Національна академія наук України
Фізико-технічний інститут низьких температур ім. Б.І.Вєркіна

Вишнякова Ганна Марківна

УДК 517.537.32

МНОГОЧЛЕНИ З ОБМЕЖЕННЯМИ НА РОЗТАШУВАННЯ КОРЕНІВ І ГРАНИЧНІ КЛАСИ ЦІЛИХ ФУНКЦІЙ

01.01.01 – математичний аналіз

АВТОРЕФЕРАТ
дисертації на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Харків – 2019

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Харківському національному університеті імені В.Н. Каразіна Міністерства освіти і науки України.

Науковий консультант:
доктор фізико-математичних наук, професор
Фаворов Сергій Юрійович,
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна,
професор кафедри фундаментальної математики.

Офіційні опоненти:
доктор фізико-математичних наук, професор
Золотарьов Володимир Олексійович,
Фізико-технічний інститут низьких температур
ім. Б.І.Вєркіна НАН України, м.Харків,
провідний науковий співробітник відділу теорії функцій;

доктор фізико-математичних наук,
старший науковий співробітник
Севостьянов Євген Олександрович,
Житомирський державний університет імені Івана Франка,
професор кафедри математичного аналізу;

доктор фізико-математичних наук, професор
Скасків Олег Богданович,
Львівський національний університет імені Івана Франка,
професор кафедри теорії функцій і теорії ймовірностей.

Захист відбудеться «30» травня 2019 р. о «14» годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 64.175.01 у Фізико-технічному інституті низьких температур ім. Б.І.Вєркіна НАН України за адресою: пр. Науки, 47, м. Харків, 61103.

З дисертацією можна ознайомитись у науковій бібліотеці Фізико-технічного інституту низьких температур ім. Б.І.Вєркіна НАН України за адресою: пр. Науки, 47, м. Харків, 61103.

Автореферат розісланий «23» квітня 2019 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради В.О.Горькавий

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Дисертаційна робота присвячена проблемам локалізації коренів комплексних многочленів і цілих функцій. Актуальність задач такого типу не потребує пояснень і посилань, але ми наведемо деякі приклади і історичні факти. Підкреслимо, що нас цікавлять не асимптотичні, а точні твердження щодо розташування коренів, такі як розташування усіх коренів комплексного многочлена в відкритій лівій півплощині (так звані стійкі многочлени), розташування усіх коренів дійсного многочлена на дійсній осі (гіперболічні многочлени), або розташування усіх коренів многочленів з додатними коефіцієнтами поза дійсної осі (позитивні многочлени). Нагадаємо, що одну з найважливіших і найвідоміших відкритих проблем сучасної математики: гіпотезу Рімана, – можна еквівалентно переформулювати як питання про розташування усіх коренів спеціальної дійсної цілої функції порядку одна друга на дійсної осі.

Теорема Гурвиця твердить, що гіперболічні многочлени (дійсні многочлени з усіма дійсними коренями) можуть збігатися рівномірно на компактах лише до цілої функції з усіма дійсними коренями. Але не кожна дійсна ціла функція з усіма дійсними коренями є рівномірною на компактах границею гіперболічних многочленів. Видатна теорема Лаґерра і Поліа дає опис замкнення в топології рівномірної збіжності на компактах множини гіперболічних многочленів (клас цілих функцій Лаґерра-Поліа) і множини гіперболічних многочленів з додатними коефіцієнтами (клас цілих функцій Лаґерра-Поліа типу I). Класи Лаґерра-Поліа і Лаґерра-Поліа типу I відіграють визначну роль в комплексному аналізі. Функціям класу Лаґерра-Поліа присвячена велика кількість робіт, ми відзначимо лише декілька з них. В роботах Т.Кравена, Дж.Ксордаша і В.Сміта, а також Х.Кі і Й.Кіма доводиться гіпотеза Поліа про те, що для дійсної цілої функції порядку меншого за два зі скінченим числом недійсних коренів похідна деякого порядку належить до класу Лаґерра-Поліа. В роботах В.Бергвайлера, А.Еременко і Дж. Ленглі доводиться гіпотеза Вімана про кількість недійсних коренів похідних дійсних цілих функцій порядку більше за два. Серед нещодавніх робіт про клас Лаґерра-Поліа відзначимо роботи Д.Кардона, М.Лампрехта, Дж.Ксордаша і Т.Фордаша, А.Богданова, А.Барича і С.Сінгха, а також П.Батри.

Питання про те, чи належить дана ціла функція до класу Лаґерра-Поліа може бути дуже складним. В нашій роботі особливу роль відіграє спеціальна ціла функція: так звана часткова тета-функція $g_a(z)=\sum_{k=0}^{\infty} z^k a^{-k^2}, \quad a>1$. Ця функція має багату історію досліджень, яка повідомлена нам відомим дослідником часткової тета-функції та інших важливих спеціальних функцій С.О.Варнааром. Як повідомляє С.О.Варнаар, вперше часткова тета-функція з'являється (не під цим ім'ям) в 1844 році в двох роботах Дж.Еізенштейна, де він досліджує представлення часткової тета-функції ланцюговим дробом, з якого отримує ірраціональність деяких спеціальних чисел. Пізніше Е.Гейне перевідкриває цей результат, а також представляє ланцюговими дробами деякі гіпергеометричні функції. У 1915 році результати Дж.Еізенштейна про ірраціональність спеціальних чисел були посилені в роботі Ф.Берштейна і О.Сатца, а пізніше в роботі О.Сатца. Після цього Л.Шакалов дослідив не тільки ірраціональність, а лінійну незалежність над $\mathbb{Q}$ цих чисел. Л.Шакалов вперше відзначив функціональне рівняння для часткової тета-функції: $g_a(az)=1+g_a\left(za^{-1}\right)$. Пізніше часткова тета-функція неодноразово з'являється в роботах С.Рамануджана. У його "втраченому записнику" є багато красивих тотожностей з частковою тета-функцією. Назву "часткова тета-функція" (англійською "partial theta-function") дав Дж.Андрюс. Дослідження цікавих властивостей коренів часткової тета-функції і її похідних, і інші результати, пов'язані з частковою тета-функцією, містяться у великій серії цікавих робіт В.П.Костова. Вивченню властивостей часткової тета-функції присвячені, наприклад, роботи С.Йо і Б.Кіма, Б.Кіма, Е.Кіма і Й.Сео, С.Кімпорта, А.Сокала, С.Ху і М.С. Кіма. У нещодавньому препринті Р.Флореса і Ж.Гонзалеса-Менесеса обговорюється важлива роль часткової тета-функції при дослідженні зростання моноїдів Артіна-Тітса.

Концепція тотальної додатності (в тому числі для матриць) відіграє важливу роль у різних розділах математики, статистики і механіки. В математиці тотально додатні функції і матриці виникають в проблемах, пов'язаних з розташуванням коренів дійсних многочленів, опуклістю, проблемами моментів, власними значеннями інтегральних операторів, осциляціонними властивостями рішень лінійних диференціальних рівнянь, в теорії апроксимації і інших областях аналізу. Тотально додатним матрицям присвячена низка важливих робіт, і, в силу особливої важливості цього поняття, про них написано декілька монографій і великих оглядових робіт, таких як класична монографія С.Карліна "Total positivity" 1968 року, великий огляд Т.Андо "Totally Positive Matrices" 1987 року, монографія А.Пінкуса "Totally Positive Matrices" 2010 року, монографія Ш.Фаллата і Ч.Джонсона "Totally Nonnegative Matrices" 2011 року, та інші. Монографія Аллана Пінкуса присвячена пам'яті І.Дж. Шонберга, М.Г.Крейна, Ф.Р.Гантмахера і С.Карліна – "чотирьом піонерам теорії тотальної додатності". Знаменита теорема М.Еіссена, А.Едрея, І.Шонберга і А.Уітні стверджує, що многочлен з додатними коефіцієнтами має усі дійсні (від'ємні) корені тоді і тільки тоді, коли побудована по його коефіцієнтах нескінчена тепліцева матриця є тотально додатною. Ця важлива теорема встановлює зв'язок між гіперболічними многочленами (і цілими функціями класу Лаґерра-Поліа) і тотально додатними матрицями. Серед нещодавніх досліджень тотально додатних матриць відмітимо роботи М.Фідлера, Х.Пеньї, П.Батри, М.Адма і Ю.Гарлоффа, М.Адма, Ю.Гарлоффа і М.Тяглова, Ш.Фаллата, Ч.Джонсона і А.Сокала. Відзначимо, що перевірка тотальної додатності для заданої матриці потребує, взагалі кажучи, не аби яких зусиль, тому отримання будь-якої зручної достатньої умови тотальної додатності є дуже актуальним завданням.

Можливо, найбільш наглядно практична необхідність точних методів локалізації коренів комплексних многочленів демонструється у зв'язку з проблемами стійкості положення рівноваги динамічної системи. Як добре відомо, при досить загальних припущеннях, положення рівноваги є стійким, коли характеристичний многочлен лінеаризованої системи має усі корені у відкритій лівій півплощині. Комплексні многочлени, усі корені яких розташовані у півплощині $\{z : \mathrm{Re}\, z < 0\}$, називаються стабільними, або стійкими. Задачі дослідження стійкості рішень систем диференціальних рівнянь виникли в середині XIX віку у зв'язку з ненадійною роботою (і навіть вибухами) парових машин. Першим видатним результатом про стійкість комплексних многочленів був знаменитий критерій стійкості Ерміта-Білера. Цей критерій встановлює глибокий зв'язок між стійкими многочленами і гіперболічними многочленами. Існує інший знаменитий критерій стабільності для дійсного многочлена – критерій Рауса і Гурвиця. Цей критерій пов'язує стабільність дійсного многочлена з додатністю головних мінорів спеціальної матриці, побудованої по коефіцієнтах многочлена (так званої матриці Гурвиця). Виявляється, що матриця Гурвиця стійкого многочлена є тотально додатною, дивись роботи Б.А.Аснера-молодшого, Дж.Кемпермана і Х.Пеньї. Таким чином, є прямий глибокий зв'язок між тотальною додатністю матриць, гіперболічністю многочленів і стійкістю многочленів. Вивченню стійкості спеціальних многочленів присвячено багато досліджень, ми згадаємо тільки декілька робіт останніх років: роботи Д.Вагнера, Л.Хи, Р.Пемантла, Х.Й.Вердермана, Ю.Нургеса, Ю.Белікова і І.Артемчука, М.Адма, Ю.Гарлоффа і М.Тяглова, К.Пурбху і А.Барвінока.

Одною з дуже важливих проблем в теорії розподілу коренив многочленів і трансцендентних цілих функцій є опис лінійних операторів, які переводять сукупність многочленів з усіма коренями в заданій множині у сукупність многочленів з усіма коренями в іншій заданій множині. Дуже важливими є випадки, коли обидві множини дорівнюють дійсній осі, лівій півплощині або комплексній площині без дійсної осі. Ерміт і, пізніше, Лаґерр були, можливо, першими, хто почав вивчати подібні типи проблем систематично. В 1914 році Дж.Поліа і Г.Сеге дали повний опис лінійних операторів, які є діагональними в стандартному мономіальному базисі $1, x, x^2, \ldots$ простору $\mathbb{R}[x]$ і зберігають множину гіперболічних многочленів. Дж.Поліа отримав, мабуть, перший результат про збереження класу Лаґерра-Поліа лінійними скінченно-різничними операторами. Пізніше вивчення лінійних операторів, які переводять множину гіперболічних многочленів в себе, було продовжено багатьма відомими авторами, включаючи Н.Обрешкова, С.Карліна, Б.Я.Левіна, Дж.Ксордаша, Т.Кравена, К. де Бура, Р.Варгу, А.Ісерліса, С.Норсетта, Е.Саффа і багатьох інших. Серед сучасних авторів варто особливо відмітити П.Брандена і Дж.Борсеа, які характеризували усі лінійні оператори, які зберігають гіперболічність (а також оператори, які зберігають корені в деяких інших множинах, таких як півплощина або коло). Важливим окремим випадком є оператори, які зберігають множину додатних многочленів. Додатні многочлени виникають у багатьох важливих областях математики. Велика кількість робіт видатних математиків присвячена лінійним операторам, що вони зберігають множину додатних (невід'ємних) многочленів, та пов'язаних з цим питань. Серед нещодавніх робіт, присвячених операторам, які переводять многочлени з усіма коренями в заданій множині у многочлени з усіма коренями в іншій заданій множині, ми відмітимо роботи П.Брандена, в яких вивчаються важливі нелінійні оператори, Д.Кардона, Дж.Ксордаша і Т.Фордаша, П.Брандена, І.Красікова і Б.Шапіро, М.Голіциної і І.Карпенко, М.Лампрехта, П.Брандена і М.Чассе, П.Брандена, а також П.Брандена і Л.Солюса.

