Національна академія наук України
Фізико-технічний інститут низьких температур ім. Б. І. Вєркіна

Хейфець Олександр Якович

УДК 517.54; 517.547; 517.984.4

УНІТАРНІ СИСТЕМИ РОЗСІЮВАННЯ ТА ЗАДАЧІ ІНТЕРПОЛЯЦІЇ

01.01.01 - математичний аналіз

Автореферат

дисертації на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Харків - 2019

Дисертацією є рукопис.

Роботу виконано у Університеті Массачусетсу у Лоуеллі, США

Офіційні опоненти:

доктор фізико-математичних наук, професор
Деркач Володимир Олександрович,
Донецький національний університет імені Василя Стуса (м. Вінниця),
професор кафедри математичного аналізу і диференціальних рівнянь;

доктор фізико-математичних наук, доцент
Дюкарев Юрій Михайлович
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна,
професор кафедри вищої математики фізичного факультету;

доктор фізико-математичних наук, професор
Золотарьов Володимир Олексійович
Фізико-технічний інститут низьких температур ім. Б. І. Вєркіна НАН України (м. Харків),
провідний науковий співробітник відділу теорії функцій.

Захист відбудеться «21» травня 2019 р. о «14^{00}» годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 64.175.01 у Фізико-технічному інституті низьких температур ім. Б. І. Вєркіна НАН України за адресою: пр. Науки, 47, м. Харків, 61103.

З дисертацією можна ознайомитися у науковій бібліотеці Фізико-технічного інституту низьких температур ім. Б. І. Вєркіна НАН України за адресою: пр. Науки, 47, м. Харків, 61103.

Автореферат розісланий «17» квітня 2019 р.

Учений секретар
спеціалізованої вченої ради — В. О. Горькавий

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. В кінці XIX століття Стільтьєс розглянув степеневу проблему моментів і застосував до її дослідженню розроблену ним теорію ланцюгових дробів. На початку XX століття Каратеодорі, Фейер, Ф. Ріс, Шур, Пік, Неванлінна розглядали конкретні інтерполяційні задачі, при описі розв'язків яких проглядалася певна спільність: множина розв'язків описувалась у вигляді дробово-лінійного перетворення (коефіцієнти якого визначаються даними задачі) над довільною функцією деякого класу (наприклад, аналітичної в одиничному крузі що по модулю не перевищує 1). Величезну роль в дослідженні цих задач зіграли роботи Сегьо. Один з підходів був заснований на теорії ортогональних многочленів. Зв'язок цього кола задач з розширеннями ермітових операторів мабуть була виявлена Гамбургером і незалежно М.С. Лівшицем на початку 40-х років. Цей підхід отримав потужний розвиток в роботах Адамяна, Арова і Крейна кінця 60-х років, які використовували розвинену раніше М.Г. Крейном і А.В. Штраусом теорію узагальнених резольвент ермітових операторів. Альтернативний підхід був розроблений в 60-ті - 70-ті роки В.П. Потаповим. В основу цього підходу була покладена Лема Шварца та її далекосяжні узагальнення, які В.П. Потапов назвав Основною Матричною Нерівністю задачі. Значну роль в становленні цього підходу зіграли роботи І.В. Ковалішиної і В.Е. Кацнельсона. В кінці 80-х років підходи Адамяна-Арова-Крейна і Потапова вдалим і зручним чином поєдналися в Схемі Абстрактної Задачі інтерполяції розробленої В.Е. Кацнельсоном, П.М. Юдицьким і здобувачем (що склало основний зміст його кандидатської дисертації). Ця схема швидко набула популярності і стала широко застосовуватися. Однак вона працювала тільки в тих задачах, розв'язки яких були аналітичними функціями. У задачі Нехарі розв'язки (символи) не є аналітичними. Тому необхідно було модифікувати схему Абстрактної Задачі інтерполяції так щоб вона підходила і для задач типу Нехарі. Крім того, класичні результати з матричної задачі Нехарі відносяться тільки до цілком невизначеного випадку і навіть в скалярній задачі була відсутня повна характеризация коефіцієнтів параметризуючої формули. Необхідність доповнити ці класичні результати є однією з найбільш актуальних задач в цій галузі аналізу.

В кінці 80-х років Д. Сарасон, один з провідних світових експертів в області комплексного аналізу та теорії операторів, сформулював дві задачі тісно пов'язані з характеризацією коефіцієнтів формули, що параметризує розв'язки невизначеної скалярної задачі Нехарі. Одна з них запитує чи можлива регуляризація довільної γ-твірної пари, друга запитує чи є властивість абсолютної неперервності мір, пов'язаних з γ-твірною парою, достатнім для її регулярності. У цій дисертації розв'язано обидві задачі: першу в позитивному сенсі, другу в негативному.

Клас Крейна-Лангера був введений цими авторами в 70-і роки в зв'язку зі спектральної теорією самоспряжених і унітарних операторів в просторах Понтрягіна. Пізніше Лангер, Дайксма і інші автори розглядали інтерполяційні задачі типу Неванлінни-Піка в цьому класі. Хоча опис розв'язків виходив в традиційному для цього типу задач вигляді дробово-лінійного перетворення, спостерігався ефект сторонніх розв'язків: при деяких параметрах формула давала функції, які випадали з необхідного класу, і які не приймали необхідні значення в деяких вузлах інтерполяції. Пояснення цього феномена становило інтерес.

Мета і задачі дослідження. Основною метою дослідження є розробка схеми Абстрактної Задачі Інтерполяції, яка дозволяла б вирішувати конкретні інтерполяційні задачі не тільки в класах аналітичних оператор-функцій, але і в класі додатних гармонійних оператор-функцій, і на основі цього отримання нових тонких результатів по задачі Нехарі і задачі про ліфтинг комутанта в найзагальнішому (а не тільки в цілком невизначеному) випадку.

Об'єктами дослідження є інтерполяційні задачі аналізу, пов'язані з ними унітарні системи розсіювання та відповідні модельні простори функцій або мір.

Предметом дослідження є структури унітарних систем розсіювання, пов' язаних з задачами аналізу, та відповідних модельних просторів, які дозволяють отримувати тонкі аналітичні властивості коефіцієнтів формул що параметризують розв'язки задачі.

Задачі дослідження:

- Розширити схему Абстрактної Задачі Інтерполяції на випадок, коли розв'язки є не тільки аналітичними, а й додатними гармонійними функціями (або відповідними їм мірами).
- На основі цього підходу отримати повний розв'язок задачі про ліфтинг комутанту у самому загальному випадку (попередні результати стосувалися цілком невизначеного випадку).
- Отримати повну характеризацію коефіцієнтів формули, що параметризує всі розв'язки задачі про ліфтинг комутанту (символи ліфтингу).
- Використовуючи згадану характеризацію, вирішити задачу Д.Сарасона про регуляризацію γ-твірних пар.
- Отримати кратний аналог теореми Жюліа – Каратеодорі про кутову межову похідну та розглянути відповідну межову інтерполяційну задачу.
- Використати нескінченну межову інтерполяційну задачу для побудови класу сингулярних γ-твірних пар, які мають властивість абсолютної неперервності. Тим самим буде наведено клас контрприкладів до гіпотези Д. Саросона, яка стверджувала що властивість абсолютної неперервності характеризує регулярні γ-твірні пари.
- Вивчити розширений клас Крейна – Лангера, який містить крім функцій з полюсами ще й функції зі стрибками, та в цьому класі вирішити інтерполяційну

задачу Неванлінни – Піка. Довести що при такому підході зайвих розв'язків не буде.

Методи дослідження. У роботі використовуються методи теорії аналітичних та гармонійних функцій, теорії міри, зокрема Гільбертові простори аналітичних та гармонійних функцій, методи теорії операторів та лінійних унітарних систем.

Наукова новизна отриманих результатів. У дисертаційній роботі отримано такі нові наукові результати які **виносяться на захист:**

- Розширено схему Абстрактної Задачі Інтерполяції на випадок, коли розв'язки є не тільки аналітичними, а й додатними гармонійними функціями (або відповідними їм мірами).
- На основі цього підходу отримано повний розв'язок задачі про ліфтинг комутанту у самому загальному випадку (попередні результати стосувалися цілком невизначеного випадку).
- Отримано повну характеризацію коефіцієнтів формули, що параметризує всі розв'язки задачі про ліфтинг комутанту (символи ліфтингу).
- Використовуючи цю характеризацію, розв'язано задачу Д.Сарасона про регуляризацію γ-твірних пар.
- Отримано кратний аналог теореми Жюліа – Каратеодорі про кутову межову похідну та розглянуто відповідну межову інтерполяційну задачу.
- На основі нескінченної межової інтерполяційної задачі побудовано клас сингулярних γ-твірних пар, які мають властивість абсолютної неперервності. Тим самим наведено клас контрприкладів до гіпотези Д. Сарасона, яка стверджувала що властивість абсолютної неперервності характеризує регулярні γ-твірні пари.
- Вивчено розширений клас Крейна – Лангера, який містить крім функцій з полюсами ще й функції зі стрибками, та в цьому класі розв'язано інтерполяційну задачу Неванлінни – Піка. Доведено що при такому підході сторонніх розв'язків немає.

Практичне значення отриманих результатів. Робота має теоретичний характер. У дисертації проведено фундаментальні дослідження, які поглиблюють наші знання про інтерполяційні задачі аналізу, про властивості коефіцієнтів формул, що параметризують розв'язки задач, про структуру відповідних модельних просторів функцій або мір. Отримані результати можуть бути використані в теорії функцій, зокрема в теорії Гільбертових та Банахових просторів аналітичних або гармонійних функцій, в теорії операторів, зокрема при побудові функціональних моделей операторів та більш загальних лінійних систем, в інших розділах функціонального аналізу та математики взагалі.

Особистий внесок здобувача. Усі основні результати дисертації, що виносяться на захист, одержано здобувачем особисто і самостійно. З результатів праць, які виконано у співавторстві, на захист виносяться лише положення, що одержані автором дисертації.

