Національна академія наук України
Фізико-технічний інститут низьких температур ім. Б.І.Вєркіна

Рибалко Володимир Олександрович

УДК 517.9

ІСНУВАННЯ І АСИМПТОТИЧНА ПОВЕДІНКА РОЗВ'ЯЗКІВ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

01.01.03 – математична фізика

Автореферат
на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Харків – 2019

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана у Фізико-технічному інституті низьких температур ім. Б.І. Вєркіна НАН України.

Офіційні опоненти:

доктор фізико-математичних наук, професор
Мельник Тарас Анатолійович,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
професор кафедри математичної фізики;

доктор фізико-математичних наук, старший науковий співробітник
Мурач Олександр Олександрович,
Інститут математики НАН України (м. Київ),
провідний науковий співробітник лабораторії диференціальних рівнянь з частинними похідними у складі відділу нелінійного аналізу;

доктор фізико-математичних наук, член-кореспондент НАН України
Скрипнік Ігор Ігорович,
Інститут прикладної математики і механіки НАН України (м. Слов'янськ),
директор.

Захист відбудеться "26" грудня 2019 р. о "15" годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 64.175.01 у Фізико-технічному інституті низьких температур ім. Б.І. Вєркіна НАН України за адресою: пр. Науки, 47, м. Харків, 61103.

З дисертацією можна ознайомитися у науковій бібліотеці Фізико-технічного інституту низьких температур ім. Б.І. Вєркіна НАН України за адресою:
пр. Науки, 47, м. Харків, 61103.

Автореферат розісланий "25" листопада 2019 р.

Учений секретар
спеціалізованої вченої ради — В.О. Горькавий

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Питання існування і асимптотичної поведінки розв'язків диференціальних рівнянь з частинними похідними посідають чинне місце у сучасній математичній фізиці. Втім, не зважаючи на розвинений стан теорії крайових задач для рівнянь математичної фізики є труднощі, наприклад, відсутність або втрата компактності у певних границях, для подолання яких не існує загальних рецептів і конткретні задачі потребують розбудови своїх специфічних методів.

Значну частину дисертаційної роботи присвячено дослідженню некомпактних варіаційних задач пов'язаних з теорією фазових переходів у надпровідниках. Такі (некомпактні) варіаційні задачі є предметом активних досліджень починаючи з другої половини 20-го сторіччя. Інтерес до них був стимульований, перш за все, проблемами з диференціальної геометрії. Одним з найвідоміших прикладів є задача Ямабе. У 1960 р. Х. Ямабе [1] поставив і розв'язав задачу про існування конформної ріманової метрики з постійною скалярною кривизною на компактному многовиді вимірності ≥ 3. Проте розв'язання Х. Ямабе мало суттєву помилку, яку у 1967 р. помітив Н. Трудінгер. А саме, варіаційна задача, що було виведено Х. Ямабе є некомпактною і повне доведення її розв'язності, зусиллями, перш за все, Н. Трудінгера[2] , Т. Обена[3] і Р. Шона[4] , зайняло майже 20 років. Некомпактні варіаційні задачі виникають також в дослідженнях Дж. Сакса і К. Уленбек[5] мінімальних 2-сфер, Х. Брезіса і Ж.-М. Корона[6] існування поверхонь з постійною скалярною кривизною натягнутих на заданий контур, роботах К. Таубеса [7] про рівняння Янга-Міллса, М.Струве[8] про напівлінійні рівняння з критичними показниками, і багатьох інших роботах. Характерною рисою перелічених задач є існування локалізованих розв'язків, які концентруються (в певному сенсі) в околі точки (точок), і цю поведінку, принаймні в геометричних задачах, можна візуалізувати у вигляді надутих бульбашок. Відсіля і пішов неформальний термін *bubbling*, що часто використовується в подібних задачах. Існують абстрактні підходи до таких задач, як то розвинено в

---

[1] Yamabe, H.: On a deformation of Riemannian structures on compact manifolds. Osaka Math. J. **12**(1), 21–37 (1960)

[2] Trudinger, N.: Remarks concerning the conformal deformation of Riemannian structures on compact manifolds. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3) **22**(2), 265–274 (1968)

[3] Aubin, T., Équations différentielles non linéaires et problème de Yamabe concernant la courbure scalaire, J. Math. Pures Appl. **55**(3), 269–296 (1976)

[4] Schoen, R.: Conformal deformation of a Riemannian metric to constant scalar curvature. J. Differ. Geom. **20**(20), 478–495 (1984)

[5] Sacks, J., Uhlenbeck, K.: The existence of minimal immersions of 2-spheres. Ann. Math. **113**(1), 1–24 (1981)

[6] Brezis, H., Coron, J.-M.: Convergence of solutions of H-systems or how to blow bubbles. Arch. Rational Mech. Anal. **89**(1), 21–56 (1985)

[7] Taubes, C.H.: Path connected Yang–Mills moduli spaces. J. Diff. Geom. **19**, 337–392 (1984)

[8] Struwe, M.: A global compactness result for elliptic boundary value problems involving limiting nonlinearities. Math. Z. **187**(4), 511–517 (1984)

роботі П.-Л. Ліонса[9] про концентрацію-компактність, в роботах П. Жерара[10] , С. Джафара[11] про характерізацію втрати компактності у критичних випадках вкладень. Важливі результати про неіснування розв'язків напівлінійних рівнянь з критичними показниками було одержано С.І. Похожаєвим[12] .

Ефект концетрації енергії розв'язків в околі дискретного набору точок є також характерним для моделей фазових переходів в надпровідниках. Піонерські математичні результаті для відповідних варіаційних задач було одержано Ф. Бетюелем, Х. Брезісом і Ф. Хелейном в роботі [13] присвяченій дослідженню асимптотичної поведінки мінімізантів спрощеного функціонала Гінзбурга-Ландау у границі Лондонів, коли параметр Гінзбурга-Ландау прямує до нескінченності. Ними було доведено збіжність мінімізантів до гамонічних відображень з декількома сингулярними точками, для описання останніх виведено функціонал ренормалізованої енергії. Результати і методи роботи [13] стимулювали численні дослідження варіаційних задач пов'язаних як зі спрощеним функціоналом Гінзбурга-Ландау так і повним, що враховує ефекти магнітного поля. Суттєве розвинення техніки [13] було зроблено в роботі Е. Сандієра і С. Серфаті[14] присвяченій дослідженню вихорів спричинених зовнішнім магнітним полем. Зазначимо, що в [13] вивчено задачу Діріхле з краєвими даними які задаються гладкою $\mathbb{S}^1$-значною функцією g на межі, і степінь відображення $\deg g$ функції g є визначальним для якісної картини асимптотичної поведінки мінімізантів: наприклад, якщо $\deg g = 0$, то в границі Лондонів мінімізанти збігаються до несингулярного гармонічного відображення, якщо $\deg g = 1$, то граничне відображення має одну сингулярну точку, і т.д. Цей факт мотивує послаблення крайових умов до заданого степеня крайових даних на межі, проте в результаті варіційна задача стає некомпактною і, на відміну від задачі Діріхле, питання існування розв'язків стає нетрівіальним для скінчених значень параметра Гінзбурга-Ландау. Такі задачі вивчено у дисертаційній роботі, в них спостерігається нестандартний механізм втрати компактності – через концентрацію енергії в околі точок, що наближаються до межі. Це дослідження є новим, йому передували дві окремі роботи Л. Берлянда і Д.Головатого[15] та Л. Берлянда і П. Міронеску[16] , де впер-

[9]Lions, P.-L.: The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The limit case. II. Rev. Mat. Iberoamericana **1**, 45–121 (1985)

[10]Gérard, P.: Compactness description for the default Sobolev injection. ESAIM Control Optim. Calc. Var. **3**, 213–233 (1998)

[11]Jaffard, S. Analysis of the lack of compactness in the critical Sobolev embeddings. J. Funct.Anal. **161**, 384–396 (1999)

[12]Pohozhaev, S.: Eigenfunctions of the equation $\Delta u + f(u) = 0$. Soviet Mat. Dokl. **6**, 1408–1411 (1965)

[13]Bethuel, F., Brezis, H., Helein, F.: Ginzburg-Landau vortices. Birkhauser (1994)

[14]Sandier, E., Serfaty, S.: Vortices in the magnetic Ginzburg-Landau model. Birkhäuser (2007)

[15]Golovaty, D., Berlyand, L.: On uniqueness of vector-valued minimizers of the Ginzburg-Landau functional in annular domains. Calc. Var. Partial Differential Equations **14**, 213–232 (2002)

[16]Berlyand, L., Mironescu, P., Ginzburg-Landau minimizers with prescribed degrees. Capacity of the domain and emergence of vortices. J.Funct. Anal. **239**, 76–99 (2006)

ше було встановлено існування розв'язків з заданими ненульовими степенями. В дисертаційній роботі доведено гіпотезу висунуту Л. Берляндом і П. Міронеску та розглянуто багато інших питань, зокрема, існування розв'язків з нулями (вихорами) і дослідження сингулярних границь розв'язків.

Також в дисертаційній роботі вивчаються сингулярно збурені лінійні еліптичні рівняння другого порядку. В них втрата компактності виникає через малий параметр перед членами зі сташими похідними. Одним з перших досліджень таких задач є робота М.Й. Вішика і Л.А. Люстерника[17] , де було розвинуто теорію побудови межових шарів у випадку коли гранична задача є в певному сенсі добре поставленою. Ймовірнісний підхід до сингулярно збурених рівнянь було використано О.Д. Вентцелем і М.Й. Фрейдліним [18] і розвинуто техніку великих відхилень для відповідних стохастичних диференціальних рівнянь. За допомогою ймовірнісної інтерпретації розв'язків і згаданої техніки великих відхилень Ю.І. Кіфером [19,20] було вивчено асимтотичну поведінку першого власного значення задачі Діріхле для сингулярно збуреного еліптичного оператора. Існує також альтернативний підхід до вивчення сингулярно збурених рівнянь другого порядку, що базується на понятті *в'язкісних розв'язків* введеному П.-Л. Ліонсом і М. Крендаллом[21] на початку 1980-х років. Цей підхід є, в певному сенсі, більш прямим (він оперує напряму з рівняннями), спирається на міркування типу принципу максимуму а не ймовірнісну техніку, і, досить часто, дозволяє отримати більше інформації про розв'язки. Вперше техніку в'язкісних розв'язків було застосовано до дослідження сингулярно збурених рівнянь Л.-К. Евансом і Х. Іші[22] . У дисертаційній роботі розвинуто методи, що поєднують техніку в'язкісних розв'язків і техніки локалізованого аналізу, для дослідження асимптотичної поведінки спектральних задач для сингулярно збурених операторів біля межі спектру. Зокрема, детально вивчено асимптотики першого власного значення і відповідної власної функції. Зазначимо, що аналіз проведено для загальних несамоспряжених операторів, які, з одного боку, мають аналітичні складнощі через відсутність варіаційного принципу, з іншого боку, призводять до нових ефектів (наприклад, локалізація власних функцій на граничних циклах породжених конвективними членами).

