Національна академія наук України
Фізико-технічний інститут низьких температур ім. Б.І. Вєркіна

Гладка Зоя Миколаївна

УДК 517.957

МЕТОД ОБЕРНЕНОЇ ЗАДАЧІ РОЗСІЮВАННЯ ДЛЯ РІВНЯННЯ КОРТЕВЕГА–ДЕ ФРІЗА З ПОЧАТКОВИМИ ДАНИМИ ТИПУ СХОДИНКИ

01.01.03 – математична фізика

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Харків – 2016

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана у Фізико-технічному інституті низьких температур ім. Б.І. Вєркіна Національної академії наук України.

Науковий керівник:

доктор фізико-математичних наук,
старший науковий співробітник
Єгорова Ірина Євгенівна,
Фізико-технічний інститут низьких температур ім. Б.І. Вєркіна НАН України (м. Харків),
провідний науковий співробітник відділу статистичних методів математичної фізики.

Офіційні опоненти:

доктор фізико-математичних наук, професор
Гордевський В'ячеслав Дмитрович,
Харківський національний університет ім. В.Н. Каразіна, професор кафедри фундаментальної математики,

кандидат фізико-математичних наук
Мінаков Олександр Олександрович,
науковий співробітник SISSA (International School for Advanced Studies, Трієст, Італія).

Захист відбудеться «22» червня 2016 р. о 15 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 64.175.01 у Фізико-технічному інституті низьких температур ім. Б.І Вєркіна НАН України за адресою: м. Харків, просп. Науки, 47.

З дисертацією можна ознайомитися у науковій бібліотеці Фізико-технічного інституту низьких температур ім. Б.І. Вєркіна НАН України за адресою: м. Харків, просп. Науки, 47.

Автореферат розісланий «20» травня 2016 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради Горькавий В.О.

Національна академія наук України
Фізико-технічний інститут низьких температур ім. Б.І. Вєркіна

Гладка Зоя Миколаївна

УДК 517.957

МЕТОД ОБЕРНЕНОЇ ЗАДАЧІ РОЗСІЮВАННЯ ДЛЯ РІВНЯННЯ КОРТЕВЕГА–ДЕ ФРІЗА З ПОЧАТКОВИМИ ДАНИМИ ТИПУ СХОДИНКИ

01.01.03 – математична фізика

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Харків – 2016

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана у Фізико-технічному інституті низьких температур ім. Б.І. Вєркіна Національної академії наук України.

Науковий керівник:

доктор фізико-математичних наук,
старший науковий співробітник
Єгорова Ірина Євгенівна,
Фізико-технічний інститут низьких температур ім. Б.І. Вєркіна НАН України (м. Харків),
провідний науковий співробітник відділу статистичних методів математичної фізики.

Офіційні опоненти:

доктор фізико-математичних наук, професор
Гордевський В'ячеслав Дмитрович,
Харківський національний університет ім. В.Н. Каразіна, професор кафедри фундаментальної математики,

кандидат фізико-математичних наук
Мінаков Олександр Олександрович,
науковий співробітник SISSA (International School for Advanced Studies, Трієст, Італія).

Захист відбудеться «____»__________2016 р. о ____ годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 64.175.01 у Фізико-технічному інституті низьких температур ім. Б.І Вєркіна НАН України за адресою: м. Харків, просп. Науки, 47.

З дисертацією можна ознайомитися у науковій бібліотеці Фізико-технічного інституту низьких температур ім. Б.І. Вєркіна НАН України за адресою: м. Харків, просп. Науки, 47.

Автореферат розісланий «_____»_____________2016 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради Горькавий В.О.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Метод оберненої задачі розсіювання (МОЗР) є одним з найефективніших методів в теорії інтегровних систем. Його відкриття належить К. Гарднеру, Дж. Гріну, М. Краскалу і Р. Міурі (1967), які знайшли зв'язок між рівнянням Кортевега-де Фріза (КдФ) та одновимірним оператором Шрьодінгера. З цього часу, без перебільшення сотні досліджень, як математичних, так і фізичних, було присвячено удосконаленню цього методу і його застосуванню до різних нелінійних рівнянь, що відіграють важливу роль у фізиці. З іншого боку, ці дослідження викликали нову хвилю інтересу до різноманітних обернених задач, у тому числі до задачі, яка лежала в основі МОЗР, а саме, задачі розсіювання для одновимірного оператора Шрьодінгера на всій осі зі спадним потенціалом. Ця задача вважалася добре вивченою після робіт Л.Д. Фаддеева (1964), але згодом вона зазнала значної ревізії в роботах В.О. Марченка (1977) і, незалежно, П. Дейфта та Е. Трубовіца (1979). Зокрема, їхні дослідження показали, що в характеристичних властивостях даних розсіювання істотна роль належить аналітичними властивостями цих даних на кінці неперервного спектру.