В роботах [5, 7, 22, 23] здобувачу належить визначення унітарної системи розсіювання, яке узагальнює визначення системи розсіювання Лакса - Філліпса, визначення та доведення властивостей Шурівських доповнень мір, зокрема, застосування цих доповнень до ортогональних розкладів просторів Хеллінгера, ідея використання векторної Теореми Радона - Нікодима для спрощення цих загальних результатів в контексті задачі про доповнення, отримання явної формули для розв'язку задачі доповнення. В цих роботах також викладено попередні результати здобувача по простору Хеллінгера та моделям унітарних операторів в ньому. В роботах [20, 21] здобувачу належить визначення символу ліфтингу (міри), параметризація всіх символів що відповідають заданому стисненню, характеризація коефіцієнтів параметризуючої формули та доведення екстремальних властивостей цих коефіцієнтів, застосування цих загальних результатів для доповнення класичної теореми Адамяна-Арова-Крейна. В роботі [16] здобувачу належить доведення властивостей межових відтворюючих ядер та доведення основної теореми що узагальнює класичну теорему Жюліа - Каратеодорі, у роботі [18] здобувачу належать аналогічні результати для випадку операторно - значних функцій. В роботі [17] здобувачу належить вкладення межової інтерполяційної задачі в схему Абстрактної інтерполяції, отримання параметризації розв'язків та доведення властивостей коефіцієнтів параметризуючої формули. У роботі [19] здобувачу належить доведення того що збіг асимптотик відповідного порядку зсередини і ззовні є еквівалентним кратній умові Жюліа - Каратеодорі. В роботі [14] здобувачу належить доведення достатності у Теоремі 1.1, Леми 3.3, Теорем 3.4, 6.1 та 6.4. В роботі [9] здобувачу належить визначення розширеного класу Крейна - Лангера та стандартних функцій в ньому, доведення існування продовження довільної функції цього класу до стандартної, обчислення від'ємного індексу стандартної функції. В роботах [10], [12], [13], всі основні результати належать авторам в рівній мірі. В роботі [11] здобувачу належить формулювання та доведення теореми що описує всі стандартні розв'язки задачі Неванлінни - Піка у класі з від'ємними квадратами, теореми про продовження та побудова прикладу до неї.

Апробація результатів дисертації.

Семінар відділу Теорії Функцій, ФТІНТ, Харків 1993

Operator Theory seminar, The Weizmann Institute of Science, Rehovot, Ізраїль, 1993-1995

9-th International Workshop on Operator Theory and Applications (IWOTA), Bloomington, США, 1996

Mathematical Theory of Networks and Systems (MTNS), Saint Louis, США, 1996

International Conference in Honor of M. Livsits 80's Anniversary, Beer-Sheva, Ізраїль, 1997

International Conference in Memory of M. G. Krein, Одеса 1997

Семінар з Теорії Операторів, Харківський Національний університет, Харків 1997

Analysis seminar, Simon Bolivar University, Caracas, Венесуела, 1998

10-th International Workshop on Operator Theory and Applications (IWOTA), Groningen, Голандія, 1998

Mathematical Theory of Networks and Systems (MTNS), Padova, Італія, 1998

Семінар з Аналізу, Харківський Національний університет, Харків 1998

Conference in Honor of H. Dym 60's Anniversary, the Weizmann Institute of Science, Rehovot, Ізраїль, 1999

13-th International Workshop on Operator Theory and Applications (IWOTA), Bordeaux, Франція, 2000

Israel Mathematical Union (IMU), Haifa, Ізраїль, 2000

Seminar Department of Mathematics, Tel-Aviv University, Tel-Aviv, Ізраїль, 2000

Theory of Functions and Mathematical Physics, International Akhiezer Centenary Conference, Харків 2001

13-th International Workshop on Operator Theory and Applications (IWOTA), Blacksburg, США, 2002

Mathematical Theory of Networks and Systems (MTNS), South Bend, США, 2002

International Linear Algebra Society (ILAS), Auburn, США, 2002

Great Plains Operator Theory Symposium (GPOTS), Charlotte, США, 2002

Department of Mathematics colloquium, UMass Lowell, США, 2003

Analysis Seminar, Brown University, Providence, США, 2003

Southeastern Analysis Meeting (SEAM), Knoxville, США, 2003

15-th International Workshop on Operator Theory and Applications (IWOTA), Newcastle, Англія, 2004

Operator Theory Seminar, University of Connecticut, Storrs, США, 2004

16-th International Workshop on Operator Theory and Applications (IWOTA), Storrs, США, 2005

Entire and Subharmonic Functions and Related Topics (B. Ya. Levin Centennial Conference), Харків, 2006

16-th Summer St.-Petersburg Meeting in Mathematical Analysis, St.-Petersburg, Росія, 2007

Characteristic Functions and Transfer Functions in Operator Theory and System Theory, Conference in Memory of M.S. Livsits, Beer-Sheva, Ізраїль, 2007

International Conference Analysis and Mathematical Physics, Харків, 2013

Семінар з Аналізу, Донецький Національний університет, Донецьк 2013

Публікації. Результати дисертації, що винесено на захист, опубліковано у 23 наукових статтях [1]-[23] і у 14 тезах доповідей на наукових конференціях [24]-[37].

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається зі вступу, семи розділів, висновків, списку використаних джерел, який містить 93 найменування, та одного додатку. Повний обсяг роботи – 328 сторінок. Обсяг основної частини дисертації – 293 сторінки.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У дисертації запропоновано і розвинено методи розв'язання інтерполяційних задач аналізу, основані на використанні унітарних систем розсіювання, які природно пов'язані з даними задачі та її розв'язками. Також вирішуються відповідні зворотні задачі.

У роботі вивчаються задача про ліфтинг комутанту, кратний аналог умови Жюліа-Каратеодорі про кутову межову похідну та пов'язана з нею межова інтерполяційна задача у класі Шура, розширений клас Крейна-Лангера та задача Неванлінни-Піка в ньому. Для задачі про ліфтинг комутанту отримано параметризацію усіх символів заданого стиснення у самому загальному випадку а також отримано повну характеризацію коефіцієнтів цієї параметризуючої формули. Для аналогу умови Жюліа-Каратеодорі отримано низку еквівалентних умов, зокрема, одна з цих умов формулюється у термінах певної симетрії межових похідних. Як застосування цих методів та результатів, у роботі розв'язані дві проблеми Д. Сарасона про регулярні та сингулярні γ-твірні пари.

У *вступі* обґрунтовано актуальність теми дослідження, сформульовано мету і задачі дослідження і розкрито наукову новизну отриманих результатів.

У *розділі 1* подано огляд літератури, короткий зміст дисертації та застосованих методів.

У *розділі 2* містяться попередні відомості які використовуються у дисертації. Наведені усі необхідні визначення що стосуються унітарних систем розсіювання. Детально описаний простір мір Хеллінгера, що відповідає заданій операторній мірі, та деякі його властивості. Показано як унітарні системи розсіювання реалізуються у просторі Хеллінгера. Викладено конструкцію Шурівських доповнень мір та відповідного ортогонального розкладу пространства Хеллінгера. Описана параметризація унітарних розширень ізометрій, їх резольвент. Викладено числення з'єднань зі зворотним зв'язком та обчислена динаміка з'єднаної системи. Обчислено функції розсіювання з'єднаної системи відносно заданого масштабу та масштабу з'єднання.

У *підрозділі 2.1* розглядаються унітарні системи розсіювання такого вигляду

$$\mathfrak{S} = (\mathcal{U}, \rho; \mathcal{K}, \mathcal{E}) \tag{1}$$

де $\mathcal{K}$ (простір станів) і $\mathcal{E}$ (простір коефіцієнтів) є Ґільбертовими просторами, $\mathcal{U}$ унітарний оператор що діє в $\mathcal{K}$ (оператор еволюції), оператор ρ (масштаб) що діє з $\mathcal{E}$ в $\mathcal{K}$. З кожною унітарною системою розсіювання $\mathfrak{S}$ вигляду (1) зв'язується спектральна функція

$$\sigma_{\mathfrak{S}}(\zeta) = \rho^* \mathcal{P}_{\mathcal{U}}(\zeta)\rho, \tag{2}$$

де $\mathcal{P}_{\mathcal{U}}(\zeta)$ це ядро Пуассона оператора $\mathcal{U}$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\mathcal{U}}(\zeta) &= (\mathbf{1} - \zeta\mathcal{U}^*)^{-1} + (\mathbf{1} - \bar{\zeta}\mathcal{U})^{-1} - \mathbf{1} \\ &= (1 - |\zeta|^2)(\mathbf{1} - \zeta\mathcal{U}^*)^{-1}(\mathbf{1} - \bar{\zeta}\mathcal{U})^{-1}. \end{aligned} \tag{3}$$

$\sigma_{\mathfrak{S}}(\zeta)$ є додатною гармонійною операторно-значною функцією в крузі, значеннями якої є обмежені оператори в просторі $\mathcal{E}$. Ми говоримо що унітарна система розсіювання $\mathfrak{S} = (\mathcal{U}, \rho; \mathcal{K}, \mathcal{E})$ мінімальна якщо лінійний многовид $\rho(\mathcal{E}) \subset \mathcal{K}$ є $*-$ циклічним для оператора $\mathcal{U}$, тобто, найменшим підпростором що містить $\rho(\mathcal{E})$ і інваріантним щодо $\mathcal{U}$ і $\mathcal{U}^*$ є весь простір $\mathcal{K}$. Спектральна функція є повним інваріантом класів унітарно еквівалентних мінімальних унітарних систем розсіювання.

У *підрозділі 2.5* розглянуто узагальнені резольвенти ізометричних операторів. Нехай $\mathcal{H}_0$ це Ґільбертів простір і V це ізометричний оператор в $\mathcal{H}_0$ з областю визначення d_V і областю значень Δ_V. Позначимо через N_{d_V} і N_{Δ_V} ортогональні доповнення d_V і Δ_V відповідно. Підпростори N_{d_V} і N_{Δ_V} називаються дефектними підпросторами V. Нехай $\mathcal{E}$ це інший Ґільбертів простір (простір коефіцієнтів) і $\rho : \mathcal{E} \to \mathcal{H}_0$ обмежений лінійний оператор (масштаб). Нехай $\mathcal{U}^*$ це унітарний оператор в Ґільбертовому просторі $\mathcal{K}$, який є розширенням V. Тим самим ми маємо унітарну систему розсіювання $\mathfrak{S} = (\mathcal{U}, \rho; \mathcal{K}, \mathcal{E})$. В цьому розділі отримано явну параметризацію спектральних функцій $\sigma_{\mathfrak{S}}(\zeta)$ всіх розширень $\mathcal{U}^*$ ізометрії V відносно заданого масштабу ρ.