Один з перших результатів про лінійні оператори, які не зменшують меш гіперболічних многочленів (тобто мінімальну відстань між різними коренями многочлена), належить М.Рису, але став відомим завдяки А.Стоянову. А.Стоянов дає просте доведення того факту, що оператор диференціювання не зменшує меш гіперболічного многочлена; про цей результат А.Стоянов пише, що формулювання і досить складне доведення належить М.Рису. Пізніше теорема М.Риса перевідкривалася і заново доводилася багатьма авторами, дивись, наприклад, роботу Р.Гелки, або П.Волкера. Велика увага надається проблемам відділення коренів многочленів і властивостям лінійних операторів, які не зменшують меш гіперболічних многочленів, у фундаментальному томі С.Фіска. С.Фіск довів, що лінійний оператор, який зберігає гіперболічність і комутує з операторами зсуву, не зменшує меш гіперболічного многочлена. Відмітимо, що С.Фіск формулював цю теорему в зовсім інших термінах. Не легко з'ясувати, що теорема С.Фіска дає твердження, що воно сформульоване вище. В роботі П.Брандена, І.Красікова і Б.Шапіро доведено, що жоден нетривіальний лінійний скінченно-різничний оператор з дійсним зсувом не зберігає множину гіперболічних многочленів. Також в цій роботі доведено, що лінійний скінченно-різничний оператор з дійсним зсувом λ зберігає множину гіперболічних многочленів з мешем не меншим за λ тоді і тільки тоді, коли усі корені твірної функції є дійсними і невід'ємними. Це твердження є аналогом знаменитої теореми Лаґерра-Поліа для скінченно-різничних операторів. Серед нещодавніх робіт, присвячених мірам відділення коренів гіперболічних многочленів і цілих функцій, відмітимо роботи М.Мігнота, С.Чайі, М.Демера і А.Іліча, Д.Фармера, М.Голіциної, в якої описано замкнення в топології рівномірної збіжності на компактах множини гіперболічних многочленів з мешем, більшим за дане число, А.Дуджели і Т.Пейковича, а також роботу Б.Шапіро, яка містить декілька цікавих гіпотез щодо мешу многочленів. Тому дослідження мір відділення коренів многочленів і цілих функцій під дією важливих лінійних операторів є надзвичайно актуальними.

Зв’язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконана на кафедрі фундаментальної математики факультету математики і інформатики Харківського національного університету ім. В.Н.Каразіна. Результати дисертації є складовою частиною держбюджетних науково-дослідних робіт “Алгебраїчні та аналітичні методи дослідження груп, класів функцій, операторів та пов'язаних з ними об'єктів” (номер державної реєстрації 0106U003141), “Дослідження з гомологічної алгебри та теорії функцій” (номер державної реєстрації 0109U000613), “Розробка і застосування алгебраїчних і теоретико-функціональних методів” (номер державної реєстрації 0112U001059), “Розробка теоретико-функціональних методів та їх застосування в теорії операторів та математичній статистиці” (номер державної реєстрації 0115U000481) та “Оператори в банахових, гільбертових, функціональних просторах та квазікриштали Фур’є” (номер державної реєстрації 0118U002036).

Мета і задачі дослідження. Метою дисертаційної роботи є побудова нової теорії і знаходження нових методів дослідження локалізації і розділення коренів многочленів і цілих функцій, зв'язку розташування коренів з властивостями коефіцієнтів цих функцій, а також отримання опису і дослідження властивостей лінійних операторів , які зберігають гіперболічність, стійкість і позитивність.

Об'єктом дослідження є гіперболічні, стійкі і позитивні многочлени, цілі функції класів Лаґерра-Поліа і Лаґерра-Поліа типу I, лінійні оператори, які зберігають гіперболічність, стійкість і позитивність.

Предметом дослідження є зв'язок властивостей розташування коренів многочленів і цілих функцій з властивостями коефіцієнтів цих функцій, властивості цілих функцій класів Лаґерра-Поліа і Лаґерра-Поліа типу I, а також опис і властивості операторів, які зберігають гіперболічність, стійкість і позитивність.

Задачі дослідження:

– отримати зручну достатню умову кратної позитивності і тотальної позитивності матриць, застосувати її для дослідження розташування коренів частотних послідовностей Поліа, властивостей моментних послідовностей Гамбургера і позитивних многочленів;

– отримати достатні умови стійкості комплексних многочленів і розташування коренів цілих функцій у лівій півплощині; дослідити необхідні і достатні умови для того, щоб часткова тета-функція мала стійкі відрізки ряду Тейлора;

– отримати достатню умову додатності на дійсній осі многочлена з додатними коефіцієнтами; знайти опис крайніх напрямків конуса многочленів з додатними коефіцієнтами, які є невід'ємними на дійсній осі і мають степінь не більшу за дане число; знайти опис діагональних в стандартному мономіальному базисі лінійних операторів, які зберігають вказаний конус; знайти найменший можливий порядок нескалярного лінійного диференціального оператора з поліноміальними коефіцієнтами, який зберігає вказаний конус;

– отримати характеризацію нульових множин цілих абсолютно монотонних функцій, якщо ці множини не перетинають деякий кут $\{z : |\arg z - \pi| < \alpha\}$ для $\alpha > 0$; знайти нову необхідну умову для частин нульових множин цілих абсолютно монотонних функцій, які розташовані у вказаному куті; отримати неперервний аналог відомої теореми М. Фекете і Дж. Поліа про домноження додатного многочлена на експоненту;

– дослідити належність до класу Лаґерра-Поліа часткової тета-функції і її відрізків ряду Тейлора; а також належність до класу Лаґерра-Поліа деяких інших важливих спеціальних цілих функцій і їх відрізків ряду Тейлора; отримати нові необхідні і достатні умови належності цілої функції до класу Лаґерра-Поліа (узагальнені нерівності Лаґерра і комплексні нерівності Лаґерра);

– отримати оцінки для мешу гіперболічного многочлена і логарифмічного мешу гіперболічного многочлена з додатними коефіцієнтами через коефіцієнти многочлену; дослідити логарифмічний меш згортки Шура-Сеге двох гіперболічних многочленів; знайти точну оцінку знизу на меш образу гіперболічного многочлена під дією центрально-різничного лінійного оператора;

– знайти повний опис лінійних скінченно-різничних операторів зі сталими коефіцієнтами, які зберігають множину гіперболічних многочленів, і які зберігають множину многочленів з коренями у смузі; дослідити властивості коренів образу центрально-різничного лінійного оператора від цілої функції класу Лаґерра-Поліа; отримати повний опис лінійних скінченно-різничних операторів з цілими коефіцієнтами, які зберігають клас цілих функцій Лаґерра-Поліа.

Методи дослідження. У дисертаційній роботі використовуються методи комплексного аналізу, дійсного аналізу, лінійної алгебри і функціонального аналізу.

Наукова новизна отриманих результатів. В дисертаційній роботі побудовано нову теорію і знайдено нові методи дослідження зв'язків розташування коренів многочленів і цілих функцій з властивостями коефіцієнтів цих функцій, а також отримані описи і досліджено властивості лінійних операторів, які зберігають гіперболічність, стійкість і позитивність. Зокрема, в дисертаційній роботі отримані наступні результати:

– отримано нову достатню умову кратної додатності і тотальної додатності дійсних матриць заданого розміру; доведено, що ця умова є точною для кожного фіксованого розміру матриць в класі ганкелевих матриць і в класі тепліцевих матриць; отримані нові достатні умови для послідовності, щоб вона була частотною послідовністю Поліа, а також для того, щоб твірна функція послідовності не мала коренів в заданому куті; отримано нову достатню умову для додатної послідовності, щоб вона була моментною послідовністю Гамбургера; отримано нову достатню умову додатності на всій дійсній осі многочлена з додатними коефіцієнтами;

– отримано нову зручну достатню умову стійкості комплексних многочленів, а також достатню умову розташування коренів цілих функцій у відкритій лівій півплощині, перевірено, що ці умову не можна покращити; знайдено необхідні і достатні умови для того, щоб часткова тета-функція мала стійкі відрізки ряду Тейлора, а також мала усі корені у відкритій лівій півплощині;

– знайдено повний опис крайніх напрямків конусу многочленів з додатними коефіцієнтами, які є невід'ємними на дійсній осі і мають степінь не більшу за дане число; знайдено повний опис діагональних в стандартному мономіальному базисі лінійних операторів, які зберігають вказаний конус; знайдено найменший можливий порядок нескалярного лінійного диференціального оператора з поліноміальними коефіцієнтами, який зберігає вказаний конус;

– отримано неперервний аналог відомої теореми М. Фекете і Дж. Поліа про домноження додатного многочлена на експоненту; отримано характеризацію нульових множин цілих абсолютно монотонних функцій, якщо ці множини не перетинають деякий кут $\{z : |\arg z - \pi| < \alpha\}$ для $\alpha > 0$; знайдено нову необхідну умову для тих частин нульових множин цілих абсолютно монотонних функцій, які розташовані у вказаному куті;

– знайдено, при яких значеннях параметру часткова тета-функція, а також її відрізки ряду Тейлора належать до класу Лаґерра-Поліа; досліджено належність до класу Лаґерра-Поліа низки інших важливих спеціальних цілих функцій і їх відрізків ряду Тейлора; доведено, що узагальнені нерівності Лагерра, а також комплексні нерівності Лаґерра, є необхідними і достатніми умовами належності цілої функції до класу Лаґерра-Поліа;

– отримані оцінки для мешу гіперболічного многочлена і логарифмічного мешу гіперболічного многочлена з додатними коефіцієнтами через коефіцієнти многочлену; доведено, що логарифмічний меш згортки Шура-Сеге двох гіперболічних многочленів не є меншим за максимум їх логарифмічних мешів; отримано точну оцінку знизу на меш образу гіперболічного многочлена під дією центрально-різничного лінійного оператора зі сталими коефіцієнтами;

– отримано повний опис лінійних скінченно-різничних операторів зі сталими коефіцієнтами, які зберігають множину гіперболічних многочленів і які зберігають множину многочленів з коренями у смузі; доведені важливі властивості коренів образу центрально-різничного лінійного оператора від цілої функції класу Лаґерра-Поліа, такі як простота коренів і мінімальний меш образу; отримано повний опис лінійних скінченно-різничних операторів, коефіцієнти яких є цілими функціями, що вони зберігають клас цілих функцій Лаґерра-Поліа.

Практичне значення отриманих результатів. Отримані в дисертаційній роботі результати носять теоретичний характер. Вони поглиблюють наші знання про розподіл і розташування коренів комплексних многочленів і цілих функцій, а також про лінійні оператори, які зберігають гіперболічність, стійкість або позитивність многочленів. Результати і методи дисертаційної роботи можуть бути використаними в різноманітних математичних областях, у яких важливо отримати точну інформацію щодо розташування коренів многочленів або цілих функцій, таких як дійсний аналіз, теорія функцій комплексної змінної, диференціальні рівняння, лінійна алгебра, функціональний аналіз і багато інших.