Природним узагальненням методу МОЗР було його застосування до інтегровних нелінійних рівнянь із так званими початковими даними типу сходинки, що є асимптотично близькими до різних сталих на різних півосях. Моделі цього типу привернули увагу фізиків несподіваними асимптотичними властивостями розв’язків і призвели до виникнення поняття асимптотичних солітонів, які активно досліджувалися в роботах Є.Я. Хруслова і В.П. Котлярова (1976, 1989). Слід зазначити, що, незважаючи на схожість у спектральних властивостях операторів Шрьодінгера зі спадним потенціалом і потенціалом типу сходинки, асимптотики розв’язків відповідних задач Коші для рівняння КдФ істотно розрізняються. Зокрема, у випадку початкових даних типу сходинки на просторово-часовій площині виникає так звана зона дисперсійного стиснення, де розв’язок є асимптотично близьким до деякої еліптичної функції Якобі. На фізичному рівні строгості для випадку функції Хевісайда у ролі початкових умов таку асимптотику було описано А.В. Гуревичем і Л.П. Пітаєвським (1973) за допомогою методу Уізема. За винятком солитонної зони та зони асимптотичних солітонів, математично обґрунтованих асимптотик для розв’язків рівняння Кортевега де Фріза із початковим профілем типу сходинки досі не отримано. Це можна зробити нелінійним методом найшвидшого спуску для осціляційної задачі Рімана-Гільберта, що є одним із варіантів МОЗР. Він є строгим і найбільш уживаним методом дослідження асимптотик нелінійних рівнянь за великим часом. Його застосування у випадку початкових умов типу сходинки потребує, перш за все, добре розвиненої теорії розсіювання для відповідного лінійного оператора пари Лакса. Слід зауважити, що незважаючи на досить значну кількість робіт, присвячених операторам з коефіцієнтами типу сходинки, пряма і обернена задача розсіювання для оператора Шрьодінгера з потенціалом типу сходинки є не до кінця дослідженою, на відміну від спадного випадку, де відповідні результати В.О. Марченка мають завершений характер. Суттєві результати обмежуються піонерською роботою В.С. Буслаєва, В.Н. Фоміна (1962), де розглянута пряма задача розсіювання, та роботами Е. Коен і Т. Каппелера (1984), де задачу досліджено для другого скінченного моменту. Дану дисертаційну роботу присвячено саме розв'язанню прямої та оберненої задач розсіювання для оператора Шрьодінгера у класі потенціалів типу сходинки, що мають заданий момент збурення, починаючи з першого, та задану гладкість; ці результаті застосовано для розв'язання асоційованої задачі Коші для рівняння Кортевега-де Фріза, а також для отримання асимптотики розв'язку методом задачі Рімана-Гільберта (РГ). Тому результати, отримані в дисертації є актуальними і цікавими для фахівців як зі спектральної теорії операторів, так і з теорії нелінійних інтегровних рівнянь.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дослідження, які склали основу дисертаційної роботи, проводилися у відділі статистичних методів математичної фізики Математичного відділення Фізико-технічного інституту низьких температур імені Б.І. Вєркіна НАН України згідно з науково-дослідною темою «Спектральний аналіз нових класів операторів та його застосування в теорії інтегрованих систем та фізиці конденсованого стану», номер держреєстрації 0110U007898.

Мета і задачі дослідження. Мета дисертації полягає в розв'язанні задачі розсіювання для оператора Шрьодінгера з потенціалом типу сходинки, який має задані гладкість і число моментів збурення, та розв'язанні задачі Коші для рівняння КдФ з початковими даними цього класу і знаходженні асимптотики поведінки розв'язку такої задачі Коші за великим часом.

Об'єктом дослідження є одновимірні оператори Шрьодінгера з потенціалами типу сходинки та асоційовані з ними рівняння КдФ.

Предметом дослідження є прямі і обернені задачі розсіювання для оператора Шрьодінгера на всій осі; задача Коші для рівняння КдФ з початковими даними типу сходинки, а також асимптотична поведінка розв'язку цієї задачі Коші за великим часом.

Методи дослідження. При розв'язанні задачі Коші використовується метод оберненої задачі розсіювання. Для дослідження асимптотик використовується нелінійний метод найшвидшого спуску для осциляційної задачі Рімана - Гільберта.

Наукова новизна одержаних результатів. У роботі вперше :

1. Повністю розв'язано пряму та обернену задачі розсіювання для одновимірного оператора Шрьодінгера на всій осі з потенціалом типу сходинки в класі збурень, що мають будь які задане число моментів збурення, починаючи з першого, та гладкість, починаючи з нульової.
2. Розв'язано задачу Коші для рівняння Кортевега-де Фріза з початковими умовами типу сходинки, що мають задану гладкість та число

моментів збурення, у більш загальному класі, ніж у відомих попередніх результатах.

3. В основних регіонах на півплощині простір-час отримані асимптотики розв'язку задачі Коші для рівняння Кортевега-де Фріза з початковими даними типу сходинки, що відповідають хвилі стиснення.

Практичне значення одержаних результатів. Результати дисертації мають теоретичний характер, отримані результати та розвинені методи можуть бути використані у напрямку дослідження поведінки розв'язку рівняння КдФ у різних асимптотичних режимах.

Особистий внесок автора. Основні результати дисертації отримані автором особисто та самостійно. Постановка задач та наукове керівництво належать І.Є. Єгоровій. Доведення представлених до захисту результатів проведено здобувачем особисто. В роботах, отриманих в співавторстві, авторство розподілене наступним чином: в [1] Г. Тешлу належить теорема 6.2, В.П. Котлярову – результати в додатку; в [2] Г. Тешл є автором теореми 4.1, Т.Л. Лянге – леми 4.2; в [3] Г. Тешл є автором лем 3.1 и 3.2, решта основних результатів належить здобувачеві.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертаційної роботи доповідались на наступних міжнародних наукових конференціях: "Конференція молодих вчених – Фізика Низьких Температур" (Харків, 2012), "Четвертая международная конференция молодых ученых по дифференциальным уравнениям и их приложениям имени Я.Б. Лопатинского" (Донецьк, 2012), "Міжнародна конференція молодих математиків" (Київ, 2015), міжнародна конференція “Analysis and Mathematical Physics” (Харків, 2015) "Международная конференция по динамическим системам — Shilnikov Workshop" (Нижній Новгород, Росія, 2015), а також на семінарі Математичного відділення ФТІНТ ім. Б.І. Веркіна НАН України, на семінарі з математичної фізики ФТІНТ ім. Б.І. Веркіна НАН України та на семінарі з теорії операторів Донецького національного університету.

Публікації. Основні результати дисертаційної роботи містяться у 5-х статтях у фахових виданнях [1]–[5] та в 5 матеріалах і тезах міжнародних математичних конференцій [6]–[10].

Структура і обсяг дисертації. Дисертація складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків та списку використаних джерел. Загальний обсяг дисертації складає 139 сторінок. Список літератури займає 10 сторінок і містить 91 найменування. Результати, що виносяться на захист, сформульовано та доведено в розділах 2 – 4.

Автор висловлює щиру подяку Єгоровій Ірині Євгенівні за наукове керівництво та увагу до дисертації.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У першому розділі наведено огляд літератури по темі дисертації, а також описуються основи методу оберненої задачі розсіювання.

Другий розділ містить дослідження з теорії розсіювання для одновимірного оператора Шрьодінгера $L=-\frac{d^2}{dx^2}+q(x)$ з потенціалом $q(x)\in\mathbb{R}$ типу сходинки, що прямує до різних дійсних сталих $c_+\neq c_-$ на різних півосях. Будемо говорити, що цей потенціал належіть класу $\mathcal{L}_m^n(c_+,c_-)$ при деяких цілих $m\geq 1$, $n\geq 0$, якщо

$$\int_0^\infty (1+|x|^m)(|q(x)-c_+|+|q(-x)-c_-|)dx<\infty$$

та $q^{(n)}(\cdot)\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$, причому у випадку $n\geq 1$ також виконується умова $x^m q^{(j)}(x)\in L^1(\mathbb{R})$, $1\leq j\leq n$.

