Національна академія наук України
Фізико-технічний інститут низьких температур ім. Б.І. Вєркіна

Сазонова Олена Станиславівна

УДК 533.72

АСИМЕТРИЧНІ ТА КОНТИНУАЛЬНІ АНАЛОГИ БІМОДАЛЬНИХ РОЗПОДІЛІВ

01.01.03 – математична фізика

АВТОРЕФЕРАТ
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Харків – 2019

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Харківському національному університеті імені В. Н. Каразіна Міністерства освіти і науки України.

Науковий керівник:

доктор фізико-математичних наук, професор
Гордевський Вячеслав Дмитрович,
Харківський національний університет
імені В. Н. Каразіна, м. Харків,
професор кафедри фундаментальної математики.

Офіційні опоненти:

доктор фізико-математичних наук, професор
Герасименко Віктор Іванович,
Інститут математики НАН України,
провідний науковий співробітник
відділу диференціальних рівнянь з частинними похідними;

доктор фізико-математичних наук,
старший науковий співробітник
Шепельський Дмитро Георгійович,
Фізико-технічний інститут низьких температур
імені Б. І. Вєркіна НАН України,
провідний науковий співробітник відділу
математичної фізики

Захист відбудеться «11» грудня 2019 р. о 14 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 64.175.01 у Фізико-технічному інституті низьких температур ім. Б.І. Вєркіна Національної академії наук України за адресою: пр. Науки, 47, м. Харків, 61103.

З дисертацією можна ознайомитися у науковій бібліотеці Фізико-технічного інституту низьких температур ім. Б.І. Вєркіна НАН України за адресою: пр. Науки, 47, м. Харків, 61103.

Автореферат розісланий «6» листопада 2019 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради Горькавий В.О.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Для опису переходу розрідженого газу у стан термодинамічної рівноваги використовується інтегро-диференціальне рівняння, виведене одним з основоположників статистичної фізики й фізичної кінетики австрійським фізиком Людвигом Больцманом в 1872 році, яке й носить його ім’я. Це рівняння, якому судилося стати фундаментальним рівнянням кінетичної теорії розріджених одноатомних газів, описує часову еволюцію функції розподілу в газі часток, що взаємодіють через парні зіткнення. Воно відігравало й відіграє важливу роль в техніці, формуванні наукового світогляду. Рівняння Больцмана використовувалось для обґрунтування молекулярно-кінетичної теорії, другого закону термодинаміки про зростання ентропії, виведенні рівнянь гідродинаміки. Воно в своїх модифікаціях широко використовується при описанні розрідженого газу, випромінювання, переносу нейтральних часток типу нейтронів, в атмосферній оптиці, для розрахунків реакторів, тощо. Важко вказати інше нелінійне рівняння досить складної структури, що містить в собі такіж глибину і загальність, як рівняння Больцмана.

Проблема пошуку точних і наближених розв’язків цього нелінійного інтегро-диференціального рівняння займає дуже важливе місце серед різних напрямів досліджень в кінетичній теорії газів. Дослідженню розв'язків цього рівняння, а також його обґрунтуванню присвячена велика кількість монографій, сбірників статей, оглядів, тощо. Зважаючи на складну структуру інтеграла зіткнень на даний момент отримана дуже невелика кількість точних розв’язків цього рівняння. Не дивлячись на те, що велика частина цих розв’язків описує вельми штучні ситуації, вони представляють велику цінність як еталонні розв’язки для апробації наближених методів розрахунку, а також дають важливу інформацію про якісну поведінку розв’язків цього інтегро-диференціального рівняння. Найбільш важливим точним розв’язком є максвелівський розподіл (максвеліан), що характеризує газ, що знаходиться в рівновазі. Це єдиний розв’язок, відомий на даний момент для моделі твердих (пружних) куль в явному вигляді. Перший найпростіший (залежний лише від v) розв'язок було знайдено Максвеллом ще в 1859 році. В подальшому Г. Гредом, Т. Карлеманом, О.Г. Фрідлендером було здобуто узагальнення цього розв'язку: спочатку на неоднорідний випадок (f залежить від v та x), і нарешті – на нестаціонарний (f залежить ще й від t). Великих успіхів також вдалось досягнути О.В. Бобильову, M. Krook, T. Wu та H.M. Ernst у частковому випадку максвелівських молекул. Зокрема, були отримані розв'язки (інколи лише у вигляді формальних рядів) і для деяких більш загальних випадків. Разом з тим, дуже важливо виділити результати, що стосуються існування та єдиності розв'язків задачі Коші для рівняння Больцмана. Методи розвинення в ряди Гільберта, Чепмена-Енскога та Греда дають недостатню інформацію про вигляд цих розв'язків при скінченних значеннях часу, просторових та швидкісних змінних. Що стосується чисельних методів, то вони також виявились нестрогими. Очевидно, що нестаціонарних однорідних максвелівських розв'язків рівняння Больцмана не існує. У зв'язку з цим виникає інтерес до пошуку наближених явних розв’язків нелінійного рівняння Больцмана, що задовольняють йому лише з довільною мірою точності. Такі розв’язки служать доброю апроксимацією деяких точних розв’язків, що описують нерівноважні стани газу, і через свою простоту є зручною моделлю для дійсних розв’язків рівняння Больцмана, які сильно відрізняються від максвеліанів. Відмітимо, що перші спроби в цьому напрямі були зроблені ще в післявоєнні роки у зв'язку з наближеним описом ударної хвилі (розподіл Тамма–Мотт–Сміта). В подальшому такий підхід неоднаразово вивчався й розвивався багатьма авторами. Бімодальний розподіл Тамма–Мотт–Сміта і його модифікації були запропоновані саме з метою описання структури ударної хвилі, але виявилося, що вони ні точно, ні наближено не можуть задовольняти рівняння Больцмана з довільною мірою точності. Це пов'язано з накладанням жорстких умов на гідродинамічні параметри. Все це привело до необхідності побудови таких бімодальних розподілів з довільними гідродинамічними параметрами, які описували б процес взаємодії між двома максвелівськими потоками в газі з тведих куль і водночас задовольняли рівнянню Больцмана з якою завгодно мірою точності. Розв'язок цієї проблеми вперше було запропоновано В.Д. Гордевським. Далі було побудовано різні класи явних наближених розв'язків, що відповідають як глобальним, так і локальним максвелівським модам. Актуальність пошуку інших явних наближених розв'язків залишається.

Зв’язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Тематика досліджень дисертаційної роботи була пов’язана з науковою програмою кафедри математичного аналізу Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна. Дисертація виконувалась у відповідності з тематичними планами державних науково-дослідницьких робіт «Аналітичні методи розв’язання якісних проблем теорії керування та теорії функціонально-диференціальних рівнянь» (номер державної реєстрації 0111U010364), «Асимптотичні і алгебраїчні методи в теорії диференціальних рівнянь та теорії керування» (номер державної реєстрації 0106U001561) і «Аналітичні методи в якісній теорії диференціальних рівнянь та теорії керування» (номер державної реєстрації 0109U001456).

Мета і задачі дослідження. Мета дисертації полягає в побудові явних наближених розв’язків нелінійного рівняння Больцмана для моделі твердих куль. Ці розв’язки будуються у вигляді асиметричних та континуальних аналогів бімодальних розподілів, де в якості мод використовуються різні типи максвеліанів: глобальні та стаціонарні неоднорідні. Величинами, що характеризують ступінь точності тих чи інших наближених розв’язків, є відхили між лівою та правою частинами рівняння, які обчислюються як рівномірно-інтегральна або чисто-інтегральна норми різниці між ними.

Основним завданням, яке доводиться розв’язувати для досягнення вказаної мети, є пошук таких умов, що необхідно накласти на коефіцієнтні функції асиметричних бімодальних та континуальних розподілів і на поведінку всіх наявних параметрів, які були б достатніми для того, щоб відповідний відхил між частинами рівняння міг бути зроблений скіль завгодно малим.

Об'єктом дослідження є нелінійне інтегро-диференціальне рівняння Больцмана для моделі твердих куль.

Предметом дослідження є явні наближені бімодальні та континуальні розв'язки з максвелівськими модами різних типів.