В сингулярно збурених задачах, вивчених в дисертаційній роботі, зазвичай

[17]Vishik, M.I., Lyusternik, L.A.: Regular degeneracy and boundary layer for linear differential equations with a small parameter. Usp. Mat. Nauk, **12**(5), 3–122 (1957)

[18]Freidlin, M.I., Wentzell, A.D.: Random perturbations of dynamical systems. Fundamental Principles of Mathematical Sciences, **260**. Springer-Verlag (1984)

[19]Kifer, Yu.: On the principal eigenvalue in a singular perturbation problem with hyperbolic limit points and circles. J.Differ. Equations **37**(1), 108–139 (1980)

[20]Kifer, Yu.: Stochastic stability of the topological pressure. J. Analyse Math. **38**, 255–286 (1980)

[21]Crandall, M., Lions, P.-L.: Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations. Transactions of the American Mathematical Society **277** (1), 1–42 (1983)

[22]Evans, L.C., Ishii, H.: A PDE approach to some asymptotic problems concerning random differential equation with small noise intensities. Ann. L'Institut H. Poincare **2**, 1–20 (1985)

присутні два типа збурення: наявність малого параметру в членах з похідними і швидких осциляцій в коефіцієнтах рівнянь. Зазначимо, що рівняння з швидко осцилюючими коефіцієнтами є класичним прикладом з кола питань, що розглядаються в рамках теорії усереднення. Перші задачі теорії усереднення було поставлено і досліджено в 1964 році В.О. Марченком і Є.Я. Хрусловим[23] , М.Й. Фрейдліним[24] , і Дж.Б. Келлером[25] . Вагомий внесок в розвититок теорії зроблено як українськими, так і зарубіжними математиками: Є.Я. Хрусловим, І.В. Скрипником, Т.А. Мельником, О.А. Олійник, Г.П. Панасенком, Н.С. Бахваловим, В.В. Жиковим, Е. Санчез-Пеленсією, Е. Де Джорджі, Л. Тартаром та іншими. В дисертаційній роботі вивчено дві задачі усереднення в яких винайдено нові ефекти спричиненені колективним внеском неоднорідностей. Це задача про асимтотичне описання вихоревих структур в надпровідниках з великим числом отворів, і дослідження монотонних операторів в перфорованих областях з умовою Фур'є на включеннях. В першій зі згаданих задач винайдено масштабні співвідношеняя, що ведуть до вихорових структур з кратними вихорями у вкладених підобластях. Зазвичай в моделях надпровідників (у тому числі з домішками) спостерігаються структури з простих вихорів, що описано, наприклад, в роботі А. Афталіон, С. Серфаті і Е. Санд'єра[26] . В другій задачі знайдено, що колективний вклад дірок, на межі яких ставиться умова Фур'є, може вести до появи нового члена в ефективній крайовій умові на зовнішній межі. Зазначимо, що формально цю задачу можна розглядати як сингулярно збурену межею (її міра необмежено зростає), проте розглядається припущення про нульові середні коефіцієнтів в умовах Фур'є на межі включень і це припущення дає можливість адаптувати класичну техніку (а саме метод двохмасштабної збіжності) для вивчення асимптотичної поведінки розв'язків.

В дисертаційній роботі вивчено також задачу з вільною межею, що моделює рух живих клітин на субстраті. Останнім часом спостерігається сплеск уваги до математичних моделей біологічних процесів. При цьому спроби описання біологічних явищ досить часто призводять до постановок задач які становлять певний математичний виклик. Зокрема, задачі з вільною межею є більш складними для дослідження ніж стандартні крайові задачі з фіксованою межею. Важливий крок в дослідженні задач з вільною межею в біологічних моделях

---

[23] Marchenko, V.A., Khruslov, E.Ya.: Boundary-value problems with fine-grained boundary. Mat.Sb. (N.S.) **65**, 458–472 (1964)

[24] Freidlin, M.I.: Dirichlet's problem for an equation with periodical coefficients depending on a small parameter. Teor. Veroyatnost. i Primenen. **9**, 133-139 (1964)

[25] Keller, J.B.: A theorem on the conductivity of a composite medium. J. Math. Phys. **5**, 548–549 (1964)

[26] Aftalion, A., Sandier, E., Serfaty, S.: Pinning phenomena in the Ginzburg-Landau model of superconductivity. J. Math. Pures Appl. **80**(3), 339–372 (2001)

було зроблено А. Фрідманом і його співавторами[27,28] , які дослідили біфуркації нерадіальних розв'язків в моделі роста пухлин. Загальну ідею роботи [27] , що полягає в пошуці нетривіальних розв'язків шляхом біфуркаційного аналізу сім'ї радіальних стаціонарних розв'язків, використано і у дисертаційній роботі при дослідженні моделі руху клітин, проте технічна реалізація є зовсім іншою.

В загалом в роботі досліджено декілька актуальних задач математичної фізики, при цьому основні трудноші в аналізі пов'язані з відсутністю (або асимптотичною втратою) компактності задач.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконана у Фізико-технічному інституті низьких температур ім. Б.І.Вєркіна Національна академії наук України. Результати дисертації є складовою частиною держбюджетних науково-дослідних робіт "Прямі та обернені задачі розповсюдження хвиль у мікронеоднорідному середовищі" (номер державної реєстрації 0103U00314), "Побудова усереднених моделей фізичних процесів у мікронеоднорідних середовищах" (номер державної реєстрації 0106U002559), "Дослідження багатофазних течій сумішей рідин і газів у пористих середовищах та вихорових структур у надплинних рідинах" (номер державної реєстрації 0110U007897), "Геометричні та асимптотичні методи в теорії крайових задач математичної фізики" (номер державної реєстрації 0116U005036).

Мета і задачі дослідження. *Метою* роботи є розвинення методів дослідження існування і асимптотичної поведінки задач математичної фізики.

Об'єктом дослідження є варіаційні задачі для функціонала Гінзбурга-Ландау, спектральні задачі для сингулярно збурених операторів, задачі усереднення, та задача з вільною межею, що моделює рух живих клітин на субстраті.

Предметом дослідження є існування/неіснування розв'язків варіаційних задач, асимптотична поведінка розв'язків рівнянь з частинними похідними, існування спеціальних розв'язків задачі з вільною межею.

Завдання дослідження:

- Побудувати теорію варіаційних задач для функціонала Гінзбурга-Ландау (як спрощеного так і повного, що враховує магнітні ефекти) з заданим степенями відображення на межі.
- Розвинути методи дослідження спектральних задач для сингулярно збурених несиметричних операторів.
- Дослідити задачу усереднення для моделі надпровідників з домішками і нелінійну задачу в перфорованих областях з умовою Фур'є на межі дірок.
- Провести біфуркаційний аналіз для задачі з вільною межею, що моделює

[27] Friedman, A., Reitich, F.: Symmetry-breaking bifurcation of analytic solutions to free boundary problems: an application to a model of tumor growth. Trans. Amer. Math. Soc. **353**(4), 1587–1634 (2001)

[28] Friedman, A., Hu, B.: Bifurcation for a free boundary problem modeling tumor growth by Stokes equation. SIAM J Math. Anal. **39**(1), 174–194 (2007)

рух живих клітин на субстраті.

Методи дослідження. У роботі використано варіаційні методи; методи в'язкісних розв'язків; методи факторизації для диференціальних рівнянь з частинними похідними; методи теорії усереднення, такі як, Г-збіжність і двохмасштабна збіжність; методи біфуркаційного аналізу.

Наукова новизна одержаних результатів. В дисертаційній роботі отримано такі нові наукові результати, які виносяться на захист:

- Доведено існування скінченного порогового значення параметра Гінзбурга-Ландау κ, більше якого не існує глобальних мінімізантів спрощеного функціонала Гінзбурга-Ландау з заданими одиничними степенями відображення на компонентах межі двозв'язних областей з ємністю меншою π.
- Доведено існування локальних мінімізантів з нулями (вихорами) функціонала Гінзбурга-Ландау (як спрощеного так і повного, що враховує магнітні ефекти) в двозв'язних областях з заданими степенями відображення на межі. Вивчено асимптотичну поведінку цих локальних мінімізантів у границі Лондонів, показано, що вихорі наближаються до межі і в їх околах концентруються скінченні квантовані енергії.
- Розв'язано питання існування/неіснування (глобальних) мінімізантів повного функціонала Гінзбурга-Ландау з заданими степенями на межі. Встановлено і вивчено сингулярну поведінку мінімізантів в двозв'язних областях при $\kappa \to 1/\sqrt{2} - 0$, доведено існування вихорів коло межі і описано їх граничні положення на межі.
- Досліджено структуру послідовностей Пале-Смейла пов'язаних з варіаційной задачею для спрощеного функціонала Гінзбурга-Ландау з заданими степенями на межі.
- Знайдено усереднену задачу, що описує асимптотичну поведінку першого власного значення і власної функції сингулярно збурених несиметричних еліптичних операторів з осцилюючими локально періодичними коефіцієнтами і умовою Діріхле на межі, доведено теорему про збіжність. Встановлено уточнені асимптотики у випадку, коли молодші члени мають однаковий порядок.
- Встановлено границю першого власного значення задачі Неймана для несиметричних еліптичних операторів з плавно змінними коефіцієнтами і малим множником перед дифузійним членом. Описано асимптотичну поведінку першої власної функції.
- Знайдено одновимірну ефективну задачу, що описує асимптотики основних станів сингулярно збурених несиметричних еліптичних операторів з осцилюючими локально періодичними коефіцієнтами в тонкому циліндрі з умовою

Неймана на бічній поверхні і Фур'є на основах. За структурної умови щодо ефективної задачі знайдено двочленні асимптотичні формули для першого і наступних власних значень.

- Описано поведінку вихоревих структур спричинених зовнішнім магнітним полем в моделі надпровідника з великим числом малих отворів.
- Знайдено новий колективний ефект від неоднорідностей в задачі усереднення монотонних операторів у перфорованих областях з умовою Фур'є на межі дірок.
- Доведено існування розв'язків типу біжних хвиль в задачі з вільною межею, що моделює рух живих клітин на субстраті.

Практичне значення одержаних результатів. Робота має теоретичний характер. Отримані у дисертації результати і розвинуті методи можуть бути використані в подальших дослідженнях задач математичної фізики.

Особистий внесок здобувача. Усі основні результати дисертації одержано автором особисто. Зі спільних праць до дисертації включено лише ті результати, які належать автору.

У роботах [2], [3], [7], [14] співавторам належать постановка задачі і обговорення результатів, всі основні результати належать автору. У роботах [1], [5], [6], [10], [11], [12] співавторам належить участь в постановці задачі і обговорення результатів, всі результати належать автору. У роботі [13] співавторам належать постановка задач і виведення граничної задачі; дисертанту належать глави 4 і 5. У роботах [8], [9] співавторам належать постановка задач, обговорення результатів, доведення технічних результатів і чисельні симуляції; дисертанту належать доведення основних результатів. У роботі [4] співавторам належить ідея застосування квантованості послідовностей Пале-Смейла для доведення існування критичних точок, глави 2, 3, 4 і 9; результати глав 5, 6, 8 було отримано в сумісних дискусіях; глава 7 належить дисертанту. В роботах [16], [17] дисертанту належать схема і основна ідея доведення головних результатів; технічна реалізація доведень була зроблена сумісними зусиллями всіх співавторів. У роботі [15] постановка задачі і формальне виведення усередненої задачі належить співавтору; доведення основних результатів належать дисертанту. У роботах [18], [19] постановка задачі належить співавтору, також йому належить ідея застосування методів в'язкісних розв'язків до сингулярно збурених спектральних задач і доведення деяких технічних результатів; основні результати отримані автором дисертації.

Апробація результатів дисертації. Матеріали дисертації доповідалися на семінарі Відділу математичного моделювання фізичних процесів Фізико-технічний інститут низьких температур ім. Б.І. Вєркіна Національної академії наук України (багаторазово, починаючи з 2006 року), на математичному семінарі університету штату Пенсильванія, США (багаторазово, починаючи з 2006 року), на семінарі UiT - Арктичного університету Норвегії, рінше – університетський коледж Нарвік (багаторазово, починаючи з 2007 року), на семінарі університету Тромсе, Норвегія (2008 рік), семінарі університету Євле, Швеція (2018 рік), семінарі кафедри прикладної математики в Харківському національному університеті ім. В.Н.Каразіна (2019 рік). По матеріалах дисертаційної роботи були зроблені доповіді на Українському математичному конгресі (Київ, 2009 рік), міні-конференції "Pseudogroups and differential equations"(Тромсе, Норвегія, 2013 рік), міжнародних конференціях: "Differential equations and related topics"dedicated to outstanding mathematician I. G. Petrovskii (23-d meeting)(Москва, Росія, 2011 рік), "Spectral Theory and Differential Equations"(STDE-2012, Харків, 2012 рік), SIAM conference on mathematical aspects of matherial sciences (Філаделфія, США, 2013 рік), II International Conference “Analysis and Mathematical Physics” (Харків, 2014 рік), III International Conference “Analysis and Mathematical Physics”, (Харків, 2015 рік).

Публікації. Включені до дисертації результати автора опубліковані у 20 наукових статтях, з них 18 статей в міжнародних журналах, які мають імпакт-фактор і входять до міжнародних наукових баз (Scopus і Web of Science): [1]—-[18]. Ще дві статті, [19], [20], опубліковані у вітчизняному журналі “Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry”, який також має імпакт-фактор і входить до міжнародних наукових баз Scopus і Web of Science. Результати дисертації також викладені в 4 тезах доповідей на міжнародних конференціях: [21]–[24].