У підрозділі 2.1 досліджено пряму задачу розсіювання для оператора L. Зокрема, для будь якого $n\geq 1$ вивчено властивості розв'язків Йоста

$$\phi_\pm(\lambda,x)=e^{\pm ik_\pm x}+\int_x^{\pm\infty}K_\pm(x,y)e^{\pm ik_\pm y},\quad k_\pm=k_\pm(\lambda)=\sqrt{\lambda-c_\pm},$$

рівняння $L\phi=\lambda\phi$ (у випадку $n=0$ вони є відомими). Описано алгебраїчні та аналітичні властивості даних розсіювання

$$\begin{gathered}\mathcal{S}_m^n(c_+,c_-):=\Big\{R_+(\lambda),\ T_+(\lambda),\ \sqrt{\lambda-c_+}\in\mathbb{R};\ R_-(\lambda),\ T_-(\lambda),\ \sqrt{\lambda-c_-}\in\mathbb{R};\\ \lambda_1,\ldots,\lambda_N\in(-\infty,\underline{c}),\quad \gamma_1^\pm,\ldots,\gamma_N^\pm\in\mathbb{R}_+\Big\},\end{gathered}\tag{1}$$

де $R_+(\lambda)$ та $T_+(\lambda)$ (відп., $R_-(\lambda)$ та $T_-(\lambda)$) це праві (відп., ліві) коефіцієнти відбиття та проходження, λ_j, $\mathrm{j}=1,\ldots,\mathrm{N}$ – точки дискретного спектру, а $\gamma_j^\pm:=\left(\int_{\mathbb{R}}\phi_\pm^2(\lambda_j,x)dx\right)^{-1}$ – праві та ліві нормувальні сталі.

Властивості даних розсіювання описуються через властивості вронскіана розв'язків Йоста $W(\lambda):=W\big(\phi_-(\lambda,\cdot),\phi_+(\lambda,\cdot)\big)$ наступними двома лемами:

Лема 2.3. *Нехай $q\in\mathcal{L}_m^n(c_+,c_-)$ при $m\geq 1$ та $n\geq 0$. Тоді функція $W(\lambda)$:*

(i) є голоморфною в області $\mathcal{D}:=\mathbb{C}\setminus[\underline{c},+\infty)$, де $\underline{c}=\min\{c_+,c_-\}$, і неперервною аж до границі цієї області. Крім того, $W(\lambda+\mathrm{i}0)=\overline{W(\lambda-\mathrm{i}0)}\neq 0$ при $\lambda\in(\underline{c},+\infty)$;

(ii) в області $\mathcal{D}$ має прості нулі тільки у точках $\lambda_1,\ldots,\lambda_N$, причому

$$\left(\frac{dW}{d\lambda}(\lambda_j)\right)^{-2}=\gamma_j^+\gamma_j^-.$$

Позначимо $\overline{c} = \max\{c_+, c_-\}$ і нехай $\Sigma^{(1)} = \{(\lambda + \mathrm{i}0) \cup (\lambda - \mathrm{i}0) : \lambda \in [\underline{c}, \overline{c}]\}$, $\Sigma^{(2)} = \{(\lambda + \mathrm{i}0) \cup (\lambda - \mathrm{i}0) : \lambda \in [\overline{c}, \infty)\}$, є верхніми та нижніми сторонами розрізів вздовж однократного та двократного спектрів оператора L.

Лема 2.4. *За умови* $q \in \mathcal{L}_m^n(c_+, c_-)$ *при* $m \geq 1$, $n \geq 0$, *елементи матриці розсіювання мають наступні властивості:*

I.

(a) $R_\pm(\lambda + \mathrm{i}0) = \overline{R_\pm(\lambda - \mathrm{i}0)}$ *при* $k_\pm(\lambda) \in \mathbb{R}$.

(b) $\dfrac{T_\pm(\lambda)}{\overline{T_\pm(\lambda)}} = R_\pm(\lambda)$ *при* $\lambda \in \Sigma^{(1)}$, *коли* $c_\pm = \underline{c}$.

(c) $1 - |R_\pm(\lambda)|^2 = \dfrac{k_\mp}{k_\pm} |T_\pm(\lambda)|^2$ *коли* $\lambda \in \Sigma^{(2)}$.

(d) $\overline{R_\pm(\lambda)} T_\pm(\lambda) + R_\mp(\lambda) \overline{T_\pm(\lambda)} = 0$ *при* $\lambda \in \Sigma^{(2)}$.

(e) $T_\pm(\lambda) = 1 + O(\lambda^{-1/2})$ *та* $R_\pm(\lambda) = O(\lambda^{-1/2})$ *при* $\lambda \to \infty$.

II.

(a) *Функції* $T_\pm(\lambda)$ *продовжуються мезоморфним чином в область* $\mathcal{D}$, *при цьому* $2\mathrm{i}k_+(\lambda) T_+^{-1}(\lambda) = 2\mathrm{i}k_-(\lambda) T_-^{-1}(\lambda) =: W(\lambda)$, *де функція* $W(\lambda)$ *має властивості* ***(i)–(ii)*** *леми 2.3.*

(b) *Якщо* $W(\underline{c}) = 0$, *то* $W(\lambda) = \mathrm{i}\gamma\sqrt{\lambda - \underline{c}}(1 + o(1))$, $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

III. *Функція* $R_\pm(\lambda)$ *є неперервною при* $k_\pm(\lambda) \in \mathbb{R}$.

Всі перелічені властивості даних розсіювання мають універсальний характер, тобто не залежать від точного значення параметрів гладкості потенціалу та його швидкості прямування до своїх асимптот. Вся інформація про клас, якому належить потенціал, міститься у поведінці ядер рівнянь Гельфанда- Левітана- Марченка (ГЛМ)

$$K_\pm(x, y) + F_\pm(x + y) \pm \int_x^{\pm\infty} K_\pm(x, s) F_\pm(s + y)\, ds = 0, \quad \pm y > \pm x,$$