Особистий внесок здобувача. Усі результати дисертації отримані автором. Зі спільних праць до дисертації включені тільки ті результати, які належать автору особисто. У вступі до дисертації та в тексті дисертації розповідається про внесок співавторів цих робіт. Якщо виникає потреба використати якийсь із результатів, що не належить автору (у тому числі і зі спільних праць), цей результат поміщається до дисертації без доведення і з посиланням на відповідний пункт списку використаних джерел.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертації доповідались і обговорювались на таких міжнародних конференціях:

– Computational Methods and Function Theory, University of Aveiro, Portugal, June 25-29, 2001;

– International Akhiezer Centenary Conference “Theory of Functions and Mathematical Phisics”, Kharkiv, August 13-17, 2001;

– Second International Conference “Mathematical Analysis and Economics”, Sumy, April 1-4, 2003;

– International conference dedicated to 125-th anniversary of Hans Hahn, Chernivtsi, June 27 - July 3, 2004;

– Computational Methods and Function Theory, Joensuu (Finland), June 13-17, 2005;

– Analysis and related topics, Lviv, Ukraine, November 17-20, 2005;

– Entire and Subharmonic Functions and Related Topics, International Conference dedicated to the centennial of B.Ya.Levin (1906-1993), KHARKIV, August 14-17, 2006;

– Analysis and Topology, Lviv, Ukraine, May 26-June 7, 2008;
– Conference on complex analysis dedicated to the memory of Anatolii Asirovich Goldberg (1930-2008), Lviv, Ukraine, May 31-June 5, 2010;
– IWOTA 2010, Technische Universität Berlin, July 12th-16th, 2010;
– Complex analysis and its applications, dedicated to the 70th anniversary of A.F. Grishin, Kharkov, Kharkov National University, August 15-18, 2011;
– III International Conference ANALYSIS AND MATHEMATICAL PHYSICS, Kharkiv, B.Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering of the National Academy of Sciences of Ukraine, June 15–19, 2015;
– Complex Analysis and Related Topics, Lviv, Ivan Franko National University of Lviv, May 30-June 4, 2016;
– International Conference in Functional Analysis Dedicated to the 125th Anniversary of Stefan Banach, Lviv, Ivan Franko National University of Lviv, September 18-23, 2017;
– Hausdorff Geometry of Polynomials and Polynomial Sequences, Institut Mittag-Leffler, Sweeden, May 28 - June 1, 2018.
– VI International Conference ANALYSIS AND MATHEMATICAL PHYSICS dedicated to the centennial anniversary of the National Academy of Sciences of Ukraine and the 50th anniversary of the Department of Function Theory, Kharkiv, B.Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering of the National Academy of Sciences of Ukraine, June 18–22, 2018.

Крім того, вони доповідалися на
– Харківському міському семінарі по теорії функцій;
– математичному семінарі університету Альгарве, Португалія;
– математичному семінарі університету Тюбінгена, Німеччина;
– міні-семінарах у семінарі "Проблеми Поліа-Шура-Лакса: збереження гіпербо-лічності і стабільності" в Американському інституті математики, Пало-Алто, США;
– семінарі математичного факультету університету Анкари, Турція;
– семінарі математичного відділення Стокгольмського університету, Швеція;
– на міні-семінарах у семінарі "Стабільність, гіперболічність і локалізація коренів функцій" в Американському інституті математики, Пало-Алто, США;
– двічі на семінарах з аналізу математичного факультету Шанхайського університету, Китай.

Публікації. Всього за темою дисертації написано 36 праць [1–36], серед яких 20 статей у вітчизняних та закордонних періодичних фахових виданнях, із яких: усі статті реферуються у міжнародній математичній реферативній базі даних Zentralblatt, 19 статей реферуються у міжнародній математичній реферативній базі даних MathSciNet (MathReviews), 13 статей присутні в наукометричних базах Scopus і Web of Science, – а також 16 тез міжнародних наукових конференцій.

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається зі вступу, п'яти розділів, висновків, одного додатку та списку використаних джерел, який містить 237 найменувань і займає 26 сторінок. Повний обсяг роботи – 324 сторінки. Обсяг основної частини дисертації – 266 сторінок.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі обґрунтовано актуальність теми дисертації, сформульовані мета та задачі, об'єкт та предмет дослідження, розкрита наукова новизна отриманих результатів.

У **розділі 1** дисертаційної роботи вивчаються поняття тотально додатної і k-кратно додатної матриць та їх властивості. Матриця із дійсними елементами називається k-кратно додатною, якщо усі її мінори, що їх порядки не перевищують k, є невід'ємними. Матриця із дійсними елементами називається тотально додатною, якщо усі її мінори є невід'ємними. Тотально додатні і кратно додатні матриці знаходять численні застосування у математиці, статистиці і механиці.

Відзначимо, що перевірка тотальної додатності для заданої матриці потребує, взагалі кажучи, не аби яких зусиль, оскільки матриця розміру $n \times n$ має $C_{2n}^{n} - 1$ мінорів. Тому отримання нових зручних достатніх умов тотальної додатності матриць є дуже актуальним. Для формулювання результату нам потрібне означення.

Означення 1.1.3. Для даного фіксованого $c \geq 1$ ми будемо позначати через $TP_2(c)$ клас матриць $M = (a_{ij}),\ 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n,\quad (m, n \in \mathrm{N} \bigcup \infty)$ з додатними елементами, що вони задовольняють наступну умову: $a_{ij}\, a_{i+1,\, j+1} \geq c\, a_{i,\, j+1}\, a_{i+1,\, j}$, $1 \leq i \leq m-1,\ 1 \leq j \leq n-1$. Ми будемо позначати через $STP_2(c)$ клас матриць $M = (a_{ij}), 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n, (m, n \in \mathrm{N} \bigcup \infty)$ з додатними елементами, що вони задовольняють умову: $a_{ij}\, a_{i+1,\, j+1} > c\, a_{i,\, j+1}\, a_{i+1,\, j}$, $1 \leq i \leq m-1,\ 1 \leq j \leq n-1$.

Введемо ще одне позначення: для кожного $k = 2,3,4,\ldots$ позначимо через c_k наступну константу: $c_k = 4\cos^2\left(\dfrac{\pi}{k+1}\right)$.

Основним результатом розділу 1 є наступна теорема.

Теорема 1.1.4. Для кожного $k = 2,3,4,\ldots$, і для кожного $c \geq c_k$, ми маємо (i) якщо $M \in TP_2(c)$, то M є k-кратно додатною;

(ii) якщо $M \in STP_2(c)$, то M є строго k-кратно додатною, тобто усі її мінори, що їх порядки не перевищують k, є додатними.

Простим наслідком цієї теореми є таке твердження.

Наслідок 1.1.5. Для кожного $c \geq 4$ ми маємо

(i) якщо $M \in TP_2(c)$, то M є тотально додатною;

(ii) якщо $M \in STP_2(c)$, то усі мінори M є додатними.

Наступна теорема демонструє, що константи в теоремі 1.1.4 є найменшими можливими для кожного k не тільки в класі усіх матриць з додатними елементами, а і у класі тепліцевих матриць, а також у класі ганкелевих матриць.

Теорема 1.1.6. (i) для кожного $c,\ 1 \le c < c_{\mathrm{k}}$, існує тепліцева матриця $M \in TP_2(c)$ розміру $k \times k$, така що $\det M < 0$;

(ii) для кожного $c,\ 1 \le c < c_{\mathrm{k}}$, існує ганкелева матриця $M \in TP_2(c)$ розміру $k \times k$, така що $\det M < 0$.

Далі в розділі 1 теорему 1.1.4 застосовано для дослідження розташування коренів частотних послідовностей Поліа, властивостей моментних послідовностей Гамбургера, а в розділі 2 – для отримання достатньої умови додатності многочлену на дійсній осі. Наприклад, отримані такі наслідки теореми 1.1.4.

Наслідок 1.1.15. Нехай задані послідовність $(a_k)_{k=0}^n$ невід'ємних чисел і $m \in \mathrm{N}$. Тоді, якщо $a_k^2 \ge c_m\, a_{k-1}\, a_{k+1},\ 1 \le k \le n-1$, то многочлен $P(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$ не має коренів у секторі $\left\{ z : |\arg z| < \dfrac{m\pi}{m+n-1} \right\}$.

Наслідок 1.1.18. Довільна додатна послідовність $(s_k)_{k=0}^{\infty}$, яка задовольняє умову $s_{n-1}\, s_{n+1} \ge 4 s_n^2,\ n = 1, 2, 3, \ldots$ є моментною послідовністю Гамбургера, тобто ця послідовність є моментною послідовністю деякої функції, яка має нескінченно багато точок зростання.

Константа 4 в цьому твердженні є найменшою можливою.

Розділ 2 присвячений стійким многочленам. Дійсний многочлен називається стійким, якщо усі його корені мають від'ємні дійсні частини. Різноманітні питання поліноміальної стійкості виникають у численних проблемах математики, фізики, інженерії тощо. Ми згадаємо лише добре відомий зв'язок між стійкістю розв'язків систем диференціальних рівнянь і стійкістю відповідного характеристичного многочлена системи. Відмітимо, що стійкий дійсний многочлен з додатним старшим коефіцієнтом має усі додатні коефіцієнти (необхідна умова стійкості А.Стодоли).

Знаменитий критерій стійкості Рауса-Гурвиця пов'язує стійкість дійсного многочлена з додатністю головних мінорів спеціальної матриці, побудованої по коефіцієнтах многочлена (матриці Гурвиця). Б.А.Аснер-молодший, Дж.Кемперман і Х.Пенья довели, що матриця Гурвіця стійкого многочлена є тотально додатною. В розділі 1 було доведено, що константи в теоремі 1.1.4 є найменшими можливими для кожного k у класі тепліцевих матриць, а також у класі ганкелевих матриць. Виникає природне питання щодо найменшої можливої константи в важливому класі гурвіцевих матриць. У розділі 2 доведено, що в класі гурвіцевих матриць константа c_k не є найменшою можливою в твердженні теореми 1.1.4.

Теорема 2.1.5. Нехай x_0 – єдиний додатний корінь многочлена $x^3 - x^2 - 2x - 1$ ($x_0 \approx 2.1479$).

1. Якщо коефіцієнти многочлена $F(x) = \sum_{k=0}^{4} a_k x^k$ є додатними і задовольняють нерівності $a_k\, a_{k+1} > 2 a_{k-1}\, a_{k+2}$ для $k = 1, 2,$ то F є стійким многочленом. Зокрема, F є стійким, якщо $a_k^2 > \sqrt{2}\, a_{k-1}\, a_{k+1}$ для $k = 1, 2, 3.$

2. Якщо коефіцієнти многочлена $F(x) = \sum_{k=0}^{5} a_k x^k$ є додатними і задовольняють нерівності $a_k\, a_{k+1} > x_0\, a_{k-1}\, a_{k+2}$ для $k = 1, 2, 3,$ то F є стійким многочленом. Зокрема, F є стійким, якщо $a_k^2 > \sqrt{x_0}\, a_{k-1}\, a_{k+1}$ для $k = 1, 2, 3, 4.$

3. Якщо коефіцієнти многочлена $F(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, n > 5,$ є додатними і задовольняють нерівності $a_k\, a_{k+1} \geq x_0\, a_{k-1}\, a_{k+2}$ для $k = 1, 2, 3, \ldots, n-2,$ то F є стійким многочленом. Зокрема, F є стійким, якщо $a_k^2 \geq \sqrt{x_0}\, a_{k-1}\, a_{k+1}$ для $k = 1, 2, 3, \ldots, n-1.$

Відмітимо, що $\frac{a_k\, a_{k+1}}{a_{k-1}\, a_{k+2}} = \frac{a_k^2}{a_{k-1}\, a_{k+1}} \cdot \frac{a_{k+1}^2}{a_k\, a_{k+2}},$ таким чином, наступна теорема демонструє, що усі сталі в теоремі 2.1.5 є найменшими можливими.

