтегруванням частинами з (Б.3) отримуємо

$$-x^0 = \sum_{i=0,1}\Big(\int_0^\tau u_i(\tau_1)d\tau_1 R_i E(x(\tau))\Big|_0^\theta - \int_0^\theta \int_0^\tau u_i(\tau_1)d\tau_1 \sum_{j=0,1} R_j R_i E(x(\tau))u_j(\tau)d\tau\Big) =$$

$$= \sum_{i=0,1}\int_0^\theta u_i(\tau_1)d\tau_1 R_i E(0) - \sum_{i,j=0,1}\int_0^\theta \int_0^{\tau_1} u_j(\tau_1)u_i(\tau_2)\sum_{j=0,1} R_j R_i E(x(\tau_1))d\tau_2 d\tau_1.$$

Ми можемо повторити цю процедуру, інтегруючи частинами другий доданок останньої рівності. Після q таких кроків ми отримаємо

$$x^0 = \sum_{s=1}^{q} \sum_{i_j=0,1} (-1)^s \int_0^\theta \int_0^{\tau_1} \cdots \int_0^{\tau_{s-1}} \prod_{j=1}^{s} u_{i_j}(\tau_j)d\tau_s \cdots d\tau_2 d\tau_1 R_{i_1} \cdots R_{i_s} E(0) + r_q, \tag{Б.4}$$

$$\text{де} \quad r_q = \sum_{i_j=0,1} \int_0^\theta \int_0^{\tau_1} \cdots \int_0^{\tau_{q-1}} \prod_{j=1}^{q} u_{i_j}(\tau_j) R_{i_1} R_{i_2} \cdots R_{i_q} E(x(\tau_1))d\tau_q \cdots d\tau_2 d\tau_1.$$

Користуючись дійсною аналітичністю b_0, b_1, можна показати, що $r_q \to 0$ при $q \to \infty$ для довільного досить малого $\theta > 0$ і довільного $u \in B^\theta$, тобто в (Б.4) можна перейти до границі при $q \to \infty$. Крім того, оскільки $u_0(\tau) \equiv 1$, інтеграли в сумі (Б.4) можна спростити. А саме, можна показати, що якщо

$$(i_1, \ldots, i_s) = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{r_0}, 1, \underbrace{0, \ldots, 0}_{r_1}, 1, \ldots, 1, \underbrace{0, \ldots, 0}_{r_k}),$$

то

$$\int_0^\theta \int_0^{\tau_1} \cdots \int_0^{\tau_{s-1}} \prod_{j=1}^{s} u_{i_j}(\tau_j) d\tau_s \cdots d\tau_2 d\tau_1 =$$

$$= \int_0^\theta \int_0^{\tau_1} \cdots \int_0^{\tau_{k-1}} \frac{(\theta - \tau_1)^{r_0} \prod\limits_{j=1}^{k-1} (\tau_j - \tau_{j+1})^{r_j} \tau_k^{r_k}}{r_0! r_1! \ldots r_k!} \prod_{j=1}^{k} u_1(\tau_j) d\tau_k \cdots d\tau_2 d\tau_1,$$

де $r_0 + \cdots + r_k + k = s$. Розкриваючи дужки, зводячи подібні при степенях θ і τ_j і враховуючи, що

$$\mathrm{ad}_{R_0}^r R_1 = \sum_{p=0}^{r} \frac{(-1)^{r-p}\, r!}{p!(r-p)!} R_0^p R_1 R_0^{r-p},$$

отримуємо з (Б.4)

$$x^0 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\substack{m_0 + \cdots + m_k + k = m \\ k \geq 0,\ m_i \geq 0}} \frac{(-1)^{k+m_0} \theta^{m_0}}{m_0! m_1! \ldots m_k!} \int_0^\theta \int_{\tau_1}^\theta \cdots \int_{\tau_{k-1}}^\theta \prod_{j=1}^{k} \tau_j^{m_j} u_1(\tau_j) d\tau_k \cdots d\tau_2 d\tau_1 \times$$
$$\times R_0^{m_0} \mathrm{ad}_{R_0}^{m_1} R_1 \cdots \mathrm{ad}_{R_0}^{m_k} R_1 E(0). \qquad (Б.5)$$

Зауважимо, що нуль є точкою спокою системи, звідки випливає, що $R_0 \varphi(0) = \varphi_x(0) a(0) = 0$ для будь-якої $\varphi(x)$. Отже, всі доданки, які відповідають $m_0 > 0$, дорівнюють нулю, що доводить (2.29) в автономному випадку.

Доведемо тепер оцінку (2.31) [140, 8]. Введемо оператори $D_{j_1 \ldots j_n} = \frac{\partial^j}{\partial^{j_1} x_1 \cdots \partial^{j_n} x_n}$, $j = j_1 + \cdots + j_n$, і для довільної аналітичної вектор-функції $f(x)$ будемо вживати позначення $R_f \phi(x) = \phi_x(x) f(x)$. Скажемо, що аналітична функція $\phi(x)$ мажорує аналітичну функцію $\varphi(x)$ в нулі, якщо для довільних $j_1, \ldots, j_n \geq 0$

$$|D_{j_1 \ldots j_n} \varphi(0)| \leq |D_{j_1 \ldots j_n} \phi(0)|\,,\ j = j_1 + \cdots + j_n.$$

Оскільки $a(x)$ та $b(x)$ аналітичні, існує така константа $C_1 > 0$, для якої

$$\left| D_{j_1 \dots j_n} \left(a(0) \right)_q \right| \le j_1! \cdots j_n! C_1^j, \ \left| D_{j_1 \dots j_n} \left(b(0) \right)_q \right| \le j_1! \cdots j_n! C_1^j, \ j_1, \dots, j_n \ge 0,$$