які для досліджуваної задачі мають наступний вигляд:

$$F_\pm(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} R_\pm(\lambda) e^{\pm \mathrm{i}k_\pm x} dk_\pm + \sum_{j=1}^{N} \gamma_j^\pm \mathrm{e}^{\mp\sqrt{c_\pm - \lambda_j}\, x} + \begin{cases} \dfrac{1}{4\pi} \displaystyle\int_{\underline{c}}^{\overline{c}} |T_\mp(\lambda)|^2 |k_\mp|^{-1} \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}k_\pm x} d\lambda, & c_\pm = \overline{c}, \\ 0, & c_\pm = \underline{c}. \end{cases} \tag{2}$$

Лема 2.8. *За умови* $q \in \mathcal{L}_m^n(c_+, c_-)$, $m \geq 1$, $n \geq 0$ *:*

IV. *Функція* $F_\pm(x)$ *є* $n+1-$ *раз диференційованою, причому*

$$F_\pm^{(n+1)} \in L_{\mathrm{loc}}^1(\mathbb{R}) \quad \text{та} \quad x^m F_\pm^{(j)}(x) \in L^1(\mathbb{R}_\pm),\ j = 1, \ldots, n+1.$$

Результати розділу підсумовує

Теорема 2.1. *Дані розсіювання (1), що відповідають потенціалу* $q \in \mathcal{L}_m^n(c_+, c_-)$ *мають властивості* ***I–III*** *леми 2.4. Функції* $F_\pm(x,y)$, *означені формулою (2), мають властивість* ***IV*** *леми 2.8.*

У підрозділі 2.2 розв'язано обернену задачу розсіювання для потенціалів досліджуваного класу, причому її розв'язано за умовами більш загальними, ніж ті, що відповідають першому сумовному моменту збурень.

Теорема 2.2. *Нехай множина* $\mathcal{S}_m^n(c_+, c_-)$ *виду* (1) *задовольняє умови* **I–III**, *і нехай* $F_\pm(x)$, *що означена формулою* (2), *задовольняє наступну умову:*

IV$^{\mathbf{weak}}$. *Функція* $F_\pm(x)$ *є абсолютно неперервною і* $F_\pm' \in L^1(\mathbb{R}_\pm) \cap L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$. *Для будь якого* $x_0 \in \mathbb{R}$ *існує невід'ємна неперервна функція* $\tau_\pm(x, x_0)$, *що спадає при* $x \to \pm\infty$, *де* $\tau_\pm(\cdot, x_0) \in L^1(\mathbb{R}_\pm)$, *така, що* $|F_\pm(x)| \le \tau_\pm(x, x_0)$ *при* $\pm x \ge \pm x_0$. *Тоді при кожному* x *рівняння ГЛМ має єдиний розв'язок* $K_\pm(x,\cdot) \in L^1([x, \pm\infty))$ *такий, що* $\frac{d}{dx} K_\pm(x,x) := q_\pm(x) \in L^1(\mathbb{R}_\pm) \cap L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$. *Якщо при цьому функція* $F_\pm$ *задовольняє умову* ***IV***, *тоді* $q_\pm^{(n)} \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ *і* $x^m q_\pm^{(j)}(x) \in L^1(\mathbb{R}_\pm)$ *при* $j = 0, \dots, n$.

Далі встановлюється, що ці дві функції визначають один й той же потенціал, тобто має місце наступна

Теорема 2.3. *Нехай множина* $\mathcal{S}_m^n(c_+, c_-)$ *задовольняє умови* **I**–**III** *та* **IV**$^{\text{weak}}$. *Тоді* $q_-(x) \equiv q_+(x) =: q(x)$. *Якщо* $\mathcal{S}_m^n(c_+, c_-)$ *задовольняє умови* **I–IV**, *тоді* $q \in \mathcal{L}_m^n(c_+, c_-)$.

Отже, умови **I–IV** є необхідними і достатніми умовами на дані розсіювання оператора Шрьодінгера з потенціалом класу $\mathcal{L}_m^n(c_+, c_-)$ при $m \ge 1$ та $n \ge 0$, задачу розсіювання цілком розв'язано у заданому класі.

У підрозділі 2.3 встановлена додаткова властивість коефіцієнтів відображення у випадку гладких потенціалів, тобто, коли $n \ge 1$.

Теорема 2.4. *Нехай* $q \in \mathcal{L}_m^n(c_+, c_-)$ *при* $m, n \ge 1$. *Тоді при* $\lambda \to \infty$

$$\frac{d^s}{dk_\pm^s} R_\pm(\lambda) = g_{\pm,s}(k_\pm) \lambda^{-\frac{n+1}{2}}, \quad s = 0, 1, \ldots, m-1,$$

де $g_{\pm,s}(k_\pm) \in L^2((-\infty, -a] \cup [a, +\infty))$ *для* $a \gg 1$.

Ця властивість не входить до списку необхідних та достатніх умов, але разом з умовою **IV**$^{\mathbf{weak}}$ вона дозволяє узагальнити клас, до якого повинні належати початкові умови $q(x,0) = q(x)$ задачі Коші для рівняння Кортевега - де Фріза (КдФ)

$$q_t(x,t) = -q_{xxx}(x,t) + 6qq_x(x,t), \tag{3}$$

щоб було можливим застосувати МОЗР і отримати класичний, тобто, з трьома похідними, розв'язок, що буде прямувати до тих самих асимптот.