Теорема 2.1.6. 1. Для кожного $d \leq \sqrt{2}$ існує многочлен $F(x) = \sum_{k=0}^{4} a_k x^k$ з додатними коефіцієнтами, які задовольняють умову $a_k^2 = d\, a_{k-1}\, a_{k+1}$ для $k = 1, 2, 3,$ але многочлен F не є стійким.

2. Для кожного $d \leq \sqrt{x_0}$ існує многочлен $F(x) = \sum_{k=0}^{5} a_k x^k$ з додатними коефіцієнтами, які задовольняють умову $a_k^2 = d\, a_{k-1}\, a_{k+1}$ для $k = 1, 2, 3, 4,$ але многочлен F не є стійким.

3. Для кожного $n > 5$ і кожного $\varepsilon > 0$ існує многочлен $F(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ з додатними коефіцієнтами, які задовольняють умову $a_k^2 > \left(\sqrt{x_0} - \varepsilon\right) a_{k-1}\, a_{k+1}$ для $k = 1, 2, 3, \ldots, n-1,$ але многочлен F не є стійким.

Теорема 2.1.5 може бути узагальнена для цілих функцій наступним чином.

Теорема 2.1.7. Якщо усі коефіцієнти функції $G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ є додатними, і вони задовольняють умови $a_k\, a_{k+1} \geq x_0\, a_{k-1}\, a_{k+2}$ для усіх $k \in \mathrm{N},$ то усі корені функції G мають від'ємні дійсні частини. Зокрема, твердження є вірним, якщо $a_k^2 \geq \sqrt{x_0}\, a_{k-1}\, a_{k+1}$ для усіх $k \in \mathrm{N}.$

В розділі 2 доведено також, що константа в твердженні теореми 2.1.7 є найменшою можливою.

Р**озділ 3** присвячений різним видам додатності. Ми розглядаємо конус многочленів з додатними коефіцієнтами, які є невід'ємними на всій дійсній осі, знаходимо крайні напрямки цього конусу і описуємо діагональні в стандартному мономіальному базисі лінійні оператори, що вони зберігають цей конус. Ми також досліджуємо диференціальні оператори скінченого порядку з поліноміальними коефіцієнтами, які зберігають множину невід'ємних многочленів зі степенем не більшим за задане число. Ми досліджуємо також нульові множини перетворень Фур'є додатних мір на дійсній півосі, так званих абсолютно монотонних функцій.

В *першому підрозділі* розділу 3, базуючись на результатах першого розділу, ми отримаємо просту достатню умову для того, щоб многочлен парного степеня з додатними коефіцієнтами був додатним на всій дійсній осі.

Теорема 3.1.1. Нехай $P(x) = \sum_{k=0}^{2n} a_k x^k$ є многочленом з додатними коефіцієнтами. Якщо нерівності $\dfrac{a_{2k+1}^2}{a_{2k}\, a_{2k+2}} < \dfrac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{n+2}\right)}$ виконуються для усіх $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1,$ то $P(x) > 0$ для усіх дійсних x.

Наступне твердження демонструє, що константи в теоремі 3.1.1 є точними для кожного $n \in \mathrm{N}.$

Теорема 3.1.2. Для кожного $n \in \mathrm{N}$ існує многочлен $P(x) = \sum_{k=0}^{2n} a_k x^k$ з додатними коефіцієнтами, які задовольняють умови $\dfrac{a_{2k+1}^2}{a_{2k}\,a_{2k+2}} = \dfrac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{n+2}\right)}$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, і такий, що P має не менш за два дійсних кореня.

В *другому підрозділі* розділу 3 ми вивчаємо конус невід'ємних многочленів з невід'ємними коефіцієнтами. Для даного $n \in \mathrm{N}$ ми позначаємо через $\mathrm{P}_{2\mathrm{n}}$ множину многочленів степеня не більше за $2n$ з невід'ємними коефіцієнтами, які є невід'ємними на дійсній осі. Для $P(x) = \sum_{k=0}^{2n} a_k x^k \in \mathrm{P}_{2\mathrm{n}}$ ми позначимо через $\mu(P)$ число ненульових коефіцієнтів многочлена P; через $\nu(P)$ – число змін знаку у послідовності $(a_0, -a_1, a_2, -a_3, \ldots, -a_{2n-1}, a_{2n})$; і через $N(P)$ ми позначаємо число від'ємних коренів P з урахуванням кратності.

Теорема 3.2.5. Многочлен $P \in \mathrm{P}_{2\mathrm{n}}$ є крайнім напрямком конусу $\mathrm{P}_{2\mathrm{n}}$ тоді і тільки тоді, коли $N(P) = \mu(P) - 1$.

Відмітимо, що за правилом знаків Декарта $N(P) \le \nu(P)$, і очевидно, що $\nu(P) \le \mu(P) - 1$. Таким чином, для многочлена $P \in \mathrm{P}_{2\mathrm{n}}$ з рівності $N(P) = \mu(P) - 1$ випливає, зокрема, що $P(x) = a_{j_0} x^{j_0} + a_{j_1} x^{j_1} + \ldots + a_{j_{2l}} x^{j_{2l}}$ з $j_{2s} \in 2\mathbb{Z}$, $s = 0, 1, 2, \ldots, l$, $j_{2s+1} \in 2\,\mathbb{Z} + 1$, $s = 0, 1, 2, \ldots, l-1$.

Для даного $n \in \mathrm{N}$ і для послідовності дійсних чисел $\Lambda = (\lambda_k)_{k=0}^{2n}$ ми визначимо лінійний оператор $A_\Lambda : \mathrm{R}_{2\mathrm{n}}[\mathrm{x}] \to \mathrm{R}_{2\mathrm{n}}[\mathrm{x}]$ наступним чином: $A_\Lambda\left(\sum_{k=0}^{2n} a_k x^k\right) = \sum_{k=0}^{2n} \lambda_k a_k x^k$.

Наступна теорема дає відповідь на питання Бориса Шапіро: для яких послідовностей Λ відповідний лінійний оператор A_Λ зберігає конус $\mathrm{P}_{2\mathrm{n}}$?

Теорема 3.2.9. Нехай $\Lambda = (\lambda_k)_{k=0}^{2n}$ – задана дійсна послідовність. Тоді A_Λ зберігає конус $\mathrm{P}_{2\mathrm{n}}$ тоді і тільки тоді, коли існують дві послідовності $(\alpha_k)_{k=0}^{2n}$ і $(\beta_k)_{k=0}^{2n}$, $\alpha_k \ge 0$ для усіх $k = 0, 1, 2, \ldots, 2n$, усі головні мінори наступної матриці $\mathrm{A}_{n+1} = \left(\alpha_{i+j}\right)_{i,j=0}^{n}$ є невід'ємними, $(-1)^k \beta_k \ge 0$ для $k = 0, 1, 2, \ldots, 2n$, і $-\beta_{2l+1} \le \alpha_{2l+1}$ для $l = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, такі, що $\lambda_k = \alpha_k + \beta_k$ для усіх $k = 0, 1, 2, \ldots, 2n$.

В *третьому підрозділі* розділу 3 ми вивчаємо лінійні оператори спеціального вигляду. Наступний результат демонструє, що деякі види лінійних операторів не зберігають множину невід'ємних многочленів.

Теорема 3.3.4. Виберемо довільне натуральне число m, послідовність натуральних чисел $(n_k)_{k=0}^{\infty}$, і послідовність многочленів $\left(Q_j(x,k)\right)_{j\in \mathrm{Z},\, k=0,1,2,\ldots}$. Припустимо, що $Q_j(x,k)\equiv 0$ для $k+j<0$ і $Q_{-m}(0,k)\neq 0$ для $k=0,1,2,\ldots$. Визначимо лінійний оператор $A:\mathrm{R}[\mathrm{x}]\to \mathrm{R}[\mathrm{x}]$ за формулою $A\left(x^k\right)=\sum_{j=-m}^{n(k)} Q_j(x,k)x^{k+j}$, $k=0,1,2,\ldots$. Тоді оператор A не переводить множину невід'ємних (додатних) многочленів із $\mathrm{R}_{2([\frac{m}{2}]+1)}[\mathrm{x}]$ в множину невід'ємних многочленів.

Наступна теорема, яка посилює результат А.Гутермана і Б.Шапіро, є наслідком теореми 3.3.4.

Теорема 3.3.6. Нехай $A:\mathrm{R}[\mathrm{x}]\to \mathrm{R}[\mathrm{x}]$ є лінійним диференціальним оператором порядку $m\geq 1$ з поліноміальними коефіцієнтами $Q=(q_0(x), q_1(x),\ldots, q_m(x))$, де q_m не є тотожно нульовим: $A(f)=q_0(x)f(x)+q_1(x)f'(x)+\ \ldots+q_m(x)f^{(m)}(x)$, $f\in R[x]$. Тоді для жодної послідовності коефіцієнтів Q оператор A не переводить множину невід'ємних многочленів із $\mathrm{R}_{2([\frac{m}{2}]+1)}[\mathrm{x}]$ в множину невід'ємних многочленів.

Ми отримуємо ще наступну теорему.

Теорема 3.3.8. Нехай $A:\mathrm{R}[\mathrm{x}]\to \mathrm{R}[\mathrm{x}]$ є лінійним диференціальним оператором порядку $m\geq 1$ з поліноміальними коефіцієнтами $Q=(q_0(x), q_1(x),\ldots, q_m(x))$, $A(f)=\frac{q_0(x)}{0!}f(x)+\frac{q_1(x)}{1!}f'(x)+\ \ldots+\frac{q_m(x)}{m!}f^{(m)}(x)$, $f\in R[x]$. Тоді оператор A переводить множину невід'ємних многочленів із $\mathrm{R}_{2[\frac{m}{2}]}[\mathrm{x}]$ в множину невід'ємних многочленів тоді і тільки тоді, коли усі головні мінори наступної матриці $\mathrm{A}_q(x)=\left(q_{i+j}(x)\right)_{i,j=0}^{[\frac{m}{2}]}$ є невід'ємними для кожного $x\in R$.

В *четвертому підрозділі* розділу 3 ми вивчаємо природне континуальне узагальнення многочленів з додатними коефіцієнтами – перетворення Лапласа невід'ємних скінчених Борелевських мір з носіями на додатній півосі. Якщо ми інтерпретуємо коефіцієнти многочлена f степеня n як додатні маси дискретної міри μ з носієм у множині $\{0,1,\ldots,n\}$, $\mu(\{k\})=\frac{f^{(k)}(0)}{k!}$, тоді значенням перетворення Лапласу цієї міри у точці $x=\log u$, $u>0$, буде многочлен $f(u)$.

Означення 3.4.1. Функція $f\in C^{\infty}(-\infty;0]$ називається абсолютно монотонною, якщо $f^{(k)}(x) > 0$ для усіх $k = 0, 1, 2, \ldots.$ і для усіх $x \in (-\infty; 0]$.

Поняття абсолютно монотонної функції було введено С.Бернштейном. За добре відомою теоремою С.Бернштейна, клас абсолютно монотонних функцій збігається з класом цілих функцій, які можуть бути представленими наступним чином: $f(x) = \int\limits_0^\infty e^{xu} P(du),\ \ x \in (-\infty; 0]$, де P є невід'ємною скінченою Борелевською мірою на $(-\infty; 0]$. Це представлення демонструє, що кожна абсолютно монотонна функція є аналітичною в лівій півплощині $C_0 = \{z : \operatorname{Re} z < 0\}$.