при всіх $q = 1, \dots, n$ (тут і далі $(v)_q$ позначає q-ту компоненту вектора v). Введемо аналітичну вектор-функцію $\widehat{c}(x)$ в околі нуля в $\mathbb{R}^n$, компоненти якої задовольняють рівності

$$D_{j_1 \dots j_n}(\widehat{c}(0))_q = j_1! \cdots j_n! C_1^j,$$

тоді $\widehat{c}_q$ мажорують a_q і b_q. Очевидно,

$$\left| D_{j_1 \dots j_n}(\mathrm{ad}^m_{R_a} R_b E(x))_q \right| = \left| \sum_{s=0}^{m} (-1)^{m-s} C_m^s D_{j_1 \dots j_n}(R_a^s R_b R_a^{m-s} E(x))_q \right| \le$$
$$\le \sum_{s=0}^{m} C_m^s D_{j_1 \dots j_n}(R_{\widehat{c}}^{m+1} E(x))_q = 2^m D_{j_1 \dots j_n}(R_{\widehat{c}}^{m+1} E(x))_q,$$

тобто компоненти $\mathrm{ad}^m_{R_a} R_b E(x)$ мажоруються компонентами вектор-функції $2^m g_{m+1}(x)$, де $g_{m+1}(x) = R_{\widehat{c}}^{m+1} E(x)$.

Тепер отримаємо мажоранти для $g_m(x)$. Розв'язок $\widehat{z}(t;x)$ задачі Коші $\dot{z} = \widehat{c}(z)$, $z(0) = x$ є аналітичною вектор-функцією по t та x в околі нуля; він дорівнює $\widehat{z}(t;x) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!} R_{\widehat{c}}^m E(x) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!} g_m(x)$. Зручно розглянути степеневий ряд для її похідної

$$\frac{d}{dt} \widehat{z}(t;x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!} g_{m+1}(x) = \sum_{m, j_1, \dots, j_n} D_{j_1 \dots j_n}(g_{m+1}(0)) \frac{t^m x_1^{j_1} \cdots x_n^{j_n}}{m! j_1 \cdots j_n!}.$$

Отже, існує така константа $C_2 > 0$, для якої

$$\left| D_{j_1 \dots j_n} \left(g_{m+1}(0) \right)_q \right| \le m! j_1! \cdots j_n! C_2^{j+m}, \ j = j_1 + \dots + j_n,$$

для довільних $j_1, \dots, j_n \ge 0$, $m \ge 0$. Введемо вектор-функцію $c(x)$, компоненти якої задовольняють рівності

$$D_{j_1 \dots j_n}(c(0))_q = j_1! \cdots j_n! C_2^j,$$

тоді c_q мажорують компоненти кожної вектор-функції $\frac{1}{C_2^m m!} g_{m+1}(x)$ для всіх $m \ge 0$. Звідси випливає, що

$$\frac{1}{m_1! \dots m_k!} \left| \mathrm{ad}^{m_1}_{R_a} R_b \cdots \mathrm{ad}^{m_k}_{R_a} R_b E(0))_q \right| \le$$

$$\leq (2C_2)^{m_1+\cdots+m_k} \left| \frac{1}{m_1! C_2^{m_1}} R_{g_{m_1+1}} \cdots \frac{1}{m_k! C_2^{m_k}} R_{g_{m_k+1}} E(0))_q \right| \leq$$
$$\leq (2C_2)^{m_1+\cdots+m_k} |R_c^k E(0)|.$$

Нарешті, розв'язок $z(t;x)$ задачі Коші $\dot z = c(z)$, $z(0) = 0$ є аналітичною функцією по t, що розкладається в ряд $z(t;x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} R_c^k E(0)$, а отже, $\|R_c^k E(0)\| \leq k! C_3^k$ для всіх $k \geq 1$ і деякого $C_3 > 0$. Остаточно отримуємо оцінку

$$\|v_{m_1\ldots m_k}\| \leq (2C_2)^{m_1+\cdots+m_k} k! C_3^k \leq k! C^{m_1+\cdots+m_k+k}$$

де $C > 0$, для всіх $k \geq 1$ та $m_1, \ldots, m_k \geq 0$, з якої випливає (2.31). Оскільки для $u(t) \in B^\theta$ виконується $|\xi_{m_1\ldots m_k}(\theta, u)| \leq \frac{1}{k!}\theta^{m_1+\cdots+m_k+k}$, то

$$\sum_{\substack{m_1+\cdots+m_k+k=m \\ k\geq 1,\ m_i \geq 0}} \|v_{m_1\ldots m_k}\| \, |\xi_{m_1\ldots m_k}(\theta, u)| \leq \sum_{m_1+\cdots+m_k+k=m} (C\theta)^m = (2C\theta)^m,$$

звідки випливає рівномірна збіжність ряду (1.22).