Розділ 3 присвячено розв'язанню такої задачі Коші у випадку, коли початкові умови відповідають ударній хвилі:

$$q(x) = q(x,0) \to \begin{cases} 0, & \text{де } x \to +\infty, \\ -c^2, & \text{де } x \to -\infty. \end{cases} \tag{4}$$

Теорема 3.1. *Нехай* $q(x) \in \mathcal{L}_{m_0}^{n_0}(0,-c^2)$ *при* $m_0 \ge 3$ *та* $n_0 \ge m_0 + 3$ *і нехай* $\mathcal{T} \gg 1$ *це довільне велике число. Тоді при всіх* $|t| < \mathcal{T}$ *існує єдиний розв'язок* $q(x,t)$ *задачі Коши для рівняння КдФ з початковими умовами* $q(x)$ *такий, що*

$$q(\cdot,t) \in \mathcal{L}_{\left[\frac{m_0}{2}\right]-1}^{n_0-m_0}(0,-c^2).$$

Відмітимо, що попередній результат, який належить І. Єгоровій та Г. Тешлу, встановлює розв'язність цієї задачі при $m_0 \ge 8$ та $n_0 \ge m_0 + 5$, причому розв’язок є єдиним і належить класу $\mathcal{L}_{\left[\frac{m_0}{2}\right]-2}^{n_0-m_0}(0,-c^2)$. Відмітимо також, що наслідком теореми 3.1 є твердження, що рівняння КдФ є розв'язним у класі функцій типу сходинки із збуреннями шварцевського типу, тобто функцій, що належать перетину класів $\mathcal{L}_m^n(0,-c^2)$ при всіх $m,n \ge 0$.

У **четвертому розділі** вивчається асимптотична поведінка за великим часом розв'язку задачі Коші для рівняння КдФ з початковими даними (4), що задовольняють умову

$$\int_0^{+\infty} e^{C_0 x}\left(|q(x,0)| + |q(-x,0)+c^2|\right)dx < \infty, \quad C_0 > c > 0, \tag{5}$$

і додатково $q(\cdot,0) \in \mathcal{L}_4^7(0,-c^2)$ Нехай $q(x,t)$ – це розв'язок цієї задачі Коші. Згідно з результатами попередніх розділів $q(\cdot,t) \in L_1^3(0,-c^2)$, тобто ми можемо контролювати поведінку розв’язків при $x \to \pm\infty$ при кожному фіксованому t. Але більш цікавим з фізичної точки зору є режим, коли x та t одночасно прямують до нескінченності, але їхнє відношення є майже сталою. При дослідженні асимптотик $q(x,t)$ вздовж таких променів у основних регіонах просторово-часової півплощини застосовується нелінійний метод найшвидшого спуску для осціляційної задачі Рімана-Гільберта у векторній постановці. Цей метод вважається варіантом МОЗР.

Щоб спростити викладення результатів, опустимо індекс «+» у позначеннях, що відносяться до правої напівосі. Покладемо $k = k_+$, і будемо вважати, що дані розсіювання є функціями цього спектрального параметра. Замість параметра k_{-} використовуємо $k_1=\sqrt{k^2+c^2}$, і позначаємо об'єкти, що відносяться до лівої напівосі, індексом «1». Нехай $\phi(k,x,t)$ та $\phi_1(k,x,t)$ – це розв'язки Йоста рівняння

$$-\partial_x^2\phi+q(x,t)\phi=k^2\phi,$$

що нормовані як $\lim\limits_{k\to+\infty}\phi(k,x,t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}=1,\quad \lim\limits_{k\to-\infty}\phi_1(k,x,t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_1x}=1.$

Ми розглядаємо їх як функції комплексної змінної k, вважаючи x та t параметрами. Відповідні коефіцієнти проходження $T(k,t)$ та $T_1(k,t)$ є визначеними на множині $\mathbb{C}^+\setminus(0,\mathrm{i}c]$, а коефіцієнт відбиття $R(k,t)$ – при $k\in\mathbb{R}$. Покладемо $\chi(k)=-\overline{T}(k+0,0)T_1(k+0,0)$, $k\in[0,\mathrm{i}c]$; $R(k)=R(k,0)$; $\gamma_j=\gamma_j(0)$. Визначимо вектор функцію $m(k)=m(k,x,t)$ за формулами

$$m(k)=\begin{cases}\left(T(k,t)\phi_1(k,x,t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx},\quad \phi(k,x,t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\right), & k\in\mathbb{C}^+,\\ m(-k)\sigma_1, & k\in\mathbb{C}^-,\end{cases}$$

де $\sigma_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ — матриця Паулі.

Лема 4.1. *Функція $m(k)=m(k,x,t)$, має наступну асимптотичну поведінку коли $k\to+\mathrm{i}\infty$:*

$$m(k,x,t)=(1,1)-\frac{1}{2\mathrm{i}k}\left(\int_x^{+\infty}q(y,t)dy\right)(-1,1)+O\left(\frac{1}{k^2}\right).\tag{6}$$

Функція m вочевидь не є неперервною на множині $\mathbb{R}\cup[-\mathrm{i}c,\mathrm{i}c]$. Будемо вважати цю множину орієнтованим контуром з орієнтацією зліва направо та зверху вниз. Введемо фазову функцію $\Phi(k)=8\mathrm{i}k^3+2\mathrm{i}k\dfrac{x}{t}$. Має місце наступна

Теорема 4.1. *Функція $m(k)=m(k,x,t)$ є єдиним розв'язком наступної задачі Рімана-Гільберта: знайти у $\mathbb{C}$ векторнозначну функцію $m(k)$, що є мероморфною поза контуром $\mathbb{R}\cup[-\mathrm{i}c,\ \mathrm{i}c]$, має прості полюси у точках $\pm\mathrm{i}\kappa_j$, і задовольняє наступні умови:*

1. *умову стрибка* $m_+(k)=m_-(k)v(k)$, де

$$v(k)=\begin{cases}\begin{pmatrix}1-|R(k)|^2 & -\overline{R}(k)e^{-t\Phi(k)}\\ R(k)e^{t\Phi(k)} & 1\end{pmatrix}, & k\in\mathbb{R},\\ \begin{pmatrix}1 & 0\\ \chi(k)e^{t\Phi(k)} & 1\end{pmatrix}, & k\in[\mathrm{i}c,0],\\ \sigma_1v^{-1}(-k)\sigma_1, & k\in[0,-\mathrm{i}c];\end{cases}$$

2. *полюсні умови:* $\mathrm{Res}_{\mathrm{i}\kappa_j} m(k) = \left(Q_j m_2(\mathrm{i}\kappa_j), \quad 0 \right)$,

$\mathrm{Res}_{-\mathrm{i}\kappa_j} m(k) = \left(0, \quad Q_j m_1(\mathrm{i}\kappa_j)\right)$, *де* $Q_j = \mathrm{i}\gamma_j \mathrm{e}^{t\Phi(\mathrm{i}\kappa_j)}$;

3. *умову симетрії* $m(-k) = m(k)\sigma_1$;

4. *нормувальну умову:* $\lim\limits_{\kappa\to\infty} m(\mathrm{i}\kappa) = (1,1)$.