Для цього нам знадобиться більш детальна інформація про структуру унітарних розширень $\mathcal{U}^*$ ізометрії V. Визначимо унітарний вузол

$$A_0 : N_2 \oplus \mathcal{H}_0 \to \mathcal{H}_0 \oplus N_1,$$

де N_1 і N_2 це копії просторів N_{d_V} і N_{Δ_V} відповідно,

$$A_0 | d_V = F,$$

A_0 відображає тотожно N_{d_V} на N_1 і N_2 на N_{Δ_V}. Унітарні розширення $\mathcal{U}^*$ ізометрії V є з'єднаннями зі зворотним зв'язком унітарного вузла A_0 з довільним унітарним вузлом A_1 наступного виду:

$$A_1 : N_1 \oplus \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_1 \oplus N_2,$$

де N_1 і N_2 ті ж підпростори що і вище. З'єднання зі зворотним зв'язком $\mathcal{U}^*$ вузла A_0 і вузла A_1 є унітарним оператором що діє в просторі $\mathcal{K} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$.

Розглянемо унітарну дилатацію вузла A_0:

$$\mathcal{K}_0 = \cdots \oplus N_2^{(1)} \oplus N_2^{(0)} \oplus \mathcal{H}_0 \oplus N_1^{(-1)} \oplus N_1^{(-2)} \oplus \cdots, \tag{4}$$

де простори $N_1^{(k)}$ і $N_2^{(k)}$ це копії просторів N_1 і N_2 відповідно. Оператор $\mathcal{U}_0^*$ діє на $N_2^{(0)} \oplus \mathcal{H}_0$ також як A_0

$$\mathcal{U}_0^* : N_2^{(0)} \oplus \mathcal{H}_0 \to \mathcal{H}_0 \oplus N_1^{(0)}, \tag{5}$$

$\mathcal{U}_0^*$ діє як зсув на "хвостах"

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_0^* :&\ \ N_1^{(k)} \to N_1^{(k-1)}, \quad k \le -1, \\ \mathcal{U}_0^* :&\ \ N_2^{(k)} \to N_2^{(k-1)}, \quad k \ge 1. \end{aligned} \tag{6}$$

Визначимо масштаб $i_0 : N_1 \oplus N_2 \to \mathcal{K}_0$ за допомогою наступних ототожнень:

$$\begin{aligned} i_0^{(2)} :&\ \ N_2 \to N_2^{(0)}, \\ i_0^{(1)} :&\ \ N_1 \to \mathcal{U}_0^* N_1^{(-1)} \stackrel{def}{=\!=} N_1^{(0)} \subseteq \mathcal{H}_0. \end{aligned} \tag{7}$$

Розглянемо зараз унітарну систему розсіювання

$$(\mathcal{U}_0, [i_0, \rho]; \mathcal{K}_0, N_1 \oplus N_2 \oplus \mathcal{E}).$$

Позначимо її спектральну функцію через Σ

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{N_1} & s & r_1 \\ s^* & \mathbf{1}_{N_2} & r_2^* \\ r_1^* & r_2 & \sigma_0 \end{bmatrix} : N_1 \oplus N_2 \oplus \mathcal{E} \to N_1 \oplus N_2 \oplus \mathcal{E}. \tag{8}$$

Оскільки $\rho : \mathcal{E} \to \mathcal{H}_0$, то $r_1(\zeta)$ аналітична в $\mathbb{D}$, а $r_2(\zeta)^*$ антианалітична в $\mathbb{D}$ і $r_2(0)^* = 0$. Крім того показано що r_1 є сильною H_+^2 оператор-функцією, а r_2^* є сильною H_-^2 оператор-функцією. Доведено наступну теорему.

Теорема 2.12. Нехай $\mathcal{H}_0$ це Ґільбертів простір і V це ізометричний оператор в $\mathcal{H}_0$. Спектральні функції σ вигляду (2) унітарних розширень ізометрії V параметризовані формулою

$$\sigma = \sigma_0 + r_2 \omega (\mathbf{1} - s\omega)^{-1} r_1 + r_1^* (\mathbf{1} - \omega^* s^*)^{-1} \omega^* r_2^* \tag{9}$$

де s, r_1, r_2, σ_0 визначені в (8), $\omega(\zeta) : N_1 \to N_2$ довільна оператор-функція класу Шура.

У *підрозділі 3.1* наведені відомості про Абстрактну Задачу Інтерполяції Кацнельсона, Хейфеця, Юдицького які будуть потрібні у подальшому. Дані задачі мають наступну структуру: X лінійний простір, $D(x, y)$ невід'ємна півтора-лінійна форма на X, T_1 і T_2 лінійні оператори в просторі X, $M_1 : X \to E_1$, $M_2 : X \to E_2$ лінійні відображення з простору X в задані Ґільбертові простори E_1 і E_2 відповідно. Ці об'єкти пов'язані тотожністю

$$D(T_1x, T_1y) + < M_1x, M_1y >_{E_1} = D(T_2x, T_2y) + < M_2x, M_2y > . \tag{10}$$

Ми будемо використовувати такі позначення

$$L^w = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & w \\ w^* & \mathbf{1} \end{bmatrix}^{1/2} \begin{bmatrix} L^2(E_2) \\ L^2(E_1) \end{bmatrix}, \tag{11}$$

наділена нормою образу;

$$H^w = L^w \cap \begin{bmatrix} H^2_+(E_2) \\ H^2_-(E_1) \end{bmatrix}, \tag{12}$$

з нормою індукованої з L^w. Тут L^2 це простір квадратично інтегровних відносно міри Лебега вектор-функцій на одиничному колі $\mathbb{T}$; H^2_+, H^2_- відповідні простори Харді.

Аналітична в одиничному крузі $\mathbb{D} = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| < 1\}$ стискуюча оператор-функція $w(\zeta) : E_1 \to E_2$ називається розв'язком задачі якщо існує лінійне відображення

$$F : X \to H^w$$

таке що

$$(i) \qquad \bar{t}((FT_1x)(t) + \begin{bmatrix} w(t) \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} M_1x) = (FT_2x)(t) + \bar{t} \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ w(t)^* \end{bmatrix} M_2X, \tag{13}$$

для майже всіх t на одиничному колі $\mathbb{T} = \{t \in \mathbb{C} : |t| = 1\}$;

$$(ii) \qquad \|Fx\|^2_{H^w} \leq D(x, x). \tag{14}$$

Невід'ємна форма D задає в просторі X структуру Ґільбертового простору (після факторизації і поповнення). Цей Ґільбертів простір будемо позначати через H_0. Тоді рівність (10) означає ізометричність наступного оператора

$$V : E_1 \oplus H_0 \to H_0 \oplus E_2, \tag{15}$$

з областю визначення d_V і областю значень Δ_V Відображення F може бути продовжено по неперервності на H_0 зі збереженням нерівності

$$\|Fh_0\|^2_{H^w} \leq \|h_0\|^2_{H_0}. \tag{16}$$

Покладемо

$$N_{d_V} = (E_1 \oplus H_0) \ominus d_V \;\text{ і }\; N_{\Delta_V} = (H_0 \oplus E_2) \ominus \Delta_V. \tag{17}$$

і визначимо унітарний вузол

$$A_0 : N_2 \oplus E_1 \oplus H_0 \to N_1 \oplus E_2 \oplus H_0 \tag{18}$$

де N_1 і N_2 копії N_{d_V} и N_{Δ_V} відповідно, як

$$\begin{aligned} A_0 \Big|\, d_V &= F, \\ A_0 : N_{d_V} \to N_1 &\qquad \text{ототожнення}, \\ A_0 : N_2 \to N_{\Delta_V} &\qquad \text{ототожнення}. \end{aligned} \tag{19}$$

Позначимо через $S(\zeta)$ характеристичну функцію A_0:

$$S(\zeta) = P_{N_1 \oplus E_2} A_0 (\mathbf{1} - \zeta P_{H_0} A)^{-1} \Big|_{N_2 \oplus E_1},$$

$$S(\zeta) = \begin{bmatrix} s(\zeta) & s_1(\zeta) \\ s_2(\zeta) & s_0(\zeta) \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} N_2 \\ E_1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} N_1 \\ E_2 \end{bmatrix}. \tag{20}$$

Нехай $A_1 : N_1 \oplus H_1 \to H_1 \oplus N_2$ це довільний унітарний вузол з простором входу N_1 і простором виходу N_2. Нехай $\omega(\zeta)$ це його характеристична функція, $\omega(\zeta) : N_1 \to N_2$. З'єднання A_0 і A_1 (останній служить в якості зворотного зв'язку) дає унітарний вузол A, який розширює ізометрію V

$$A : E_1 \oplus H \to H \oplus E_1,$$

де $H = H_0 \oplus H_1$. A є мінімальним розширенням V тоді і тільки тоді коли вузол A_1 є простим. Характеристичні функції цих розширень A складають в точності множину всіх розв'язків АЗІ. Звідси виходить формула що описує всі розв'язки задачі

$$w = s_0 + s_2 \omega (\mathbf{1} - s\omega)^{-1} s_1. \tag{21}$$

З будь-яким унітарною вузлом $A : E_1 \oplus H \to H \oplus E_1$ пов'язане перетворення Фур'є $\mathcal{F}_A$, що відображає простір H на простір де Бранжа - Ровняка H^w, де w це характеристична функція вузла A

$$(\mathcal{F}_A h)(\zeta) = \begin{bmatrix} (\mathcal{F}_A^+ h)(\zeta) \\ \\ (\mathcal{F}_A^- h)(\zeta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{E_2} A (\mathbf{1}_{H \oplus E_1} - \zeta P_H A)^{-1} h \\ \\ \overline{\zeta} P_{E_1} A^* (\mathbf{1}_{H \oplus E_2} - \overline{\zeta} P_H A^*)^{-1} h \end{bmatrix}.$$

Це відображення в загальному випадку є частковою ізометрією. Воно унітарно тоді і тільки тоді коли вузол A простий (тобто, в просторі H немає підпростору, який приводить A).