Покажемо, як неавтономний випадок (2.25) можна звести до автономного. Введемо позначення

$$z(t) = \big(z_0(t), z_1(t), \ldots, z_n(t)\big)^\mathsf{T} = \big(\theta - t, x(t)\big)^\mathsf{T}, \ z^0 = z(0),$$
$$\widetilde a(z) = \big(-1, a(\theta - z_0, z_1, \ldots, z_n)\big)^\mathsf{T}, \ \widetilde b(z) = \big(0, b(\theta - z_0, z_1, \ldots, z_n)\big)^\mathsf{T},$$

тоді виконуються рівності

$$\dot z = \widetilde a(z) + \widetilde b(z) u(t), \ z(0) = z^0, \ z(\theta) = 0. \tag{Б.6}$$

Для цієї задачі отримуємо рівність, аналогічну (Б.5):

$$x^0 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\substack{m_0+\cdots+m_k+k=m \\ k\geq 0,\ m_i\geq 0}} \frac{(-1)^{k+m_0}\theta^{m_0}}{m_0! m_1! \ldots m_k!} \int_0^\theta \int_{\tau_1}^\theta \cdots \int_{\tau_{k-1}}^\theta \prod_{j=1}^k \tau_j^{m_j} u_1(\tau_j) d\tau_k \cdots d\tau_2 d\tau_1 \times$$
$$\times \widetilde R_0^{m_0} \mathrm{ad}_{\widetilde R_0}^{m_1} \widetilde R_1 \cdots \mathrm{ad}_{\widetilde R_0}^{m_k} \widetilde R_1 \widetilde E(0),$$

де $\widetilde R_0 \widetilde\varphi(z) = \widetilde\varphi_z(z)\widetilde a(z)$, $\widetilde R_1 \widetilde\varphi(z) = \widetilde\varphi_z(z)\widetilde b(z)$, $\widetilde E(z) = z$. Розглянемо довільну аналітичну функцію $\varphi(t,x)$ і введемо позначення $\widetilde\varphi(z) = \varphi(\theta - z_0, z_1, \ldots, z_n)$, тоді

$$\widetilde R_0 \widetilde\varphi(z) = R_0\varphi(t,x), \quad \widetilde R_1 \varphi(z) = R_1\varphi(t,x), \quad \widetilde E(0) = (\theta, 0)^\mathsf{T}.$$

Оскільки нуль є точкою спокою системи, тобто $a(t,0)\equiv 0$, то $R_0\varphi(\theta,0) = \varphi_t(\theta,0)$ для будь-якої функції $\varphi(t,x)$. Отже, отримуємо

$$x^0 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\substack{m_0+\dots+m_k+k=m \\ k\geq 0,\ m_i\geq 0}} \frac{(-1)^{k+m_0}\theta^{m_0}}{m_0!m_1!\dots m_k!} \int_0^\theta \int_{\tau_1}^\theta \cdots \int_{\tau_{k-1}}^\theta \prod_{j=1}^k \tau_j^{m_j} u_1(\tau_j) d\tau_k \cdots d\tau_2 d\tau_1 \times$$

$$\times R_0^{m_0} \mathrm{ad}_{R_0}^{m_1} R_1 \cdots \mathrm{ad}_{R_0}^{m_k} R_1 E(\theta,0),$$

причому ряд абсолютно збігається. Переставляючи члени цього ряду, отримуємо

$$x^0 = \sum_{m_0=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m_0}\theta^{m_0}}{m_0!} \frac{\partial^{m_0}}{\partial t^{m_0}} f(t)_{t=\theta} = f(0), \tag{Б.7}$$

де функція

$$f(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\substack{m_1+\dots+m_k+k=m \\ k\geq 1,\ m_i\geq 0}} \frac{(-1)^k}{m_1!\dots m_k!} \int_0^\theta \int_{\tau_1}^\theta \cdots \int_{\tau_{k-1}}^\theta \prod_{j=1}^k \tau_j^{m_j} u_1(\tau_j) d\tau_k \cdots d\tau_2 d\tau_1 \times$$

$$\times \mathrm{ad}_{R_0}^{m_1} R_1 \cdots \mathrm{ad}_{R_0}^{m_k} R_1 E(t,0)$$

є аналітичною (це може бути доведено міркуваннями, аналогічними наведеним вище). Остаточно, з (Б.7) отримуємо зображення (2.29).

Лема 2.4 [12] встановлює, що нелінійні степеневі моменти лінійно незалежні. Ми наведемо інше доведення цієї леми.

Доведення леми 2.4. Зауважимо, що замість одиничної кулі B^θ достатньо розглядати її (досить велику) підмножину. Наприклад, обмежимо себе розгляданням кусково-сталих керувань $u \in B^\theta$ (що мають будь-яку скінченну кількість точок розриву). Очевидно, $\xi_{m_1\dots m_k}(\theta,\varepsilon u) = \varepsilon^k \xi_{m_1\dots m_k}(\theta,u)$, тому з умови (2.33) випливає, що для кожного *фіксованого* $k\geq 1$

$$\sum_{(m_1,\dots,m_k)\in M} \alpha_{m_1\dots m_k}\xi_{m_1\dots m_k}(\theta,u) = 0, \quad u\in B^\theta. \tag{Б.8}$$

Застосуємо індукцію за k. Припустимо, що з рівності

$$\sum_{(m_1,\dots,m_{k-1})\in M} \alpha_{m_1\dots m_{k-1}}\xi_{m_1\dots m_{k-1}}(\theta,u) = 0, \quad u\in B^\theta, \tag{Б.9}$$

випливає, що всі коефіцієнти $\alpha_{m_1\dots m_{k-1}}$ дорівнюють нулю (при $k=1$ нема чого припускати). Покажемо, що тоді з рівності (Б.8) випливає, що всі коефіцієнти $\alpha_{m_1\dots m_k}$ дорівнюють нулю.