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків, списку використаних джерел, який містить 206 найменувань, та супроводжується анотаціями, списком публікацій здобувача за темою дисертації і Додатками A–N. Повний обсяг дисертаційної роботи – 452 сторінки. Обсяг основної частини дисертації – 329 сторінок.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі обгрунтовано актуальність теми дисертації, сформульовані мета та задачі, об'єкт та предмет дослідження, розкрита наукова новизна одержаних результатів.

У *Розділі 1* вивчається варіаційна задача для функціонала Гінзбурга-Ландау (як спрощеного, так и повного) у класі комплекснозначних функцій (параметрів порядку) з одиничним модулем на межі обмеженої гладкої плоської області і заданими степенями відображення на її компонентах. У випадку однозв'язної області Ω відповідні класи мають вигляд

$$\mathcal{J}_p = \{u \in H^1(\Omega;\mathbb{C}) : \ |u| = 1 \text{ на } \partial\Omega, \ \deg(u, \partial\Omega) = p\}, \tag{1}$$

а у випадку двозв'язної області $G = \Omega \setminus \overline{\omega}$, $\overline{\omega} \subset \Omega$, маємо

$$\mathcal{J}_{pq} = \{u \in H^1(G;\mathbb{C}) : \ |u| = 1 \text{ на } \partial G, \ \deg(u, \partial\omega) = p, \deg(u, \partial\Omega) = q\}, \tag{2}$$

де $\deg(u, \partial\Gamma)$ ($\Gamma = \partial\omega$, або $\Gamma = \partial\Omega$) – степінь відображення u на Γ, що є коректно визначеним цілочисельнозначним функціоналом на $H^{1/2}(\Gamma; \mathbb{S}^1)$ неперервним відносно сильної збіжності в $H^{1/2}(\Gamma; \mathbb{S}^1)$. Значення $\deg(u, \partial\Gamma)$ можна задати, наприклад, за допомогою інтегральної формули

$$\deg(u, \Gamma) = \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma u \times \frac{\partial u}{\partial \tau}\, ds, \tag{3}$$

де інтеграл розуміється через дуальність між $H^{1/2}$ і $H^{-1/2}$, $\frac{\partial}{\partial\tau}$ є тангенціальною похідною відносно орієнтації Γ проти годинникової стрілки, $u \times \frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{i}{2}\left(u\frac{\partial \overline{u}}{\partial\tau} - \overline{u}\frac{\partial u}{\partial\tau}\right)$ – векторний добуток u і $\frac{\partial u}{\partial\tau}$. Основна складність в аналізі варіаційних задач в класах $\mathcal{J}_p$ (або $\mathcal{J}_{pq}$) пов'язана з відсутністю неперервності $\deg(u, \partial\Gamma)$ відносно слабкої збіжності в $H^{1/2}(\Gamma; \mathbb{S}^1)$. Це означає, що множини $\mathcal{J}_p$ і $\mathcal{J}_{pq}$ не є замкненими відносно слабкої збіжності в $H^1(G;\mathbb{C})$, і, врешті-решт, веде до некомпактної варіаційної задачі для функціонала Гінзбурга-Ландау. Зокрема відомо, що інфімум спрощеного функціонала Гінзбурга-Ландау

$$E_\kappa[u] = \frac{1}{2}\int_G |\nabla u|^2 dx + \frac{\kappa^2}{4}\int_G (|u|^2 - 1)^2 dx \tag{4}$$

в класі $\mathcal{J}_p$ для однозв'язної області $G = \Omega$ ніколи не досягається для $\kappa > 0$ і $p \neq 0$. Проте в класі $\mathcal{J}_{11}$ (для двозв'язних областей) в роботах Л. Берлянда і Д.Головатого [15] та Л. Берлянда і П. Міронеску [16] було встановлено існування мінімізантів для малих $\kappa > 0$ у випадку довільної області G і для всіх $\kappa > 0$ у випадку коли ємність $\operatorname{cap}(G)$ є не меншою ніж π.

У Підрозділі 1.1 доведено гіпотезу висунуту Л. Берляндом і П. Міронеску про неіснування мінімізантів для $\operatorname{cap}(G) < \pi$:

Теорема 1.1.1. *Нехай* $m_\kappa = \inf\{E_\kappa[u], u \in \mathcal{J}_{11}\}$. *Припустимо, що* $\operatorname{cap}(G) < \pi$, *тоді існує* $0 < \kappa_1 < \infty$ *таке що* m_κ *завжди досягається для* $\kappa < \kappa_1$ *і ніколи не досягається для* $\kappa > \kappa_1$.

У Підрозділі 1.2 встановлюється результат про існування локальних мінімізантів з вихорами функціонала (4) у двозв'язних областях $G = \Omega \setminus \overline{\omega}$, $\overline{\omega} \subset \Omega$. Ці локальні мінімізанти будуються як розв'язки наступної допоміжної задачі мінімізації:

$$m_\kappa(p, q, d) := \inf\{E_\kappa[u];\, u \in \mathcal{J}_{pq}^{(d)}\}, \tag{5}$$

де

$$\mathcal{J}_{pq}^{(d)} = \{u \in \mathcal{J}_{pq}; \Phi(u) \in [d-1/2, d+1/2]\}, \tag{6}$$

p,q і d -задані цілі числа, а функціонал $\Phi(u)$ задається наступним чином. Розглянемо розв'язок V задачі

$$\begin{cases} \Delta V = 0 & \text{в } G \\ V = 1 & \text{на } \partial\Omega \\ V = 0 & \text{на } \partial\omega, \end{cases} \tag{7}$$

і визначимо $\Phi(\,\cdot\,):\ H^1(G;\mathbb{C}) \to \mathbb{R}$ формулою

$$\Phi(u) = \frac{1}{2\pi}\int_G u \times (\partial_{x_1}V\,\partial_{x_2}u - \partial_{x_2}V\,\partial_{x_1}u)\,dx. \tag{8}$$

Зазначимо, що для $\mathbb{S}^1$-значних функцій (з $H^1(G;\mathbb{S}^1)$) $\Phi(u)$ є цілим числом; крім того, функціонал $\Phi(u)$ є неперервним по відношенню до слабкої H^1-збіжності, на відміну від степенів відображення на компонентах межі. Зауважимо, що, взагалі кажучі, $\Phi(u)$ не є цілим числом, проте є близьким до цілого числа на функціях з обмеженою енергією $E_\kappa[u]$ для великих κ. Зокрема, має місце наступний результат.

Твердження 1.2.2. *Зафіксуємо $\Lambda > 0$. Існує $\kappa_0 = \kappa_0(\Lambda) > 0$ таке, що для всіх $\kappa \geq \kappa_0$ і довільного $u \in H^1(G;\mathbb{C})$, що задовольняє $E_\kappa[u] \leq \Lambda$, $\Phi(u)$ не може бути напівцілим. Таким чином наступні умови є еквівалентними*

$$d - 1/2 \leq \Phi(u) \leq d + 1/2 \iff d - 1/2 < \Phi(u) < d + 1/2,\ \forall d \in \mathbb{Z}. \tag{9}$$

Основним результатом про існування розв'язків задачі (5) є

Теорема 1.2.3. *Для будь-яких цілих чисел p, q і $d > 0$ ($d < 0$) з $d \geq \max\{p,q\}$ ($d \leq \min\{p,q\}$) існує $\kappa_1 = \kappa_1(p,q,d) > 0$ таке, що інфімум в (5) завжди досягається, для $\kappa > \kappa_1$. Більш того*

$$m_\kappa(p,q,d) \leq I_0(d,G) + \pi(|d-p| + |d-q|), \tag{10}$$

де

$$I_0(d,G) = \min\left\{\frac{1}{2}\int_G |\nabla u|^2 dx,\ u \in H^1(G;\mathbb{S}^1) \cap \mathcal{J}_{dd}\right\}. \tag{11}$$

Число $I_0(d,G)$ визначається формулою $I_0(d,G) = 2(\pi d)^2/\mathrm{cap}(G)$ через H^1-ємність $\mathrm{cap}(G)$ області G.

З огляду на Твердження 1.2.2, для достатньо великих κ розв'язки задачі (5) є локальними мінімізантами функціонала $E_\kappa[u]$ в $\mathcal{J}_{pq}$. У границі $\kappa \to \infty$ нерівність (10) перетворюється на рівність, при цьому самі локальні мінімізанти збігаються слабко в $H^1(G;\mathbb{C})$ до розв'язків задачі (11). У випадку коли або $p \neq d$, або (та) $q \neq d$ локальні мінімізанти мають нулі (вихорі) розташовані біля межі області G і другий доданок в правій частині (10) описує їх квантовані енергії.

У Підрозділі 1.3 вивчається задача мінімізації повного функціонала Гінзбурга-Ландау (що враховує магнітні ефекти)

$$F_\kappa[u,A] = \frac{1}{2}\int_G |\nabla u - iAu|^2 dx + \frac{1}{2}\int_\Omega |\mathrm{curl} A|^2 dx + \frac{\kappa^2}{4}\int_G (|u|^2-1)^2 dx \qquad (12)$$

відносно $(u,A) \in \mathcal{J}_p \times H^1(\Omega;\mathbb{R}^2)$ для однозв'язної області $G = \Omega$, де A – потенціал магнітного поля $\mathrm{curl} A = \frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2}$. Доведено, що на відміну від спрощеного функціонала Гінзбурга-Ландау мінімізанти завжди існують для $\kappa < 1/\sqrt{2}$:

Теорема 1.3.1. *(i) Інфімум*

$$m_p(\kappa) := \inf\{F_\kappa[u,A]; (u,A) \in \mathcal{J}_p \times H^1(\Omega;\mathbb{R}^2)\}. \qquad (13)$$

завжди досягається для $0 < \kappa < 1/\sqrt{2}$, тобто довільна мінімізуюча послідовність збігається (з точністю до підпослідовності) до глобального мінімізанта (13).
(ii) Якщо $\kappa > 1/\sqrt{2}$ тоді інфімум $m_p(\kappa)$ ніколи не досягається окрім трівіального випадку $p = 0$ (у останнюю випадку мінімізантами є $u \equiv \mathrm{Const} \in \mathbb{S}^1$, $A \equiv 0$).

Вивчено також асимптотичну поведінку мінімізантів при $\kappa \to 1/\sqrt{2} - 0$. Зазначимо, що для критичного значення $\kappa = 1/\sqrt{2}$ (інтегрований випадок) мінімізанти було описано у роботі А. Буте де Монвель, В. Георгеску і Р. Пуріс [29], вони формують $2|p|$-параметричну сім'ю яку можна запараметризувати приписуючи положення вихорів в Ω.

У Підрозділі 1.3 вивчається сингулярна поведінка мінімізантів функціонала (12) з заданими степенями відображення на компонентах межі. Розглядається модельна задача мінімізації функціонала (12) з заданими нульовим і одиничним степенями параметра порядку на внутрішній $\partial\omega$ і зовнішній $\partial\Omega$ компонентах межі двозвязної області $G = \Omega \backslash \overline{\omega}$, де Ω, ω – гладкі обмежені однозв'язні області і $\overline{\omega} \subset \Omega$.