Для вузла A, що є з'єднанням вузла A_0 з вузлом A_1, який служить зворотним зв'язком, має місце наступна формула для представлення Фур'є

$$\mathcal{F}_A \begin{bmatrix} h_0 \\ \\ h_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi\omega & \mathbf{1}_{E_2} & 0 & 0 \\ \\ 0 & 0 & \varphi^*\omega^* & \mathbf{1}_{E_1} \end{bmatrix} \mathcal{F}_{A_0} h_0 + \begin{bmatrix} \psi & 0 \\ \\ 0 & \varphi^* \end{bmatrix} \mathcal{F}_{A_1} h_1 \,, \tag{22}$$

де

$$\varphi(\zeta) = (\mathbf{1}_{N_1} - s(\zeta)\omega(\zeta))^{-1} s_1(\zeta)$$

і

$$\psi(\zeta) = s_2(\zeta)(\mathbf{1}_{N_2} - \omega(\zeta)s(\zeta))^{-1}.$$

Відображення $F : X \to H^w$, яке бере участь в постановці задачі, при цьому дорівнює

$$Fx = \mathcal{F}_A[x] = \begin{bmatrix} \psi\omega & \mathbf{1}_{E_2} & 0 & 0 \\ \\ 0 & 0 & \varphi^*\omega^* & \mathbf{1}_{E_1} \end{bmatrix} \mathcal{F}_{A_0}[x] \ . \tag{23}$$

Припустимо що вузли A_0 і A_1 є простими (тобто відображення $\mathcal{F}_{A_0}$ і $\mathcal{F}_{A_1}$ є унітарними). Їх з'єднання - вузол A - проте може не бути простим. Далі наводяться дві теореми які дають критерії простоти цього вузла A.

Теорема 3.1. Припустимо що вузол A отримано як результат з'єднання простого вузла A_0 з простим зворотним зв'язком A_1. Тоді вузол A є простим тоді і тільки тоді коли має місце рівність

$$\begin{bmatrix} \dfrac{1_{N_2} + \omega(\zeta)s(\zeta)}{1_{N_2} - \omega(\zeta)s(\zeta)} & 2\omega(\zeta)(1_{N_1} - s(\zeta)\omega(\zeta))^{-1} \\ \\ 2s(\zeta)(1_{N_2} - \omega(\zeta)s(\zeta))^{-1} & \dfrac{1_{N_1} + s(\zeta)\omega(\zeta)}{1_{N_1} - s(\zeta)\omega(\zeta)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \omega(0) \\ -\omega(0)^* & 0 \end{bmatrix}$$

$$+ \int_{\mathbb{T}} \frac{t+\zeta}{t-\zeta} \begin{bmatrix} \psi^* & \omega\varphi \\ \omega^*\psi^* & \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1_{E_1} & w \\ w^* & 1_{E_2} \end{bmatrix}^{[-1]} \begin{bmatrix} \psi & \psi\omega \\ \varphi^*\omega^* & \varphi^* \end{bmatrix} m(dt), \tag{24}$$

де $\omega(\zeta) : N_1 \to N_2$ характеристична функція вузла A_1, S характеристична функція (20) вузла A_0, φ і ψ визначені вище. Зворотна матриця розуміється в сенсі Мура-Пенроуза.

Зауваження 3.2. Зауважимо що ліва частина (24) записана як

$$a_\omega(\zeta) \equiv \frac{I_{N_2 \oplus N_1} + \begin{bmatrix} 0 & \omega \\ s & 0 \end{bmatrix}}{I_{N_2 \oplus N_1} - \begin{bmatrix} 0 & \omega \\ s & 0 \end{bmatrix}}, \tag{25}$$

де I це одинична матриця. Відзначимо також що матриця-функція $a_\omega(\zeta)$ має невід'ємну дійсну частину.

Як зазначалося вище, вузол A простий тоді і тільки тоді коли відображення $\mathcal{F}_A$ є унітарним. Виявляється, що

Теорема 3.3. Вузол A простий тоді і тільки тоді коли обмеження $\mathcal{F}_A$ на H_0 унітарно. Тим самим, вузол A простий тоді і тільки тоді коли для відображення

F має місце рівність

$$\|Fx\|^2_{H^w} = D(x,x), \quad \text{при всіх } x \in \mathcal{X},$$

замість нерівності (14).

У *підрозділі 3.2* Абстрактну Задачу Інтерполяції, викладену у підрозділі 3.1, переформульовано в термінах унітарних систем розсіювання з метою подальшого узагальнення. Поняття унітарної системи розсіювання узагальнює поняття унітарного вузла. По-перше, перетворюються дані задачі. Позначимо як $\tilde{X}$ простір векторів виду

$$\tilde{x} = (\cdots e_1^{(1)}, e_2^{(0)}, x, e_2^{(-1)}, e_2^{(-2)}, \cdots) \tag{26}$$

де

$$x \in X,\ e_1^{(k)} \in E_1,\ k \geq 0 \ \text{ і } \ \sum_{k=0}^{\infty} \|e_1^{(k)}\|^2 < \infty,$$

$$e_2^{(k)} \in E_2,\ k \leq -1 \ \text{ і } \ \sum_{k=-\infty}^{-1} \|e_2^{(k)}\|^2 < \infty.$$

Визначимо

$$\tilde{D}(\tilde{x},\tilde{x}) = \sum_{k=0}^{\infty} \|e_1^{(k)}\|^2 + D(x,x) + \sum_{k=-\infty}^{-1} \|e_2^{(k)}\|^2, \tag{27}$$

$$\tilde{T}_1\tilde{x} = (\cdots, e_1^{(1)}, e_1^{(0)}, M_1x, T_1x, e_2^{(-1)}, e_2^{(-2)}, e_2^{(-3)}, \cdots), \tag{28}$$

і

$$\tilde{T}_2\tilde{x} = (\cdots, e_1^{(2)}, e_1^{(1)} \ ,\ e_1^{(0)}, T_2x, M_2x \ , e_2^{(-1)}, e_2^{(-2)}, \cdots). \tag{29}$$

До даних задачі додамо ще одне

$$\rho_0 : \begin{bmatrix} \bar{t}E_2 \\ E_1 \end{bmatrix} \to \tilde{X}, \tag{30}$$

що визначається наступним чином

$$\rho_0 : E_1 \to E_1^{(0)} \ ; \ \ \rho_0 : \bar{t}E_2 \to E_2^{(-1)} \ .$$

Позначимо як

$$E = \begin{bmatrix} \bar{t}E_2 \\ E_1 \end{bmatrix}$$

з нормою

$$\| \begin{bmatrix} \bar{t}e_2 \\ e_1 \end{bmatrix} \|^2 = \|e_2\|^2 + \|e_1\|^2.$$

Відображення $F : X \to H^w$ Розділу 3.1 , що беруть участь у постановці задачі, можна продовжити до

$$\tilde{F} : \tilde{X} \to L^w \tag{31}$$

наступним чином

$$(\tilde{F}\tilde{x})(t) = \begin{bmatrix} w(t) \\ \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} t^k e_1^{(k)} + Fx + \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \\ w(t)^* \end{bmatrix} \sum_{k=-\infty}^{-1} \bar{t}^{|k|} e_2^{(k)}, \tag{32}$$

$|t| = 1$, де збіжність розуміється в L^2 сенсі. Зауважимо що при цьому

$$\tilde{F}\rho_0 \begin{bmatrix} \bar{t}e_2 \\ e_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & w(t) \\ \\ w(t)^* & \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{t}e_2 \\ e_1 \end{bmatrix} \subset L^w. \tag{33}$$

Тепер Абстрактну Задачу Інтерполяції (АЗІ) може бути сформульовано еквівалентним чином

Абстрактна Задача Інтерполяції˜ (АЗІ˜). Дані задачі: векторний простір $\tilde{X}$, невід'ємна півтора-лінійна форма $\tilde{D}$ на $\tilde{X}$, лінійні оператори $\tilde{T}_1$і $\tilde{T}_2$ діючі в $\tilde{X}$; ці дані пов'язані наступною тотожністю

$$\tilde{D}(\tilde{T}_1\tilde{x}, \tilde{T}_1\tilde{y}) = \tilde{D}(\tilde{T}_2\tilde{x}, \tilde{T}_2\tilde{y}) \tag{34}$$

для усіх $\tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{X}$. Крім того задане відображення (масштаб) з Ґільбертова простору E в $\tilde{X}$

$$\rho_0 : E \to \tilde{X}. \tag{35}$$

Гармонійна в крузі $\mathbb{D}$, невід'ємна оператор-функція $\sigma(\zeta) : E \to E$ (або відповідна операторно-значна міра $\sigma(dt)$ на одиничному колі $\mathbb{T}$) називається розв'язком АЗІ˜ якщо існує лінійне відображення

$$\tilde{F} : \tilde{X} \to L^\sigma, \tag{36}$$

(тут як L^σ визначено простір Хеллінгера асоційований з σ, див. Розділ 2.2) таке що

$$\begin{aligned} (i) \quad & \tilde{F}\tilde{T}_2\tilde{x} = \bar{t}\tilde{F}\tilde{T}_1\tilde{x} \\ (ii) \quad & \|\tilde{F}\tilde{x}\|^2_{L^\sigma} \le \tilde{D}(\tilde{x}, \tilde{x}) \\ (iii) \quad & \tilde{F}\rho_0 e = \sigma(dt)e, \ \forall e \in E. \end{aligned} \tag{37}$$

Твердження 3.4. Якщо дані АЗІ˜ отримані з даних АЗІ як описано вище, то ці дві задачі є еквівалентними.

Якщо ми відмовимося від цієї спеціальної структури даних АЗІ˜ , то отримаємо більш загальну постановку задачі. Так як і в попередній постановці, $\tilde{D}$ задає Гільбертову структуру на просторі $\tilde{X}$. В результаті приходимо к простору $\tilde{H}_0$. Далі визначаємо ізометрію $\tilde{V}$:

$$\tilde{V} : [\tilde{T}_1\tilde{x}] \to [\tilde{T}_2\tilde{x}] \tag{38}$$

з областю визначення

$$d_{\tilde{V}} = Clos\{[\tilde{T}_1\tilde{x}], \tilde{x} \in \tilde{X}\} \subseteq \tilde{H}_0, \tag{39}$$

и областю значень

$$\Delta_{\tilde V} = Clos\{[\tilde T_2 \tilde x], \tilde x \in \tilde X\} \subseteq \tilde H_0. \tag{40}$$

В силу нерівності

$$\|\tilde F \tilde x\|^2_{L^w} \leq \tilde D(\tilde x, \tilde x), \tag{41}$$

відображення $\tilde F$ може розглядатися як відображення з $\tilde H_0$,

$$\tilde F : \tilde H_0 \to L^w.$$

Нерівність (41) при цьому набирає вигляд

$$\|\tilde F \tilde h_0\|^2_{L^w} \leq \|\tilde h_0\|^2_{\tilde H_0}. \tag{42}$$

А властивість (i) з (37) означає що

$$\tilde F \tilde V \Big| d_{\tilde V} = \bar t \tilde F \Big| d_{\tilde V}. \tag{43}$$

Опис розв'язків і в цьому випадку пов'язано з унітарними розширеннями $\tilde V$, однак тепер обчислювати треба не характеристичну функцію розширення, а його спектральну функцію відносно масштабу ρ_0.