Методи дослідження. В дисертаційній роботі при вивченні поведінки відхилів між частинами рівняння використовувались методи математичного та функціонального аналізу, в тому числі й теорія узагальнених функцій.

Наукова новизна отриманих результатів. Всі результати, отримані в дисертаційній роботі, є новими і полягають в наступному:

- Вперше побудовані явні наближені розв'язки нелінійного рівняння Больцмана у вигляді асиметричних аналогів бімодальних розподілів та досліджено їх фізичний зміст.
- Розроблений новий підхід для пошуку явних наближених розв'язків, заснований на припущенні, що масова швидкість глобального максвеліана приймає не фіксовані дискретні значення, а стає довільним параметром, який приймає будь-які значення з $\mathbb{R}^3$. Таким чином, побудовано наближений розв'язок у вигляді континуального розподілу, що відрізняється від бімодальних. На основі цього підходу знайдені континуальні розподіли з довільною густиною.
- Побудовано новий клас явних наближених розв'язків цього рівняння, який має вигляд континуальної суперпозиції локальних максвеліанів ґвинтового типу. Такі потоки описують стаціонарні рівноважні стани газу, подібні ґвинтам, тобто задають обертання газу як цілого з певною кутовою швидкістю й поступальний рух вздовж осі обертання. Вони задовольняють дане кінетичне рівняння з будь-яким довільним ступенем точності та означають припущення, що теплова складова швидкостей молекули мала, коли збережено довільне значення масової швидкості потоку.
- Для рівномірно-інтегрального та чисто інтегрального відхилів у випадку асиметричних та континуальних розв'язків отримано оцінку зверху й показано, що ця оцінка має скінченну границю при низькій температурі максвеліанів. Отримані також різноманітні достатні умови нескінченної мализни цих границь при спеціальному виборі поведінки параметрів, в тому числі, при великих числах Кнудсена.

Практичне значення отриманих результатів. Результати дисертаційної роботи мають переважно теоретичне значення. Вони можуть бути використані при подальшому вивченні рівняння Больцмана і властивостей його розв'язків, а також застосовані при дослідженні інших моделей взаємодії між молекулами та інших кінетичних рівнянь. Вони можуть скласти зміст спеціальних курсів, які читаються на факультетах фізико-математичного профілю для студентів та аспірантів університетів та наукових установ НАН України. Разом з тим вони можуть знайти застосування й у таких галузях, як гідро- та аеродинаміка, метеорологія, океанологія та ін. при побудові і дослідженні математичних моделей різних процесів, пов'язаних із взаємодією тих чи інших потоків часток, зокрема при вивченні еволюції ґвинтових течій.

Особистий внесок здобувача. Визначення напрямку дослідження, постановка задач і обговорення результатів належать науковому керівнику, Гордевському В.Д.

Основні результати дисертації, винесені на захист, отримано дисертантом самостійно.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертаційної роботи доповідались і обговорювалися на міжнародних наукових конференціях: Міжнародна наукова конференція «Сучасні проблеми математики та її застосування у природничих науках і інформаційних технологіях» (Харків, 2011); IV Конференція молодих учених із сучасних проблем механіки і математики імені академіка Я.С. Підстригача КМУ СПММ–2011 (Львів, 2011); Чотирнадцята міжнародна наукова конференція імені М. Кравчука (Київ, 2012); XVII International Congress on Mathematical Physics (Ольборг, Данія, 2012); Міжнародна конференція присвячена 120-річчю Стефана Банаха (Львів, 2012); International Conference on Fluids And Variational Methods (Лейпциг, Німеччина, 2013); XVI Міжнародна конференція «Моделювання та дослідження стійкості динамічних систем» DSMSI-2013 (Київ, 2013); International School on Recent Advances in partial differential equations and applications (Мілан, Італія, 2013); International Conference «Analysis and Mathematical Physics» (Харків, 2013); Міжнародна школа-конференція «Тараповські читання-2013», присвячена 150-річчу кафедри теоретичної та прикладної механіки Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна (Харків, 2013); Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2015» (Львів, 2015); 6th Ya.B. Lopatynsky International School-Workshop on Differential Equations and Applications (Вінниця, 2019); науковий семінар кафедри фундаментальної математики Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна (керівник семінару – д.ф.-м.н., доцент О.Л. Ямпольський, 2019).

Публікації. Результати дисертації відображені в 16 наукових публікаціях, з яких 6 статей [1-6] у спеціалізованих фахових виданнях (дві статті в журналах з імпакт-фактором) та 10 тез доповідей міжнародних наукових конференцій [7-16].

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається зі вступу, чотирьох розділів, висновку і списку використаних джерел, що складається зі 109 найменувань і займає 12 сторінок. Загальний об'єм дисертації складає 132 сторінки. Основні результати, винесені на захист, містяться в розділах 2-4.

Автор виражає щиру подяку за цінні поради, постійну увагу до роботи та підтримку своєму науковому керівнику доктору фізико-математичних наук, професору Гордевському Вячеславу Дмитровичу.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** обґрунтовано актуальність теми, що розглядається в дисертації, визначено мету і задачі дослідження, вказано наукову новизну та практичне значення отриманих результатів. Також надано відомості про апробацію результатів дослідження та публікації автора за темою дисертації.

У **першому розділі** наведено огляд літератури за темою дисертації та обґрунтовано вибір напрямку досліджень.

У **другому розділі** наведені основні визначення та позначення, необхідні для постановки задачі та її розв’язання. Розглянуті найбільш важливі результати, пов’язані з дослідженням кінетичного рівняння Больцмана для моделі твердих куль, яке використовується для описання поведінки достатньо розрідженого газу. У випадку газу з твердих куль воно має вигляд[1]:

$$D(f)=Q(f,f), \qquad (1)$$

$$D(f)=\frac{\partial f}{\partial t}+v\frac{\partial f}{\partial x}, \qquad (2)$$

$$Q(f,f)=\frac{d^2}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^3} dv_1\int\limits_{\Sigma} d\alpha\,|(v-v_1,\alpha)|\,[\,f(t,v_1',x)f(t,v',x)-f(t,v_1,x)f(t,v,x)], \qquad (3)$$

де $f(t,v,x)$ – функція розподілу молекул, яка шукається, $t\in\mathbb{R}^1$ – час, $x=(x^1,x^2,x^3)\in\mathbb{R}^3$ – координата молекули, $v=(v^1,v^2,v^3)\in\mathbb{R}^3$ – її швидкість, $d>0$ – діаметр, $\partial f/\partial x$ – просторовий градієнт функції f (або просто f'). Вектор α належить одиничній сфері $\Sigma\subset\mathbb{R}^3$, а v та v_1 – швидкості молекул до зіткнення, а v' та v_1' – після зіткнення, причому

$$v'=v-\alpha(v-v_1,\alpha), \qquad v_1'=v+\alpha(v-v_1,\alpha), \qquad (4)$$

Також розглянуті точні розв'язки рівняння (1)-(3), що описують рівноважні стани газу, а саме максвелівські розподіли наступного вигляду:

$$M=M(t,v,x)=\rho\left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{3/2}e^{-\beta(v-\tilde{v})^2}, \qquad (5)$$

де ρ – густина, $\beta=\frac{1}{2T}$ – обернена температура, $\tilde{v}$ – масова швидкість.

В роботі розглянуті як глобальні (не залежать ні від t, ні від x), так і локальні максвеліани часткового виду, які описують ґвинтові стаціонарні рівноважні стани газу (або коротко ґвинти)[2]. Кожен такий максвеліан задається формулою:

$$M(v,x)=\rho_0 e^{\beta\omega^2r^2}\left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}}e^{-\beta(v-\bar{v}-[\omega\times x])^2}. \qquad (6)$$

З фізичної точки зору розподіл (6) описує обертання газу як цілого з кутовою швидкістю $\omega\in\mathbb{R}^3$ навколо осі, що проходить через точку

$$x_0=\frac{[\omega\times\bar{v}]}{\omega^2}, \qquad (7)$$

$x_0\in\mathbb{R}^3$, причому $\beta=1/2T$ – обернена температура газу,

$$r^2=\frac{1}{\omega^2}[\omega\times(x-x_0)]^2$$

– квадрат відстані до осі обертання, а

$$\rho=\rho_0 e^{\beta\omega^2r^2}$$

– густина газу (ρ_0 – густина на осі обертання, тобто при $r=0$), $\bar{v}\in\mathbb{R}^3$ – лінійна масова швидкість в точках x, для яких $x\parallel\omega$, а $\bar{v}+[\omega\times x]$ – масова швидкість в

[1] Черчиньяни К. Теория и приложения уравнения Больцмана / пер. с англ. М.: Мир, 1978. 495 с.