Постає природна проблема: характеризувати клас підмножин C_0, які можуть бути нульовими множинами абсолютно монотонних функцій. Відмітимо декілька відомих властивостей таких нульових множин. Очевидно, якщо A є нульовою множиною абсолютно монотонної функції, то A є не більш ніж зліченною множиною без граничних точок в C_0 і $A \bigcap \mathrm{R} = \varnothing$, крім того $a \in A \Rightarrow \bar{a} \in A$ (кратності точок a і $\bar{a}$ є рівними). Оскільки абсолютно монотонна функція є обмеженою в C_0, то множина A задовольняє умову Бляшке для півплощини: $\sum\limits_{a \in A} \frac{\operatorname{Re} a}{|a|^2 + 1} < \infty$. Наступна необхідна умова, незалежна від попередніх двох, була відмічена І.В.Островським: $dist(x, A) \to +\infty,\ x \to -\infty$.

Метою четвертого підрозділу розділу 3 є отримання нової необхідної умови для нульових множин абсолютно монотонних функцій, демонстрація того факту, що ця умова не є наслідком вже відомих умов, і обговорення деяких прикладів.

Теорема 3.4.3. Нехай множина $A \subset C_0$ без скінчених граничних точок є нульовою множиною абсолютно монотонної функції f. Нехай B є добутком Бляшке $B(z) = \prod\limits_{a \in A} \left(\dfrac{1 - \frac{z}{a}}{1 - \frac{z}{\bar{a}}} \right)$. Тоді для кожного $\beta \in (0; \pi / 2)$ існує невід'ємна неперервна функція h_β, $h_\beta \in L^1(-\infty; -1]$, така що $\sum\limits_{a \in A \bigcap \{a : |\arg a - \pi| < \beta\}} \dfrac{1}{(x - a)^2} \le h_\beta(x)$.

Наступний приклад демонструє, що отримана необхідна умова на нульові множини абсолютно монотонних функцій умова не є наслідком вже відомих умов.

Приклад 3.4.5. Нехай $A_\gamma = \{-k^\gamma + ik\}_{k=1}^\infty \bigcup \{-k^\gamma - ik\}_{k=1}^\infty$. Тоді множина A_γ не є нульовою множиною абсолютно монотонної функції при $\gamma \ge 2$, оскільки вона не задовольняє умову із теореми 3.4.3, але множина A_γ задовольняє усі інші відомі необхідні умови для нульових множин абсолютно монотонних функцій.

В *п'ятому підрозділі* розділу 3 ми доводимо неперервний аналог відомої теореми М. Фекете і Дж. Поліа. Головним результатом параграфу є наступна теорема.

Теорема 3.5.2. Нехай $p:[0;+\infty)\to \mathrm{R}$ є функцією, яка задовольняє наступні умови:

1. $p\in C\,[0;+\infty)$.

2. $L(x,|\,p\,|):=\int\limits_0^\infty e^{xt}\,|\,p(t)\,|\,dt<\infty$ для усіх $x\ge 0$.

3. Існують дійсні числа a,b, $0<a\le b<+\infty$, такі що $p(t)\ge 0$ для $t\in[0;a]\bigcup[b;+\infty)$.

4. Існують $t_1\in[0;a]$ і $t_2\in[b;+\infty)$, такі що $p(t_1)>0$, $p(t_2)>0$.

5 $L(x,p)>0$ для усіх $x\in \mathrm{R}$.

Тоді існує $\varepsilon_0>0$, таке що для усіх $\varepsilon\in(0;\varepsilon_0]$ існує $\lambda_\varepsilon>0$, таке що для усіх $\lambda\ge\lambda_\varepsilon$ функція $F(\lambda,\varepsilon)(x)=L(x,p)e^{\lambda e^{\varepsilon x}}$ є перетворенням Лапласу невід'ємної функції $q_{\lambda,\varepsilon}$ на додатній півосі.

В *шостому підрозділі* розділу 3 ми отримуємо опис нульових множин цілих абсолютно монотонних функцій, якщо ці множини не перетинають деякий кут $\{z:|\arg z-\pi|<\alpha\}$ для якогось $\alpha>0$. Очевидно, що цілі абсолютно монотонні функції формують підклас класу цілих функцій, які є обмеженими в кожній півплощині вигляду $\mathrm{C}_\omega=\{\mathrm{z}:\mathrm{Re\,z}\le\omega\}$, $\omega\in \mathrm{R}$.

Теорема 3.6.2. Множина $E=\{b_k\}_{k=1}^\infty\subset \mathrm{C}$ без скінчених граничних точок є нульовою множиною деякої цілої функції, яка є обмеженою в C_ω для усіх $\omega\in \mathrm{R}$ тоді і тільки тоді, коли $\sum\limits_{b_k\in E\bigcap \mathrm{C}_\omega}\dfrac{|\mathrm{Re}\,b_k|+1}{|\,b_k\,|^2+1}<\infty$ для усіх $\omega\in \mathrm{R}$.

Головним результатом цього шостого підрозділу є наступна теорема.

Теорема 3.6.4. Нехай $E=\{b_k\}_{k=1}^\infty\subset \mathrm{C}$ є множиною без скінчених граничних точок. Нехай існує $\alpha\in(0;\pi/2]$, таке що $E\bigcap\{z:|\arg z-\pi|<\alpha\}=\varnothing$ Множина E є нульовою множиною деякої цілої абсолютно монотонної функції тоді і тільки тоді, коли виконуються умови:

1. $E\bigcap \mathrm{R}=\varnothing$, крім того $a\in E\Rightarrow\overline{a}\in E$ (кратності точок a і $\overline{a}$ є рівними).

2. $\sum\limits_{b_k \in E \cap C_\omega} \frac{|\operatorname{Re} b_k|+1}{|b_k|^2+1} < \infty$ для усіх $\omega \in R$.

Розділ 4 присвячений гіперболічним многочленам, а також знаменитому класу цілих функцій Лаґерра-Поліа. Дійсний многочлен називається гіперболічним, якщо усі його корені є дійсними. Ціла функція належить до класу Лаґерра-Поліа, якщо вона є рівномірною на компактах у площині границею послідовності гіперболічних многочленів. Клас функцій Лаґерра-Поліа позначається $L-P$. Визначна теорема Е.Лаґерра і Дж.Поліа дає повний опис класу цілих функцій Лаґерра-Поліа.

Нехай $f(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ є цілою функцією з додатними коефіцієнтами. Ми визначимо другі відношення коефіцієнтів Тейлора функції f, наступним чином: $q_n = q_n(f) = \frac{a_{n-1}^2}{a_{n-2}a_n}$, $n \geq 2$. Легко перевірити, що $a_n = \frac{a_1}{q_2^{n-1} q_3^{n-2} \cdot \ldots \cdot q_{n-1}^2 q_n} \cdot \left(\frac{a_1}{a_0}\right)^{n-1}$, $n \geq 2$.

В *першому підрозділі* розділу 4 ми будемо досліджувати належність до класу Лаґерра-Поліа так званої часткової тета-функції, а саме цілої функції $g_a(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{a^{k^2}}$, $a > 1$.

Теорема 4.1.8. Існує константа q_∞ ($q_\infty \approx 3.233636665$), така що:

1. Для кожного $n \in N$ відрізок ряду $S_n(z, g_a) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{z^k}{a^{k^2}}$ має усі дійсні корені $\Leftrightarrow$ існує точка $x_n \in (a; a^3)$, така що $S_n(-x_n, g_a) \leq 0$.

2. Функція g_a належить до класу $L-P$ (тобто має усі дійсні корені) $\Leftrightarrow$ існує точка $x_0 \in (a; a^3)$, така що $g_a(-x_0) \leq 0$.

3. Для кожного $k \in N$ непарний відрізок ряду $S_{2k+1}(z, g_a)$ належить до класу $L-P$ $\Leftrightarrow$ $a^2 \geq q_\infty$.

4. Існує таке $N_0 \in N$, що для усіх $k \geq N_0$ парний відрізок ряду $S_{2k}(z, g_a)$ належить до класу $L-P$ $\Leftrightarrow$ $a^2 > q_\infty$.

5. Функція g_a належить до класу $L-P \Leftrightarrow a^2 \geq q_\infty$.

В *другому підрозділі* розділу 4 ми вивчаємо деякі спеціальні цілі функції з додатними коефіцієнтами і досліджуємо питання, чи належать ці функції та їхні відрізки ряду Тейлора до класу Лаґерра-Поліа. Ми досліджуємо сім'ю цілих функцій $f^{(m,a)}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k (k!)^m}{a^{k^2}}, a > 1, m \geq 1,$ і їхні відрізки ряду Тейлора $S_n^{(m,a)}(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k (k!)^m}{a^{k^2}}$. Ми доводимо, що для кожного $n \in \mathrm{N}, \mathrm{n} \geq 2,$ існує константа $d_{\mathrm{n,m}} \geq 1,$ така що $S_n^{(m,a)} \in L-P \Leftrightarrow a^2 \geq d_{\mathrm{n,m}}$. Також ми доводимо, що існує константа $d_{\infty,\mathrm{m}} > 1,$ така що $f^{(m,a)} \in L-P \Leftrightarrow a^2 \geq d_{\infty,\mathrm{m}}$. Основним результатом другого підрозділу є наступна теорема.

Теорема 4.2.16. В позначеннях, що їх введено вище, ми маємо:

1. Для кожного фіксованого $\mathrm{m} \geq 1$ функція $f^{(m,a)}$ належить до класу $L-P$ тоді і тільки тоді, коли існує $x_0 = \mathrm{x}_0(m) \in (-\mathrm{q}_2(f^{(m,a)});-1],$ такий що $f^{(m,a)}(x_0) \leq 0$.

2. Для кожного фіксованого $m \geq 1$ і $n \in \mathrm{N}, \mathrm{n} \geq 2,$ многочлен $S_n^{(m,a)}$ має тільки дійсні корені тоді і тільки тоді, коли існує $x_0 = \mathrm{x}_0(m,n) \in (-\mathrm{q}_2(f^{(m,a)});-1],$ такий що $S_n^{(m,a)}(x_0) \leq 0$.

3. $3 \cdot 2^m < d_{3,\mathrm{m}} < \mathrm{d}_{5,\mathrm{m}} < \mathrm{d}_{7,\mathrm{m}} < \ldots < \mathrm{d}_{\infty,\mathrm{m}}$.

4. $\lim_{n\to\infty} d_{2\mathrm{n}+1,\mathrm{m}} = d_{\infty,\mathrm{m}}$.

5. $4 \cdot 2^m = d_{2,\mathrm{m}} > \mathrm{d}_{4,\mathrm{m}} > \mathrm{d}_{6,\mathrm{m}} > \ldots > \mathrm{d}_{\infty,\mathrm{m}}$.

6 $\lim_{n\to\infty} d_{2\mathrm{n},\mathrm{m}} = d_{\infty,\mathrm{m}}$.

7 Для кожного $n \in \mathrm{N}, \mathrm{n} \geq 2,$ функція $d_{\mathrm{n,m}}$ є неперервною функцією від $m,$ що зростає. Функція $d_{\infty,\mathrm{m}}$ є також неперервною функцією від $m,$ що зростає.

В *третьому підрозділі* розділу 4 ми даємо відповідь на питання Д.К. Дімітрова і Х.М. Пеньї щодо стійкості відрізків ряду часткової тета-функції. Ми доводимо, що для кожного $n \in \mathrm{N}$ існує стала $s_n,$ така що усі корені відрізків ряду часткової тета-функції $S_n(z, g_a) = \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{a^{k^2}}$ мають від'ємні дійсні частини тоді і тільки тоді, коли

$a > s_n$. Ми також доводимо, що існує константа s_∞, така що усі корені часткової тета-функції мають від'ємні дійсні частини тоді і тільки тоді, коли $a > s_\infty$.