Розглянемо сімейство функцій вигляду

$$u_\delta(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0,\delta), \\ u(t), & t \in [\delta,\theta], \end{cases}$$

де $0 < \delta < \delta_0 < \theta$ — параметр, а $u(t)$ — довільна функція з B^θ, що є неперервною на інтервалі $(0,\delta_0)$. Запишемо припущення (Б.8) в такому вигляді:

$$\sum_{q=0}^{p} \sum_{(m_1,\dots,m_{k-1})\in M} \alpha_{m_1\dots m_{k-1}q}\xi_{m_1\dots m_{k-1}q}(\theta,u_\delta) = 0, \tag{Б.10}$$

де p — деяке число. Тепер застосуємо індукцію за q. Припустимо, що $q \le p$ і $\alpha_{m_1\dots m_{k-1}r} = 0$ для всіх $0 \le r \le q-1$ і всіх $m_1,\dots,m_{k-1}$ (при $q=0$ нема чого припускати). Доведемо, що $\alpha_{m_1\dots m_{k-1}q} = 0$ при всіх $m_1,\dots,m_{k-1}$. Дійсно, з припущення (Б.10) випливає

$$\frac{d}{d\delta}\sum_{r=q}^{p} \sum_{(m_1,\dots,m_{k-1})\in M} \alpha_{m_1\dots m_{k-1}r}\xi_{m_1\dots m_{k-1}r}(\theta,u_\delta) = 0,$$

звідки, ураховуючи лему 5.5, отримуємо

$$-\delta^q u(\delta) \sum_{(m_1,\dots,m_{k-1})\in M} \alpha_{m_1\dots m_{k-1}q}\xi_{m_1\dots m_{k-1}}(\theta,u) + \bar{o}(\delta^q) = 0.$$

Якщо $u(0) \ne 0$, то, переходячи до границі при $\delta \to 0$, отримуємо

$$\sum_{(m_1,\dots,m_{k-1})\in M} \alpha_{m_1\dots m_{k-1}q}\xi_{m_1\dots m_{k-1}}(\theta,u) = 0. \tag{Б.11}$$

Оскільки δ_0 і $u(0)$ можуть бути як завгодно малими, отримуємо, що (Б.11) виконується для всіх кусково-сталих $u \in B^\theta$, тоді з (Б.9) випливає, що $\alpha_{m_1\dots m_{k-1}q} = 0$ для всіх $m_1,\dots,m_{k-1}$, що й треба було довести. ■

Доведення наслідку 2.2. Для будь-якого $\tau \in [0,\theta]$ розглянемо довільне керування $u \in B^\theta$, таке що $u(t) = 0$ при $t \in [\tau,\theta]$, і розглянемо $\widetilde{u}(t) =$

$u(t\tau/\theta)$, $t\in[0,\theta]$. Тоді $\xi_{m_1\dots m_k}(\theta,u)=\xi_{m_1\dots m_k}(\tau,u)=(\tau/\theta)^m\xi_{m_1\dots m_k}(\theta,\widetilde{u})$, отже, з (2.34) випливає, що для будь-якого фіксованого $u\in B^1$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\tau^m\sum_{\substack{m_1+\dots+m_k+k=m\\ k\ge1,\ m_i\ge0}}\alpha_{i_1\dots i_k}\eta_{i_1\dots i_k}(1,u)=0,$$

тобто степеневий ряд по τ, який збігається, дорівнює нулю. Отже,

$$\sum_{\substack{m_1+\dots+m_k+k=m\\ k\ge1,\ m_i\ge0}}\alpha_{m_1\dots m_k}\xi_{m_1\dots m_k}(1,u)=0,\quad u\in B^1,\quad m\ge1,$$

де сума скінченна. Решта доведення випливає з леми 2.4. ■

Б.3 Доведення допоміжних результатів

Доведення леми 4.3. Припустимо, що це не так, тоді існує множина $E\subset[0,1]$, для якої $\mu(E)>0$ і $\sum\limits_{i=1}^m u_i^2(t)>1$, $t\in E$. Позначимо $v(t)=u(t)$, якщо $t\in E$, і $v(t)=0$, якщо $t\notin E$. Оскільки $\langle v,u_{(q)}\rangle\to\langle v,u\rangle$, маємо

$$\int_E\sum_{i=1}^m u_i(t)u_{(q)i}(t)dt=\int_0^1\sum_{i=1}^m v_i(t)u_{(q)i}(t)dt\to\int_0^1\sum_{i=1}^m v_i(t)u_i(t)=\int_E\sum_{i=1}^m u_i^2(t)dt.$$

З іншого боку,

$$\left|\sum_{i=1}^m u_i(t)u_{(q)i}(t)\right|\le\Bigl(\sum_{i=1}^m u_i^2(t)\Bigr)^{1/2}\Bigl(\sum_{i=1}^m u_{(q)i}^2(t)\Bigr)^{1/2}\le\Bigl(\sum_{i=1}^m u_i^2(t)\Bigr)^{1/2},$$

отже,

$$\int_E\sum_{i=1}^m u_i^2(t)dt\le\int_E\Bigl(\sum_{i=1}^m u_i^2(t)\Bigr)^{1/2}dt.\tag{Б.12}$$

Але за припущенням $\sum\limits_{i=1}^m u_i^2(t)>1$, отже, $\sum\limits_{i=1}^m u_i^2(t)>(\sum\limits_{i=1}^m u_i^2(t))^{1/2}$, $t\in E$, і $\mu(E)>0$, що суперечить (Б.12). ■

Доведення наслідку 4.14. Нехай елементи $\ell_1,\dots,\ell_n$ задовольняють умови (3.18), (3.19). Тоді, зокрема, $c(\mathcal{L}^1+\dots+\mathcal{L}^k)=\mathrm{Lin}\{c(\ell_1),\dots,c(\ell_{v_k})\}$, $k=1,\dots,p$, де p — степінь неголономності, а $v=(v_1,\dots,v_p)$ — вектор зросту; за припущенням, вони однакові для всіх z. Введемо векторні поля $Y_i=H(\ell_i)$, $i=1,\dots,n$. Покажемо, що $Y_1,\dots,Y_n$ утворюють базис L_F.