У *підрозділі 3.3* дається розв'язок АЗІ˜ в загальному випадку. З даними АЗІ˜ природно пов'язаний Ґільбертів простір $\widetilde H_0$ і ізометрія (38) $\widetilde V$ в ньому з областю визначення $d_{\widetilde V}$ і областю значень $\Delta_{\widetilde V}$. Нехай $N_{d_{\widetilde V}}$ і $N_{\Delta_{\widetilde V}}$ будуть ортогональні доповнення $d_{\widetilde V}$ і $\Delta_{\widetilde V}$ в H_0. Підпростори $N_{d_{\widetilde V}}$ і $N_{\Delta_{\widetilde V}}$ будемо називати дефектними підпросторами задачі.

Теорема 3.6. Нехай $\widetilde V$ це ізометрія (38) пов'язана з даними АЗІ˜ і $\mathcal U^*$ унітарне розширення $\widetilde V$ (тобто, $\mathcal U^* : \mathcal K \to \mathcal K$, де $\mathcal K \supseteq \widetilde H_0$ і $\mathcal U^* \Big| d_{\widetilde V} = \widetilde V$). Тоді

$$\sigma(\zeta) = \rho_0^* \mathcal P_{\mathcal U}(\zeta) \rho_0$$

є розв'язком АЗІ˜ де ρ_0 це оператор (35) і $\mathcal P_{\mathcal U}(\zeta)$ ядро Пуассона (3) оператора $\mathcal U$. Більш того, всі розв'язки АЗІ˜ виходять таким чином. Нагадаємо що трійка $(\mathcal K, \mathcal U^*, \rho_0)$ є унітарною системою розсіювання і $\sigma(\zeta)$ є її спектральної функцією відносно масштабу ρ_0 (див. Розділ 2.1).

Комбінуючи Теореми 2.12 і 3.6 отримаємо опис всіх розв'язків АЗІ˜ .

Теорема 3.7. Всі розв'язки АЗІ˜ описуються наступною формулою

$$\sigma_\rho = \sigma_0 + r_2 \omega (\mathbf 1 - s\omega)^{-1} r_1 + r_1^* (\mathbf 1 - \omega^* s^*)^{-1} \omega^* r_2^*. \tag{44}$$

де s, r_1, r_2, σ_0 визначені в (8), а ω є довільною оператор-функцією класу Шура $\omega(\zeta) : N_1 \to N_2$.

Зауваження 3.8. У випадку ортогональної АЗІ (див. Розділ 3.1), $E = E_1 \oplus E_2$, $\rho_0(E_1)$ і $\rho_0(E_2)$ є блукаючими підпросторами для $\mathcal U_0^*$ з ортогональними напівканалами. Тоді σ_0 в (8) має спеціальний вигляд

$$\sigma_0 = \begin{bmatrix} \mathbf 1 & s_0^* \\ s_0 & \mathbf 1 \end{bmatrix},$$

де s_0 функція класу Шура, r_1 і r_2 мають вид

$$r_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ s_2 \end{bmatrix}, \quad r_1 = \begin{bmatrix} s_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Отже, всі розв'язки (44) σ_ρ також мають вигляд

$$\sigma_\rho = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & w^* \\ w & \mathbf{1} \end{bmatrix},$$

де w функції класу Шура. Таким чином приходимо до відомої раніше спрощеної формули для опису розв'язків ортогональної АЗІ

$$w = s_0 + s_2\omega(\mathbf{1} - s\omega)^{-1}s_1.$$

У *розділі 4* вивчено Задачу про Ліфтинг: показано що вона вкладається в схему Абстрактної Задачі Інтерполяції розглянуту вище, встановлено специфіку даних задачі про Ліфтинг та розв'язано відповідну зворотну задачу. Завдяки специфіці даних, в дослідженні цієї задачі вдається просунутися набагато далі ніж в загальному випадку.

Відомо що загальний випадок Теореми про Ліфтинг зводиться до наступного окремого, який ми і розглядаємо.

Задача 4.2. (Задача про Ліфтинг) Задані два унітарних оператори $\mathcal{U}'$ і $\mathcal{U}''$ в Ґільбертових просторах $\mathcal{K}'$ і $\mathcal{K}''$, відповідно; задані підпростори $\mathcal{K}'_+ \subset \mathcal{K}'$ і $\mathcal{K}''_- \subset \mathcal{K}''$, які є $*$-циклічними для $\mathcal{U}'$ і $\mathcal{U}''$ відповідно (тобто, найменший підпростір що приводить $\mathcal{U}'$ та містить $\mathcal{K}'_+$ це увесь простір $\mathcal{K}'$, аналогічно для $\mathcal{U}''$ і $\mathcal{K}''_-$) і такі що

$$\mathcal{U}'\mathcal{K}'_+ \subset \mathcal{K}'_+, \qquad \mathcal{U}''^*\mathcal{K}''_- \subset \mathcal{K}''_-; \tag{45}$$

заданий стискуючий оператор $X \colon \mathcal{K}'_+ \to \mathcal{K}''_-$, сплітаючий наступні оператори

$$X\mathcal{U}'|_{\mathcal{K}'_+} = P_{\mathcal{K}''_-}\mathcal{U}''X. \tag{46}$$

Потрібно описати всі стискуючі оператори $Y : \mathcal{K}' \to \mathcal{K}''$, які сплітають $\mathcal{U}'$ і $\mathcal{U}''$, $Y\mathcal{U}' = \mathcal{U}''Y$ і такі що є ліфтингами X

$$P_{\mathcal{K}''_-}Y|_{\mathcal{K}'_+} = X. \tag{47}$$

Для задачі Нехарі (ще більш окремого випадку Задачі про Ліфтинг),

$$\mathcal{K}' = L^2(E_1), \quad \mathcal{K}'' = L^2(E_2), \quad \mathcal{K}'_+ = H^2(E_1), \quad \mathcal{K}''_- = H^2_-(E_2),$$

$\mathcal{U}'$ и $\mathcal{U}''$ оператори множення на незалежну змінну t.

З даними Задачі про Ліфтинг зв'яжемо Абстрактну Задачу Інтерполяції (див. Розділ 3.2): лінійний простір $\begin{bmatrix} \mathcal{K}''_- \\ \mathcal{K}'_+ \end{bmatrix}$; форму D на ньому, що задана матрицею $\begin{bmatrix} I & X \\ X^* & I \end{bmatrix}$; оператори T_1 і T_2

$$T_1 = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \mathcal{U}' \end{bmatrix}, \quad T_2 = \begin{bmatrix} \mathcal{U}''^* & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}.$$

Співвідношення між операторами $\mathcal{U}'$, $\mathcal{U}''$ і X (дані Задачі про Ліфтинг) тягнуть виконання тотожності

$$D(T_1x, T_1y) = D(T_2x, T_2y). \tag{48}$$

Таким чином отримуємо Ґільбертів простір $\mathcal{H}_0$

$$\mathcal{H}_0 = \operatorname{clos}\begin{bmatrix}\mathcal{K}''_-\\ \mathcal{K}'_+\end{bmatrix} \tag{49}$$

із скалярним добутком

$$\left\langle \begin{bmatrix}k''_-\\ k'_+\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\ell''_-\\ \ell'_+\end{bmatrix} \right\rangle_{\mathcal{H}_0} = \left\langle \begin{bmatrix}I & X\\ X^* & I\end{bmatrix} \begin{bmatrix}k''_-\\ k'_+\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\ell''_-\\ \ell'_+\end{bmatrix} \right\rangle_{\mathcal{K}''_-\oplus\mathcal{K}'_+}. \tag{50}$$

Ізометричний оператор V, що відповідає тотожності (48), задається як

$$V = \begin{bmatrix}\mathcal{U}''^* & 0\\ 0 & \mathcal{U}'^*\end{bmatrix} : \begin{bmatrix}k''_-\\ \mathcal{U}'k'_+\end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix}\mathcal{U}''^* k''_-\\ k'_+\end{bmatrix}. \tag{51}$$

Область визначення і область значень V мають вигляд $(V : \mathcal{D} \to \mathcal{D}_*)$

$$\mathcal{D} := \operatorname{clos}\begin{bmatrix}\mathcal{K}''_-\\ \mathcal{U}'\mathcal{K}'_+\end{bmatrix} \subset \mathcal{H}_0, \qquad \mathcal{D}_* := \operatorname{clos}\begin{bmatrix}\mathcal{U}''^*\mathcal{K}''_-\\ \mathcal{K}'_+\end{bmatrix} \subset \mathcal{H}_0. \tag{52}$$

Залишається задати масштаб ρ_0. Зауважимо що це можна зробити різними способами. Як E_1 і E_2 можна вибрати будь-які $*$-циклічні підпростори $\mathcal{U}'$ і $\mathcal{U}''$, що містяться в $\mathcal{K}'_+$ і $\mathcal{K}''_-$, відповідно. Нехай $E_2 \oplus E_1$ є формальна ортогональна сума. Тепер задамо

$$\rho_0 : E_2 \oplus E_1 \to \begin{bmatrix}\mathcal{K}''_-\\ \mathcal{K}'_+\end{bmatrix},$$

ρ_0 є тотожним на E_1 і на E_2, відповідно.

Розв'язки Абстрактної Задачі Інтерполяції з цими даними, в силу специфіки останніх, мають вигляд

$$\sigma = \begin{bmatrix}\sigma'' & w\\ w^* & \sigma'\end{bmatrix} \geq 0, \tag{53}$$

де σ' і σ'' це спектральні функції $\mathcal{U}'$ і $\mathcal{U}''$ відносно масштабів E_1 і E_2, відповідно. Для задачі Нехарі (нагадаємо, $\mathcal{K}' = L^2(E_1)$, $\mathcal{K}'' = L^2(E_2)$, $\mathcal{K}'_+ = H^2(E_1)$, $\mathcal{K}''_- = H^2_-(E_2)$, $\mathcal{U}'$ и $\mathcal{U}''$ оператори множення на незалежну змінну t) ці самі E_1 і E_2 можуть бути обрані в якості масштабних підпросторів.