[2] Коган М. Н. Динамика разреженного газа. М.: Наука, 1967. 440 с.

довільній точці x. Формула (6) крім обертального задає й поступальний рух вздовж осі обертання, що має наступну лінійну швидкість

$$\frac{(\omega,\bar{v})}{\omega^2}\omega,$$

Таким чином, вона дійсно описує ґвинтоподібний рух газу в цілому, причому розподіл стаціонарний (не залежить від t), але неоднорідний.

Одним з напрямків досліджень даної дисертаційної роботи є узагальнення явних наближених розв'язків рівняння (1)-(3) у вигляді бімодальних розподілів, а саме лінійної комбінації двох максвеліанів спеціального виду:

$$f = \varphi_1 M_1 + \varphi_2 M_2 = \sum_{i=1}^{2} \varphi_i M_i, \qquad \textbf{(7)}$$

Передбачається, що коефіцієнтні функції $\varphi_i = \varphi_i(t,x)$, $i = 1,2$, є невід'ємними та належмть $C^1(\mathbb{R}^4)$, а максвеліани M_i, $i = 1,2$, можуть бути як глобальними, так і локальними.

Іншим напрямком досліджень дисертації є новий підхід до пошуку явних наближених розв'язків рівняння Больцмана, який оснований на припущенні, що масова швидкість глобального або локального максвеліанів приймає не фіксовані дискретні значення, а стає довільним параметром, який приймає будь-які значення з $\mathbb{R}^3$. Такі розподіли можуть бути названі континуальними.

Функцію розподілу запропоновано розглядати в наступному вигляді:

$$f = \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(t,x,u) M du, \qquad \textbf{(8)}$$

в яку входять максвеліани $M = M(v,u)$ або $M = M(v,u,x)$, які описують один з можливих типів руху потоків газу.

В якості числових характеристик точності цих явних наближених розв’язків використовуються наступні норми різниці між частинами рівняння (1)-(3), які запропоновані В.Д. Гордевським[3]:

– «рівномірно-інтегральний» відхил:

$$\Delta = \sup_{(t,x)\in R^4} \int_{\mathbb{R}^3} | D(f) - Q(f,f) | dv, \qquad \textbf{(9)}$$

– «чисто-інтегральний» відхил:

$$\Delta_1 = \int_{\mathbb{R}^1} dt \int_{\mathbb{R}^3} dx \int_{\mathbb{R}^3} | D(f) - Q(f,f) | dv, \qquad \textbf{(10)}$$

За допомогою вказаних відхилів (9) і (10) будуть знайдені умови, достатні для того, щоб при відповідному виборі коефіцієнтних функцій і такій поведінці всіх параметрів, хоча б один з вказаних відхилів був при цьому скіль завгодно малим.

У **розділі 3** отримані асиметричні наближені розв'язки, які є узагальненням бімодальних розподілів, в які входять локальні максвеліани часткового виду, що описують ґвинтові стаціонарні рівноважні стани газу (6). Здобуто деякі достатні умови для мінімізації рівномірно-інтегрального та інтегрального відхилів між

[3] Gordevsky V. D. Trimodal Approximate Solutions of the Non-linear Boltzmann Equation // Math. Meth. Appl. Sci. 1998. Vol. 21. P. 1479-1494.

частинами рівняння Больцмана. Також досліджено фізичний зміст отриманих результатів.

Розглядається неоднорідна, нестаціонарна лінійна комбінація двох максвеліанів, тобто розподіл (7), де максвеліани мають вид (6), а саме

$$f = \varphi_1 M_1 + \varphi_2 M_2 = \sum_{i=1}^{2} \varphi_i(t,x) M_i(v,x), \qquad \textbf{(11)}$$

$$M_i(v,x) = \rho_i e^{\beta_i \omega_i^2 r_i^2} \left(\frac{\beta_i}{\pi}\right)^{3/2} e^{-\beta_i (v - \bar{v}_i + [\omega_i \times x])^2}, \qquad \textbf{(12)}$$

Потрібно знайти такі φ_i і таку поведінку всіх наявних параметрів, щоб змішаний (9) або інтегральний (10) відхил прямував при цьому до 0. Коефіцієнтні функції φ_i будемо шукати у вигляді

$$\varphi_i(t,x) = \psi_i(t,x) e^{-\beta_i \omega_i^2 r_i^2}, \quad i = 1,2, \qquad \textbf{(13)}$$

де функції ψ_i гладкі та невід'ємні (передбачається, що вони вже не залежать від β_i). Також припустимо, що кутові швидкості мають вигляд:

$$\omega_i = \frac{\omega_{0i} s_i}{\beta_i^{k_i}}, \quad i = 1,2, \qquad \textbf{(14)}$$

де $s_i > 0$ – будь-які константи, ω_{0i} – довільні фіксовані вектори, $k_i > 0$, $i = 1,2$ (інші параметри також довільні та фіксовані).

Деякі наближені розв'язки даного вигляду, для яких максвеліани при $i = 1$ та $i = 2$ поводять себе однаково, отримані в роботах В.Д. Гордевського[4]. Обидві кутові швидкості ω_1 та ω_2 при цьому прямують до нуля однаково швидко при $\beta_1,\ \beta_2 \to +\infty$ (сама швидкість їх прямування до нуля різна і задається певними степенями β_i в (17), а саме при 1, $\frac{1}{2}$ або $\frac{1}{4}$).

Наша задача полягає в пошуку наближених розв'язків рівняння (1)-(3) при інших можливих значеннях k_i, $i = 1,2$, та асиметричній (тобто для різних степеней при $i = 1$ та $i = 2$) поведінці кутових швидкостей.

Теорема 3.1. Нехай виконуються умови (13) та (14), а наступні функції:

$$\psi_i,\ \frac{\partial \psi_i}{\partial t},\ \left|\frac{\partial \psi_i}{\partial x}\right|,\ \left|[\omega_{0i} \times x]\right| \psi_i,\ \left([\omega_{0i} \times x], \frac{\partial \psi_i}{\partial x}\right),\ i = 1,2 \qquad \textbf{(15)}$$

обмежені відносно t, x на $\mathbb{R}^4$.

Тоді визначений згідно з (9) відхил Δ має сенс й існує така величина Δ', що

$$\Delta \le \Delta', \qquad \textbf{(16)}$$

причому якщо

$$\frac{1}{2} < k_i \le 1,\ i = 1,2, \qquad \textbf{(17)}$$

або

[4] Гордевский В.Д. Двухпотоковое распределение с винтовыми модами // Теорет. и мат. физ. 2001. Т. 126, №2. С. 283-300.

$$\frac{1}{4} < k_i \le \frac{1}{2}, \ i = 1,2 \qquad \textbf{(18)}$$

та

$$[\omega_{0i} \times \overline{v}_i] = 0, \ i = 1,2, \qquad \textbf{(19)}$$

то існує скінченна границя

$$L = \lim_{\substack{\beta_i \to +\infty \\ i=1,2}} \Delta' = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \ne j}}^{2} \rho_i \sup_{(t,x)\in\mathbb{R}^4} \left| \frac{\partial \psi_i}{\partial t} + \overline{v}_i \frac{\partial \psi_i}{\partial x} + \rho_j \pi d^2 \psi_1 \psi_2 \, | \overline{v}_i - \overline{v}_j \, | \right| +$$

$$+2\pi d^2 \rho_1 \rho_2 \, | \overline{v}_1 - \overline{v}_2 \, | \sup_{(t,x)\in\mathbb{R}^4} (\psi_1 \psi_2). \qquad \textbf{(20)}$$

В даній теоремі поведінка кутових швидкостей при $i = 1$ та $i = 2$ однакова. Наведемо тепер деякі можливі рездьтати для випадку «асиметричної» поведінки ω_1 та ω_2.