Достатньо довести, що будь-яке векторне поле $Y = H(\ell)$, де $\ell \in \mathcal{L}^k$, $k \geq 1$, дорівнює лінійній комбінації $Y_1, \dots, Y_n$ зі сталими коефіцієнтами.

Припустимо, що $k \leq p$. Оскільки $Y(0) = c(\ell) \in c(\mathcal{L}^k)$, отримуємо

$$Y(0) = \sum_{i=1}^{v_k} \alpha_i Y_i(0),$$

де α_i — константи. Позначимо

$$\widehat{\ell} = \ell - \sum_{i=v_{k-1}+1}^{v_k} \alpha_i \ell_i \in \mathcal{L}^k, \quad \widehat{Y} = H(\widehat{\ell}) = Y - \sum_{i=v_{k-1}+1}^{v_k} \alpha_i Y_i,$$

тоді

$$c(\widehat{\ell}) = \widehat{Y}(0) = \sum_{i=1}^{v_{k-1}} \alpha_i Y_i(0) = \sum_{i=1}^{v_{k-1}} \alpha_i c(\ell_i) \in c(\mathcal{L}^1 + \cdots + \mathcal{L}^{k-1}),$$

тобто $\widehat{\ell} \in \mathcal{P}^k \subset \mathcal{L}_{X_1,\dots,X_m}$. Оскільки система є регулярною і однорідною в нулі, з теореми 4.7 випливає $\mathcal{L}_{X_1,\dots,X_m} = \mathcal{L}^z_{X_1,\dots,X_m}$ і, більш того, $c^z(\mathcal{L}^z_{X_1,\dots,X_m}) = c^z(\mathcal{L}_{X_1,\dots,X_m}) = 0$ для довільного $z \in \mathbb{R}^n$. Отже, $c^z(\widehat{\ell}) = \widehat{Y}(z) = 0$ для довільного $z \in \mathbb{R}^n$, тобто

$$\widehat{Y}(z) = Y(z) - \sum_{i=v_{k-1}+1}^{v_k} \alpha_i Y_i(z) = 0.$$

Це означає, що

$$Y(z) = \sum_{i=v_{k-1}+1}^{v_k} \alpha_i Y_i(z), \quad z \in \mathbb{R}^n.$$

Якщо $k \geq p+1$, тоді автоматично $\ell \in \mathcal{L}^z_{X_1,\dots,X_m}$, а отже, $c^z(\ell) = Y(z) = 0$ для довільного $z \in \mathbb{R}^n$.

Оскільки $L_F = H(\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathcal{L}^k)$, довільне векторне поле $Y(z) \in L$ дорівнює лінійній комбінації векторних полів $Y_1(z), \dots Y_n(z)$ зі *сталими* коефіцієнтами. Іншими словами, $Y_1, \dots, Y_n$ є базисом алгебри Лі векторних полів L (над $\mathbb{R}$). Отже, L є n-вимірною. $\blacksquare$

ДОДАТОК В

Доведення деяких результатів з лінеаризовності

Доведення теореми 7.1. Підставляючи заміну змінних і керування до системи (7.4), отримуємо

$$\dot{z} = F_x(x)Ax + F_x(x)Bu = \widetilde{A}F(x) + \widetilde{B}g(x,u).$$

Диференціюючи цю рівність по u, отримуємо $F_x(x)B = \widetilde{B}g_u(x,u)$. За умовою, $F_x(x)$ невироджене і B має максимальний ранг, отже, $\widetilde{B}$ також має максимальний ранг, $\operatorname{rank}(\widetilde{B}) = r$. Тобто $g(x,u)$ є лінійним по u і, крім того, існують дві матриці $P(x), G(x) \in C^1(x)$, $\det G(x) \neq 0$, для яких $g(x,u) = P(x) + G^{-1}(x)u$; тоді $u = -G(x)P(x) + G(x)g(x,u) = -G(x)P(x) + G(x)v$. Це означає, що система

$$\dot{x} = (Ax - BG(x)P(x)) + BG(x)v = \widehat{a}(x) + \widehat{B}(x)v$$

зводиться до лінійної системи (7.7) тільки за допомогою заміни змінних $z = F(x)$. Користуючись лемою 1.1, отримуємо, що тоді існують $\operatorname{ad}^k_{\widehat{a}}\widehat{b}_i(x) \in C^1(Q)$, причому

$$\operatorname{ad}^k_{\widehat{a}}\widehat{b}_j(x) = (-1)^k (F_x(x))^{-1}\widetilde{A}^k\widetilde{b}_j. \tag{B.1}$$

Нехай $w_0 = 0$, $w_j = \operatorname{rank}(B, \ldots, A^{j-1}B)$, $j \geq 1$. Тоді $w_1 = r$, $w_{n_1} = n$. Позначимо $d_j = w_j - w_{j-1}$, $K_j = (A^{j-1}b_1, \ldots, A^{j-1}b_{d_j})$, $j \geq 1$, і $M_0 = 0$, $M_s = (K_1, \ldots, K_s)$, $s \geq 1$; не обмежуючи загальності, припустимо, що $\operatorname{rank}(M_s) = w_s$, $s \geq 1$.