Зв'язок між розв'язками Задачі про Ліфтинг Y і розв'язками відповідної Абстрактної Задачі Інтерполяції w мабуть простіше всього пояснити за допомогою функціональних моделей : якщо $L^{\sigma'}$ і $L^{\sigma''}$ простори Хеллінгера що відповідають мірам σ' і σ'', то на щільній в $L^{\sigma'}$ множині $\sigma' p$, де p це поліноми від t і $\bar{t}$, Y задається наступним чином

$$Y(\sigma' p) = wp.$$

Стисливість цього оператора еквівалентна нерівності (53). Для задачі Нехарі це співвідношення набуває особливо простий вигляд: при виборі масштабів як зазначено вище, міри σ' і σ'' збігаються з мірою Лебега, отже, міра w абсолютно неперервна відносно міри Лебега і дія оператора Y зводиться до множення на функцію $\tilde{w}$

$$\tilde{w} : L^2(E_1) \to L^2(E_2).$$

У загальному випадку відповідність між Y і w взаємно однозначна. Міра w називається *символом* стиснення X що відповідає ліфтингу Y.

Таким чином опис розв'язків Задачі про Ліфтинг Y зводиться до опису символів w, тобто до опису розв'язків відповідної Абстрактної Задачі Інтерполяції. Спектральна функція універсального розширення, в силу специфіки даних, має вигляд

$$\Sigma_0 = \begin{bmatrix} mI_{N_1} & s & 0 & s_1 \\ s^* & mI_{N_2} & s_2^* & 0 \\ 0 & s_2 & \sigma'' & s_0 \\ s_1^* & 0 & s_0^* & \sigma' \end{bmatrix} : N_1 \oplus N_2 \oplus E_2 \oplus E_1 \to N_1 \oplus N_2 \oplus E_2 \oplus E_1, \qquad (54)$$

де m міра Лебега. При цьому s, s_2 і s_1 абсолютно неперервні відносно міри Лебега и аналітичні, $s(0) = 0$. В цьому випадку загальна формула опису розв'язків Абстрактної Задачі Інтерполяції зводиться до формули що описує символи ліфтингів

$$w = s_0 + s_2(I - \omega s)^{-1}\omega s_1. \qquad (55)$$

Зворотна Задача про Ліфтинг полягає в характеризації тих четвірок s, s_2, s_1 і s_0 що виникають в формулах (55), які описують множини розв'язків Задач про Ліфтинг. В дисертації отримано повний розв'язок цієї зворотної задачі.

Теорема 4.18. Формула (55) описує всі розв'язки (символи) деякої Задачі про Ліфтинг тоді й тільки тоді коли виконуються наступні умови

1. s, s_2 і s_1 аналітичні, $s(0) = 0$;
2. $$\begin{bmatrix} mI_{N_1} & s \\ s^{\,*} & mI_{N_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & s_1 \\ {s_2}^* & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma'' & s_0 \\ {s_0}^* & \sigma' \end{bmatrix}^{[-1]} \begin{bmatrix} 0 & s_2 \\ {s_1}^* & 0 \end{bmatrix}, \qquad (56)$$
   де m це міра Лебега;
3. $$\Sigma_0 \begin{bmatrix} N_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \operatorname{clos} \Sigma_0 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ p_- \\ p_+ \end{bmatrix} \ominus \operatorname{clos} \Sigma_0 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ p_- \\ tp_+ \end{bmatrix},$$

$$\bar{t}\ \Sigma_0 \begin{bmatrix} 0 \\ N_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \operatorname{clos}\ \Sigma_0 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ p_- \\ p_+ \end{bmatrix} \ominus \operatorname{clos}\ \Sigma_0 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \bar{t}p_- \\ p_+ \end{bmatrix}, \tag{57}$$

де p_+ і p_- поліноми що належать $H^2(E_1)$ і $H^2_-(E_2)$, відповідно.

Зауважимо що властивість (56) є узагальненням умови Неванлінни- Адамяна - Арова - Крейна.

У наступній теоремі доведено важливі додаткові властивості коефіцієнтів формули (55).

Теорема 4.22. Коефіцієнти формули (55) мають наступні екстремальні властивості:

1. Виконується нерівність

$$\sigma' - s_0^* \sigma''^{[-1]} s_0 \geq s_1^* \frac{1}{m} s_1. \tag{58}$$

Більш того, s_1^* є *екстремальною* в наступному сенсі: якщо r_1^* сильна $\mathcal{L}(E_1, \mathcal{N})$-значна антианалітична міра така що

$$\sigma' - s_0^* \sigma''^{[-1]} s_0 \geq r_1^* \frac{1}{m} r_1, \tag{59}$$

то існує стискуюча сильна антианалітична $\mathcal{L}(\mathcal{N}, N_1)$-значна функція θ_1^* така що

$$r_1^* = s_1^* \theta_1^* \tag{60}$$

(рівність між мірами розуміється в сильному сенсі).

2. Виконується нерівність

$$\sigma'' - s_0 \sigma'^{[-1]} s_0^* \geq s_2 \frac{1}{m} s_2^*. \tag{61}$$

Більш того, s_2 є *екстремальною* в наступному сенсі: якщо r_2 сильна $\mathcal{L}(\mathcal{N}_*, E_2)$-значна аналітична міра така що

$$\sigma'' - s_0 \sigma'^{[-1]} s_0^* \geq r_2 \frac{1}{m} r_2^*, \tag{62}$$

то існує стискуюча сильна аналітична $\mathcal{L}(\mathcal{N}_*, N_2)$-значна функція θ_2 така що

$$r_2 = s_2 \theta_2. \tag{63}$$

Таким чином, задана s_0 така що $\begin{bmatrix} \sigma'' & s_0 \\ s_0^* & \sigma' \end{bmatrix} \geq 0$, однозначно визначає s_1 і s_2 як екстремальні функції в нерівностях (58) (61), відповідно. Нагадаємо, що тоді і s визначена однозначно за формулою (56).

У *підрозділі 4.9* в якості додатку викладених вище загальних результатів щодо задачі про ліфтинг обговорюється класична задача Нехарі. Ця задача формулюється в такий спосіб ("часова" версія): *задана послідовність* $\{\gamma_n\}_{n=-1,-2,\ldots}$ *комплексних чисел, що пронумерована від'ємними цілими індексами; потрібно описати всі її продовження в область позитивних індексів* $\{\gamma_n\}_{n=0,1,2,\ldots}$ *такі що двостороння Тьоплiцева матриця* $\Gamma_e = [\gamma_{i-j}]_{i,j\in\mathbb{Z}}$ *є стискуючим оператором в* $\ell^2(\mathbb{Z})$, $\|\Gamma_e\| \le 1$.

Еквівалентна "частотна" версія постановки задачі Нехарі є такою: *задана послідовність комплексних чисел* $\{\gamma_n\}_{n\in\mathbb{Z}_-}$*, описати всі* L^∞*-функції* w *на одиничному колі* $\mathbb{T}$ *такі що*

$$\|w\|_\infty \le 1 \text{ і } w_n = \gamma_n \text{ при } n = -1, -2, -3, \ldots,$$

де $w(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} w_n t^n$ розклад w в ряд Фур'є.

Задача Нехарі є окремим випадком задачі про ліфтинг, що відповідає наступним даним: простори коефіцієнтів є одновимірними $\mathcal{G}' = \mathcal{G}'' = \mathbb{C}$,

$$\mathcal{K}' = L^2, \quad \mathcal{K}'' = L^2, \quad \mathcal{K}'_+ = H^2, \quad \mathcal{K}''_- = H^2_-,$$

$$X : H^2 \to H^2_-$$

є Ганкелевим оператором що визначається матрицею $[\gamma_{i-j}]_{i<0,\ j\ge 0}$ відносно стандартних базисів в H^2 і H^2_-. Також

$$X = P_- w | H^2,$$

де $\|w\|_\infty \le 1$ тоді і тільки тоді коли w і є розв'язком задачі. Відомо що для Скалярної задачі Нехарі

$$\dim N_1 = \dim N_2 = 1, \quad \text{або} \quad \dim N_1 = \dim N_2 = 0.$$

Також відомо що в першому випадку розв'язків нескінченно багато (задача називається невизначеною), а у другому випадку задача має єдиний розв'язок (задача називається визначеною). З формули що параметризує рішення загальної задачі про ліфтинг комутанту (Теорема 4.8 та Зауваження 4.9 у Розділі 4.5) та властивостей коефіцієнтів (Розділ 4.8) можна отримати класичну теорему Адамяна-Арова-Крейна

Теорема (Адамяна, Арова, Крейна) Множина розв'язків будь-якої невизначеної задачі Нехарі описується формулою (майже всюди на $\mathbb{T}$)

$$w = -\frac{a}{\overline{a}}\overline{b} + \frac{\omega a^2}{1-\omega b} = \frac{a}{\overline{a}}\frac{\omega - \overline{b}}{1-\omega b}, \tag{64}$$

де ω довільна аналітична в крузі функція, $|\omega| \le 1$ (тобто функція класу Шура), функції a і b визначаються даними задачі і мають властивості

1. $a, b \in H^\infty$,

2. a зовнішня, $a(0) > 0$, $b(0) = 0$,

3. $|a|^2 + |b|^2 = 1$ майже всюди на $\mathbb{T}$.

Визначення 4.26. Пара функцій (a, b), що має перелічені вище властивості 1-3 називається, дотримуючись термінології Д. З. Арова, *γ-твірною парою.*

Назва пояснюється тим що будь яка пара функцій (a, b) з властивостями 1-3 визначає за формулою (64) множину функцій w що мають спільні коефіцієнти Фур'є з від'ємними індексами, тобто всі ці функції є розв'язками якоїсь однієї задачі Нехарі. Але в загальному випадку ця формула творить не всі рішення цієї задачі.

Визначення 4.27. У тому випадку коли формула (64) творить *всі* розв'язки деякої задачі Нехарі, відповідна пара (a, b) називається *регулярною за Аровим γ-твірною парою.*

Детальніше ці визначення буде обговорено в Розділі 5.1. В дисертації отримано наступну характеризацію регулярних γ-твірних пар. Зауважимо що ця теорема є окремим випадком Теореми 4.18 з Розділу 4.8.