Теорема 3.2. Нехай виконуються умови (13) та (14) при $k_1 = 1$, $k_2 = \frac{1}{2}$. Тоді при виконанні умов (15) вірне твердження (16), причому:

$$\lim_{\substack{\beta_i \to +\infty \\ i=1,2}} \Delta' = L + \frac{4}{\sqrt{\pi}} \rho_2 s_2 \, | [\omega_{02} \times \overline{v}_2] | \sup_{(t,x)\in\mathbb{R}^4} \psi_2 .$$

Теорема 3.3. Нехай виконуються умови (13), (14) і (15) Теореми 3.1 при $k_1 = \frac{1}{2}$, $k_2 = \frac{1}{4}$, причому

$$[\omega_{02} \times \overline{v}_2] = 0. \qquad \textbf{(21)}$$

Тоді справедлив наступний аналог твердження (20), причому:

$$\lim_{\substack{\beta_i \to +\infty \\ i=1,2}} \Delta' = L + \frac{4}{\sqrt{\pi}} \rho_1 s_1 \, | [\omega_{01} \times \overline{v}_1] | \sup_{(t,x)\in\mathbb{R}^4} \psi_1 + \frac{4}{\sqrt{\pi}} \rho_2 s_2^2 \left| \omega_{02} \right| \sup_{(t,x)\in\mathbb{R}^4} \left(| [\omega_{02} \times x] | \, \psi_2 \right).$$

Теорема 3.4. Нехай кутові швидкості мають вигляд (14) при $k_1 = 1$, $k_2 = \frac{1}{4}$. Тоді при виконанні умов (15) та (21) справедливе твердження (16), де:

$$\lim_{\substack{\beta_i \to +\infty \\ i=1,2}} \Delta' = L + \frac{4}{\sqrt{\pi}} \rho_2 s_2^2 \left| \omega_{02} \right| \sup_{(t,x)\in\mathbb{R}^4} \left(| [\omega_{02} \times x] | \, \psi_2 \right).$$

Спираючись на отримані вирази для границь при $\beta_i \to +\infty$, $i = 1,2$, ми можемо знайти деякі достатні умови прямування відхилу Δ до нуля, які зручно оформити у вигляді наслідків з Теорем 3.1 – 3.4 (у всіх подальших формулюваннях передбачається, що вказаний перехід вже здійснено).

Наслідок 3.1. Нехай виконані всі умови Теореми 3.1. Тоді співвідношення

$$\Delta \to 0 \qquad \textbf{(22)}$$

справедливе, якщо має місце хоча б одна із наступних умов:

1) для будь-яких функцій $\psi_i(x)$, що задовольняють умовам (15),

$$\overline{v}_1 = \overline{v}_2 = 0, \ \psi_i = \psi_i(x), \, i = 1,2 \ ; \qquad \textbf{(23)}$$

2) $\bar{v}_1 = \bar{v}_2 \neq 0$, виконано (19) та

$$\psi_i = C_i\left(\left[x \times \bar{v}_i\right]\right),\ i = 1,2, \qquad \textbf{(24)}$$

де $C_i \geq 0$ – будь-які гладкі фінітні або швидкоспадаючі функції своїх векторних аргументів;

3) $\bar{v}_1 = \bar{v}_2 \neq 0$, виконано (19) та

$$\psi_i = C_i\left(x - \bar{v}_i t\right),\ i = 1,2, \qquad \textbf{(25)}$$

де C_i такі ж як в пункті 2);

4) $\bar{v}_1 = 0$, вектори $\bar{v}_2$, ω_{01} , ω_{02} колінеарні,

$$\psi_1 = \psi_1(t,x) = h\left(\left[x \times \bar{v}_2\right]\right)\Bigg\{\lambda + C\ \ \left(\left[x \times \bar{v}_2\right]\right)\times$$

$$\times \exp\left[-\pi d^2 \left|\bar{v}_2\right| h\left(\left[x \times \bar{v}_2\right]\right)\left(\frac{x^1}{\bar{v}_2^{\,1}}\left(\frac{\rho_2}{\mu} + \frac{\rho_1}{\lambda}\right) - \frac{\rho_2}{\mu} t\right)\right]\Bigg\}^{-1},$$

$$\psi_2 = \psi_2(t,x) = \frac{1}{\mu}\left(h\left(\left[x \times \bar{v}_2\right]\right) - \lambda \psi_1(t,x)\right),$$

де $\lambda, \mu > 0$ – довільні константи, а функції h и C мають такі ж властивості, як C_i , $i = 1,2$, в (24), а також

$$d \to 0; \qquad \textbf{(26)}$$

5) $\bar{v}_1 \neq 0$, $\bar{v}_2 \neq 0$ довільні, виконано (19), функції ψ_i , $i = 1,2$, мають вигляд (24) або (25), і крім того,

$$\operatorname{supp}\psi_1 \cap \operatorname{supp}\psi_2 = \varnothing; \qquad \textbf{(27)}$$

6) $\bar{v}_1 \neq 0$, $\bar{v}_2 \neq 0$ довільні, функції ψ_i , $i = 1,2$, мають вигляд (24) або (25), і виконані умови (19) та (26).

Наслідок 3.2. Нехай мають місце всі припущення Теореми 3.2. Тоді справедливе твердження (22), якщо виконується хоча б одна з умов Наслідку 3.1, а також хоча б одна з наступних вимог:

1) $s_2 \to 0$;

2) умова (19) при $i = 2$.

Наслідок 3.3. Нехай мають місце всі припущення Теореми 3.3. Тоді твердження (22) є справедливим, якщо виконується хоча б одна з умов Наслідку 3.1, а також хоча б одна з наступних вимог:

1) $s_i \to 0$, $i = 1,2$;

2) $s_2 \to 0$, умова (19) при $i = 1$.

Наслідок 3.4. Нехай виконуються всі припущення Теореми 3.4. Тоді справедливе твердження (22), якщо виконується хоча б одна з умов Наслідку 3.1, а також вимога 1) Наслідку 3.2.

Далі також розглядається неоднорідна, нестаціонарна лінійна комбінація (11) двох локальних максвеліанів (12), що описують ґвинтові стаціонарні рівноважні стани газу, але в якості норми різниці між частинами рівняння (1)-(3) взято інтегральний (або «чисто-інтегральний») відхил (10).

Наведемо декілька можливих результатів розв'язання вказаної задачі.

Теорема 3.5. Нехай виконуються умови (13) та (14), а наступні функції належать простору $L_1\left(\mathbb{R}^4\right)$:

$$\psi_i\,,\ \frac{\partial \psi_i}{\partial t}\,,\ \left|\frac{\partial \psi_i}{\partial x}\right|,\ \left\|[\omega_{0i}\times x]\right\|\psi_i\,,\ \left([\omega_{0i}\times x],\frac{\partial \psi_i}{\partial x}\right),\ i=1,2\,. \qquad \mathbf{(28)}$$

Тоді визначений згідно з (10) відхил Δ_1 має сенс й існує така величина Δ_1', що

$$\Delta_1 \le \Delta_1', \qquad \mathbf{(29)}$$

причому виконуються умови (17)-(19) Теореми 3.1, то існує скінченна границя

$$L_1 = \lim_{\substack{\beta_i\to+\infty\\ i=1,2}} \Delta_1' = \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{2} \rho_i \int_{\mathbb{R}^1} dt \int_{\mathbb{R}^3} dx \left|\frac{\partial \psi_i}{\partial t} + \bar{v}_i\,\frac{\partial \psi_i}{\partial x} + \rho_j \pi d^2 \psi_1\psi_2\,|\,\bar{v}_1-\bar{v}_2\,\|\right| +$$

$$+2\pi d^2 \rho_1\rho_2\,|\,\bar{v}_1-\bar{v}_2\,| \int_{\mathbb{R}^1} dt \int_{\mathbb{R}^3} dx(\psi_1\psi_2)\,. \qquad \mathbf{(30)}$$