Теорема 1.4.1. *Мінімізанти функціонала* (12) *в* $J_{01} \times H^1(G;\mathbb{R}^2)$ *завжди існують для $0 < \kappa < 1/\sqrt{2}$ і ніколи не існують якщо $\kappa \geq 1/\sqrt{2}$. Нехай $0 < \kappa < 1/\sqrt{2}$ і нехай (u^κ, A^κ) – мінімізант, тоді, при $\kappa \to 1/\sqrt{2} - 0$,*

[29]Boutet de Monvel-Berthier, A., Georgescu, V., Purice, R.: A boundary value problem related to the Ginzburg-Landau model. Comm. Math. Phys. **142**, 1–23 (1991)

(i) u^κ *має точно один нуль (вихор)* ξ^κ*;*

(ii) з точністю до виділення підпослідовності, $\xi^\kappa \to \xi^* \in \partial\Omega$ *коли* $\kappa \to 1/\sqrt{2}-0$ *і* ξ^* *максимізує* $|\partial V_0/\partial \nu|$ *на* $\partial\Omega$*, де* $\partial V_0/\partial\nu$ *– нормальна похідна функції* V*, яка є розв'язком (скалярної) задачі*

$$\begin{cases} \Delta V_0 = V_0 \text{ в } G \\ V_0 = 0 \text{ на } \partial\Omega, \text{ і } V_0 = 1 \text{ на } \partial\omega; \end{cases} \tag{14}$$

(iii) тангенціальна компонента вектора струму $j^\kappa = u^\kappa \times (\nabla u^\kappa - iA^\kappa u^\kappa)$ *на* $\partial\Omega$ *збігається до* $2\pi\delta_{\xi^*}$ *в* $\mathcal{D}'(\partial\Omega)$*, де* δ_{ξ^*} *– дельта-функція Дірака з центром в* ξ^**.*

Пілрозділ 1.5 присвячено розповсюдженню результатів Підрозділу 1.2 на випадок повного функціонала Гінзбурга-Ландау. Введено аналог функціонала (8), інваріантний відносно калібровочних перетворень $u \mapsto e^{i\phi}u$, $A \mapsto A + \nabla\phi$ (де $\phi \in H^2(\Omega)$):

$$\tilde{\Phi}(u,A) = -\frac{1}{2\pi}\int_G \Big(u \times \Big(\big(\frac{\partial u}{\partial x_2} - iA_2 u\big)\frac{\partial V_0}{\partial x_1} - \big(\frac{\partial u}{\partial x_1} - iA_1 u\big)\frac{\partial V_0}{\partial x_2}\Big) + A\cdot\nabla^\perp V_0\Big)\,dx, \tag{15}$$

де $\nabla^\perp V_0 = (-\partial_{x_2}V_0, \partial_{x_1}V_0)$ і V_0 – єдиний розв'язок крайової задачі (14). Для побудови локальних мінімізантів повного функціонала Гінзбурга-Ландау замість задачі мінімізації (5) розглядається наступна

$$\tilde{m}_\kappa(p,q,d) := \inf\{F_\kappa[u,A];\ (u,A) \in \mathcal{J}_{pq} \times H^1(\Omega;\mathbb{R}^2),\ \tilde{\Phi}(u,A) \in [d-1/2, d+1/2]\} \tag{16}$$

для заданих $p, q, d \in \mathbb{Z}$.

Теорема 1.5.2. *Для довільних цілих* p*,* q *та* $d > 0$ *(*$d < 0$*) з* $d \geq \max\{p,q\}$ *(*$d \leq \min\{p,q\}$*) існує* $\tilde{\kappa}_1 = \tilde{\kappa}_1(p,q,d) > 0$*, таке що інфімум в (16) завжди досягається коли* $\kappa \geq \tilde{\kappa}_1$ *і кожний мінімізант (16) є локальним мінімізантом* $F_\kappa[u,A]$ *в* $\mathcal{J}_{pq} \times H^1(\Omega;\mathbb{R}^2)$*.*

У Підрозділі 1.6 вивчається питання існування критичних точок типу перевала для спрощеного функціонала Гінзбурга-Ландау (4) в довільній обмеженій однозв'язній гладкій області $G = \Omega$, з заданим степенем відображення на межі. Кожна критична точка є розв'язком рівняння Гінзбурга-Ландау

$$-\Delta u + \kappa^2(|u|^2 - 1)u = 0 \text{ в } \Omega \tag{17}$$

з крайовими умовами

$$|u| = 1,\ \frac{\partial u}{\partial \nu} \times u = 0 \quad \text{на } \partial\Omega. \tag{18}$$

Теорема 1.6.1. *Нехай Ω – довільна обмежена гладка однозв'язна область в $\mathbb{R}^2$. Для достатньо малих $\kappa > 0$ існують розв'язки задачі (17)-(18), що мають одиничний степінь відображення на межі.*

Для конструювання критичних точок зручно перейти від області Ω загального вигляду до одиничного диску $\mathbb{D}$ за допомогою конформного відображення $\mathcal{F} : \Omega \to \mathbb{D}$, при цьому функціонал (4) перетворюється на

$$\mathcal{E}_\beta[u] = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{D}} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{4}\int_{\mathbb{D}} \beta(x)(1 - |u|^2)^2 dx, \tag{19}$$

де $\beta = \kappa^2 \mathrm{Jac}\, \mathcal{F}^{-1}$. На першому кроці доведення Теореми 1.6.1 в варіаційній задачі занаходиться геометрія типу (гірського) перевала, що дозволяє сконструювати послідовності Пале-Смейла (майже критичних точок) за допомогою класичного результата А. Амброзетті і П. Рабіновича[30] . Для задачі, що розглядається, послідовністю Пале-Смейла називаємо послідовність функцій $u_n \in H^1(\mathbb{D}; \mathbb{C})$, що задовольняє таким умовам: $u_n \in \cup_{p\in\mathbb{Z}} \mathcal{J}_p$, $\mathcal{E}_\beta[u_n] \to c^*$ при $n \to \infty$, і

$$\left| \int_\Omega \left(\nabla u_n \cdot \nabla v + \beta(x)(|u_n|^2 - 1) u_n \cdot v \right) dx \right| \leq \varepsilon_n \|v\|_{H^1}, \quad \forall\, v \in H^1_0(\mathbb{D}; \mathbb{C}),$$

$$\left| \int_\Omega (u_n \times \nabla u_n) \cdot \nabla \zeta dx \right| \leq \delta_n \|\nabla \zeta\|_{L^2},\ \forall\, \zeta \in H^1(\Omega)$$

з ε_n, $\delta_n \to 0$ при $n \to \infty$. На другому кроці, контролюючи c^*, встановлюється результат про існування критичних точок, що спирається на наступну теорему про структуру послідовностей Пале-Смейла. Ця теорема має самостійний інтерес.

Теорема 1.6.53. *Нехай $\{u_n\}$ – послідовність Пале-Смейла для функціонала (19) в $\cup_{p\in\mathbb{Z}} \mathcal{J}_p$. Тоді, з точністю до підпослідовності, існують: критична точка u функціонала $\mathcal{E}_\beta$ в $\cup_{p\in\mathbb{Z}} \mathcal{J}_p$, ціле число $K \geq 0$, точки $a_1(n), \dots, a_K(n) \in \mathbb{D}$, функції $\mathcal{B}_{a_j(n)}$, $j \in \{1, \dots K\}$, де $\mathcal{B}_a = \frac{z-a}{z\bar{a}-1}$ або $\mathcal{B}_a = \frac{\bar{z}-\bar{a}}{\bar{z}a-1}$, і стала $\gamma \in \mathbb{S}^1$, такі що*

$$|a_j(n)| \to 1 \text{ при } n \to \infty,\ \forall j \in \{1, \dots K\}; \tag{20}$$

$$u_n - \gamma u \prod_{j=1}^{K} \mathcal{B}_{a_j(n)} \to 0 \ \text{ сильно в } H^1(\mathbb{D}; \mathbb{C}) \text{ при } n \to \infty; \tag{21}$$

$$\mathcal{E}_\beta(u_n) = \mathcal{E}_\beta(u) + K\pi + c_n, \quad \text{з } c_n \to 0 \text{ при } n \to \infty. \tag{22}$$

Зокрема, $c^* = \mathcal{E}_\beta(u) + K\pi$.

[30]Ambrosetti, A., Rabinowitz, P.H.: Dual variational methods in critical point theory and applications. J. Funct. Anal. **14**, 349–381 (1973)

У *Розділі 2* досліджуються сингулярно збурені спектральні задачі для несиметричних еліптичних операторів. Більша частина результатів стосується асимптотичної поведінки основних станів, тобто перших власних значень і відповідних власних функцій. Згідно з Теоремою Крейна-Рутмана перше власне значення λ_ε має кратність 1 і є дійсним числом, а відповідна власна функція зберігає знак, тому її можна представити у вигляді $u_\varepsilon = e^{-W_\varepsilon/\varepsilon}$ (ВКБ-анзац), де $\varepsilon > 0$ – малий параметр задачі. Підстановкою такого представлення задача зводиться до крайової задачі для сингулярно збуреного рівняння Гамільтона-Якобі. Для дослідження останньої задачі розвинуто асимптотичні методи, що базуються на принципі максимуму і понятті *в'язкісних розв'язків*.

У Підрозділі 2.1 вивчено задачу Діріхле для сингулярно збуреного несиметричного оператора з локально періодичними коефіцієнтами

$$\mathcal{L}_\varepsilon u = \varepsilon^2 a^{ij}(x, x/\varepsilon^\alpha)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \varepsilon b^j(x, x/\varepsilon^\alpha)\frac{\partial u}{\partial x_j} + c(x, x/\varepsilon^\alpha)u \tag{23}$$

в обмеженій області $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, де $\alpha > 0$ є фіксованим параметром (ε^α описує період мікроструктури). Користуючись представленням $u_\varepsilon(x) = e^{-W_\varepsilon(x)/\varepsilon}$ для першої власної функції u_ε рівняння для неї зведено до

$$-\varepsilon a^{ij}(x, x/\varepsilon^\alpha)\frac{\partial^2 W_\varepsilon}{\partial x_i \partial x_j} + H(\nabla W_\varepsilon, x, x/\varepsilon^\alpha) = \lambda_\varepsilon, \tag{24}$$

де $H(p, x, y) = a^{ij}(x, y)p_i p_j - b^j(x, y)p_j + c(x, y)$, з крайовою умовою $W_\varepsilon = +\infty$ на $\partial\Omega$. За допомогою методу збурених тестових функцій зроблено граничний перехід в (24) при $\varepsilon \to 0$, в результаті одержано адитивну задачу на власні значення:

$$\overline{H}(\nabla W(x), x) = \lambda \qquad \text{в } \Omega, \quad \overline{H}(\nabla W(x), x) \geq \lambda \qquad \text{на } \partial\Omega \tag{25}$$

з ефективним гамільтоніаном $\overline{H}(p, x)$ який визначається через розв'язки деяких коміркових задач (різного типу для $\alpha > 1$, $\alpha = 1$ або $0 < \alpha < 1$, наприклад, для $\alpha = 1$ гамільтоніан $\overline{H}(p, x)$ є першим власним значенням рівняння $a^{ij}(x, y)\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y_i \partial y_j} + (b^j(x, y) - 2a^{ij}(x, y)p_i)\frac{\partial \vartheta}{\partial y_j} + H(p, x, y)\vartheta = \overline{H}(p, x)\vartheta$ з періодичними крайовими умовами). Як рівняння так і крайова умова в (25) розуміються у в'язкісному сенсі: функція $W \in C(\overline{\Omega})$ називається *в'язкісним розв'язком* задачі (25) якщо (i) для довільної точки $x \in \Omega$ і довільної функції φ класу C^∞ , такої що $W - \varphi$ має максимум (мінімум) в x виконується нерівність $\overline{H}(\nabla\varphi(x), x) \leq \lambda$ ($\overline{H}(\nabla\varphi(x), x) \geq \lambda$), (ii) для довільної точки $x \in \partial\Omega$ і довільної функції φ класу C^∞, такої що мінімум $W - \varphi$ по $\overline{\Omega}$ досягається в точці x, виконується нерівність $\overline{H}(\nabla\varphi(x), x) \geq \lambda$.