Теорема 4.28. γ-твірна пара (a, b) є регулярною тоді і тільки тоді коли на додаток до умов $1 - 3$ Теореми Адамяна-Арова-Крейна (a, b) задовольняє ще й четвертій умові

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \in \operatorname{clos} \left\{ \begin{bmatrix} ah \\ P_{_{H^2}} s_0 h \end{bmatrix} : h \in H^2 \right\} \tag{65}$$

де $s_0 := -\frac{a}{\bar{a}}\bar{b}$.

Зауваження 4.29. Відомо що формула $f = (a/(1-b))^2$ здійснює взаємно-однозначну відповідність між γ -твірними парами (a, b) і крайніми точками одиничної кулі в просторі H^1. Ця ж формула здійснює взаємно-однозначну відповідність між регулярними γ-твірними парами (a, b) і виступаючими точками одиничної кулі в просторі H^1. Дана вище характеризація регулярних γ-твірних пар є в той же час найкращою відомою характеризацією цих виступаючих точок.

У *розділі 5* розв'язано дві проблеми поставлені Д. Сарасоном.

У підрозділі 5.1 доведено наступну теорему, яка дає позитивну відповідь на першу проблему поставлену Д. Сарасоном.

Теорема 5.7. Для довільної γ-твірної пари (a, b) існує внутрішня функція θ така, що пара $(a, b\theta)$ є регулярною.

За Теоремою 4.28, регулярність пари $(a, b\theta)$ означає виконання умови (65) з $s_0\overline{\theta}$ замість s_0

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \in \operatorname{clos} \left\{ \begin{bmatrix} ah \\ P_+ s_0 \overline{\theta} h \end{bmatrix} : h \in H^2_+ \right\}. \tag{66}$$

Спочатку **Теорема 5.16** зводить загальний випадок до випадку сингулярної за Аровим пари (a, b).

Визначення 5.11. γ-твірна пара (a, b) називається *сингулярною за Аровим* якщо

$$s_0 = -\frac{a}{\overline{a}}\overline{b} \in H^\infty_+. \tag{67}$$

Це означає, що відображення (64) діє з $Ball(H^\infty_+)$ у $Ball(H^\infty_+)$, тобто, утворює аналітичні функції (функції з нульовою P_- частиною), але не усі такі функції.

Умова (64) інтерпретується як умова псевдопродовження

$$\frac{s_0}{a} = -\frac{\overline{b}}{\overline{a}}, \quad \text{м. в. на } \mathbb{T}. \tag{68}$$

Ліва частина рівності аналітична у $\mathbb{D}$, права антианалітична у $\mathbb{D}$, межові значення збігаються майже всюди на $\mathbb{T}$. Внутрішню функцію θ що забезпечує апроксимацію (66) побудовано в три етапи: **Лема 5.17, Наслідок 5.18** і **Теорема 5.19**.

Нагадаємо, що, якщо $h = \frac{1}{a} \in H^2$, то, за формулою (68), додатковий множник θ не потрібен. У загальному випадку функцію $\frac{1}{a} \notin H^2$ треба апроксимувати функціями з H^2. Визначимо

$$\tilde{h}_\epsilon \overset{\text{def}}{=} \frac{\frac{1}{a}}{1 + \epsilon\left|\frac{1}{a}\right|^2} = \frac{\frac{1}{a}}{1 + \epsilon + \epsilon\left|\frac{s_0}{a}\right|^2}, \quad \text{м.в. на } \mathbb{T}. \tag{69}$$

$\tilde{h}_\epsilon \in L^\infty$ і допускає аналітичне продовження у диск $\mathbb{D}$ (за допомогою (68)). А саме,

$$\tilde{h}_\epsilon = \frac{\frac{1}{a}}{1 + \epsilon + \epsilon\frac{s_0}{a} \cdot \frac{\overline{s_0}}{\overline{a}}} = \frac{\frac{1}{a}}{1 + \epsilon - \epsilon\frac{s_0}{a}\frac{b}{a}} = \frac{a}{a^2 + \epsilon(a^2 - s_0 b)}.$$

Розглянемо зовнішньо-внутрішню факторизацію знаменника $\tilde{h}_\epsilon$

$$a^2 + \epsilon(a^2 - s_0 b) = \theta_\epsilon \varphi_\epsilon.$$

Тоді, в силу Принципу Максимуму Смирнова,

$$h_\epsilon \overset{\text{def}}{=} \theta_\epsilon \tilde{h}_\epsilon = \tfrac{a}{\varphi_\epsilon} \in H^\infty_+. \tag{70}$$

Лема 5.17. Для усіх $|\zeta| < 1$, $\theta_\epsilon(\zeta) \to 1$ при $\epsilon \to 0$.

Наслідок 5.18. Можна вибрати послідовність $\epsilon_k \downarrow 0$ таку, що добуток $\prod_{k=1}^{\infty} \theta^2_{\epsilon_k}$ збігається у L^2 і тим самим визначає внутрішню функцію θ.

Теорема 5.19. $\begin{bmatrix} a h_{\epsilon_k} \\ P_+ s_0 \overline{\theta} h_{\epsilon_k} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ у L^2 при $k \to \infty$.

При доведенні цієї теореми використано що сингулярність пари (a, b) тягне

$$s_0 \overline{\theta} h_{\epsilon_k} = -\frac{\overline{\theta}}{\overline{\theta^2_{\epsilon_k}}}\overline{b}\ \overline{h}_{\epsilon_k} \in H^2_-.$$

У *підрозділі 5.2* вирішується (у негативному сенсі) друга проблема Д. Сарасона.

Визначення 5.21. Будемо говорити що γ-твірна пара (a, b) має властивість *абсолютної неперервності* (ac) якщо для будь-якої функції класу Шура ω міра $\sigma_{b\omega}$ в представленні Ріса-Герглотца

$$\frac{1 + b(\zeta)\omega(\zeta)}{1 - b(\zeta)\omega(\zeta)} = \int_{\mathbb{T}} \frac{t + \zeta}{t - \zeta} \sigma_{b\omega}(dt), \quad |\zeta| < 1$$

є абсолютно неперервною.

Як було доведено Адамяном, Аровим і Крейном, всі регулярні γ-твірні пари (a, b) мають таку властивість. Зауважимо що це також випливає з більш загальних результатів Розділу 4.8. Адамяном, Аровим і Крейном було сформульовано питання: чи є зворотне твердження вірним? Тобто, чи вірно що всяка γ-твірна пара (a, b), що має властивість (ac), регулярна? Твердження еквівалентне цьому було сформульовано Д. Сарасоном у вигляді гіпотези в зв'язку з вивченням виступаючих точок одиничної кулі в просторі H^1.

У цьому розділі доведено що це твердження не є вірним. Більш конкретно, показано що γ-твірні пари (a, b), які виникають при параметризації розв'язань межової інтерполяційної задачі (тісно пов'язаної з нескінченною степеневою проблемою моментів) мають властивість (ac), але є сингулярними, тобто ніяк не можуть бути регулярними.

Ідея доведення полягає в наступному. Межова інтерполяційна задача вкладається в схему ортогональної Абстрактної Задачі Інтерполяції (див. Розділ 3.1, (10) - (14)). Властивість (ac) випливає з того що для будь-якого розв'язку цієї задачі (точніше для асоційованого з розв'язком представлення Фур'є (23)) нерівність (15) в дійсності є рівністю

$$\|Fx\|^2_{H^w} = D(x, x)$$

Оскільки за самим змістом задачі всі її розв'язки лежать в H^∞, то в тому числі і центральний розв'язок $s_0 = -\frac{a}{\overline{a}}\overline{b}$ лежить в H^∞. Таким чином, для доказу сингулярності пари (a, b) достатньо довести що a є зовнішньою за Бьорлінгом.

Степенева проблема моментів формулюється наступним чином:

Задача 5.22. Нехай $c_0, c_1, \ldots$ задані дійсні числа. Потрібно знайти всі міри $\sigma(dx) \geq 0$ на дійсній осі $\mathbb{R}$ такі, що задані числа є моментами цих мір

$$c_k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \sigma(dx) \tag{71}$$

при всіх невід'ємних цілих k.

Критерій розв'язності добре відомий: проблема моментів є розв'язною тоді і тільки тоді коли

$$\sum_{k,j=0}^{N} c_{k+j} \xi_k \overline{\xi}_j \geq 0 \tag{72}$$

при всіх невід'ємних цілих N і $\xi_k \in \mathbb{C}$.

Нехай $\mathcal{X}$– це простір поліномів однієї змінної X з коефіцієнтами у $\mathbb{C}$, $\mathcal{X} = \{p = \sum_{k=0}^{N} \xi_k X^k, \xi_k \in \mathbb{C}\}$. Визначимо квадратичну форму D на $\mathcal{X}$:

$$D(X^k, X^j) \stackrel{\text{def}}{=} c_{k+j}. \tag{73}$$

Критерій розв'язності означає, що $D(p,p) \geq 0$ для усіх поліномів $p \in \mathcal{X}$. Для кожного полінома $p \in \mathcal{X}$ визначимо дуальний поліном $\tilde{p}$ за формулою

$$\tilde{p}(z) \stackrel{\text{def}}{=} D\left(\frac{p(X) - p(z)}{X - z}, 1\right). \tag{74}$$

Розглянемо наступний оператор у просторі $\mathcal{X}$

$$(Tp)(X) = \frac{(X-i)p(X) + 2ip(-i)}{X+i}. \tag{75}$$

Твердження 5.23.

$$D(p,q) - D(Tp, Tq) = M_1 p \cdot \overline{M_1 q} - M_2 p \cdot \overline{M_2 q}, \quad p, q \in \mathcal{X}, \tag{76}$$

де

$$M_1 p = p(-i) + i\tilde{p}(-i), \quad M_2 p = p(-i) - i\tilde{p}(-i), \tag{77}$$

і $\tilde{p}$ визначений формулою (74).

Твердження 5.23 дозволяє розглянути Абстрактну Інтерполяці1ну Задачу (див. Розділ 3.1, (10) - (14)) з даними $\mathcal{X}, D, T, M_1, M_2$. Як ми бачили, ці дані природно пов'язані зі степеневою проблемою моментів. Ця задача також тісно пов'язана з межовою інтерполяційною задачею розглянутою в Розділі 6.2.