Використання нелінійного методу найшвидшого спуску дозволяє апроксимувати при великих значеннях t вихідну задачу Рімана-Гільберта так званою модельною задачею РГ. Матриця скачка цієї модельної задачі є сталою відносно k, можливо різною на різних частинах контуру. Такі модельні задачі мають точні розв'язки, з яких можна відновити коефіцієнт розвинення при k^{-1}, і отримати асимптотику $q(x,t)$ за формулою (6).

Як відомо з робіт А.В. Гуревича, Л.П. Пітаєвського (1973) та В.Д. Єрмакової (1981), існують три основні області просторово-часової півплощини з різною поведінкою розв’язку задачі (3)-(5): солітонна, де $x > 4c^2 t$; зона еліптичної хвилі, де $-6c^2 t < x < 4c^2 t$; область позаду заднього фронту хвилі, де $x < -6c^2 t$. Методом задачі РГ доводимо, що у солітонній області має місце наступна

Теорема 4.2. *Нехай* $\delta > 0$ *є досить малим, щоб інтервали* $[4\kappa_j^2 - \delta, 4\kappa_j^2 + \delta]$, $1 \le j \le N$, *не перетинались і належали інтервалу* $(4c^2, \infty)$. *Тоді при довільно малому* $\varepsilon > 0$ *в області* $\frac{x}{t} \ge 4c^2 + \varepsilon$ *справедливі наступні твердження:*

Якщо $|x/t - 4\kappa_j^2| < \delta$ *для деякого* j, *то*

$$q(x,t) = \frac{-4\kappa_j \gamma_j(x,t)}{(1 + (2\kappa_j)^{-1}\gamma_j(x,t))^2} + O(t^{-1}),$$

де $\gamma_j(x,t) = \gamma_j \mathrm{e}^{-2\kappa_j x + 8\kappa_j^3 t} \prod\limits_{i=j+1}^{N} \left(\dfrac{\kappa_i - \kappa_j}{\kappa_i + \kappa_j} \right)^2$.

Якщо $|\frac{x}{t} - 4\kappa_j^2| \ge \delta$ *при всіх* j, *то* $q(x,t) = O(t^{-1})$.

Щоб сформулювати результати, що стосуються зони еліптичної хвилі, нагадаємо деякі факти з теорії гіпереліптичних ріманових поверхонь.

Позначимо $\xi = \dfrac{x}{12t}$. Тоді в області $-\dfrac{c^2}{2} < \xi < \dfrac{c^3}{3}$ існує єдиний розв'язок $a = a(\xi)$ рівняння

$$\int_a^0 \left(\xi + \frac{c^2 - a^2}{2} - s^2 \right) \sqrt{\frac{s^2 - a^2}{c^2 - s^2}} ds = 0,$$

причому функція $a(\xi)$ є монотонно спадною, а її значення пробігають весь інтервал $(c,0)$, коли ξ змінюється у зазначеному діапазоні.

Нехай тепер $\mathbb{M}$ – це дволиста ріманова поверхня функції

$$\mathcal{R}(\lambda)=\sqrt{\lambda(\lambda+c^2)(\lambda+a^2)},$$

листи якої склеюються вздовж інтервалів $\sigma=[-c^2,-a^2]\cup[0,\infty)$, і $p=(\lambda,\pm)$ – це точка на цій поверхні. Канонічний базис циклів оберемо наступним чином: цикл $\mathfrak{b}$ обходить інтервал $[-c^2,-a^2]$ по верхньому листу проти годинникової стрілки, а цикл $\mathfrak{a}$ доповнює його, проходячи вздовж лакуни і змінюючи листи. Нехай $d\omega$ – це голоморфний абелів диференціал, нормований умовою $\int_{\mathfrak{a}} d\omega=2\pi\mathrm{i}$, і нехай $\tau=\tau(\xi)=\int_{\mathfrak{b}} d\omega$. Покладемо $\mathcal{K}(\xi)=\dfrac{\tau(\xi)}{2}$, де $\mathcal{K}$ – це константа Рімана і нехай $A(p,\xi)=\int_\infty^p d\omega$ – це відображення Абеля. Тоді наступна проблема обернення Якобі

$$A(p,\xi)-\mathcal{K}(\xi)=\frac{\int_{\mathfrak{b}}\mathcal{R}^{-1}(\lambda)\left(\log|T(\lambda)T_1(\lambda)|+2\log\dfrac{k-\mathrm{i}\kappa_j}{k+\mathrm{i}\kappa_j}\right)d\lambda}{\int_{\mathfrak{a}}\mathcal{R}^{-1}(\lambda)d\lambda}$$

має єдиний розв'язок p_0 із проекцією у лакуну $\left(-a^2,0\right)$. Введемо також два мероморфні нормовані абелеві диференціали другого роду із полюсами на нескінченності виду

$$d\Omega_1=\frac{i}{2\sqrt{\lambda}}\left(1+O(\lambda^{-1})\right)d\lambda,\quad d\Omega_3=-\frac{3i\sqrt{\lambda}}{2}\left(1+O(\lambda^{-2})\right)d\lambda,$$

і покладемо $V=V(\xi)=\int_{\mathfrak{b}} d\Omega_1$, $W=W(\xi)=\int_{\mathfrak{b}} d\Omega_3$.

Нехай тепер $\theta(z)=\theta(z\,|\,\tau)$ – це тета-функція Рімана. Покладемо

$$h(\xi)=\int_{\mathfrak{a}}\lambda\mathcal{R}^{-1}(\lambda)d\lambda\left(\int_{\mathfrak{a}}\mathcal{R}^{-1}(\lambda)d\lambda\right)^{-1}.$$

Теорема 4.4. *В області* $-6c^2+\varepsilon<\dfrac{x}{t}<4c^2-\varepsilon$ *при* $t\to\infty$ *для розв'язку задачі* (3)-(5) *має місце наступна асимптотична формула:*

$$q(x,t)=-2\frac{d^2}{dx^2}\log\theta\left(\mathrm{i}V(\xi)x-4\mathrm{i}W(\xi)t+A(p_0,\xi)-\mathcal{K}(\xi)\right)$$

$$-a(\xi)^2-c^2-2h(\xi)+o(1),\quad \xi=\frac{x}{12t}.$$

Зауважимо, що головний член цієї асимптотики при фіксованому ξ є скінченнозонним розв'язком рівняння КдФ, більш того, він є періодичною по x та по t функцією.