Доведемо, що існують вектори $Y_{s,j}(x) \in C^1(Q)$, $s = 0, \ldots, n_1$, $j = 1, \ldots, r$, для яких

$$\operatorname{ad}^s_{\widehat{a}}\widehat{b}_j(x) = (-1)^s A^s BG_j(x) + M_s Y_{s,j}(x), \tag{B.2}$$

де $G_j(x)$ — j-й стовпець матриці $G(x)$. Для $s = 0$, (B.2) збігається з означенням $\widehat{B}(x)$, тому можемо вибрати $Y_{0,j}(x) = 0$. Припустимо, що (B.2) виконується при $s = k - 1$. Тоді після перетворень маємо

$$\mathrm{ad}_{\widehat{a}}^{k}\widehat{b}_j(x) = [Ax - BG(x)P(x), \mathrm{ad}_{\widehat{a}}^{k-1}\widehat{b}_j(x)] =$$
$$= (-1)^k A^k BG_j(x) + A^{k-1}BS_1(x) + M_{k-1}S_2(x) + AM_{k-1}S_3(x) + BS_4(x),$$

де $S_q(x) \in C(Q)$. Але стовпці матриць $A^{k-1}B$, M_{k-1}, AM_{k-1} і B є лінійними комбінаціями стовпців M_k. Отже, останню рівність можна переписати так:

$$\mathrm{ad}_{\widehat{a}}^{k}\widehat{b}_j(x) = (-1)^k A^k BG_j(x) + M_k Y_{k,j}(x),$$

де $Y_{k,j}(x) \in C(Q)$. Оскільки M_k має максимальний ранг, $G_j(x) \in C^1(Q)$ і $\mathrm{ad}_{\widehat{a}}^{k}\widehat{b}_j(x) \in C^1(Q)$, отримуємо, що $Y_{k,j}(x) \in C^1(Q)$. Отже, (B.2) доведене за індукцією.

Тепер з (B.1) і (B.2) випливає, що

$$\mathrm{rank}(\widetilde{B}, \ldots, \widetilde{A}^{j-1}\widetilde{B}) = \mathrm{rank}(B, \ldots, A^{j-1}B) = w_j,$$

$j = 1, \ldots, n_1$, що й завершує доведення.

Доведення теореми 7.2. Необхідність. Умова (A) випливає з леми 7.1. Не обмежуючи загальності, вважатимемо, що вихідна система відображується на систему (1.58). Тоді

$$\dot{z}_{\sigma_i+n_i} = (F_{\sigma_i+n_i}(x))_x(a(x) + B(x)\phi(x,u)) = v_i = g_i(x,u), \quad i = 1, \ldots, r.$$

Введемо матрицю

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} (F_{\sigma_1+n_1}(x))_x \\ \cdots \\ (F_{\sigma_r+n_r}(x))_x \end{pmatrix} \in C^1(Q),$$

тоді $g(x,u) = \Psi(x)a(x) + \Psi(x)B(x)\phi(x,u)$. Диференціюючи по u, отримуємо $g_u(x,u) = \Psi(x)B(x)\phi_u(x,u)$, а оскільки $g_u(x,u)$ невироджена, матриця $\Psi(x)B(x)$ також невироджена. Позначимо

$$K(x) = \Psi(x)B(x), \quad \xi(x) = -(K(x))^{-1}\Psi(x)a(x),$$

тоді $K(x) \in C^1(Q)$, $\xi(x) \in C^1(Q)$, $\det K(x) \neq 0$ і $\phi(x,u) = \xi(x) + (K(x))^{-1}g(x,u)$. Підставимо ці вирази до системи (7.5). Позначаючи

$$\widehat{a}(x) = a(x) + B(x)\xi(x), \quad \widehat{B}(x) = B(x)(K(x))^{-1}$$

і підставляючи $v = g(x,u)$, отримуємо систему

$$\dot{x} = \widehat{a}(x) + \widehat{B}(x)v = \widehat{a}(x) + \sum_{i=1}^{r} \widehat{b}_i(x)v_i,$$

яка зводиться до лінійної тільки за допомогою заміни змінних $z = F(x)$. Користуючись лемою 1.1, отримуємо, що тоді $\mathrm{ad}_{\widehat{a}}^k \widehat{b}_j(x)$, $j = 1,\dots,r$, $k \geq 1$, існують і належать класу $C^1(Q)$ і, крім того,

$$\mathrm{ad}_{\widehat{a}}^k \widehat{b}_j(x) = (-1)^k (F_x(x))^{-1} A^k b_j, \tag{B.3}$$

$$[\mathrm{ad}_{\widehat{a}}^k \widehat{b}_j(x), \mathrm{ad}_{\widehat{a}}^p \widehat{b}_s(x)] = 0 \tag{B.4}$$

при $x \in Q$, $j,s = 0,\dots,r$ і $k,p \geq 0$.

Скористаємось рівностями (B.3), (B.4). Для $j = 0,\dots,n_1 - 1$ означимо

$$(\chi_1^j(x),\dots,\chi_r^j(x)) = (\mathrm{ad}_{\widehat{a}}^j \widehat{b}_1(x),\dots,\mathrm{ad}_{\widehat{a}}^j \widehat{b}_r(x))K(x),$$

тоді $\chi_i^j(x) \in C^1(Q)$, $j = 0,\dots,n_1 - 1$, $i = 1,\dots,r$, і з леми 7.1 випливає (B_2). Тепер використаємо зображення

$$\chi_s^j(x) = \sum_{i=1}^{r} \mathrm{ad}_{\widehat{a}}^j \widehat{b}_i(x)\gamma_{is}(x), \tag{B.5}$$

$$\mathrm{ad}_{\widehat{a}}^j \widehat{b}_s(x) = \sum_{i=1}^{r} \chi_i^j(x)\widehat{\gamma}_{is}(x), \tag{B.6}$$