Теорема 4.3.1. 1. $s_3 \le s_7 \le s_{11} \le s_{15} \le \ldots$

2. $s_5 \ge s_9 \ge s_{13} \ge s_{17} \ge \ldots$

3. $\lim_{n\to\infty} s_{4n+3} = \lim_{n\to\infty} s_{4n+1} = s_\infty$.

В *четвертому підрозділі* розділу 4 ми вивчаємо цілі функції з додатними коефіцієнтами, у яких усі (усі, починаючи з деякого) відрізки ряду Тейлора мають тільки дійсні корені. Такі функції формують деякий підклас класу Лаґерра-Поліа.

Теорема 4.4.1. Функція $f_a(z) := \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k! a^{k^2}}, a > 1,$ має усі відрізки ряду Тейлора з усіма дійсними коренями тоді і тільки тоді, коли функція f_a має усі, починаючи з деякого, відрізки ряду Тейлора з усіма дійсними коренями, і це тоді і тільки тоді, коли $a^2 \ge q_\infty$, де константа q_∞ введена в теоремі 4.1.8.

Крім цього, в четвертому підрозділі досліджується аналогічне питання для функції $y_q(z) := 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{z^k}{(q^k - 1)(q^{k-1} - 1) \cdot \ldots \cdot (q-1)}, q > 1.$

В *п'ятому підрозділі* розділу 4 ми вивчаємо цілі функції з додатними коефіцієнтами Тейлора і такі, що послідовність других відношень коефіцієнтів $q_n(f)$ спадає по n. Головним результатом цього параграфу є наступна теорема.

Теорема 4.5.1. Нехай f є цілою функцією з додатними коефіцієнтами Тейлора. Припустимо, що послідовність $q_n(f)$ спадає по n, тобто $q_2 \ge q_3 \ge q_4 \ge \ldots$ і $\lim_{n\to\infty} q_n(f) = b \ge q_\infty$. Тоді усі корені функції f є дійсними і від'ємними, іншими словами $f \in L - P$.

В *шостому підрозділі* розділу 4 ми отримуємо нову характеризацію класу Лаґерра-Поліа через спеціальні нерівності Лаґерра. Кажуть, що дійсна ціла функція φ задовольняє узагальнені нерівності Лаґерра, якщо для усіх $n \in \mathrm{N} \bigcup \{0\}$ і для усіх $x \in \mathrm{R}$ виконується $L_n(x, \varphi) = \sum_{j=0}^{2n} \frac{(-1)^{j+n}}{(2n)!} C_{2n}^{j} \varphi^{(j)}(x) \varphi^{(2n-j)}(x) \ge 0.$

Теорема 4.6.6. Нехай φ – дійсна ціла функція. Якщо $L_n(x, \varphi) \ge 0$ для усіх $n \in \mathrm{N} \bigcup \{0\}$ і для усіх $x \in \mathrm{R}$, то $\varphi \in L - P$.

Крім того, в шостому підрозділі ми доводимо ми отримуємо аналогічні результати для так званих комплексних нерівностей Лаґерра.

В *сьомому і восьмому підрозділах* розділу 4 ми застосували розроблені методи для оцінки числа дійсних коренів спеціальних квазімногочленів і для оцінки локального модуля опуклості банахової алгебри в одиниці.

В **розділі 5** ми довели деякі властивості знаменитої згортки Шура-Сеге для многочленів і знайшли достатні умови знаконезалежної гіперболічності. Крім того, ми розглянули деякі скінчено різничні лінійні оператори і дали відповідь на питання, при яких умовах ці оператори зберігають клас Лаґерра-Поліа.

В *першому підрозділі* розділу 5 введено дві поширені міри відділення коренів гіперболічних многочленів. Для гіперболічного многочлена $P, \deg P \geq 2,$ позначимо через $mesh(P)$ мінімальну відстань між його різними коренями: $mesh(P) = \min_{1 \leq j \leq n-1}(x_{j+1} - x_j)$ для $P = C(x - x_1) \cdot \ldots \cdot (x - x_n),$ де $x_1 \leq \ldots \leq x_n$. Для гіперболічного многочлена $P, \deg P \geq 2,$ з усіма коренями одного знаку позначимо через $lmesh(P)$ мінімальне відношення між його послідовними коренями: $lmesh(P) = \min_{1 \leq j \leq n-1} \frac{x_{j+1}}{x_j}$ для $P = C(x - x_1) \cdot \ldots \cdot (x - x_n),$ де $0 < x_1 \leq \ldots \leq x_n$.

Згорткою Шура-Сегьо $P * Q$ двох многочленів $P(x) = \sum_{j=0}^{n} C_n^j a_j x^j$ і $Q(x) = \sum_{j=0}^{n} C_n^j b_j x^j$ називається многочлен $P * Q(x) = \sum_{j=0}^{n} C_n^j a_j b_j x^j$. Теорема Шура стверджує, що згортка двох гіперболічних многочленів з коренями одного знаку буде гіперболічним многочленом з усіма коренями одного знаку.

Теорема 5.1.8. Нехай задані два многочлена P і Q степеня $n \geq 2$ з усіма дійсними коренями одного знаку. Тоді $lmesh(P * Q) \geq \max(lmesh(P), lmesh(Q))$.

В *другому підрозділі* розділу 5 ми розглядаємо знаконезалежно гіперболічні многочлени, а також гіперболічні многочлени з розділеними коренями.

Теорема 5.2.2. Нехай задано число $c \geq 0$.

1. Припустимо, що $P(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$ є многочленом з додатними коефіцієнтами, $n \geq 2$ і $\frac{a_k^2}{a_{k+1}^2} - 4\frac{a_{k-1}}{a_{k+1}} \geq c^2$ для $k = 1, 2, \ldots, n-1$. Тоді P є гіперболічним многочленом з усіма коренями одного знаку і $mesh(P) \geq c$.

2. Для кожного $c>0, \varepsilon>0,$ і кожного $n \geq 2$ існує многочлен $P_{\varepsilon}(x)=\sum_{j=0}^{n} a_j(\varepsilon)x^j$ з усіма дійсними коренями одного знаку, такий що $\frac{a_k^2(\varepsilon)}{a_{k+1}^2(\varepsilon)}-4\frac{a_{k-1}(\varepsilon)}{a_{k+1}(\varepsilon)} \leq c^2-\varepsilon$ для $k=1,2,\ldots,n-1,$ але $mesh(P_{\varepsilon})<c.$

Теорема 5.2.3 дає аналогічну достатню умову для логарифмічного меша.

Гіперболічний многочлен називається знаконезалежно гіперболічним, якщо він залишається гіперболічним після довільної зміни знаків його коефіцієнтів. Наступна теорема дає відповідь на питання Б.Шапіро. Відзначимо, що рівність $1-2\sum_{k=1}^{\infty} x^{-k^2/2}=0$ має єдиний додатний корінь, який ми позначимо a_{∞} ($a_{\infty} \approx 4.81058280$).

Теорема 5.2.5. 1. Нехай f є цілою функцією з додатними коефіцієнтами. Припустимо, що $q_k(f) \geq a_{\infty}$ для усіх $k \geq 2.$ Тоді для кожного $n \in \mathrm{N}$ n-ий відрізок ряду функції є знаконезалежно гіперболічним многочленом.

2. Для кожного $\varepsilon>0$ існує дійсна ціла функція g_{ε} з ненульовими коефіцієнтами, така що $q_k(g_{\varepsilon})>a_{\infty}-\varepsilon$ для усіх $k \geq 2,$ і усі окрім скінченого числа відрізки ряду Тейлора функції g_{ε} не є гіперболічними многочленами.

В *третьому підрозділі* розділу 5 ми вивчаємо лінійні скінченно-різничні оператори зі сталими коефіцієнтами і з комплексним зсувом.

Теорема 5.3.3. Лінійний оператор $T:\mathrm{R}[\mathrm{x}] \to \mathrm{R}[\mathrm{x}],$ $T(P)(x)=\sum_{j=1}^{m} a_j P(x-j\lambda),$ де $l,m \in \mathbb{Z},$ $l<m,$ $a_j \in \mathbb{C},$ $a_1 \neq 0, a_m \neq 0,$ $\lambda \in \mathrm{C}\setminus\{0\},$ зберігає множину гіперболічних многочленів тоді і тільки тоді, коли він задовольняє наступні умови:

1. $\operatorname{Re}\lambda=0.$

2. $l=-m.$

3. Усі корені твірної функції оператора $Q(t)=\sum_{-m}^{m} a_j t^j$ належать до одиничної окружності $\{z:|z|=1\}.$

4. $a_{-m}\cdot a_m \in (0;+\infty).$

Теорема 5.3.5 дає опис лінійних скінченно-різничних операторів зі сталими коефіцієнтами, які зберігають множину многочленів з коренями в смузі.

Позначимо через $T_{\theta,h}(P)(x)=\dfrac{e^{i\theta}P(x+ih)-e^{-i\theta}P(x-ih)}{i}$, $h>0, \theta\in \mathrm{R}$.

Теорема 5.3.8. Для кожних $h>0, \theta\in \mathrm{R}$ і кожного $\mathrm{f}\in \mathrm{L\text{-}P}$ усі корені цілої функції $T_{\theta,h}(f)$ є дійсними і простими.

Теорема 5.3.9 дає оцінку максимального і мінімального кореня образу $T_{\theta,h}(P)$ для гіперболічного многочлена P.

Теорема 5.3.15. Для кожного гіперболічного многочлена P, $\deg P=n\geq 2$, кожного $h>0, \theta\in \mathrm{R}, \sin\theta\neq 0$, ми маємо $mesh(T_{\theta,h}(P))\geq mesh(T_{\theta,h}(x^n))$. Для кожного $\theta, \sin\theta=0$, твердження теореми є також вірним для усіх $n\geq 3$.

Теорема 5.3.18 дає асимптотичні формули для коренів образу довільного многочлена під дією оператора $T_{\theta,h}$ при $h\to\infty$.

В *четвертому підрозділі* розділу 5 ми розглядаємо центральні скінчено-різничні оператори з несталими коефіцієнтами $\Delta_{M_1,M_2,h}(f)(z)=M_1(z)f(z+h)+M_2(z)f(z-h)$. Тут M_1, M_2 є заданими функціями і h є заданим ненульовим комплексним числом.

Теорема 5.4.2. Нехай M є мероморфною функцією. Тоді для кожної функції $f\in L-P$ функція $f(z+i)+M(z)f(z-i)$ має тільки дійсні корені або є тотожно нульовою тоді і тільки тоді, коли виконується одна з наступних двох умов:

1. $|M(z)|<1$ при $\mathrm{Im}\, z>0$, і $|M(z)|>1$ при $\mathrm{Im}\, z<0$; або

2. M є сталою функцією з $|M(z)|\equiv 1$.

Наступна теорема дає необхідні і достатні умови на функції M_1, M_2 для того, щоб оператор $\Delta_{M_1,M_2,h}$ зберігав клас $L-P$.

Теорема 5.4.3. Нехай M_1, M_2 є цілими функціями, які не є тотожно нульовими. Тоді для кожної функції $f\in L-P$ виконується $M_1(z)f(z+i)+M_2(z)f(z-i)\in L-P$ тоді і тільки тоді, коли функції M_1 і M_2 задовольняють умови:

1. $M_1(z)=\overline{M}_2(\bar{z})$.

2. $\left|\dfrac{M_2(z)}{M_1(z)}\right| < 1$ для кожного z з $\operatorname{Im} z > 0$, або $\left|\dfrac{M_2(z)}{M_1(z)}\right| \equiv 1$.