Теорема 2.1.1. *Перші власні значення λ_ε рівняння* (23) *з умовою Діріхле на межі збігаються при $\varepsilon \to 0$ до границі λ, що є єдиним дійсним числом* *для якого задача (25) має неперервний в'язкісний розв'язок. Функції $W_\varepsilon(x)$, нормалізовані рівністю $\min W_\varepsilon = 0$, збігаються (з точністю до підпослідовності) до границі $W(x)$ рівномірно на компактах в Ω і кожна гранична функція $W(x)$, продовжена за неперервністю на $\overline{\Omega}$, є в'язкісним розв'язком задачі (25).*

Ефективна задача (25) має рівно одне власне значення $\lambda = \lambda_{\overline{H}}$ (для якого вона має неперервний в'язкісний розв'язок), проте може мати багато (континуум) власних функцій (нормованих рівністю $\min W = 0$). Це мотивує два пов'язаних між собою питанння про уточнення асимптотик для власних значень і селекцію розв'язку $W(x)$ ефективної задачі, що відповідає границі функцій $W_\varepsilon(x)$. Ці питання розглянуто у випадку, коли молодші члени оператора мають однаковий порядок і $\alpha = 1$, так що після перепозначень задача набуває вигляд

$$\varepsilon a^{ij}(x, x/\varepsilon)\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x_i \partial x_j} + b^j(x, x/\varepsilon)\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j} + c(x, x/\varepsilon)u_\varepsilon = \lambda_\varepsilon u_\varepsilon \tag{26}$$

Існування і єдиність/неєдиність розв'язків ефективної задачі (25) визначається структурою так званої *множини Обрі*, яка відіграє роль прихованої межі. Зокрема, для того щоб перше власне значення λ_ε задачі (26) було обмеженим необхідно щоб множина Обрі $\mathcal{A}_{\overline{H}}$,

$$\xi \in \mathcal{A}_{\overline{H}} \Longleftrightarrow \sup_{\delta>0} \inf\Big\{\int_0^t \overline{L}(\dot\eta, \eta)d\tau\,;\, \eta(\tau) \in \overline{\Omega},\, \eta(0) = \eta(t) = \xi, t > \delta\Big\} = 0 \tag{27}$$

(де $\overline{L}(v, \eta)$ – ефективний лагранжіан), була непустою. Можна показати, що для рівняння (26) ефективний лагранжіан є еквівалентним квадратичному $\sum(v_j + \overline{b}^j(\eta))^2$ $(c_1 \sum(v_j + \overline{b}^j(\eta))^2 \le \overline{L}(v, \eta) \le c_2 \sum(v_j + \overline{b}^j(\eta))^2,\ c_1, c_2 > 0)$, де $\overline{b}_j$ – компоненти вектора ефективного знесення, які визначаються рівностями $\overline{b}^j(\eta) := \int_Y b^j(\eta, y)\theta^*(\eta, y)dy$ через Y-періодичні розв'язки θ^* рівняння $\frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j}\Big(a^{ij}(\eta, y)\theta^*\Big) - \frac{\partial}{\partial y_j}\Big(b^j(\eta, y)\theta^*\Big) = 0$ з нормалізованими середніми значеннями $\int_Y \theta^* dy = 1$ $(Y = (0, 1)^N$ – комірка періодичності). Тоді умова $\mathcal{A}_{\overline{H}} \ne \emptyset$ еквівалентна існуванню повної траєкторії $\eta(t) \in \overline{\Omega}$, $-\infty < t < +\infty$, рівняння $\dot\eta = -\overline{b}(\eta)$, а типовим випадком структури $\mathcal{A}_{\overline{H}}$ є скінченне число гіперболічних нерухомих точок і граничних циклів цього рівняння.

Теорема 2.1.20. *Нехай множина Обрі $\mathcal{A}_{\overline{H}}$ ефективного гамільтоніана для рівняння (26) складається зі скінченного числа гіперболічних нерухомих точок і граничних циклів рівняння $\dot\eta = -\overline{b}(\eta)$, які цілком належать Ω, тоді (i) перше власне значення задачі Діріхле для (26) має границю*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \lambda_\varepsilon = \max\Big\{\sigma_1(\xi) + \sigma_2(\xi); \xi \in \mathcal{A}_{\overline{H}}\Big\}, \tag{28}$$

де $\sigma_1(\xi)$ *є або сумою від'ємних дійсних частин власних значень матриці* $\left(-\frac{\partial \bar{b}^i}{\partial x_j}(\xi)\right)_{i,j=\overline{1,N}}$ *якщо* ξ *є нерухомою точкою, або* $\sigma_1(\xi) = \frac{1}{P}\sum_{|\Lambda_k(\xi)|<1} \log|\Lambda_k(\xi)|$ *якщо* ξ *лежить на граничному циклі, де* $P = P(\xi) > 0$ *– період циклу, і* $\Lambda_k(\xi)$ *– власні значення лінеаризованого відображення Пуанкаре; в (28) доданок* $\sigma_2(\xi)$ *визначається формулою* $\sigma_2(\xi) = \int_Y c(\xi,y)\theta^*(\xi,y)dy$ *якщо* ξ *є фіксованою точкою, або* $\sigma_2(\xi) = \frac{1}{P}\int_0^P\int_Y c\big(\eta(t),y\big)\theta^*\big(\eta(t),y\big)dydt \quad (\dot\eta = -\bar{b}(\eta),\ \eta(0) = \xi)$, *якщо* ξ *лежить на граничному циклі. (ii) Якщо максимум в (28) досягається на точно одній зв'язній компоненті множини Обрі (нерухомій точці або граничному циклі), тоді функції* $W_\varepsilon(x) = -\varepsilon\log u_\varepsilon(x)$ *збігаються рівномірно на компактах в* Ω *до максимального в'язкісного розв'язку задачі* $\overline{H}(\nabla W(x),x) = 0$ *в* Ω, $\overline{H}(\nabla W(x),x) \geq 0$ *на* $\partial\Omega$, *що дорівнює нулю на згаданій компоненті множини Обрі.*

Також детально вивчено поведінку власних функцій u_ε на масштабі $\sqrt{\varepsilon}$ в околі компоненти множини Обрі де відбувається концентрація u_ε. Зазначимо, що у випадку коли коефіцієнти рівняння (26) не є швидко осцилюючими функціями і молодший член дорівнює нулю, результат аналогічний твердженню (i) Теореми 2.1.20 було отримано Ю.Кіфером [19] за допомогою ймовірнісної техніки, без описання поведінки власних функцій.

У Підрозділі 2.2 досліджується асимптотична поведінка основних станів сингулярно збуреної спектральної задачі для рівняння

$$\varepsilon a^{ij}(x)\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x_i \partial x_j} + b^j(x)\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j} + c(x)u_\varepsilon = \lambda_\varepsilon u_\varepsilon \tag{29}$$

в гладкій обмеженій області $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ з умовою Неймана

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu} = 0 \text{ на } \partial\Omega. \tag{30}$$

Зазначимо, що для цієї задачі перше власне значення завжди є обмеженим, а функції $W_\varepsilon = -\varepsilon\log u_\varepsilon$ рівномірно збігаються, з точністю до підпослідовності, до в'язкісного розв'язку задачі

$$\begin{cases} H(\nabla W(x),x) = 0 & \text{в } \Omega, \\ \frac{\partial W}{\partial \nu} = 0 & \text{на } \partial\Omega, \end{cases} \tag{31}$$

де $H(p,x) = a^{ij}(x)p_ip_j - b^i(x)p_i$. Гамільтоніан $H(p,x)$ не залежить від коефіцієнту $c(x)$ при молодшому члені в рівнянні, більш того, у випадку, коли цей коефіцієнт є сталим основні стани λ_ε і u_ε (тривіально) знаходиться явно. Проте асимптотична поведінка основних станів є достатньо нетривіальною коли $c(x)$ не є сталою функцією, зокрема, власна функція може демонструвати експоненціальну локалізацію.

Множина Обрі $\mathcal{A}_{\overline{H}}$ задачі (31) визначається наступним чином:

$$\xi \in \mathcal{A}_H \Longleftrightarrow \forall\delta > 0 \quad \inf\Big\{ \int_0^t L(-v(s), \eta(s))\, ds,\ \eta(0) = \eta(t) = \xi,\ t > \delta \Big\} = 0, \tag{32}$$

де $L(v, \eta) = \sup_{p\in\mathbb{R}^N}(v \cdot p - H(p, \eta))$, $\eta(t)$ є розв'язком задачі Скорохода:

$$\begin{cases} \eta(t) \in \overline{\Omega}, t \geq 0 \\ \dot{\eta}(t) + \alpha(t)\nu(\eta(t)) = v(t) \qquad \text{з } \alpha(t) \geq 0 \ \text{ і } \alpha(t) = 0 \text{ коли } \eta(t) \notin \partial\Omega. \end{cases} \tag{33}$$

Асимптотичну поведінку першого власного значення і власної функції задачі (29)–(30) вивчено в припущенні, що $\mathcal{A}_{\overline{H}}$ має наступну структуру:
$\mathcal{A}_H$ складається зі скінченного числа зв'язних компонент $\mathcal{A}_k$ і кожна з них є або ізольованою точкою або замкненою кривою, що лежить повністю або в Ω або на $\partial\Omega$. Крім того, якщо $\mathcal{A}_k \subset \Omega$, тоді $\mathcal{A}_k$ є або гіперболічною нерухомою точкою або гіперболічним циклом рівняння $\dot{\eta} = b(\eta)$; якщо $\mathcal{A}_k \subset \partial\Omega$, тоді нормальна компонента $b_\nu(x)$ поля $b(x)$ є строго додатною на $\mathcal{A}_k$ і $\mathcal{A}_k$ є або гіперболічною нерухомою точкою або гіперболічним граничним циклом рівняння $\dot{\eta} = b_\tau(\eta)$ на $\partial\Omega$, де $b_\tau(x)$ позначає тангенціальну компоненту $b(x)$ на $\partial\Omega$.

Теорема 2.2.1. *Нехай множина Обрі $\mathcal{A}_{\overline{H}}$ задачі (31) має описану вище структуру. Тоді перші власні значення λ_ε задачі (29)–(30) збігаються при $\varepsilon \to 0$ до*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \lambda_\varepsilon = \max\Big\{ \sigma_1(\xi) + \sigma_2(\xi); \xi \in \mathcal{A}_H \Big\}, \tag{34}$$

де $\sigma_1(\xi)$ визначається за допомогою лінеаризації рівняння $\dot{\eta} = -b(\eta)$ або $\dot{\eta} = -b_\tau(\eta)$ (у випадку компоненти на $\partial\Omega$) аналогічно Теоремі 2.1.20, $\sigma_2(\xi) = c(\xi)$ у випадку нерухомої точки і $\sigma_2(\xi) = \frac{1}{P}\int_0^P c(\eta(\tau))d\tau$ у випадку граничного циклу. Крім того, якщо максимум в (34) досягається точно на одній компоненті $\mathcal{M}$, тоді функції $W_\varepsilon(x)$, нормалізовані рівністю $\min W_\varepsilon = 0$, збігаються рівномірно в $\overline{\Omega}$ до максимального в'язкісного розв'язку W задачі (31), який дорівнює нулю на $\mathcal{M}$.

У Підрозділі 2.3 досліджуються спектральна задача для сингулярно збурених еліптичних операторів другого порядку визначених в тонкому циліндрі з крайовою умовою Неймана на бічній поверхні і Фур'є на основах. Вивчається випадок коли основи породжують примежовий шар, який впливає на поведінку розвязків в цілому і тому потребує детального вивчення.

У циліндрі $(0, L) \times \varepsilon\omega$, де задані $L > 0$, гладка обмежена область $\omega \in \mathbb{R}^{N-1}$, і малий параметр $\varepsilon > 0$, розглядається еліптичний оператор $\mathcal{L}_\varepsilon$ вигляду

$$\tilde{\mathcal{L}}_\varepsilon u = \varepsilon^2 a^{ij}(x_1, x/\varepsilon)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \varepsilon b^j(x_1, x/\varepsilon)\frac{\partial u}{\partial x_j} + c(x_1, x/\varepsilon)u. \tag{35}$$

Коефіцієнти a^{ij}, b^j і c – швидко осцилюючі локально періодичні функції: вони залежать від x_1 (повільна змінна) і $y = x/\varepsilon$ (швидка змінна), за змінною y_1 вони є 1-періодичними. На бічній поверхні циліндра накладається однорідна умова Неймана,

$$\frac{\partial u}{\partial \nu_a} = 0 \quad \text{на } (0, L) \times \varepsilon\partial\omega, \tag{36}$$

де $\frac{\partial u}{\partial \nu_a} = a^{ij}(x_1, x/\varepsilon)\frac{\partial u}{\partial x_j}\nu_i$ – похідна по конормалі. На основах розглядається умова Фур'є

$$\varepsilon\frac{\partial u}{\partial \nu_a} + g_\pm(x'/\varepsilon)u = 0, \qquad \text{коли } x = (x_1, x'/\varepsilon) \in \left\{\frac{L \pm L}{2}\right\} \times \omega. \tag{37}$$

Для простотити припускається, що інтервал $(0, L)$ містить ціле число періодів, $\varepsilon = L/n$.