В третій основній області справедлива наступна

Теорема 4.6. *В області* $\frac{x}{t} \le -6c^2 - \varepsilon$ *для деякого малого* $\varepsilon > 0$ *має місце асимптотична формула*

$$q(x,t) = -c^2 + \sqrt{\frac{4\nu(k_{1,0})k_{1,0}}{3t}} \sin(16tk_{1,0}^3 - \nu(k_{1,0})\log(192tk_{1,0}^3) + \delta(k_{1,0})) + O(t^{-\alpha})$$

при $1/2 < \alpha < 1$. *Тут* $k_{1,0} = \sqrt{\frac{c^2}{2} - \frac{x}{12t}}$, $\nu(k_{1,0}) = -\frac{1}{2\pi}\log(1 - |R_1(k_{1,0})|^2)$ *і*

$$\delta(k_{1,0}) = \frac{\pi}{4} - \arg(R_1(k_{1,0})) + \arg(\Gamma(\mathrm{i}\,\nu(k_{1,0})))$$
$$-\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}\setminus[-k_{1,0},k_{1,0}]} \log\left(\frac{1-|R_1(\zeta)|^2}{1-|R_1(k_{1,0})|^2}\right)\frac{1}{\zeta - k_{1,0}}\,d\zeta.$$

ВИСНОВКИ

Дисертаційну роботу присвячено розвитку методу оберненої задачі розсіювання для інтегрування рівняння Кортевега – де Фріза із початковими умовами типу сходинки, а також дослідженню асимптотичної поведінки розв'язків типу сходинки за великими значеннями часу. Основні результати можна підсумувати наступним чином.

Розвинуто теорію розсіювання для одновимірного оператора Шрьодінгера на всій вісі із потенціалом типу сходинки, що прямує до різних дійсних сталих на різних півосях. Потенціал має задану гладкість і швидкість прямування до своїх асимптот, тобто заданий момент збурення. Для потенціалів таких класів вичерпно досліджено пряму та обернену задачі розсіювання. У рамках розв'язання цих задач отримано нові оцінки на похідні ядер операторів перетворення будь яких порядків, описано алгебраїчні та аналітичні властивості даних розсіювання, які не залежать від конкретних значень параметрів гладкості та момента збурення, що характеризують певний клас, тобто мають універсальний характер. Отримано характеристичні для потенціалу даного класу властивості ядер рівнянь Гельфанда-Левітана-Марченко. У дисертації встановлено необхідні та достатні умови на дані розсіювання, і методом Марченко повністю розв'язано обернену задачу, включаючи теорему єдиності. Ці результати використано для інтегрування методом оберненої задачі розсіювання задачі Коші для рівняння Кортевега-де Фріза з більш загальними початковими умовами типу сходинки, ніж у вже відомих результатах.

Вивчено асимптотичну поведінку за великим часом розв'язку рівняння КдФ з початковими умовами, що відповідають хвилі стиску. Отримано точні формули головного члена розвинення розв’язку за часом у всіх принципових регіонах півплощини простір-час. Асимптотики порівняно з відомими формулами Гуревича-Пітаєвського.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ РОБІТ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Egorova I. Long-time asymptotics for the Korteweg-de Vries equation with steplike initial data / I. Egorova, Z. Gladka, V. Kotlyarov, G. Teschl // Nonlinearity. – 2013. – Vol. 26. – №. 7. – P. 1839-1864.

2. Egorova I. Inverse scattering theory for Schrödinger operators with steplike potentials / I. Egorova, Z. Gladka, T.-L. Lange, G. Teschl // Journal of Mathematical Physics, Analysis and Geometry. – 2015. – Vol 11. – P. 123-158.

3. Egorova I. On the form of dispersive shock wave of the Korteweg–de Vries Equation / I. Egorova, Z. Gladka, G. Teschl // Journal of Mathematical Physics, Analysis and Geometry. – 2016. – Vol. 12. – P. 1-14.

4. Гладкая З.Н. О коэффициенте отражения оператора Шредингера с гладким потенциалом / З.Н. Гладкая // Доповіді НАН України. – 2014. – № 9. – С. 7-13.

5. Гладкая З.Н. О решениях уравнения Кортевега–де Фриза с начальными данными типа ступеньки / З.Н. Гладкая // Доповіді НАН України. – 2015. – № 2. – С. 7-14.

6. Gladka Z. Long-time asymptotics for the Korteweg-de Vries equation with steplike initial data via nonlinear steepest descent / I. Egorova, Z. Gladka, V. Kotlyarov, G. Teschl // «Конференція молодих вчених – Low Temperature Physics», 4-18 травня 2012, Харків: тези доповідей. – С. 213.

7. Гладкая З.Н. Исследование асимптотического поведения при больших кременах решений уравнения Кортевега-де Фриза с начальными данными типа ступеньки / И.Е. Егорова, З.Н. Гладкая, В.П. Котляров, Г. Тешл // «Fourth international conference for young mathematicians on Differential equations and applications dedicated to Ya.B. Lopatinskii», 2012, Donetsk: book of abstracts. – С. 35.

8. Гладка З.М. Задачі розсіювання для операторів Шрьодінгера з потенціалами типу сходинки / З.М. Гладка // «Міжнародна конференція молодих математиків», 3-6 червня 2015, Київ: тези доповідей. – С. 140.

9. Гладкая З.Н. Задача Коши для уравнения Кортевега-де Фриза с начальными данными типа ступеньки. / З.Н. Гладкая // III International conference «Analysis and Mathematical Physics», 15-19 June, 2015, Kharkiv: book of abstracts. – С.22.

10. Gladka Z. IST method in solving the Cauchy problem for KdV with steplike initial data. / Z. Gladka // International conference-school “Shilnikov workshop 2015”, 17-19 December 2015. - Сб. тезисов, Нижний Новгород, 2015. – С.4-5.

АНОТАЦІЯ

Гладка З.М. Метод оберненої задачі розсіювання для рівняння Кортевега-де Фріза з початковими даними типу сходинки. – Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.03 – математична фізика. – Фізико-технічний інститут низьких температур ім. Б.І Вєркіна НАН України, Харків, 2016.