3. Функція M_2 має представлення $M_2(z) = Cz^n e^{-az^2 + bz} \prod\limits_{k=1}^{\infty} \left(1 - \dfrac{z}{\alpha_k}\right) e^{\frac{z}{\alpha_k}}$,

де $C, b \in \mathrm{C}$, $\operatorname{Im} b \geq 0$, $n \in \mathrm{N} \bigcup \{0\}$, $a \geq 0$, $\alpha_k \neq 0$, $\operatorname{Im} \alpha_k \geq 0$ і $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{|\alpha_k|^2} < \infty$.

ВИСНОВКИ

В дисертаційній роботі побудовано нову теорію і знайдено нові методи дослідження зв'язків розташування коренів многочленів і цілих функцій з властивостями коефіцієнтів цих функцій, а також отримані описи і досліджено властивості лінійних операторів, які зберігають гіперболічність, стійкість і позитивність.

В дисертаційній роботі отримано нову достатню умову кратної додатності і тотальної додатності дійсних матриць заданого розміру, а також доведено, що ця умова є точною для кожного фіксованого розміру матриць (а також точною в класі нескінчених матриць) в класі ганкелевих матриць, і в класі тепліцевих матриць. В роботі наведені застосування цієї достатньої умови: отримані нові достатні умови для того, щоб послідовність була частотною послідовністю Поліа, для того, щоб твірна функція послідовності не мала коренів в заданому куті; отримано нову достатню умову для додатної послідовності, щоб вона була моментною послідовністю Гамбургера; а також отримано нову достатню умову додатності на всій дійсній осі многочлена з додатними коефіцієнтами.

В дисертації досліджуються стійкі многочлени і цілі функції з коренями в лівій півплощині. Отримано нову зручну достатню умову стійкості комплексних многочленів, достатню умову розташування коренів цілих функцій у відкритій лівій півплощині, і перевірено, що отримані умови не можуть бути покращеними.

В роботі знайдено необхідні і достатні умови для того, щоб важлива спеціальна функція: часткова тета-функція, – мала стійкі відрізки ряду Тейлора, а також мала усі корені у відкритій лівій півплощині.

В роботі досліджуються властивості многочленів, які є додатними на дійсній осі. Знайдено повний опис крайніх напрямків конусу многочленів з додатними коефіцієнтами, які є невід'ємними на дійсній осі і мають степінь не більшу за дане число. Знайдено повний опис діагональних в стандартному мономіальному базисі лінійних операторів, які зберігають вказаний конус, знайдено найменший можливий порядок нескалярного лінійного диференціального оператора з поліноміальними коефіцієнтами, який зберігає цей конус, досліджуються деякі інші види операторів, які зберігають вказаний конус.

В дисертації досліджуються нульові множини цілих абсолютно монотонних функцій. В роботі отримано характеризацію нульових множин цілих абсолютно монотонних функцій, якщо ці множини не перетинають деякий кут $\{z : |\arg z - \pi| < \alpha\}$ для $\alpha > 0$, знайдено нову необхідну умову для тих частин нульових множин цілих абсолютно монотонних функцій, які розташовані у вказаному куті, а також отримано неперервний аналог відомої теореми М. Фекете і Дж. Поліа про домноження додатного многочлена на експоненту.

В дисертаційній роботі досліджується часткова тета-функція і її відрізки ряду Тейлора. Знайдено, при яких значеннях параметру часткова тета-функція, а також її відрізки належать до класу Лагера-Поліа. Досліджується належність до класу Лагера-Поліа низки інших важливих спеціальних цілих функцій і їх відрізків ряду Тейлора. В роботі знайдена нова характеризація класу Лагера-Поліа: доведено, що узагальнені нерівності Лагера, а також комплексні нерівності Лагера, є необхідними і достатніми умовами належності цілої функції до класу Лагера-Поліа.

В дисертації вивчаються важливі міри відділення коренів гіперболічних многочленів: меш і логарифмічний меш. Отримані оцінки для мешу і логарифмічного мешу через коефіцієнти многочлену. В роботі доведено, що логарифмічний меш згортки Шура-Сеге двох гіперболічних многочленів не є меншим за максимум логарифмічних мешів многочленів. Крім того, отримано точну оцінку знизу на меш образу гіперболічного многочлена під дією центрально-різничного лінійного оператора зі сталими коефіцієнтами.

В роботі вивчаються лінійні скінчено-різничні оператори і образ множини гіперболічних многочленів під дією таких операторів. В дисертації отримано повний опис лінійних скінчено-різничних операторів зі сталими коефіцієнтами, які зберігають множину гіперболічних многочленів, і які зберігають множину многочленів з коренями у смузі.

В роботі доведені важливі властивості коренів образу центрально-різничного лінійного оператора від цілої функції класу Лагера-Поліа, такі як простота коренів і мінімальний меш образу. Отримано повний опис лінійних скінчено-різничних операторів, коефіцієнти яких є цілими функціями, що вони зберігають клас цілих функцій Лагера-Поліа.

Отримані в дисертаційній роботі результати поглиблюють наші знання про зв'язок розподілу і розташування коренів комплексних многочленів і цілих функцій з властивостями коефіцієнтів цих функцій, про властивості функцій класів Лагера-Поліа і класу Лагера-Поліа типу I, і про описи цих класів, а також про лінійні оператори, які зберігають гіперболічність, стійкість або позитивність многочленів. Результати і методи дисертаційної роботи можуть бути використаними в різноманітних математичних областях, у яких важливо отримати точну інформацію щодо розташування коренів многочленів або цілих функцій, таких як дійсний аналіз, теорія функцій комплексної змінної, диференціальні рівняння, лінійна алгебра, функціональний аналіз і багато інших.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Праці, в яких опубліковані основні результати дисертації

1. Katkova O.M. A note on zero sets of absolutely monotonic functions / O.M.Katkova and A.M. Vishnyakova // Visnyk of V. N. Karazin Kharkiv National University, Ser. Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics – 2000. – Vol. 49, N 47. – P. 70–75.
2. Katkova O.M. A continual analogue of a theorem by M. Fekete and G. Polya / Olga M. Katkova and Anna M. Vishnyakova // Positivity. – 2001. – Vol. 5, N 1. – P. 1–11.
3. Behrends E. A note on l^p-norms / Ehrhard Behrends, Olga Katkova and Anna Vishnyakova // Archiv der Mathematik. – 2001. – Vol. 76, N 1. – P. 67–72.
4. Katkova O.M. Zero sets of entire absolutely monotonic functions / Olga M. Katkova and Anna M. Vishnyakova // Entire functions in modern analysis, Israel Mathematical Conference Proceedings. – 2001. – Vol. 15. – P. 173–205.
5. Katkova O.M. On Power Series Having Sections with Only Real Zeros / Olga M. Katkova, Tetyana Lobova and Anna M. Vishnyakova // Comput. Methods Funct. Theory. – 2003. – Vol. 3, N 2. – P. 425–441.
6. Katkova O.M. On the zeros of entire absolutely monotonic functions / Olga M. Katkova and Anna M. Vishnyakova // Matematicheskaya fizika, analiz, geometriya. – 2004. – Vol. 11, N 1. – P. 25 – 44.
7. Katkova O.M. On entire functions having Taylor sections with only real zeros / Olga M. Katkova, Tatjana Lobova and Anna M. Vishnyakova // Matematicheskaya fizika, analiz, geometriya. – 2004. – Vol. 11, N 4. – P. 449 – 469.
8. Katkova O.M. On sufficient conditions for the total positivity and for the multiple positivity of matrices / Olga M. Katkova and Anna M. Vishnyakova // Linear Algebra and its Applications. – 2006. – Vol. 416, N 2-3. – P. 1083–1097.
9. Katkova O.M. A sufficient condition for a polynomial to be stable / Olga M. Katkova and Anna M. Vishnyakova // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2008. – Vol. 347, N. 1. – P. 81–89.
10. Kadets V. Convexity around the unit of a Banach algebra / Vladimir Kadets, Olga Katkova, Miguel Martin and Anna Vishnyakova // Serdica Math. J. – 2008. – Vol. 34. – P. 619–628.
11. Katkova O.M. On the stability of Taylor sections of a function $\sum_{k=0}^{\infty} z^k a^{-k^2}, a>1$ / Olga M. Katkova and Anna M. Vishnyakova // Comput. Methods Funct. Theory. – 2009. – Vol. 9, N 1. – P. 305–322.

12. Katkova O.M. Linear operators preserving the set of positive (nonnegative) polynomials / Olga M. Katkova and Anna M. Vishnyakova // Proceedings of the third Multidisciplinary International Symposium on Positive Systems: Theory and Applications (POSTA 09) Valencia, Spain, September 2-4, 2009; Series: Lecture Notes in Control and Information Sciences, Vol. 389, P. 83–90 Bru, Rafael; Romero-Vivo, Sergio (Eds.), 2009, XII, 398 p.

13. Katkova O.M. A remark about positive polynomials / Olga M. Katkova and Anna M. Vishnyakova // Mathematical Inequalities and Applications. – 2010. – Vol. 13, N 4. – P. 753–759.

14. Katkova O.M. Multiplier sequences and logarithmic mesh / Olga Katkova, Boris Shapiro and Anna Vishnyakova // Comptes rendus – Mathematique. – 2011. – Vol. 349, N 1-2. – P. 35–38.

15. Csordas G. The generalized Laguerre inequalities and functions in the Laguerre-Polya class / George Csordas and Anna Vishnyakova // Cent. Eur. J. Math. – 2013. – Vol. 11, N 9. – P. 1643—1650.

16. Katkova O.M. The cone of nonnegative polynomials with nonnegative coefficients and linear operators preserving this cone / Olga Katkova and Anna Vishnyakova // Cent. Eur. J. Math. – 2014. – Vol. 12, N 5. – P. 752–760.

17. Bohdanov A. On the conditions for entire functions related to the partial theta function to belong to the Laguerre-Polya class / Anton Bohdanov and Anna Vishnyakova // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2016. – Vol. 434, N 2. – P. 1740–1752.

18. Karpenko I. On sufficient conditions for a polynomial to be sign-independently hyperbolic or to have real separated zeros / Irina Karpenko and Anna Vishnyakova // Mathematical Inequalities and Applications. – 2017. – Vol. 20, N 1. – P. 237–245.

19. Katkova O.M. Linear finite difference operators preserving Laguerre-Polya class / Olga Katkova, Mikhail Tyaglov and Anna Vishnyakova // Complex Variables and Elliptic Equations. – 2018. – Vol. 63, N 11. –P. 1604–1619.

20. Nguyen T.H. On the entire functions from the Laguerre-Polya class having the decreasing second quotients of Taylor coefficients / Thu Hien Nguyen and Anna Vishnyakova // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2018. – Vol. 465, N 1. – P. 348–358.

Праці апробаційного характеру

21. Katkova O.M. On the zero sets of absolutely monotonic functions / Olga M. Katkova and Anna M. Vishnyakova // Computational Methods and Function Theory :

International Conference, June 25-29, 2001 : abstracts. – University of Aveiro, Portugal, 2001. – P. 99.

22. Katkova O.M. On the entire functions with the sections having only real zeros / Olga M. Katkova and Anna M. Vishnyakova // International Akhiezer Centenary Conference "Theory of Functions and Mathematical Phisics" : International Conference, August 13-17, 2001 : abstracts. – Kharkiv, Ukraine, 2001. – P. 44.

23. Vishnyakova A.M. On the power series having sections with only real zeros / Anna M. Vishnyakova, Olga M. Katkova and Tatyana Lobova // Second International Conference "Mathematical Analysis and Economics" : International Conference, April 1-4, 2003 : abstracts. – Sumy, Ukraine, 2003. – P. 55.