Теорема 3.6. Нехай виконуються умови (13), (14) та (28) Теореми 3.5 при $k_1=1$, $k_2=\dfrac{1}{2}$. Тоді має місце нерівність (29), причому:

$$\lim_{\substack{\beta_i\to+\infty\\ i=1,2}} \Delta_1' = L_1 + \frac{4}{\sqrt{\pi}}\,\rho_2 s_2\,|\,[\omega_{02}\times\bar{v}_2]\,| \int_{\mathbb{R}^1} dt \int_{\mathbb{R}^3} dx\psi_2\,.$$

Теорема 3.7. Нехай виконується умова (14) при $k_1=\dfrac{1}{2}$, $k_2=\dfrac{1}{4}$, а також справедлива умова (21). Тоді, якщо виконуються умови (28) Теореми 3.5 та має місце нерівність (29), справедлив наступний аналог твердження (30):

$$\lim_{\substack{\beta_i\to+\infty\\ i=1,2}} \Delta_1' = L_1 + \frac{4}{\sqrt{\pi}}\,\rho_1 s_1\,|\,[\omega_{01}\times\bar{v}_1]\,| \int_{\mathbb{R}^1} dt \int_{\mathbb{R}^3} dx\psi_1 + \frac{4}{\sqrt{\pi}}\,\rho_2 s_2^2\,|\omega_{02}| \int_{\mathbb{R}^1} dt \int_{\mathbb{R}^3} dx\big(|\,[\omega_{02}\times x]\,|\,\psi_2\big).$$

Теорема 3.8. Нехай кутові швидкості мають вигляд (14) при $k_1=1$, $k_2=\dfrac{1}{4}$. Тоді, якщо виконуються умови (21) та (28), має місце нерівність (29), де

$$\lim_{\substack{\beta_i\to+\infty\\ i=1,2}} \Delta_1' = L_1 + \frac{4}{\sqrt{\pi}}\,\rho_2 s_2^2\,|\omega_{02}| \int_{\mathbb{R}^1} dt \int_{\mathbb{R}^3} dx\big(|\,[\omega_{02}\times x]\,|\,\psi_2\big).$$

Завдяки цим результатам щодо границь при $\beta_i\to+\infty$, $i=1,2$, ми можемо сформулювати наслідки з Теорем 3.5–3.8, які дають певні достатні умови для прямування інтегрального відхилу Δ_1 до нуля. Але спочатку наведемо деякі визначення, які нам знадобляться.

Означення 3.1. Нехай G – множина в $\mathbb{R}^n$ така, що число компонент зв’язності перерізу G з якою завгодно прямою, паралельною деяким координатним осям, скінченне. Позначимо через G_δ $(\delta>0)$ δ-окіл G, тобто множину всіх точок, відстань від яких до G не перевищує δ.

При $n = 4$ та позначенні координат, як t, x^k ($k = 1,2,3$), ми будемо позначати через G^x проекцію G на гіперплощину $t = 0$, а через G^k – на гіперплощину $x^k = 0$ ($k = 1,2,3$).

Означення 3.2. Нехай $G \subset \mathbb{R}^4$; $\delta > 0$. Ми будемо називати як «δ-плато» на множині G таку функцію $\varphi_\delta(G,t,x) \in C^1(\mathbb{R}^4)$, для якої виконуються наступні умови:

$$\varphi_\delta(G,t,x) = \begin{cases} 1, & (t,x) \in G, \\ 0, & (t,x) \in \mathbb{R}^4 \setminus G_\delta, \\ 0 \le \varphi_\delta \le 1, & (t,x) \in G_\delta \setminus G, \end{cases}$$

і, крім того, на будь-якій прямій лінії, паралельній деяким координатним осям, φ_δ має не більш, ніж скінченну кількість строгих екстремумів.

Наслідок 3.5. Нехай виконані всі умови Теореми 3.5. Тоді співвідношення

$$\Delta_1 \to 0 \qquad \textbf{(31)}$$

має місце, якщо виконується хоча б одна із наступних умов:

1) для будь-яких функцій $\psi_i(x)$, що задовольняють умовам (28), виконується умова (23) Наслідку 3.1;

2) нехай функції ψ_i, $i = 1,2$ мають вигляд фінітних плато, тобто згладжених спеціальним чином характеристичних функцій деяких обмежених областей в $\mathbb{R}^4$ таких, що міра проекцій їх носіїв на гіперплощину $t = 0$ прямує до нуля, і добуток величин $\bar{v}_i^k$ та мір проекцій їх носіїв на гіперплощини $x^k = 0$, $k = 1,2,3$ також прямує до нуля. Крім того, нехай виконана хоча б одна з вимог:

а) умова (26) Наслідку 3.1, а саме $d \to 0$,

б) $\bar{v}_1 = \bar{v}_2 \ne 0$,

в) $mes\left(\operatorname{supp}\psi_1 \cap \operatorname{supp}\psi_2\right) \to 0$,

зокрема, може виконуватись умова (27) Наслідку 3.1, тобто $\operatorname{supp}\psi_1 \cap \operatorname{supp}\psi_2 = \varnothing$.

Наслідок 3.6. Нехай вірні всі припущення Теореми 3.6. Тоді твердження (31) має місце, якщо виконується хоча б одна з умов 1) або 2) Наслідку 3.5, а також принаймні одна з вимог Наслідку 3.2.

Наслідок 3.7. Нехай виконуються всі припущення Теореми 3.7. Тоді має місце твердження (31), якщо виконується хоча б одна з умов Наслідку 3.5, і, крім того, одна з вимог Наслідку 3.3.

Наслідок 3.8. Нехай виконуються всі припущення Теореми 3.8. Тоді має місце твердження (31), якщо виконується хоча б одна з умов Наслідку 3.5, і, крім того, перша вимога Наслідку 3.2.

Таким чином, ми бачимо, що всі знайдені розподіли, в тому числі й асиметричні, мають спільну властивість, вони описують газ, який остигає нерівномірно ($\beta_i \to +\infty$, $i = 1,2$), причому обертання обох ґвинтів сповільнюється ($\omega_i \to 0$, $i = 1,2$), хоча і з різною швидкістю, у відповідності з (14) та різними степенями $k_i \in \left(\frac{1}{4}, 1\right]$. Як показують Наслідки 3.1–3.8, в деяких випадках передбачається також виконання вимоги 1) Наслідку 3.3 незалежно від вибору типу відхилу між лівою та правою частинами рівняння Больцмана. При цьому розподіл $f(t,v,x)$ не прямує до жодного з максвеліанів (тобто точного розв'язку рівняння Больцмана).

У **розділі 4** побудований новий клас явних наближених розв'язків рівняння Больцмана для моделі твердих куль (1)-(3) у вигляді континуального розподілу (8), в який входять як глобальні, так і локальні максвеліани. Також досліджений континуальний розв'язок з довільною густиною, яка приймає будь-які значення з $\mathbb{R}^3$. Знайдено деякі достатні умови того, щоб рівномірно-інтегральна (9) та інтегральна (10) норми різниці між лівою та правою частинами рівняння були скіль завгодно малими.

Пропонується новий підхід до пошуку явних наближених розв'язків рівняння (1)–(3), заснований на припущенні, що масова швидкість максвеліана приймає не фіксовані дискретні значення, а стає довільним параметром, що приймає будь-які значення з $\mathbb{R}^3$.

Розглядається розподіл (8), а саме функція, що має вигляд

$$f = \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(t,x,u) M(v,u)\,du, \tag{32}$$

до якої входять глобальні максвеліани. Кожен такий максвелліан задається формулою

$$M(v,u) = \rho\left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{3/2} e^{-\beta(v-u)^2}. \tag{33}$$

Передбачається, що коефіцієнтні функції $\varphi(t,x,u)$ є невід'ємними і такими, що належать $C^1(\mathbb{R}^7)$. Потрібно знайти такі φ і таку поведінку всіх наявних параметрів, щоб рівномірно-інтегральний відхил Δ (9) прямував при цьому до нуля.

Теорема 4.1. Нехай виконані умови (32) і (33). Припустимо, що функції: φ, $\left|\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right|$, $\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|$ обмежені по t, x, u на $\mathbb{R}^7$, а величини φ, $|u|\varphi, \frac{\partial\varphi}{\partial t}, \frac{\partial\varphi}{\partial x}$, $u\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x} \in L_1(\mathbb{R}^3)$ по змінній u рівномірно відносно t, x на $\mathbb{R}^4$.