де $\gamma_{is}(x) \in C^1(Q)$ і $\widehat{\gamma}_{is}(x) \in C^1(Q)$ — елементи матриць $K(x)$ і $(K(x))^{-1}$ відповідно. Зокрема, оскільки $B(x) = \widehat{B}(x)K(x)$, отримуємо

$$\chi_i^0(x) = b_i(x), \quad i = 1,\dots,r, \tag{B.7}$$

$$b_s(x) = \sum_{i=1}^{r} \widehat{b}_i(x)\gamma_{is}(x), \quad \widehat{b}_s(x) = \sum_{i=1}^{r} b_i(x)\widehat{\gamma}_{is}(x). \tag{B.8}$$

Нехай $\xi_q(x) \in C^1(Q)$ — компоненти $\xi(x)$. Тоді

$$\chi_s^{j+1}(x)=\sum_{i=1}^{r}[\widehat{a}(x),\mathrm{ad}_{\widehat{a}}^{j}\widehat{b}_i(x)]\gamma_{is}(x)=\sum_{i=1}^{r}\Big[a(x)+\sum_{q=1}^{r}b_q(x)\xi_q(x),\mathrm{ad}_{\widehat{a}}^{j}\widehat{b}_i(x)\Big]\gamma_{is}(x). \tag{B.9}$$

Оскільки

$$[a(x),\mathrm{ad}_{\widehat{a}}^{j}\widehat{b}_i(x)]\gamma_{is}(x) = [a(x),\mathrm{ad}_{\widehat{a}}^{j}\widehat{b}_i(x)\gamma_{is}(x)] - (\gamma_{is}(x))_x a(x)\mathrm{ad}_{\widehat{a}}^{j}\widehat{b}_i(x),$$

використовуючи (B.5), (B.6), маємо

$$\sum_{i=1}^{r}[a(x),\mathrm{ad}_{\widehat{a}}^{j}\widehat{b}_i(x)]\gamma_{is}(x) = [a(x),\chi_s^j(x)] + \sum_{p=1}^{r}\beta_{ps}(x)\chi_p^j(x),$$

де $\beta_{ps}(x) = -\sum_{i=1}^{r}(\gamma_{is}(x))_x a(x)\widehat{\gamma}_{pi}(x) \in C(Q)$. Враховуючи (B.7), (B.8), отримуємо

$$[b_q(x)\xi_q(x),\mathrm{ad}_{\widehat{a}}^{j}\widehat{b}_i(x)] = \sum_{k=1}^{r}[\widehat{b}_k(x),\mathrm{ad}_{\widehat{a}}^{j}\widehat{b}_i(x)]\theta_{kq}(x) + \sum_{p=1}^{r}\delta_{pq}^{ij}(x)\chi_p^0(x),$$

де $\theta_{kq}(x) = \gamma_{kq}(x)\xi_q(x) \in C^1(Q)$ і $\delta_{pq}^{ij}(x) = -\sum_{k=1}^{r}(\theta_{kq}(x))_x\mathrm{ad}_{\widehat{a}}^{j}\widehat{b}_i(x)\widehat{\gamma}_{pk}(x) \in C(Q)$. Нагадаємо, що виконується (B.4); отже, з (B.7), (B.9) і попередніх розрахунків випливає (B_1). Аналогічно

$$\begin{aligned}[\chi_s^j(x),\chi_k^p(x)] = \sum_{i,q=1}^{r}[\mathrm{ad}_{\widehat{a}}^{j}\widehat{b}_i(x),\mathrm{ad}_{\widehat{a}}^{p}\widehat{b}_q(x)]\gamma_{is}(x)\gamma_{qk}(x)+\\ +\sum_{i=1}^{r}\nu_{isk}^{jp}(x)\chi_i^j(x) + \sum_{i=1}^{r}\zeta_{isk}^{jp}(x)\chi_i^p(x),\end{aligned}$$

де $\nu_{isk}^{jp}(x),\zeta_{isk}^{jp}(x) \in C(Q)$, звідки випливає ($\mathrm{B}_3$) завдяки (B.4).

Нарешті, для $k = \sigma_i+1,\ldots,\sigma_i+n_i-1$, з вигляду системи (1.58) випливає

$$\dot{z}_k = (F_k(x))_x(a(x) + B(x)\phi(x,u)) = F_{k+1}(x).$$

Диференціюючи цю рівність по u, отримуємо $(F_k(x))_x B(x)\phi_u(x,u) = 0$; тоді $(F_k(x))_x B(x) = 0$. Отже, $F_{k+1}(x) = (F_k(x))_x a(x) = L_a F_k(x)$, тобто

$$F_{\sigma_i+j}(x) = L_a^{j-1}F_{\sigma_i+1}(x) \in C^2(Q),\ \ j = 2,\ldots,n_i,$$

звідки отримуємо (7.9) з $\varphi_i(x) = F_{\sigma_i+1}(x) \in C^2(Q)$, $i = 1, \ldots, r$. Рівності (7.9) і лінійна незалежність $H_i(x)$ випливають з (B.5) і леми 7.1.