24. Vishnyakova A.M. On the class of entire functions having sections with only real zeros / A.M.Vishnyakova, O.M.Katkova, T.Lobova // International conference dedicated to 125-th anniversary of Hans Hahn : International Conference, June 27 - July 3, 2004 : abstracts. – Chernivtsi, Ukraine, 2004. – P. 165.

25. Vishnyakova A.M. A sufficient condition for a sequence to be Polya frequency sequence and it applications / Anna Vishnyakova // Computational Methods and Function Theory : International Conference, June 13-17, 2005 : abstracts. – Joensuu, Finland, 2005. – P. 15.

26. Vishnyakova A.M. A sufficient condition for a polynomial to be stable / Anna M. Vishnyakova and Olga M. Katkova // Analysis and related topics : International Conference, November 17-20, 2005 : abstracts. – Lviv, Ukraine, 2005. – P. 110.

27. Vishnyakova A.M. Some remarks about Hurwitz (stable) polynomials / Anna Vishnyakova and Olga Katkova // Entire and Subharmonic Functions and Related Topics, International Conference dedicated to the centennial of B.Ya.Levin (1906-1993) : International Conference, August 14-17, 2006 : abstracts. – Kharkiv, Ukraine, 2006. – P. 39.

28. Vishnyakova A.M. On real polynomials having at most one real zero / Anna M. Vishnyakova // Analysis and Topology : International Conference, May 26-June 7, 2008 : abstracts. – Lviv, Ukraine, 2008. – P. 53.

29. Katkova O.M. Non-asymptotic results on the zero distribution of real polynomials and entire functions / Olga M. Katkova and Anna M. Vishnyakova // Conference on complex analysis dedicated to the memory of Anatolii Asirovich Goldberg (1930-2008) : International Conference, May 31-June 5, 2010 : abstracts. – Lviv, Ukraine, 2010. – P. 28.

30. Vishnyakova A. On sufficient conditions for the total positivity of matrices and applications / A. Vishnyakova // IWOTA 2010 : International Conference, July 12-16, 2010 : abstracts. – Technische Universitat Berlin, Germany, 2010. – P. 197.

31. Vishnyakova A.M. Multiplier sequences and logarithmic mesh / A.M.Vishnyakova // Complex analysis and its applications, dedicated to the 70th anniversary of A.F.

Grishin : International Conference, August 15-18, 2011 : abstracts. – Kharkov National University, Ukraine, 2011. – P. 40.

32. Bohdanov A. On necessary and sufficient conditions for a function to belong to the Laguerre-Polya class / Anton Bohdanov and Anna Vishnyakova // III International Conference ANALYSIS AND MATHEMATICAL PHYSICS : International Conference, June 15–19, 2015 : abstracts. – B.Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kharkiv, Ukraine, 2015. – P. 18.

33. Vishnyakova A. Linear finite difference operators and zeros of finite differences of polynomials and entire functions / Anna Vishnyakova // Complex Analysis and Related Topics : International Conference, May 30-June 4, 2016 : abstracts. – Ivan Franko National University of Lviv, Lviv, Ukraine, 2016. – P. 93.

34. Nguyen T.H. On the entire functions from the Laguerre-Polya class having the decreasing second quotients of Taylor coefficients / Thu Hien Nguyen and Anna Vishnyakova // International Conference in Functional Analysis Dedicated to the 125th Anniversary of Stefan Banach : International Conference, September 18-23, 2017 : abstracts. – Ivan Franko National University of Lviv, Lviv, Ukraine, 2017. – P. 128.

35. Vishnyakova A. On the conditions for entire functions related to the partial theta function to belong to the Laguerre-Polya class / Anna Vishnyakova // Hausdorff Geometry of Polynomials and Polynomial Sequences : International Conference, May 28 - June 1, 2018 : abstracts. – Institut Mittag-Leffler, Sweeden, 2018. – P. 3.

36. Nguyen T.H. On the conditions for special entire functions to belong to the Laguerre-Polya class / Thu Hien Nguyen and Anna Vishnyakova // VI International Conference ANALYSIS AND MATHEMATICAL PHYSICS dedicated to the centennial anniversary of the National Academy of Sciences of Ukraine and the 50th anniversary of the Department of Function Theory : International Conference, June 18–22, 2018 : abstracts. –B.Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kharkiv, Ukraine – P. 24.

АНОТАЦІЯ

Вишнякова Г.М. ***Многочлени з обмеженнями на розташування коренів і граничні класи цілих функцій.*** – Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 – математичний аналіз. Фізико-технічний інститут низьких температур ім. Б.І.Вєркіна НАН України, Харків, 2019.

В дисертаційній роботі побудовано нову теорію і знайдено нові методи дослідження зв'язків розташування коренів многочленів і цілих функцій з властивостями їх коефіцієнтів, а також отримані описи і досліджено властивості лінійних операторів, які зберігають гіперболічність, стійкість і позитивність.

В роботі отримано достатню умову тотальної (кратної) позитивності дійсних матриць, доведено, що ця умова є точною в класах ганкелевих матриць і тепліцевих матриць. Отримано достатні умови стійкості комплексних многочленів і цілих функцій, перевірено, що вони не можуть бути покращеними. Знайдено опис крайніх напрямків конусу многочленів з додатними коефіцієнтами, які є невід'ємними на дійсній осі і мають степінь не більшу за дане число. Знайдено опис діагональних в стандартному базисі лінійних операторів, які зберігають вказаний конус. Отримано характеризацію нульових множин цілих абсолютно монотонних функцій, якщо вони не перетинають деякий кут, якій містить від’ємну півось. Знайдені значення параметру, при яких часткова тета-функція і її відрізки ряду Тейлора належать до класу Лаґерра-Поліа. Досліджено належність до класу Лаґерра-Поліа низки інших важливих цілих функцій і їх відрізків ряду Тейлора. Знайдена нова характеризація класу Лаґерра-Поліа через узагальнені нерівності Лаґерра. Отримано точну оцінку знизу на меш образу гіперболічного многочлена під дією центрально-різничного лінійного оператора зі сталими коефіцієнтами. Отримано опис лінійних скінчено-різничних операторів зі сталими коефіцієнтами, які зберігають множину гіперболічних многочленів, і які зберігають множину многочленів з коренями у смузі. Доведені важливі властивості коренів образу цілої функції класу Лаґерра-Поліа під дією центрально-різничного лінійного оператора. Отримано опис лінійних скінченно-різничних операторів, коефіцієнти яких є цілими функціями, що вони зберігають клас цілих функцій Лаґерра-Поліа.

Ключові слова: тотально додатні матриці, кратно додатні матриці, гіперболічні многочлени, клас цілих функцій Лагера-Поліа, стійкі многочлени, позитивні многочлени, цілі абсолютно монотонні функції, лінійні оператори, які зберігають гіперболічність, стійкість і позитивність, меш многочлена, логарифмічний меш многочлена.

АННОТАЦИЯ

Вишнякова А.М. ***Многочлены с ограничениями на расположение корней и предельные классы целых функций.*** – Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математи-ческих наук по специальности 01.01.01 – математический анализ. Физико-технический институт низких температур им. Б.И.Веркина НАН Украины, Харьков, 2019.

В диссертационной работе построена новая теория и найдены новые методы исследования связи расположения корней многочленов и целых функций со свойствами коэффициентов этих функций, а также получены описания и исследованы свойства линейных операторов, которые сохраняют гиперболичность, устойчивость и позитивность.

В работе получено достаточное условие тотальной (кратной) положительности вещественных матриц, доказана его точность в классах ганкелевых матриц и теплицевых матриц. Получены достаточные условия устойчивости комплексных многочленов и целых функций, проверена их неулучшаемость. Описаны крайние направления конуса многочленов с положительными коэффициентами, неотрицательных на вещественной оси и со степенью, меньшей заданного числа. Описаны диагональные в стандартном базисе линейные операторы, сохраняющие этот конус. Получена характеризация нулевых множеств целых абсолютно монотонных функций, если они не пересекают некоторый угол, содержащий отрицательную полуось. Найдены значения параметра, при которых неполная тета-функция и ее отрезки ряда Тейлора принадлежат классу Лагерра-Полиа. Исследована принадлежность классу Лагерра-Полиа ряда важных целых функций и их отрезков ряда Тейлора. Найдена новая характеризация класса Лагерра-Полиа через обобщенные неравенства Лагерра. Получена точная оценка снизу на меш образа гиперболического многочлена под действием центрально-разностного линейного оператора с постоянными коэффициентами. Описаны линейные конечно-разностные операторы с постоянными коэффициентами, сохраняющие класс гиперболических многочленов, и сохраняющие класс многочленов с корнями в полосе. Доказаны важные свойства корней образа целой функции класса Лагерра-Полиа под действием центрально-разностного линейного оператора. Описаны линейные конечно-разностные операторы, коэффициентами которых есть целые функции, которые сохраняют класс целых функций Лагерра-Полиа.

Ключевые слова: вполне положительные матрицы, кратно положительные матрицы, гиперболические многочлены, класс целых функций Лагерра-Полиа, устойчивые многочлены, положительные многочлены, целые абсолютно монотонные функции, линейные операторы, сохраняющие гиперболичность, устойчивость и позитивность, меш многочлена, логарифмический меш многочлена.

ABSTRACT

Vishnyakova A.M. ***Polynomials with restrictions on the location of roots and the limiting classes of entire functions.*** – Manuscript.

The dissertation for obtaining the degree of doctor of sciences in physics and mathematics, speciality 01.01.01 – Mathematical analysis. – B.I. Verkin Insitute for Low Temperature Physics and Engineering, Kharkiv, Ukraine, 2019.

In this thesis, we develop a new theory and find new methods for studying the connection between the zero location of polynomials and entire functions and the properties of the coefficients of these functions. We also find descriptions and investigate properties of linear operators that preserve hyperbolicity, stability and positivity.

In this work, we obtain a sufficient condition for total (multiple) positivity of real matrices and prove that this condition is sharp in the class of Hankel matrices and in the class of Toeplitz matrices. New sufficient conditions for stability of complex polynomials and entire functions are obtained; they are shown to be sharp. We obtain a description of the extremal rays of the cone of polynomials with nonnegative coefficients that are nonnegative on the real axis and have degrees less than a given number. A description of the class of linear operators that act diagonally in the standard monomial basis and preserve this cone is found. We obtain a characterization of the zero sets of entire absolutely monotonic functions under condition that these sets do not intersect an angle that contains the negative half-axis. We found the parameter values for which the partial theta-function and its Taylor sections belong to the Laguerre-Polya class. We investigate some other important entire functions and their Taylor sections, and determine whether these functions belong to the Laguerre-Polya class. We find a new characterization of the Laguerre-Polya class in terms of generalized Laguerre inequalities. A new sharp estimate from below for the mesh of the image of a hyperbolic polynomial under central finite-difference linear operator with constant coefficients is obtained. We find a description of linear finite-difference operators with constant coefficients that preserve the set of hyperbolic polynomials and that preserve the set of polynomials whose zeros are contained in the horizontal strip. We establish important properties of the zeroes of the image of an entire function from the Laguerre-Polya class under central finite-difference linear operator. We obtain a description of linear finite-difference operators, whose coefficients are entire functions, and which preserve the Laguerre-Polya class of entire functions.

Key words: totally positive matrices, multiply positive matrices, hyperbolic polynomials, entire functions from the Laguerre-Polya class, stable polynomials, positive polynomials, entire absolutely monotonic functions, linear operators, preserving hyperbolicity, stability and positivity, mesh of polynomials, logarithmic mesh of polynomials.

Підп. до друку з авторського орігінал-макету 09.04.19
Формат 60х90 1/16. Папір друк. №3. Друк офсетний.
Умов. друк. арк. 2,2. Наклад 100 прим. Зам. 36.

Надруковано у ПП Єсін
Україна, 61072, м. Харків, пр. Науки, 52
тел. (057) 340-60-39