Тоді визначена у відповідності з формулою (9) величина Δ має зміст й існує таке Δ', що виконується оцінка зверху (16), причому

$$\lim_{\beta\to+\infty}\Delta' = \sup_{(t,x)\in\mathbb{R}^4}\left[\int_{\mathbb{R}^3}\rho\left|\frac{\partial\varphi}{\partial t}+u\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|du + 2\pi d^2\rho\int_{\mathbb{R}^6}\varphi(t,x,u_1)\varphi(t,x,u_2)\left|u_1-u_2\right|du_1du_2\right]. \tag{34}$$

Наслідок 4.1. Нехай виконані всі умови Теореми 4.1. Тоді справедливе (22), а саме прямування величини Δ до нуля, якщо коефіцієнтна функція φ має наступний вигляд:

$$\varphi = C(x-ut)\left(\frac{P}{\pi}\right)^{3/2} e^{-P(u-u_0)^2}. \tag{35}$$

де C — будь-яка гладка, додатня та обмежена разом зі своїми похідними функція, $u_0 \in \mathbb{R}^3$ — довільний фіксований вектор, а $P \to +\infty$.

Зауваження 4.1. Співвідношення (22) залишається в силі і при фіксованому P в (35), але при додатковій умові: $d \to 0$ (навколокнудсенівський газ).

Зауваження 4.2. У виразі (35), очевидно, можна було б замість першого множника $C(x-ut)$ розглянути й такий: $C([u\times x])$, а замість другого — інші δ-подібні функції.

Зауваження 4.3. З точки зору фізичного змісту отриманих результатів відмітимо, що Теорема 4.1 є лише деякою математичною абстракцією. Реально співвідношення (16) та (34) разом з (22) можна трактувати наступним чином: оцінка (16) та знаходження границі у виразі (34) служать для забезпечення подальшої довільної мализни норми Δ при відповідних коефіцієнтних функціях та достатньо низькій абсолютній температурі, що означає лише припущення про мализну теплової складової швидкостей молекул при збереженні довільної величини масової швидкості потоку.

Далі розглянемо континуальну суперпозицію локальних максвеліанів ґвинтового типу, а саме континуальний розподіл, в який входять локальні максвеліани часткового випадку, які описують стаціонарні рівноважні стани газу, подібні ґвинтам (6). Кожен такий максвеліан буде мати вигляд:

$$M(v,u,x)=\rho_0 e^{\beta\omega^2 r^2}\left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\beta(v-u-[\omega\times x])^2}, \qquad \textbf{(36)}$$

де $\bar{v}=u\in\mathbb{R}^3$ – довільний параметр (лінійна масова швидкість в точках x), звідси і залежність локального максвеліана не лише від v та x, а й від u.

Функцію розподілу (8) буде мати наступний вигляд:

$$f=\int_{\mathbb{R}^3}\varphi(t,x,u)M(v,u,x)du, \qquad \textbf{(37)}$$

де на коефіцієнтні функції $\varphi(t,x,u)\ge 0$, $\varphi(t,x,u)\in C^1(\mathbb{R}^7)$ необхідно накласти нові умови швидкого спадання по просторовій змінній x. Тому введемо нове позначення

$$\varphi(t,x,u)=\psi(t,x,u)e^{-\beta\omega^2 r^2}, \quad i=1,2, \qquad \textbf{(38)}$$

де функції ψ неперервно-диференційовані та невід’ємні.

Теорема 4.2. Нехай виконуються умови (36), (37) та (38), причому

$$\omega=\frac{\omega_0 s}{\beta^k}, \qquad \textbf{(39)}$$

де $s>0$ – будь-яка постійна величина, ω_0 – довільний фіксований вектор (інші параметри також довільні і фіксовані). Також припустимо, що наступні функції: ψ, $\left|\frac{\partial\psi}{\partial t}\right|$, $\left|\frac{\partial\psi}{\partial x}\right|$, $\left|[\omega_0\times x]\right|\psi$, $\left([\omega_0\times x],\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)$ – обмежені по t, x, u на $\mathbb{R}^7$, а величини

$$\psi,\ |u|\psi,\frac{\partial\psi}{\partial t},\frac{\partial\psi}{\partial x},\ u\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x}\in L_1(\mathbb{R}^3)$$

по змінній u рівномірно відносно t, x на $\mathbb{R}^4$. Тоді визначена згідно з (9) величина Δ має сенс (тобто існують вказані там кінцевий інтеграл та кінцевий супремум) й існує таке Δ', що виконується нерівність (16), причому якщо $\frac{1}{2} < k \le 1$ або

$$\frac{1}{4} < k \le \frac{1}{2} \text{ та } [\omega_0 \times \bar{v}] = 0,$$

то існує скінченна границя

$$\lim_{\beta\to+\infty} \Delta' = \sup_{(t,x)\in\mathbb{R}^4} \left[\rho \int_{\mathbb{R}^3} \left| \frac{\partial\psi}{\partial t} + u\frac{\partial\psi}{\partial x} \right| du + 2\pi^3 d^2 \rho^2 \int_{\mathbb{R}^6} \psi(t,x,u_1)\psi(t,x,u_2)|u_1 - u_2| du_1 du_2 \right].$$

Наслідок 4.2. Нехай виконані всі припущення Теореми 4.2. Тоді справедливе (22), а саме прямування величини Δ до нуля, якщо функція ψ, визначена у виразі (38), має такий самий вигляд, як і функція φ у Наслідку 4.1.

Теорема 4.3. Нехай виконуються умови (36), (37) та (38), а кутова швидкість має вигляд (39). Тоді, якщо наступні функції:

$$\psi,\ |u|\psi,\ \frac{\partial\psi}{\partial t}, \frac{\partial\psi}{\partial x},\ u\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x},\ |[\omega_0\times x]|\psi,\ \left([\omega_0\times x], \frac{\partial\psi}{\partial x}\right) \in L_1(\mathbb{R}^7),$$

визначена у відповідності з (10) величина Δ_1 має сенс та існує таке Δ_1', що вірна оцінка зверху (29). Причому якщо $k \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$, то існує скінченна границя

$$\lim_{\beta\to+\infty} \Delta_1' = \int_{\mathbb{R}^1} dt \int_{\mathbb{R}^3} dx \left[\rho \int_{\mathbb{R}^3} \left| \frac{\partial\psi}{\partial t} + u\frac{\partial\psi}{\partial x} \right| du + 2\pi^3 d^2 \rho^2 \int_{\mathbb{R}^6} \psi(t,x,u_1)\psi(t,x,u_2)|u_1 - u_2| du_1 du_2 \right].$$

Наслідок 4.3. Нехай виконані всі припущення Теореми 4.3. Тоді справедливе (31), а саме прямування величини Δ_1 до нуля, якщо функція ψ, визначена у виразі (38) має вигляд:

$$\psi(t,x,u) = g(t,x)\left(\frac{P}{\pi}\right)^{3/2} e^{-P(u-u_0)^2},$$

де функція $g(t,x)$ має вигляд фінітного «плато» (див. означення 3.2), $u_0 \in \mathbb{R}^3$ — довільний фіксований вектор, а $P \to +\infty$.

Далі поставимо задачу більш широко, розглянемо континуальний розподіл вигляду (8), в якому густина також приймає будь-які значення з $\mathbb{R}^1_+$. Таким чином, побудуємо явні наближені розв'язки у вигляді суперпозиції глобальних максвеліанів з довільною густиною.

Отже, розглянемо функцію розподілу наступного вигляду:

$$f = \int_{\mathbb{R}^3} du \int_0^{+\infty} \psi(t,x,u,\rho)\tilde{M}(v,u)d\rho, \qquad \textbf{(40)}$$

де

$$\psi(t,x,u,\rho) = \varphi(t,x,u,\rho)\cdot\rho, \qquad \textbf{(41)}$$

а

$$\tilde{M}(v,u)=\left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{3/2} e^{-\beta(v-u)^2}. \qquad \textbf{(42)}$$

Передбачаться, що коефіцієнтна функція $\varphi(t,x,u,\rho)$ є невід'ємною та належить $C^1\left(\mathbb{R}^4\right)$ по t,x та $C\left(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^1_+\right)$ по u,ρ.