Асимптотичну поведінку першого власного значення і першої власної функції описує наступний результат:

Теорема 2.3.3. *Перші власні значення операторів* (35) *з крайовими умовами* (36)–(37) *збігаються при $\varepsilon \to 0$ до $\overline{\lambda} = \max\left\{\overline{h}_\pm, \max_{x_1\in[0,L]} \min_{p_1} \overline{H}(x_1, p_1)\right\}$, де ефективний гамільтоніан $\overline{H}(x_1, p_1)$ є першим власним значенням рівняння $a^{ij}(x_1, y)\frac{\partial^2\theta}{\partial y_i \partial y_j} + (b^j(x_1, y) - 2a_{1j}(x_1, y)p_1)\frac{\partial\theta}{\partial y_j} + (a^{11}(x_1, y)p_1^2 - b^1(x_1, y)p_1)\theta = \overline{H}(x_1, p_1)\theta$ в $\mathbb{R} \times \omega$ з умовою 1-періодичності відносно y_1 і крайовою умовою $\frac{\partial\theta}{\partial\nu_a} - \nu_i a^{i1} p_1\theta = 0$ на $\mathbb{R} \times \partial\omega$; числа $\overline{h}_\pm$ визначено нижче. Масштабовані логарифмічні перетворення $W_\varepsilon = -\varepsilon \log u_\varepsilon$ перших власних функцій u_ε (нормалізованих рівністю $\max u_\varepsilon = 1$) збігаються рівномірно (з точністю до підпослідовності) до в'язкісного розв'язку $W(x_1)$ задачі $\overline{H}(x_1, W'(x_1)) = \overline{\lambda}$ на $(0, L)$, $\overline{g}^*_\pm(\overline{H}(x_1, W'(x_1))) = 0$ і $\pm\frac{\partial\overline{H}}{\partial p_1}(x_1, W'(x_1)) \le 0$ в $x_1 = (L \pm L)/2)$, де функції $\overline{g}^*_\pm(h)$ визначено нижче.*

Для побудови функцій примежового шару в околі $\{0\} \times \omega$ вивчаються рівняння в напівобмеженому циліндрі

$$a^{ij}\frac{\partial^2 v}{\partial y_i \partial y_j} + \left(b_j + 2a^{ij}\frac{\partial \log\theta}{\partial y_i} - 2a^{1j}p_1\right)\frac{\partial v}{\partial y_j} = 0 \quad \text{в } (0, +\infty) \times \omega, \tag{38}$$

де зафіксовано $x_1 = 0$, з крайовими умовами

$$\frac{\partial v}{\partial \nu_a} = 0 \quad \text{на } (0, +\infty) \times \partial\omega \tag{39}$$

і

$$\frac{\partial v}{\partial \nu_a} + \left(g_-(y') + a^{11}p_1 + \frac{\partial \log\theta}{\partial \nu_a}\right)v = \overline{g}_-(p_1)v \quad \text{на } \{0\} \times \omega. \tag{40}$$

Невідомими у задачі (38)–(40) є число $\overline{g}_-(p_1)$ і функція v.

Теорема 2.3.1. *Існує строго зростаюча неперервна функція* $\overline{g}^*_-(h)$ *на* $[\min_{p_1}\overline{H}(0,p_1),+\infty)$ *(що зростає при* $h\to+\infty$ *не повільніше ніж лінійна функція), така що задача* (38)-(40) *має обмежений додатній розв'язок який збігається до додатної сталої при* $y_1\to+\infty$ *тоді і тільки тоді коли викунуються одна з натупних двох умов: (i)* $\frac{\partial\overline{H}}{\partial p_1}(0,p_1)\geq 0$ *і* $\overline{g}_-(p_1)=\overline{g}^*_-(\overline{H}(0,p_1))$*, або (ii)* $\frac{\partial\overline{H}}{\partial p_1}(0,p_1)<0$ *і* $\overline{g}_-(p_1)<\overline{g}^*_-(\overline{H}(0,p_1))$.

Аналогичний результат є справедливим для $x_1=L$ з деякою функцією $\overline{g}^*_+(h)$. За допомогою $\overline{g}^*_\pm(h)$ число $\overline{h}_\pm$ з Теореми 2.3.2 визначається як єдиний розв'язок рівняння $\overline{g}^*_\pm(\overline{h}_\pm)=0$ якщо він існує і $\overline{h}_\pm=-\infty$ в противному випадку.

У Підрозділі 2.3 побудовано також двочленні асимптотичні формули для першого і наступних власних значень за структурного припущення щодо ефективної задачі:

Теорема 2.3.11. *Припустимо, що максимум в*

$$\overline{\lambda}=\max\left\{\overline{h}_\pm,\max_{x_1\in[0,L]}\min_{p_1}\overline{H}(x_1,p_1)\right\}$$

досягається у внутрішній точці $\xi\in(0,L)$ *і* $-V:=\frac{d^2}{dx_1^2}\left(\min_{p_1}\overline{H}(x_1,p_1)\right)<0$ *в* $x_1=\xi$. *Тоді для власних значень* $\lambda=\lambda^{(k)}_\varepsilon$ *оператора* (35)–(37)*, занумерованих за величиною дійсних частин (у спадаючому порядку), справедливі асимптотичні формули*

$$\lambda^{(k)}_\varepsilon=\overline{\lambda}-\varepsilon\hat{\mu}^{(k)}+o(\varepsilon),$$

де $\hat{\mu}^{(k)}$ *– власні значення оператора* $-q\frac{d^2}{dz_1^2}+\frac{1}{2}Vz_1^2+m$ *на* $\mathbb{R}$, $\hat{\mu}^{(k)}=m+\sqrt{2qV}(k-1/2)$, $k=1,2,\dots,$ *а числа* $q>0$ *і* m *визначаються через розв'язки коміркових задач.*

Розділ 3 присвячений дослідженню двох задач усереднення.

У Підрозділі 3.1 досліджується двовимірна модель надпровідника з великим числом мілких отворів (дірок) в присутності зовнішнього магнітного поля. Область Ω_ε, яку займає надпровідник, задається перфорацією фіксованої однозв'язної обмеженої області $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ великим числом N_ε мілких дірок ω^ε_j з центрами у вершинах прямокутної ε-періодичної гратки. Припускаться, що зовнішнє магнітне поле є слабим для того щоб вихорі з'явилися в тілі зразка і вони можуть існувати тільки на дірках. За таких умов стаціонарні стани надпровідників другого роду (з великими значеннями параметра Гінзбурга-Ландау) можна описати задачею мінімізації

$$M_\varepsilon=\inf\{F_\varepsilon(u,A);\ u\in H^1(\Omega_\varepsilon;\mathbb{S}^1),\ A\in H^1(\Omega;\ \mathbb{R}^2)\}\tag{41}$$

для функціонала

$$F_\varepsilon(u,A)=\frac{1}{2}\int_{\Omega_\varepsilon}|\nabla u-iAu|^2dx+\frac{1}{2}\int_{\Omega}(\mathrm{curl}A-h^\varepsilon_{ext})^2dx, \tag{42}$$

де h^ε_{ext} – зовнішнє магнітне поле. Нехай d^ε_j – (цілі) степені відображення мінімізанта u^ε на $\partial\omega^\varepsilon_j$. Вивчаються слабкі границі узагальнених функцій $D(x)=w-\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^2\sum d^\varepsilon_j\delta_{a^\varepsilon_j}(x)$ при $\varepsilon\to 0$, які дають усереднене описання розподілів вихорів. Розглянуто спеціальні масштабні співвідношення між періодом, розміром дірок і величиною зовнішнього магнітного поля, що ведуть до нетрівіальних розподілів з кратними вихорами у вкладених областях.

Теорема 3.1.9. *Нехай* $\mathrm{diam}(\omega^\varepsilon_j)=e^{-\gamma/\varepsilon^2}$ *і* $h^\varepsilon_{ext}=\sigma/\varepsilon^2$, *тоді розподіли* $D_\varepsilon(x)=\varepsilon^2\sum d^\varepsilon_j\delta_{a^\varepsilon_j}(x)$ *побудовані по степеням* d^ε_j *мінімізантів (41) слабко збігаються при* $\varepsilon\to 0$ *до функції* D *яка мінімізує масштабовану* Γ*-границю функціоналів* $F_\varepsilon(u,A)$:

$$E_0(D)=\frac{1}{2}\int_\Omega\left(|\nabla\bar h|^2+(\bar h-\sigma)^2\right)dx+\pi\gamma\int_\Omega\Phi(D(x))dx, \tag{43}$$

де $\bar h=\bar h(D)$ *– єдиний розв'язок задачі*

$$\begin{cases}-\Delta\bar h+\bar h=2\pi D(x) \text{ в } \Omega\\ \bar h=\sigma \text{ на } \partial\Omega,\end{cases}$$

і $\Phi(D)=(2k+1)|D|-k-k^2$ *якщо* $k\le|D|<k+1$, $k=0,1,2,\dots$.

Аналіз граничної задачі (43) за допомогою опуклої дуальності показує, що її мінімізант є кусково постійною фіунукцією, що описує структури з кратними вихорями у вложених областях.

У Підрозділі 3.2 вивчається асимтотична поведінка розв'язків крайових задач

$$\begin{cases}-\mathrm{div}\, a(\nabla u_\varepsilon,x/\varepsilon)+\lambda u_\varepsilon=f \text{ в } \Omega_\varepsilon\\ a(\nabla u_\varepsilon,x/\varepsilon)\cdot\nu=0 \text{ на } \partial\Omega\\ a(\nabla u_\varepsilon,x/\varepsilon)\cdot\nu=g(u_\varepsilon,x/\varepsilon) \text{ на } S_\varepsilon,\end{cases} \tag{44}$$

де Ω_ε – обмежена періодично перфорована область в $\mathbb{R}^N$ $(N\ge 2)$, $\varepsilon>0$ – малий параметр (період). Область Ω_ε задається наступним чином. Нехай $Y=(0,1)^N$ $(N\ge 2)$– комірка періодичності, G – довільна відкрита підмножина Y, така що $\overline{G}\subset Y$, з ліпшицевою межею. Покладемо $Y^*=Y\setminus G$ і $S=\bigcup_{m\in\mathbb{Z}}(\partial G+m)$. Для заданої відкритої області $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ з ліпшицевою межею $\partial\Omega$, перфорована область Ω_ε визначається формулою

$$\Omega_\varepsilon=\Omega\setminus\bigcup_{m\in I_\varepsilon}(\varepsilon G+m\varepsilon),\ I_\varepsilon=\{m\in\mathbb{Z}^N;Y^{(m)}_\varepsilon\subset\Omega\},$$

де $Y_\varepsilon^{(m)} = \varepsilon(Y + m)$. Маємо $\partial\Omega_\varepsilon = \partial\Omega \cup S_\varepsilon$, де S_ε – межа сукупності дірок. Зазначимо, що міра S_ε необмежено зростає коли $\varepsilon \to 0$, тобто задача є сингулярно збуреною межею. Проте на функцію $g(u, y)$ в крайовій умові накладається умова про нульові середні:

$$\int_{S\cap Y} g(u, y)d\sigma_y = 0, \ \forall u \in \mathbb{R}, \tag{45}$$

і (в припущенні періодичності $g(u, y)$ відносно y) це дозволяє компенсувати зростання міри S_ε. Зокрема, за деякими додатковими умовами, серед яких основною є умова строгої монотонності $a(\xi, y)$ відносно ξ, доведено, що для $\varepsilon < \varepsilon_0$ (з деяким $\varepsilon_0 > 0$) і достатньо великих λ, $\lambda \geq \lambda_0$, існує розв'язок (44) для довільної правої частини $f \in L^2(\Omega)$.