Достатність. Нехай умови (A), (B$_1$)–(B$_4$) виконуються, тоді система має вигляд (7.5). Виберемо

$$F_{\sigma_i+j}(x) = L_a^{j-1}\varphi_i(x),\ j = 1, \ldots, n_i,$$
$$g_i(x,u) = L_a^{n_i}\varphi_i(x) + \sum_{s=1}^{r} L_{b_s}L_a^{n_i-1}\varphi_i(x)\phi_s(x,u),$$

тоді для $j = 1, \ldots, n_i - 1$

$$\dot z_{\sigma_i+j} = L_a^j\varphi_i(x) + \sum_{s=1}^{r} L_{b_s}L_a^{j-1}\varphi_i(x)\phi_s(x,u) = z_{\sigma_i+j+1} + \sum_{s=1}^{r} L_{b_s}L_a^{j-1}\varphi_i(x)\phi_s(x,u),$$

і $\dot z_{\sigma_i+n_i} = g_i(x,u) = v_i$. Доведемо, що

$$L_{b_s}L_a^{j-1}\varphi_i(x) = 0,\ \ j = 1, \ldots, n_i - 1,\ \ s = 1, \ldots, r. \tag{B.10}$$

Для цього покажемо, що для всіх $i, s = 1, \ldots, r$ і $j = 0, \ldots, n_i - 1$

$$\begin{aligned} &(L_a^j\varphi_i(x))_x\chi_s^k(x) = 0, \quad k = 0, \ldots, n_i - 2 - j,\\ &(L_a^j\varphi_i(x))_x\chi_s^{n_i-1-j}(x) = (-1)^j(\varphi_i(x))_x\chi_s^{n_i-1}(x). \end{aligned} \tag{B.11}$$

При $j = 0$ з умови (B$_4$) одразу отримуємо (B.11). Припустимо, що (B.11) виконується для всіх $j = 0, \ldots, \ell$. Нехай $1 \le k \le n_i - 1 - (\ell + 1) = n_i - 2 - \ell$, тоді $(L_a^\ell\varphi_i(x))_x\chi_p^q(x) = 0$ при $q = 0, \ldots, k$, $p = 1, \ldots, r$. Отже, використовуючи (B$_1$), отримуємо

$$\begin{aligned} (L_a^{\ell+1}\varphi_i(x))_x\chi_s^k(x) &= \left((L_a^\ell\varphi_i(x))_x a(x)\right)_x\chi_s^k(x) = (L_a^\ell\varphi_i(x))_x[\chi_s^k(x), a(x)] =\\ &= (L_a^\ell\varphi_i(x))_x\Big(-\chi_s^{k+1}(x) + \sum_{q=0}^{k}\sum_{p=1}^{r}\mu_{ks}^{qp}(x)\chi_p^q(x)\Big) = -\,(L_a^\ell\varphi_i(x))_x\chi_s^{k+1}(x). \end{aligned}$$

Останній вираз дорівнює 0 при $k \le n_i - 3 - \ell = n_i - 2 - (\ell + 1)$ і дорівнює $(-1)^{\ell+1}(\varphi_i(x))_x\chi_s^{n_i-1}(x)$ при $k = n_i - 2 - \ell = n_i - 1 - (\ell + 1)$. Це доводить (B.11) за індукцією.

Оскільки $\chi_s^0(x) = b_s(x)$, з (B.11) випливає (B.10), отже, вказана заміна змінних і керування зводить систему до вигляду (1.58). Більш того, з (B.11) отримуємо

$$L_{b_s}L_a^{n_i-1}\varphi_i(x) = (-1)^{n_i-1}(\varphi_i(x))_x\chi_s^{n_i-1}(x) = (-1)^{n_i-1}H_{is}(x),$$

де рядки $H_i(x) = (H_{i1}(x), \ldots, H_{ir}(x))$ введені у (B_4). Отже,

$$(g_i(x,u))_u = (-1)^{n_i-1} \sum_{s=1}^{r} H_{is}(x)(\phi_s(x,u))_u = (-1)^{n_i-1} H_i(x)\phi_u(x,u).$$

Завдяки (A) і (B_4), $\det g_u(x,u) \neq 0$, $x \in Q$.

Залишилося довести, що $\det F_x(x) \neq 0$, $x \in Q$. Припустимо, що $\det F_x(x) = 0$ для деякого $x = x^0 \in Q$, тоді існує нетривіальна множина чисел ϱ_i^j, для якої

$$\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=0}^{n_i-1} \varrho_i^j (L_a^j \varphi_i(x))_x = 0 \text{ при } x = x^0. \tag{B.12}$$

Знов скористаємось індукцією. Нехай для деякого $0 \leq p \leq n_1 - 1$

$$\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=0}^{n_i-1-p} \varrho_i^j (L_a^j \varphi_i(x))_x = 0 \quad \text{при} \quad x = x^0 \tag{B.13}$$

(для $p = 0$ ця рівність збігається з (B.12)). Помножуючи обидві частини (B.13) на $\chi_s^p(x)$ і враховуючи (B.11), отримуємо

$$\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=0}^{n_i-1-p} \varrho_i^j (L_a^j \varphi_i(x))_x \chi_s^p(x) = \sum_{i=1}^{r} \varrho_i^{n_i-1-p} (-1)^{n_i-1-p} (\varphi_i(x))_x \chi_s^{n_i-1}(x) =$$
$$\sum_{i=1}^{r} \varrho_i^{n_i-1-p} (-1)^{n_i-1-p} H_{is}(x) = 0 \text{ при } x = x^0$$

для всіх $s = 1, \ldots, r$. Отже, (B_4) дає

$$\varrho_i^{n_i-1-p} = 0, \quad i = 1, \ldots, r, \tag{B.14}$$

тому з (B.13) випливає

$$\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=0}^{n_i-1-(p+1)} \varrho_i^j (L_a^j \varphi_i(x))_x = 0 \quad \text{при} \quad x = x^0.$$

Продовжуючи ці міркування для $p \leq n_1 - 1$, отримуємо з (B.14), що $\varrho_i^j = 0$ для всіх $j = 0, \ldots, n_i - 1$, $i = 1, \ldots, r$, що суперечить припущенню. Отже, $\det F_x(x) \neq 0$, $x \in Q$. ■