Теорема 4.4. Нехай виконані умови (40)-(42). Припустимо, що функції: ψ, $\left|\frac{\partial\psi}{\partial t}\right|$, $\left|\frac{\partial\psi}{\partial x}\right|$ обмежені по t, x, u та ρ на $\mathbb{R}^7\times\mathbb{R}^1_+$, а величини

$$\psi\,,\ |u|\,\psi\,,\frac{\partial\psi}{\partial t},\frac{\partial\psi}{\partial x},\ u\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x}\ \in L_1\left(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^1_+\right)$$

по змінній u та ρ рівномірно відносно t, x на $\mathbb{R}^4$.

Тоді величина Δ в (9) коректно визначена й існує таке Δ', що виконується нерівність (16), причому

$$\lim_{\beta\to+\infty}\Delta'=\sup_{(t,x)\in\mathbb{R}^4}\left[\int_{\mathbb{R}^3}du\int_{\mathbb{R}^1_+}d\rho\left|\frac{\partial\psi}{\partial t}+u\frac{\partial\psi}{\partial x}\right|+\right.$$
$$\left.+2\pi d^2\int_{\mathbb{R}^6}du_1du_2\int_{\mathbb{R}^2_+}d\rho_1 d\rho_2\psi(t,x,u_1,\rho_1)\psi(t,x,u_2,\rho_2)\left|u_1-u_2\right|\right].$$

Наслідок 4.4. Нехай виконані всі умови Теореми 4.4. Тоді співвідношення (22) справедливе, якщо коефіцієнтна функція ψ визначена у виразі (41) має вигляд

$$\psi(t,x,u,\rho)=C(x-ut)\left(\frac{P}{\pi}\right)^{3/2} e^{-P(u-u_0)^2}h(\rho).$$

де C — будь-яка гладка, додатня і обмежена разом зі своїми похідними функція, $u_0\in\mathbb{R}^3$ — довільний фіксований вектор, $h(\rho)$— неперервна, невід'ємна функція в $L_1\left(\mathbb{R}^1_+\right)$ з коренем $\rho=0$ не нижче 1-го ступеня, а $P\to+\infty$.

Теорема 4.5. Нехай виконані умови (40)-(42). Припустимо, що наступні функції:

$$\psi\,,\ |u|\,\psi\,,\frac{\partial\psi}{\partial t},\frac{\partial\psi}{\partial x},\ u\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x}\ \in L_1\left(\mathbb{R}^7\times\mathbb{R}^1_+\right)$$

по змінним t, x, u та ρ.

Тоді інтеграл Δ_1 в (10) збігається та існує таке Δ_1', що виконується нерівність (29), де

$$\lim_{\beta\to+\infty}\Delta_1'=\int_{\mathbb{R}^1}dt\int_{\mathbb{R}^3}dx\left[\int_{\mathbb{R}^3}du\int_{\mathbb{R}^1_+}d\rho\left|\frac{\partial\psi}{\partial t}+u\frac{\partial\psi}{\partial x}\right|+\right.$$
$$\left.+2\pi d^2\int_{\mathbb{R}^6}du_1du_2\int_{\mathbb{R}^2_+}d\rho_1 d\rho_2\psi(t,x,u_1,\rho_1)\psi(t,x,u_2,\rho_2)\left|u_1-u_2\right|\right].$$

Наслідок 4.5. Нехай виконані всі умови Теореми 4.5. Тоді співвідношення (31) справедливе, якщо коефіцієнтна функція ψ визначена у виразі (41) має вигляд

$$\psi(t,x,u,\rho) = g(t,x)\left(\frac{P}{\pi}\right)^{3/2} e^{-P(u-u_0)^2} h(\rho).$$

де $g(t,x)$ має вигляд фінітного «плато» (див. означення 3.2), такого, що міра проекцій множин $\operatorname{supp} g(t,x)$ на гіперплощину $t=0$ прямує до нуля (у випадку, коли g не залежить від t) та

$$u^k mes\left(\operatorname{supp} g\right)^k \to 0,\ k=1,2,3$$

де G^k – проекція множини $G \subset \mathbb{R}^4$ на гіперплощину $x^k=0$ $(k=1,2,3)$, $u_0 \in \mathbb{R}^3$ — довільний фіксований вектор, $h(\rho)$— неперервна, невід'ємна функція в $L_1\left(\mathbb{R}^1_+\right)$ з коренем $\rho=0$ не нижче 1-го ступеня, а $P \to +\infty$.

ВИСНОВКИ

Дисертація присвячена пошуку явних наближених розв'язків нелінійного інтегро-диференціального рівняння Больцмана. Для моделі твердих куль вперше побудовані такі розв'язки у вигляді асиметричних аналогів бімодальних розподілів при деяких припущеннях про зв'язок між кутовими швидкостями та температурами потоків, а також новий клас наближених розв'язків у вигляді континуальних суперпозицій глобальних та локальних максвеліанів.

Отже, основні результати даної дисертації:

• Побудовані наближені бімодальні розв'язки рівняння Больцмана у випадку, коли максвелівські моди є ґвинтовими з різними ступенями мализни їх кутових швидкостей. Вони описують нерівномірно остигаючий газ, причому обертання обох ґвинтів сповільнюється, хоча і в різному ступені. Здобуто деякі достатні умови мінімізації рівномірно-інтегрального відхилу між частинами рівняння;

• Знайдено ґвинтові потоки з різними ступенями мализни їх кутових швидкостей, які мінімізують інтегральний відхил між частинами рівняння;

• Розроблений новий підхід для пошуку явних наближених розв'язків рівняння Больцмана, заснований на припущенні, що масова швидкість глобального максвеліана приймає не фіксовані дискретні значення, а стає довільним параметром, який приймає будь-які значення з $\mathbb{R}^3$. Таким чином, побудовано новий наближений розв'язок у вигляді континуального розподілу, що відрізняється від бімодальних;

• Досліджений континуальний розв'язок з довільною густиною та знайдені відповідні достатні умови мінімізації інтегрального та рівномірно-інтегрального відхилів між частинами рівняння;

• Побудовано новий клас явних наближених розв'язків цього рівняння, який має вигляд континуальної суперпозиції локальних максвеліанів ґвинтового типу. Вони задовольняють дане кінетичне рівняння з якою завгодно мірою точності та означають припущення, що теплова складова швидкостей молекули мала, коли збережено довільне значення масової швидкості потоку.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Gordevskyy V. D., Sazonova E. S. Asymmetrical Bimodal Distributions with Screw Modes // Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry. 2011. Vol. 7, № 3. P. 212–224.

2. Гордевский В. Д., Сазонова Е. С. Континуальный аналог бимодальных распределений // Теоретическая и математическая физика. 2012. Т. 171, № 3. С. 483–492.

3. Сазонова О. С. Асиметричні гвинтові потоки, що мінімізують інтегральний відхил між частинами рівняння Больцмана // Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна. Серія: Математика, прикладна математика і механіка. 2012. № 1030. С. 4–13.

4. Гордевский В. Д., Сазонова Е. С. Об одном классе приближенных решений уравнения Больцмана с винтовыми модами // Доповіді НАН України. 2014. № 2. С. 7–12.

5. Gordevskyy V. D., Sazonova E. S. Continual approximate solution of the Boltzmann equation with arbitrary density // Matematychni Studii. 2016. Vol. 45, № 2. P. 194–204.

6. Gordevskyy V. D., Sazonova O. S. Continual distribution with screw modes // Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна. Серія: Математика, прикладна математика і механіка. 2016. Т. 84. С. 112–122.

7. Сазонова Е. С. Асимметричные бимодальные распределения с винтовыми модами // Современные проблемы математики и её приложения в естественных науках и информационных технологиях : Международная научная конференция, 17–22 апреля 2011 г. : тезисы докладов. Харьков, 2011. С. 201–202.

8. Сазонова О. С. Взаємодія асиметричних гвинтових потоків // Сучасні проблеми механіки і математики : IV Конференція молодих учених імені академіка Я.С. Підстригача, 24–27 травня 2011 р. : тези доповідей. Львів, 2011. С. 153–154.