Теорема 3.2.2. *Нехай $a(\xi, y)$ задовольняє умову Каратеодорі, крім того для деякої сталої $\kappa > 0$ $(a(\xi, y) - a(\zeta, y)) \cdot (\xi - \zeta) \geq \kappa|\xi - \zeta|^2 \ \forall \xi, \zeta \in \mathbb{R}^N$; функції $a(\xi, y)$ та $g(u, y)$ є Y-періодичними відносно y, і існують сталі $C_1, \ldots, C_8 > 0$, такі що $-C_1 + C_2|\xi|^2 \leq a(\xi, y) \cdot \xi$, $\quad |a(\xi, y)| \leq C_3|\xi| + C_4$, $|g(u, y)| \leq C_5|u| + C_6$, $|g(u, y) - g(v, y)| \leq C_7|u - v|$, $|g'_u(u, y) - g'_u(v, y)| \leq C_8|u - v|(1 + |u| + |v|)^{-1}$. Тоді для довільного $\lambda \geq \lambda_0$ і $f \in L^2(\Omega)$ розв'язки (44) збігаються (у сенсі $\|u_\varepsilon - u\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \to 0$ при $\varepsilon \to 0$) до розв'язку усередненої задачі*

$$\begin{cases} \operatorname{div} a^*(\nabla u, u) + b^*(\nabla u, u) + |Y^*|(f - \lambda u) = 0 \text{ в } \Omega \\ a^*(\nabla u, u) \cdot \nu = g^*(u) \cdot \nu \text{ на } \partial\Omega. \end{cases} \tag{46}$$

де $a^*(\xi, u)$, $b^*(\xi, u)$, $g^*(u)$ визначаються формулами $a^*(\xi, u) = \int_{Y^*} a(\xi + \nabla_y w, y)dy$, $b^*(\xi, u) = \int_{S\cap Y} g'_u(u, y)wd\sigma_y$, $g^*(u) = \int_{Y^*} g(u, y)yd\sigma_y$, і $w = w(y; \xi, u)$ – єдиний (з точністю до адитивної константи) розв'язок коміркової задачі

$$\begin{cases} \operatorname{div} a(\xi + \nabla_y w, y) = 0 \text{ в } Y^* \\ a(\xi + \nabla_y w, y) \cdot \nu = g(u, y) \text{ на } S \cap Y \\ w \text{ є } Y\text{-періодичною функцією.} \end{cases} \tag{47}$$

Зазначимо, що раніше вивчалися лінійні аналоги задачі (44) а також варіаційні задачі подібні (44) з умовою Діріхле на зовнішній межі. Проте, окрім того, що Теорема 3.2.2 включає несиметричні нелінійні задачі, які не зводяться до варіаційних задач, її головна новизна полягає в виявленні нового колективного ефекту включень який полягає в виникненні нетривіальної правої частини в крайовій умові на $\partial\Omega$. У Підрозділі 3.2 вивчено також параболічний аналог стаціонарної задачі (44) і одержано результат подібний Теоремі 3.2.2.

У *Розділі 4* досліджується задача з вільною межею, що моделює рух живих клітин на субстраті. Модель, яка в основному наслідує [31] , складається з гідродінамічного рівняння для потоку u актоміозину всередені клітки

$$\nabla \operatorname{div} u + \alpha \nabla m = u \quad \text{в } \Omega(t), \tag{48}$$

поєднаного з рівнянням адвекції-дифузії для щільності міозину m,

$$\partial_t m = \Delta m - \operatorname{div}(u\, m) \quad \text{в } \Omega(t). \tag{49}$$

Рівняння (48)–(49) розглядаються в області $\Omega(t) \subset \mathbb{R}^2$ на (вільній) межі якої повинні виконуватись умови нульового напруження і нульового потоку, відповідно:

$$\operatorname{div} u + \alpha m = 0 \quad \text{на } \partial\Omega(t), \tag{50}$$

$$\frac{\partial m}{\partial \nu} = ((u \cdot \nu) - V_\nu) m \qquad \text{на } \partial\Omega(t), \tag{51}$$

де ν – одинична зовнішня нормаль до $\partial\Omega(t)$. Еволюція вільної межі $\partial\Omega(t)$ описується кінематичною крайовою умовою для нормальної швидкості V_ν:

$$V_\nu = (u \cdot \nu) - \beta\kappa + \lambda \quad \text{на } \partial\Omega(t), \tag{52}$$

де κ – кривизна $\partial\Omega(t)$, і λ – стала визначена рівністю $\lambda := \frac{2\pi\beta - \int_{\partial\Omega(t)} (u\cdot\nu) d\sigma}{|\partial\Omega(t)|}$ (вона обумовлює збереження площи).

Для задачі (48)–(52) вивчено питання існування найважливіших простих розв'язків: стаціонарних розв'язків і розв'язків типу біжних хвиль. Для таких розв'язків задачу (48)–(52) зведено до задачі з вільною межею для рівняння з експоненціальною нелінійністю (рівняння типу Ліувілля):

$$-\Delta S + S = \Lambda e^{S - xV} \quad \text{в } \Omega, \tag{53}$$

з крайовими умовами

$$S = 0 \ \text{ і } \ V\nu_x = \frac{\partial S}{\partial \nu} - \beta\kappa + \lambda \quad \text{на } \partial\Omega, \tag{54}$$

де невідомими є область Ω, функція S, а також сталі $\Lambda \geq 0$ і λ. Встановлено існування континууму радіально симетричних нерухомих ($V = 0$) розв'язків задачі (53)–(54), і їх біфуркацію до біжних хвиль, що є головним результатом розділу:

[31] Barnhart, E., Lee, K., Allen, G.M., Theriot, J.A., Mogilner, A.: Balance between cell-substrate adhesion and myosin contraction determines the frequency of motility initiation in fish keratocytes. Proc Natl Acad Sci U.S.A. **112**(16), 5045–5050 (2015)

Теорема 4.1.14. *Для кожного заданого $R > 0$ і майже всіх $\beta > 0$ (за виключенням, можливо, послідовності значень яка збігається до нуля) існує сім'я розв'язків задачі* (53)–(54) *з ненульовими скоростями V. Ці розв'язки біфуркують з певного нерухомого розв'язку задачі* (53)–(54) *з сім'ї радіально симетричних нерухомих розв'язків цієї задачі, що мають в якості області Ω диск радіуса $R > 0$.*

Доведення Теореми 4.1.14 проведено за допомогою топологічних міркувань, які спираються на поняття степені Лере-Шаудера.

Знайдено також результат про біфуркацію нерухомих розв'язків задачі (53)–(54), які не мають радіальної симетрії.

ВИСНОВКИ

У дисиртаційній роботі розглянуто некомпактні варіаційні задачі для функціонала Гінзбурга-Ландау з заданими степенями відображення на межі області і побудовано нову теорію таких задач; розвинено методи дослідження спектральних задач для сингулярно збурених несиметричних еліптичних операторів; також досліджено деякі задачі усереднення і вивчено біфуркацію розв'язків типу біжних хвиль для задачі з вільною межею, що моделює рух живих клітин на субстраті.

У першому розділі вивчено варіаційні задачі для функціонала Гінзбурга-Ландау у класі комплекснозначних функцій з одиничними абсолютними значеннями і заданими степенями відображення на зв'язних компонентах межі області. У Підрозділі 1.1 доведено гіпотезу про неіснування мінімізантів в двозв'язних областях з ємністю меншою π, яку було висунуто в роботі Л. Берлянда і П. Міронеску [16] : доведено існування скінченного порогового значення параметра Гінзбурга-Ландау κ, такого що інфімум функціонала в класі функцій з одиничними степенями на обох компонентах межі завжди досягається якщо κ є меншим порогового значення і ніколи не досягається якщо κ є більшим цього значення. Зазначимо, що у всіх відомих випадках існування глобальних мінімізантів, вони не мають нулів (вихорів). На відміну від глобальних мінімізантів, показано, що існують інші критичні точки функціонала, які мають вихорі. Зокрема, у Підрозділі 1.2 розвинено варіаційні методи встановлення локальних мінімізантів з вихорами для достаньо великих κ та вивчено асимтотичну поведінку цих мінімізантів у границі Лондонів $\kappa \to \infty$. Доведено, що вихори знаходяться біля межі і в їх околах акумулюються скінченні квантовані єнергії, на відміну від внутрішніх вихорів, які виникають в задачі Дирихле. Ці результати у Підрозділі 1.5 розповсюджено і на випадок повного функціонала Гінзбурга-Ландау, що враховує магнітні ефекти. У Підрозділі 1.3 для повного функціонала Гінзбурга-Ландау в однозв'язних областях доведно теорему, що повністю описує існування/неіснування глобальних мінімізантів з заданим степенем на межі. Показано, що, на відміну від спрощеного функціонала, мінімізанти існують для $0 < \kappa \leq 1/\sqrt{2}$ і не існують для $\kappa > 1/\sqrt{2}$. Поргове значення $\kappa = 1/\sqrt{2}$ відоме в фізичній літературі як межа розділу між надпровідниками I-го і II-го роду. У Підрозділі 1.4 розглянуто задачу мінімізації повного функціонала Гінзбурга-Ландау в двозв'язній області з заданими одиничним і нульовим степенями на компонентах межі. Доведено, що як і в однозв'язній області мінімізанти існують для $0 < \kappa < 1/\sqrt{2}$, але для $\kappa = 1/\sqrt{2}$ (і більших) інфімум не досягається. Це призводить до сингулярної асимптотичної поведінки мінімізантів при $\kappa \to 1/\sqrt{2} - 0$, що проявляється в δ-подібному струмі на межі. У роботі розвинено варіаційну техніку дослідження поведінки мінімізантів при $\kappa \to 1/\sqrt{2} - 0$, яка, зокрема, дозволяє встановити граничні положення вихорів. Насамкінець, у Підрозділі 1.6 вивчено структуру послідовностей Пале-Смейла (майже критичних точок), описано механізм втрати компактності цих послідовностей і квантування відповідних енергій. За допомогою цих результатів встановлено існування критичних точок немінімізаційного характеру (типу перевала).

У другому розділі досліджено спектральні задачі для сингулярно збурених несиметричних еліптичних операторів (з малим параметром збурення $\varepsilon > 0$) в обмежених областях з різними крайовими умовами на межі. Результати розділу стосуються, перш за все, асимтотичної поведінки першого власного значення λ_ε і першої власної функції. Останню можна представити у вигляді $u_\varepsilon = e^{-W_\varepsilon(x)/\varepsilon}$ (це є, так званий, ВКБ анзац), тоді диференціальне рівняння для u_ε переписується як сингулярно збурене рівняння Гамільтона-Якобі для функції W_ε і власного значення λ_ε. Для дослідження асимптотичної поведінки пари λ_ε і W_ε застосовано техніку в'язкісних розв'язків. У Підрозділі 2.1 розглянуто задачу Діріхле з осцилюючими локально періодичними коефіцієнтами і виведено ефективне рівняння Гамільтона-Якобі для границь λ_ε і функцій W_ε при $\varepsilon \to 0$, та доведено, що крайова умова $W_\varepsilon(x) = +\infty$ на межі у границі релаксується до крайової умови у вигляді фазового обмеження (state constraint boundary condition). Знайдена гранична (ефективна) задача є адитивною задачею на власні значення для рівняння Гамільтона-Якобі. Вона має рівно одне власне значення, що описує головний член асимптотики λ_ε, проте власних функцій може багато у залежності від структури множини Обрі пов'язаної з ефективною задачею. У Підрозділі 2.1 розглянуто також питання про уточнені асимптотики власних значень і селекцію власної функції ефективної задачі у випадку коли молодші члени оператора мають однаковий порядок, та множина Обрі складається з гіперболічних нерухомих точок і граничних циклів ефективного знесення. Для цього розвинено техніку асимтотичного аналізу, що складається з таких елементів як локалізація і усереднення на проміжному масштабі. У Підрозділі 2.2 вивчено сингулярно збурену задачу з умовою Неймана на межі, у припущенні, що коефіцієнти рівняння не залежать від ε, а малий множник ε присутній тільки в старшому члені рівняння. За умови, що множина Обрі відповідної задачі для рівняння рівняння Гамільтона-Якобі складається з гіперболічних нерухомих точок і граничних циклів ефективного знесення задачі Скорохода породженої конвективним членом, знайдено границі власних значень і функцій W_ε $(= -\varepsilon \log u_\varepsilon)$. Для дослідження локалізації власних функцій на компонентах множини Обрі розташованих на межі розвинуто метод, що базуються на побудові спеціальних суб- і суперрозв'язків. У Підрозділі 2.3 вивчено спектр сингулярно збуреної задачі з осцилюючими коефіцієнтами у тонкому циліндрі з умовою Неймана на бічній поверхні і Фур'є на основах. Описано асимтотичну поведінку першого власного значення і власної функції, для границі власних значень і функцій W_ε $(= -\varepsilon \log u_\varepsilon)$ виведено одновимірну адитивну задачу на власні значення з ефективними граничним умовами. Ці граничні умови отримано в результаті дослідження примежових шарів біля основ. Для побудови останніх вивчено спектральні задачі в напівобмеженому циліндрі з умовою Стеклова на основі, ці результати мають незалежний інтерес. Крім того, у структурному припущенні щодо ефективної задачі (яке веде до локалізації, в певному сенсі, власних функцій всередині циліндру) знайдено двочленні асимтотичні формули для першого і наступних власних значень.