Дисертаційна робота присвячена розвиненню метода оберненої задачі розсіювання для інтегрування рівняння Кортевега–де Фріза з початковими даними типу сходинки і описанню асимптотичної поведінки його розв'язку.

Розвинена теорія розсіювання для одновимірного оператора Шрьодінгера на всій осі з потенціалом типу сходинки, який прямує до різних дійсних сталих на різних півосях. Потенціал має задану гладкість та швидкість прямування до своїх асимптот, тобто заданий момент збурень, починаючи з першого. Для потенціалів таких класів вичерпно розв'язано пряму та обернену задачу розсіювання, а також отримано покращені оцінки на швидкість спадання коефіцієнтів відбиття на нескінечності залежно від от гладкості потенціалу.

Методом оберненої задачі розсіювання розв'язана задача Коші для рівняння Кортевега-де Фріза з початковими даними типу сходинки з заданою гладкістю та числом моментів. Детальний аналіз поведінки залежних від часу ядер рівнянь Гельфанда-Левітана-Марченка по просторові змінній дозволив точно виявити залежність гладкості и швидкості спадання збурень розв'язків задачі Коші від відповідних параметрів початкових даних.

Вивчена асимптотична поведінка за великим часом розв'язку задачі Коші для рівняння КдФ у випадку початкових даних, що відповідають ударній хвилі. Дослідження проводилось за допомогою нелінійного методу найшвидшого спуску, застосованого для осциляційної векторної задачі Рімана–Гільберта. Отримані точні формули головного члену асимптотичного розвинення за часом у всіх принципових зонах півплощини простір-час.

Ключові слова: оператор Шрьодінгера, рівняння Кортевега-де Фріза, задача Рімана-Гільберта, нелінійний метод найшвидшого спуску.

АННОТАЦИЯ

Гладкая З. Н. Метод обратной задачи рассеяния для уравнения Кортевега–де Фриза с начальными данными типа ступеньки . – Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.03 — математическая физика. – Физико-технический институт низких температур имени Б.И Веркина НАН Украины, Харьков, 2016.

Диссертационная работа посвящена развитию метода обратной задачи рассеяния для интегрирования уравнения Кортевега–де Фриза с начальны-

ми данными типа ступеньки и описанию асимптотического поведения его решения.

Развита теория рассеяния для одномерного оператора Шредингера на всей оси с потенциалом типа ступеньки, который стремится к разным вещественным постоянным на разных полуосях. Потенциал имеет заданную гладкость и скорость стремления к своим асимптотам, то есть заданный момент возмущений, начиная с первого. Показатели гладкости и момента определяют класс потенциалов. Для таких потенциалов в диссертации исчерпывающе решены прямая и обратная задача рассеяния. В рамках решения этой задачи получены новые оценки на производные ядер операторов преобразования любых порядков, описаны алгебраические и аналитические свойства данных рассеяния, а также характеристические для потенциала данного класса свойства ядер уравнений Гельфанда-Левитана-Марченко (ГЛМ). В диссертации полностью решена обратная задача рассеяния, то есть доказана однозначная разрешимость уравнений ГЛМ, установлены требуемые заданным классом оценки убывания на полуосях, и доказана теорема единственности для восстанавливаемого потенциала. Также получены улучшенные, и строго доказаны существующие, оценки на скорость убывания коэффициентов отражения на бесконечности в зависимости от гладкости потенциала типа ступеньки.

Методом обратной задачи рассеяния решена задача Коши для уравнения Кортевега-де Фриза с начальными данными типа ступеньки с заданной гладкостью и количеством моментов возмущений. В ходе исследования этой задачи описана эволюция данных рассеяния ассоциированного оператора Шрёдингера, и выведены зависящие от времени уравнения ГЛМ. Детальный анализ поведения ядер этих уравнений по пространственной переменной позволил точно выявить зависимость гладкости и скорости убывания возмущений решения задачи Коши от соответствующих параметров начальных данных.

Изучено асимптотическое поведение при большом времени решения задачи Коши для уравнения КдФ в случае начальных данных, соответствующих ударной волне. Исследование проведено нелинейным методом наискорейшего спуска. Этот метод применен для осцилляционной векторной задачи Римана-Гильберта с использованием механизма g-функции. В результате получены точные формулы главного члена асимптотического разложения во всех основных зонах полуплоскости пространство-время. Проведено сравнение полученных результатов с формулой Гуревича-Питаевского для эллиптической зоны.

Ключевые слова: оператор Шрёдингера, уравнение Кортевега-де Фриза, задача Римана-Гильберта, нелинейный метод наискорейшего спуска.

ABSTRACT

Gladka Z. Inverse scattering transform for the Korteweg-de Vries equation with steplike initial data. – Manuscript.

The thesis to acquire a scientific degree of candidate of sciences in physics and mathematics by specialty 01.01.03 – Mathematical Physics. – B. Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kharkiv, 2016.

The thesis is concerned with the developing of the inverse scattering transform for the integration of the Korteweg-de Vries equation with steplike initial data and for the description of the asymptotical behavior of its solution.

The scattering theory is developed for one-dimensional Schrodinger operator on the whole axis with a steplike potential that tends to different real constants on the different half-axes. The potential has a prescribed smoothness and a number of finite moments of perturbations starting from the first one. The direct and inverse problem is solved rigorously for potentials of such classes. In particular, new estimates on the kernels of the transformation operators and their derivatives are obtained. The characteristic properties of the scattering data that correspond to the potential of the given class are proposed. New decaying properties of the reflection coefficients depending on the smoothness of the steplike potential are obtained.

By use of the inverse scattering transform, the Cauchy problem for the Korteweg – de Vries equation with steplike initial profile is solved. The initial profile has prescribed smoothness and a moment of perturbations. The result generalizes previously known results.

The long-time asymptotic behavior of the Cauchy problem solution is investigated for the KdV equation with steplike initial data, which correspond to the shock wave. The nonlinear steepest descent method for oscillatory vector Riemann-Hilbert problem is applied. The main terms of asymptotical expansion with respect to time are obtained in all principal domains of the space-time half plane. The result is compared with the Gurevich-Pitaevskij formula.

Key words: Schrodinger operator, KdV equation, Riemann-Hilbert problem, nonlinear steepest descent.