9. Гордевський В. Д., Сазонова О. С. Континуальний аналог бімодальних розподілів // Диференціальні та інтегральні рівняння, їх застосування : матеріали XIV міжнародної наукової конференції імені академіка М. Кравчука, 19–21 квітня 2012 р., Київ, 2012. С. 135–136.

10. Sazonova O. S. The Continual approximate solution of the Boltzmann equation // Equilibrium and non-equilibrium statistical mechanics : XVII International Congress on Mathematical Physics, 6–11 August 2012. : abstracts. Aalborg, 2012. P. 26.

11. Sazonova O. Asymmetrical screw flows which minimize the integral remainder between the sides of the Boltzmann equation // Differential Equations and Mathematical Physics : International Conference dedicated to the 120th anniversary of Stefan Banach, 17–21 September 2012. : abstracts of reports. Lviv, 2012. P. 228–229.

12. Gordevskyy V. D., Sazonova O. S. The Continual approximate solution of the Boltzmann equation with arbitrary density // Dynamical system modeling and stability investigation : XVI International Conference, 29–31 May 2013. : abstracts of conf. reports. Kiev, 2013. P. 157.

13. Gordevskyy V., Sazonova O. Continual distribution with screw modes // Analysis and mathematical physics : International conference, 24–28 June 2013. : book of abstracts. Kharkiv, 2013. P. 24.

14. Гордевский В. Д., Сазонова Е. С. Об одном классе приближенных решений уравнения Больцмана // Современные проблемы математики, механики, информатики : Междунар. школа-конф. «Тараповские чтения-2013», 29 сентября – 4 октября 2013 г. : сборник тезисов докладов, Харьков, 2013. С. 93–94.

15. Gordevskyy Vyacheslav, Sazonova Olena. General form of the Maxwellian distribution with arbitrary density. Conference of young scientists «Pidstrygachivsky readings – 2015», 26–28 May 2015. : abstracts of reports. Lviv, 2015. P. 1–2.

16. Sazonova O.S. About one class of continual approximate solutions. 6th Ya.B. Lopatynsky International School-Workshop on Differential Equations and Applications, 18–20 June 2019 : book of abstracts. Vinnytsia, 2019. P. 65–66.

АНОТАЦІЯ

Сазонова О.С. Асиметричні та континуальні аналоги бімодальних розподілів. – Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.03 – математична фізика. – Фізико-технічний інститут низьких температур ім. Б.І. Вєркіна Національної академії наук України, Харків, 2019.

Дисертаційна робота присвячена побудові явних наближених розв’язків нелінійного рівняння Больцмана для моделі твердих куль. Ці розв’язки будуються у вигляді асиметричних та континуальних аналогів бімодальних розподілів з максвелівськими модами різних типів: глобальними та стаціонарними неоднорідними. Величинами, що характеризують ступінь точності тих чи інших наближених розв’язків, є відхили між лівою та правою частинами рівняння, які обчислюються як рівномірно-інтегральна або чисто-інтегральна норми різниці між ними.

Знайдені бімодальні розподіли, відмінні від тих, що розглядались раніше. Вони мають вигляд лінійної комбінації стаціонарних неоднорідних максвеліанів при деяких припущеннях про зв’язок між кутовими швидкостями та температурами потоків. Також були отримані різні граничні випадки, в яких асиметричні бімодальні розподіли мінімізують відповідні відхили між частинами рівняння Больцмана.

Запропонований новий підхід до пошуку наближених розв’язків. Цей підхід заснований на припущенні, що масова швидкість глобальних та локальних максвеліанів приймає не фіксовані дискретні значення, а стає довільним параметром, що приймає будь-які значення з простору $\mathbb{R}^3$. Також були знайдені наближені розв’язки з довільною густиною. Таким чином, побудовано новий клас наближених розв’язків у вигляді континуальних розподілів.

Ключові слова: тверді кулі, рівняння Больцмана, максвеліан, відхил, бімодальний розподіл, континуальний розподіл, ґвинти.

АННОТАЦИЯ

Сазонова Е.С. Асимметричные и континуальные аналоги бимодальных распределений. – Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.03 – математическая физика. – Физико-технический институт низких температур им. Б.И. Веркина Национальной академии наук Украины, Харьков, 2019.

Диссертационная работа посвящена построению явных приближенных решений нелинейного уравнения Больцмана для модели твердых сфер. Эти решения строятся в виде асимметричных и континуальных аналогов бимодальных распределений с максвелловскими модами разных типов: глобальными и стационарными неоднородными. Величинами, которые характеризуют степень точности тех или иных приближенных решений, являются невязки между левой и правой частями уравнения, которые вычисляются как равномерно-интегральная или чисто интегральная нормы разности между ними.

Получены бимодальные распределения, отличные от рассматриваемых ранее. Они имеют вид линейной комбинации стационарных неоднородных максвеллианов при некоторых допущениях о связи между угловыми скоростями и температурами потоков. Также были найдены различные предельные случаи, в которых асимметричные бимодальные распределения минимизируют соответствующие невязки между частями уравнения Больцмана.

Предложен новий подход к поиску приближенных решений. Этот подход основан на предположении, что масовая скорость глобальных и локальных максвеллианов принимает не фиксированные дискретные значеня, а становится произвольным параметром, принимающим любые значения из пространства $\mathbb{R}^3$. Также были найдены приближенные решения с произвольной плотностью. Таким образом, построен новый класс приближенных решений в виде континуальных распределений.

Ключевые слова: твердые сферы, уравнение Больцмана, максвеллиан, невязка, бимодальное распределение, континуальное распределение, винты.

ABSTRACT

Sazonova O.S. Asymmetrical and continual analogues of bimodal distributions. – Manuscript.

The thesis for obtaining the degree of Candidate of Sciences (Ph.D.) in physics and mathematics, speciality 01.01.03 – Mathematical Physics. – B.Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kharkiv, 2019.

The thesis is devoted to construction of explicit approximate solutions of the non-linear Boltzmann equation for the model of hard spheres. This equation is an instrument to study the complicated phenomena in the multiple-part systems, in particular, rarefied gas.

Because of the difficult structure of the collisions integral there are very few exact solutions of the equation are presently obtained. The well-known exact solutions in the form of global and local Maxwellians have been described so far only as stationary equilibrium states of gas. Much progress has been made but only in the special case of Maxwell molecules and some generalizations. For physically significant interaction models, in particular, for the model of hard spheres, up to now, no explicit solutions except Maxwellians are known. That is why the search of those or other approximate solutions is topical. Such solutions in the form of the bimodal distributions, i.e. the linear combinations of two Maxwellians, in particular, the local Maxwellians of special form describing the screw-shaped stationary equilibrium states of a gas (in short-screws or spirals), were considered.

In the thesis we construct explicit approximate solutions in the form of assymetrical and continual analogues of bimodal distributions with different Maxwellian modes, namely such as: global and stationary non-homogeneous. A uniform-integral remainder or integral remainder between the sides of the Boltzmann equation are taken for the numerous characteristics of this solution exactness.

The approximate bimodal solutions that differs from those studied before, and which have the form of linear combination of stationary non-homogeneous Maxwellians with some assumptions about the connection between the angular velocities and the flow temperature, are found. The common property of this obtained asymmetrical analogues of bimodal distributions is that they describe the non-uniform cooling gas. Besides, the rotation of both screws decelerates, although in different degrees.

A new approach to the search for explicit approximate solutions based on assuming that the mass velocity of the global and local Maxwellian does not take fixed discrete values but becomes an arbitrary parameter taking any values in $\mathbb{R}^3$ is proposed. Also the approximate distributions with arbitrary density are investigated. So, the new kind of approximate solutions in the form of continual distributions is built.

For uniform integral and pure integral remainders in the case of asymmetrical and continual solutions a top estimate is obtained and it is shown that this estimate has a finite boundary at low Maxwell temperature. Various sufficient conditions for attaining the minimum of these boundaries are obtained in the special choice of the behavior of parameters, including, for large Knudsen numbers. At the same time, all obtained distributions itself do not tend to any of Maxwellians (i.e. to the known exact solution of the Boltzmann equation).

Keywords: hard spheres, Boltzmann equation, Maxwellian, remainder, bimodal distribution, continual distribution, screws.