У третьому розділі вивчено дві задачі усереднення з нетрівіальними колективними ефектами спричиненими неоднорідностями. У Підрозділі 3.1 описано вихорові структури в надпровідниках з періодично розташованими отворами, що моделюють чужорідні домішки. Встановлено масштабні співвідношеня між просторовим періодом, розміром отворів і величиною зовнішнього магнитного поля для яких виникають структури у вигляді вложених областей з кратними вихорями. Для дослідження цієї моделі застосовано техніку Г-збіжності, конструкції подібні мірам Янга і елементи методів опуклого аналізу. У Підрозділі 3.2 вивчено стаціонарні еліптичні крайові задачі (і їх параболічні аналоги) для монотонних операторів в перфорованих областях з умовою Фур'є на межі дірок і Неймана на зовнішній межі. У припущенні про нульові середні в крайовій умові на межі дірок, для дослідження асимптотичної поведінки розв'язків застосовано техніку двохмасштабної збіжності і виведено ефективну (усереднену) задачу. Винайдено нетрівіальний колективний ефект спричинений крайовими умовами на межі дірок, який полягає у виникненні нового члену в ефективній крайовій умові на зовнішній межі.

У четвертому розділі розглянуто задачу з вільною межею, що моделює рух живих клітин на субстраті. Досліджено сім'ю радіально симетричних стаціонарних розв'язків задачі і зроблено її біфуркаційний аналіз, що дозволило довести існування розв'язків типу біжної хвилі і стаціонарних розв'язків без радіальної симетрії. Для доведення існування розв'язків типу біжної хвилі використано топологічні міркування з застосуванням поняття степеня Лере-Шаудера.

Усі основні результати дисертації наведено з повними доведеннями. Дисертаційна робота має теоретичний характер. Результати і методи дисертаційної роботи можуть бути використані для дослідження інших задач математичної фізики.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

[1] Berlyand, L., Fuhrmann, J., Rybalko, V.: Bifurcation of traveling waves in a Keller-Segel type free boundary model of cell motility. Commun. Math. Sci. **16**(3), 735–762 (2018)

[2] Berlyand, L., Golovaty, D., Iaroshenko, O., Rybalko, V.: On approximation of Ginzburg–Landau minimizers by S^1-valued maps in domains with vanishingly small holes. J. Differ. Equations **264**(2), 1317–1347 (2018)

[3] Berlyand, L., Golovaty, D., Rybalko, V.: Nonexistence of Ginzburg-Landau minimizers with prescribed degree on a boundary of a doubly connected domain. C.R. Math. **343**(1), 63–68 (2006)

[4] Berlyand, L., Mironescu, P., Rybalko, V., Sandier, E.: Minimax critical points in Ginzburg-Landau problems with semi-stiff boundary conditions: existence and bubbling. Commun. Part. Diff. Eq. **39**(5), 946–1005 (2014)

[5] Berlyand, L., Misiats, O., Rybalko, V.: Near boundary vortices in a magnetic Ginzburg-Landau model: Their locations via tight energy bounds. J. Funct. Anal. **258**(5), 1728–1762 (2010)

[6] Berlyand, L., Misiats, O., Rybalko, V.: Minimizers of the magnetic Ginzburg-Landau functional in simply connected domain with prescribed degree on the boundary. Commun. Contemp. Math. **13**(1), 53–66 (2011)

[7] Berlyand, L., Mizuhara, M., Rybalko, V., Zhang, L.: On an evolution equation in a cell motility model. Physica D: Nonlinear Phenomena **318**, 12–25 (2016)

[8] Berlyand, L., Potomkin, M., Rybalko, V.: Phase-field model of cell motility: Traveling waves and sharp interface. C.R. Math. **354**(10), 986–992 (2016)

[9] Berlyand, L., Potomkin, M., Rybalko, V.: Sharp interface limit in a phase field model of cell motility. Netw. Heterog. Media **12**(4), 551–590 (2017)

[10] Berlyand, L., Rybalko, V.: Solutions with vortices of a semi-stiff boundary value problem for the Ginzburg-Landau equation. J. Eur. Math. Soc. **12**(6), 1497–1531 (2010)

[11] Berlyand, L., Rybalko, V.: Homogenized description of multiple Ginzburg-Landau vortices pinned by small holes. Netw. Heterog. Media **8**(1), 115–130 (2013)

[12] Berlyand, L., Yip, N.K., Rybalko, V., Renormalized Ginzburg-Landau energy and location of near boundary vortices. Netw. Heterog. Media **7**(1), 179–196 (2012)

[13] Amaziane, B., Pankratov, L., Rybalko, V.: On the homogenization of some double porosity models with periodic thin structures. Applicable Analysis **88**(10-11), 1469–1492 (2009)

[14] Iaroshenko, O., Rybalko, V., Vinokur, V.M., Berlyand, L.: Vortex phase separation in mesoscopic superconductors. Scientific Reports: Nature Publishing Group **3**, 1758 (2013)

[15] Piatnitski, A., Rybalko, V.: Homogenization of boundary value problems for monotone operators in perforated domains with rapidly oscillating boundary conditions of Fourier type. J. Math. Sci. **177**(1), 109–140 (2011)

[16] Piatnitski, A., Rybalko, A., Rybalko, V.: Ground states of singularly perturbed convection-diffusion equation with oscillating coefficients. ESAIM Contr. Op. Ca. Va. **20**(4), 1059–1077 (2014)

[17] Piatnitski, A., Rybalko, A., Rybalko, V.: Singularly perturbed spectral problems with Neumann boundary conditions. Complex Var. Elliptic Equ. **61**(2), 252–274 (2015)

[18] Piatnitski, A., Rybalko, V.: On the first eigenpair of singularly perturbed operators with oscillating coefficients. Commun. Part. Diff. Eq. **41**(1), 1–31 (2016)

[19] Piatnitski A., Rybalko V.: Singularly perturbed spectral problems in a thin cylinder with Fourier conditions on its bases. J. Math. Phys., Anal., Geom. **15**(2), 256–277 (2019)

[20] Rybalko V.: Local minimizers of the magnetic Ginzburg-Landau functional with S^1-valued order parameter on the boundary. J. Math. Phys., Anal., Geom. **10**(1), 134–151 (2014)

Публікації у матеріалах міжнародних наукових конференцій:

[21] Berlyand, L.V., Rybalko, V.O., Misiats, O.O.: Minimizers of Ginzburg-Landau functional with "semi-stiff" boundary conditions: existence and vorticity. In: International Conference dedicated to the 110-th Anniversary of I. G. Petrovskii (XXIII joint session of Moscow Mathematical Society and I. G. Petrovskii Seminar). Book of Abstracts, p. 16, Moscow, Russia, May 30 - June 4 2011

[22] Rybalko, V.: Spectral problems for singularly perturbed operators with oscillating coefficients. In: International Conference in Honor of Vladimir A. Marchenko's 90th birthday "Spectral Theory and Differential Equations"(STDE-2012). Book of Abstracts, p. 92, Kharkiv, Ukraine, 20 - 24 August 2012

[23] Rybalko V. Critical points of the Ginzburg–Landau functional with semi-stiff boundary conditions, II International Conference "Analysis and Mathematical Physics". Book of Abstracts, p. 23, Kharkiv, Ukraine, 16-20 June 2014

[24] Rybalko V. On the first eigenpair of singularly perturbed operators with Neumann boundary condition, III International Conference "Analysis and Mathematical Physics". Book of Abstracts, pp. 13-14, Kharkiv, Ukraine, 15-19 June 2015

АНОТАЦІЯ

Рибалко В.О. ***Існування і асимтотична поведінка розв'язків задач математичної фізики.*** – Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.03 – математична фізика. – Фізико-технічний інститут низьких температур ім. Б.І.Вєркіна Національної академії наук України, Харків, 2019.

У першому розділі дисиртаційної роботи розглянуто некомпактні варіаційні задачі для функціонала Гінзбурга-Ландау у класі комплекснозначних функцій з одиничними абсолютними значеннями на межі області і заданими степенями відображення на її зв'язних компонентах. Побудовано нову теорію таких задач. Зокрема, досліджено питання існування/неіснування глобальних мінімізантів з заданими степенями відображення; розвинуто варіаційний метод для побудови локальних мінімізантів з нулями (вихорами); вивчено сингулярну асимптотичну поведінку мінімізантів і встановлено граничні положення вихорів коло межі; досліджено структуру послідовностей Пале-Смейла і доведено існування критичних точок типу перевала. У другому розділі розвинено методи дослідження спектральних задач для сингулярно збурених несиметричних еліптичних операторів. Знайдено ефективну задачу, що описує асимптотичну поведінку основних станів задачі Діріхле з локально періодичними осцилюючими коефіцієнтами, побудовано уточнені асимптотики перших власних значень і винайдено алгоритм селекції граничних власних функцій. Аналогічні питання розглянуто для задачі Немана з плавнозмінними коефіцієнтами. Також вивчено спектральну задачу в тонкому цилінтрі з умовами Фур'є на основах. У третьому розділі досліджено дві задачі усереднення для яких знайдено нові колективні ефекти спричинені неоднорідностями. У четвертому розділі вивчено біфуркацію розв'язків типу біжних хвиль для задачі з вільною межею, що моделює рух живих клітин на субстраті.

Ключові слова: *варіаційні задачі, функціонал Гінзбурга-Ландау, теорія усереднення, сингулярні збурення, задачі з вільною межею.*

АННОТАЦИЯ

Рыбалко В.А. ***Существование и асимптотическое поведение решений задач математической физики.*** – Рукопись.

Диссертация на соискание научной степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.03 – математическая физика.– Физико-технический институт низких температур им. Б.І.Веркина Национальной академии наук Украины, Харьков, 2019.

В первом разделе диссертационной работы рассмотрены некомпактные вариационные задачи для функционала Гинзбурга-Ландау в классе комплекснозначных функций с единичными абсолютными значениями на границе области и заданными степенями отображения на ее связных компонентах. Построена новая теория таких задач. В частности, исследованы вопросы существования/несуществования глобальных минимизантов с заданными степенями отображения; развит вариационный метод построения локальных минимизантов с нулями (вихрями); изучено сингулярное асимптотическое поведение минимизантов и установлены предельные положения вихрей возле границы; исследована структура последовательностей Пале-Смейла и доказано существование критических точек типа перевала. Во втором разделе развиты методы исследования спектральных задач для сингулярно возмущенных несимметричных эллиптических операторов. Нейдена эффективная задача, которая описывает асимптотическое поведение основных состояний задачи Дирихле с локально периодическими осциллирующими коэффициентами, построены уточненные

асимтотики первых собственных значений и найден алгоритм селекции предельных собственных функций. Аналогичные вопросы рассмотрены для задачи Неймана с плавно меняющимися коэффициентами. Также изучена спектральная задача в тонком цилиндре с условиями Фурье на основаниях. В третьем разделе исследованы две задачи усреднения для которых найдены новые коллективные эффекты вызванные неоднородностями. В четвертом разделе изучена бифуркация решений типа бегущих волн для задачи со свободной границей, которая моделирует движение живых клеток на субстрате.

Ключевые слова: *вариационные задачи, функционал Гинзбурга-Ландау, теория усреднения, сингулярные возмущения, задачи со свободной границей.*

ABSTRACT

Rybalko, V.O. *Existence and asymptotic behavior of solutions to problems of mathematical physics.* – Manuscript.

Thesis for a Doctoral Degree in Physics and Mathematics: Speciality 01.01.03 – Mathematical Physics. – B.I.Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering, National Academy of Sciences of Ukraine, Kharkiv, 2019.

The first section of the thesis is devoted to the study of the variational problem for the Ginzburg-Landau functional in a class of complex valued functions with unit absolute value on the boundary and given degrees on its connected components. A new theory of such problems is developed. In particular, we study the issues of existence/nonexistence of global minimizers with given degrees; we develop a variational method for constructing local minimizers with zeros (vortices); we study singular behavior of minimizers and establish limiting locations of vortices near the boundary; we study the structure of Palais-Smale sequences and prove existence of mountain pass type critical points. In the second section we develop methods which allow one to study spectral problems for singularly perturbed nonsymmetric elliptic operators. We find an effective problem describing asymptotic behavior of ground states for Dirichlet problem with strongly oscillating locally periodic coefficients, establish improved asymptotic formulas for first eigenvalues and propose a selection algorithm for the limiting eigenfunctions. Analogous questions are considered for the Neumann problem with smoothly varying coefficients. Also, we study a spectral problem in a thin cylinder with Fourier conditions on its bases. In the third section we study two homogenization problems for which we discover new collective effect due to the inhomogeneities. In the final forth section we study bifurcation of traveling wave solutions in a free boundary problem modeling motility of living cells on a substratum.

Key words: *: variational problems, Ginzburg-Landau functional, homogenization theory, singular perturbations, free boundary problems*