Теорема 5.27. Представлення Фур'є F^w (23) пов'язане з розв'язком w цієї задачі може бути обчислено за формулою

$$(F^w p)(t) = -\frac{x+i}{2i} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & w(t) \\ \overline{w(t)} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p(x) - i\tilde{p}(x) \\ p(x) + i\tilde{p}(x) \end{bmatrix} \tag{78}$$

при м.в. $t \in \mathbb{T}$, де p це поліноми з $\mathcal{X}$, $x = i\frac{1+t}{1-t}$ $(\in \mathbb{R})$.

Згідно з загальною схемою Абстрактної Задачі Інтерполяції (Розділ 3.1) Множина розв'язків задачі описується формулою (21)

$$w = s_0 + s_2 \omega (\mathbf{1} - s\omega)^{-1} s_1, \tag{79}$$

де $\omega(\zeta)$ довільна стискуюча аналітична функція $\omega(\zeta) : N_1 \to N_2$. Звідси, зокрема, видно, що розв'язок задачі є неєдиним тоді і тільки тоді коли обидва простори N_1 і N_2 є одновимірними. Далі розглядатиметься тільки цей випадок. Позначимо через S матрицю коефіцієнтів формули (79)

$$S = \begin{bmatrix} s & s_1 \\ s_2 & s_0 \end{bmatrix} : N_2 \oplus E_1 \to N_1 \oplus E_2. \tag{80}$$

В нашому випадку всі чотири функції є скалярними.

Нехай A_0 це вузол пов'язаний з даними задачі як у (18). Тоді йому теж відповідає представлення Фур'є, яке може бути обчислене аналогічно Теоремі 5.27 як

$$(F^S p)(t) = -\frac{x+i}{2i}\begin{bmatrix} I & S(t) \\ S(t)^* & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ p(x) - i\tilde{p}(x)\end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 \\ p(x) + i\tilde{p}(x)\end{bmatrix}\end{bmatrix} \quad \text{м.в. на } \mathbb{T}, \tag{81}$$

$p \in \mathcal{X}$, $x = i\frac{1+t}{1-t}$. Звідки випливає наступне

Твердження 5.32. Множина функцій (81) є щільною у H^S.

В дисертації доведена

Теорема 5.33. Для будь-якого розв'язку w цієї задачі (точніше для відповідних представлень Фур'є (78)) нерівність (15) обертається в рівність

$$< F^w p, F^w q >_{H^w} = D(p,q), \quad \forall p, q \in \mathcal{X}. \tag{82}$$

Визначення 5.34. В цьому випадку ми говоримо, що інтерполяційна задача має властивість *рівності Парсеваля*.

Рівність Парсеваля тягне деякі додаткові властивості матриці (80) що описує всі розв'язки задачі.

Теорема 5.38. Для будь-якого параметру ω, міри що відповідають функціям

$$\frac{1+\omega(\zeta)s(\zeta)}{1-\omega(\zeta)s(\zeta)}$$

є абсолютно неперервними відносно міри Лебега.

Використовуючи щільність множини функцій (81) у H^S, доведено наступну теорему.

Теорема 5.41. Функції s_1 і s_2 є зовнішніми за Бьорлінгом.

Для завершення побудови використано наступну відому терему

Теорема 5.42. Якщо $\ln(1-|s_0|^2) \notin L^1$, то $\dim N_1 = 0$ і $\dim N_2 = 0$. При цьому s_0 є єдиним розв'язком задачі. Якщо $\ln(1-|s_0|^2) \in L^1$, то $\dim N_1 = 1$ і $\dim N_2 = 1$. При цьому $s_1 = s_2 = a$ (при нормуванні, скажімо, коли обидві функції позитивні в нулі), де a зовнішня функція така, що

$$1 - |s_0|^2 = |a|^2.$$

Наслідок 5.43. За умови, що $\ln(1-|s_0|^2) \in L^1$

$$s_1 = s_2 = a, \quad s = -\frac{a}{\overline{a}}\overline{s}_0, \tag{83}$$

де $|a|^2 = 1 - |s_0|^2$. При цьому множина розв'язків задачі нескінчена і відповідність між параметрами і розв'язками взаємно однозначна.

Підсумуємо отримані в цьому підрозділі результати. Пара (a, s), що побудована вище (пов'язана з невизначеною степеневою проблемою моментів) має такі властивості: a і s належать до H^∞; a є зовнішньою, $s(0) = 0$;

$$-\frac{a}{\overline{a}}\overline{s} = s_0 \in H^\infty$$

(це просто інша форма третьої формули у (83)); звідси зокрема випливає, що $|s| = |s_0|$ м.в. на $\mathbb{T}$ і тоді

$$|a|^2 + |s|^2 = |a|^2 + |s_0|^2 = 1$$

м.в. на $\mathbb{T}$. Отже ця пара є сингулярною за Аровим.

Як доведено в Теоремі 5.38, для будь-якого параметра ω, міри які відповідають функціям

$$\frac{1+\omega(\zeta)s(\zeta)}{1-\omega(\zeta)s(\zeta)}$$

є абсолютно неперервними.

Тим самим, такі пари дають негативну відповідь на питання Адамяна, Арова і Крейна, а також служать контрприкладом до гіпотези Сарасона.

У *підрозділі 6.1* доведено кратний аналог класичної теореми Жюліа - Каратеодорі. Як і раніше будемо позначати через $\mathcal{S}$ клас Шура, аналітичних функцій що відображають одиничний круг $\mathbb{D}$ в своє замикання. Ми писатимемо $z\widehat{\to}t_0$ якщо z наближається до граничної точки $t_0 \in \mathbb{T}$ недотичним чином і $z \to t_0$ якщо z наближається до t_0 без всяких обмежень перебуваючи всередині $\mathbb{D}$. Відома така властивість функцій класу Шура w:

$$\mathbf{P}_n^w(z) := \left[\frac{1}{i!j!}\,\frac{\partial^{i+j}}{\partial z^i \partial \bar{z}^j}\,\frac{1-|w(z)|^2}{1-|z|^2}\right]_{i,j=0}^n \geq 0 \tag{84}$$

для будь-якого $n \geq 0$ і $z \in \mathbb{D}$. Ми будемо називати цю матрицю *матрицею Шварца - Піка*. Для заданої точки $t_0 \in \mathbb{T}$, *межову матрицю Шварца - Піка визначимо як*

$$\mathbf{P}_n^w(t_0) = \lim_{z\widehat{\to}t_0} \mathbf{P}_n^w(z) \geq 0, \tag{85}$$

за умови що границя в (85) *існує.* Припустимо тепер, що $w \in \mathcal{S}$ і що існують такі недотичні межові границі

$$w_j(t_0) := \lim_{z\widehat{\to}t_0} \frac{w^{(j)}(z)}{j!} \quad \text{для} \;\; j = 0, \ldots, 2n+1, \tag{86}$$

де $w^{(j)}$ позначає похідну порядку j. Покладемо

$$\mathbb{P}_n^w(t_0) := \begin{bmatrix} w_1(t_0) & \cdots & w_{n+1}(t_0) \\ \vdots & & \vdots \\ w_{n+1}(t_0) & \cdots & w_{2n+1}(t_0) \end{bmatrix} \mathbf{\Psi}_n(t_0) \begin{bmatrix} \overline{w_0(t_0)} & \ldots & \overline{w_n(t_0)} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & \overline{w_0(t_0)} \end{bmatrix}, \tag{87}$$

де $\mathbf{\Psi}_n(t_0) = [\Psi_{j\ell}]_{j,\ell=0}^n$ це верхньо трикутна матриця з елементами

$$\Psi_{j\ell} = \begin{cases} 0, & \text{if} \quad j > \ell \\ (-1)^\ell \begin{pmatrix} \ell \\ j \end{pmatrix} t_0^{\ell+j+1}, & \text{if} \quad j \leq \ell. \end{cases} \tag{88}$$

Позначимо правий нижній елемент матриці Шварца - Піка $\mathbf{P}_n^w(z)$ як

$$d_{w,n}(z) := \frac{1}{(n!)^2} \frac{\partial^{2n}}{\partial z^n \partial \bar{z}^n} \frac{1 - |w(z)|^2}{1 - |z|^2} \tag{89}$$

і сформулюємо кратний аналог Теореми Жюліа-Каратеодорі

Теорема 6.2. Для $w \in \mathcal{S}$, $t_0 \in \mathbb{T}$ і $n \in \mathbb{Z}_+$, такі умови є еквівалентними:

(1) $\liminf\limits_{z \to t_0} d_{w,n}(z) < \infty.$ (90)

(2) $\lim\limits_{z \widehat{\to} t_0} d_{w,n}(z) < \infty.$ (91)

(3) Межова матриця Шварца–Піка $\mathbf{P}_n^w(t_0)$ існує.

(4) Недотичні межові границі (86) існують

і мають властивості

$$|w_0(t_0)| = 1 \quad \text{i} \quad \mathbb{P}_n^w(t_0) \geq 0, \tag{92}$$

де $\mathbb{P}_n^w(t_0)$ це матриця визначена в (87).

Більш того, якщо ці умови виконуються, то границі (90) і (91) збігаються, також

$$\mathbf{P}_n^w(t_0) = \mathbb{P}_n^w(t_0). \tag{93}$$

Доведення Теореми 6.2 засновано на аналізі відтворюючих ядер у відповідному просторі де Бранжа - Ровняка. Виявляється що умова (90) забезпечує належність відтворюючих ядер межової точки t_0 до простору де Бранжа - Ровняка, а також збіжність відтворюючих ядер внутрішніх точок до ядер точки t_0 в цьому просторі.

У *підрозділі 6.1.2* для точки $z \in \mathbb{D}$ визначаються відтворюючі ядра цього простору як функції змінної $t \in \mathbb{T}$

$$K_z(t) = \begin{bmatrix} K_{z,+}(t) \\ K_{z,-}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & w(t) \\ w(t)^* & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -w(z)^* \end{bmatrix} \frac{t^j}{(1 - t\bar{z})^{j+1}}, \tag{94}$$

$$\widetilde{K}_z(t) = \begin{bmatrix} \widetilde{K}_{z,+}(t) \\ \widetilde{K}_{z,-}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & w(t) \\ w(t)^* & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -w(z) \\ 1 \end{bmatrix} \frac{1}{(t - z)^{j+1}}. \tag{95}$$

Обчислено їх скалярні добутки та співвідношення між ними. Зокрема отримано наступні формули

Зауваження 6.6.

$$\left\| K_z^{(n)} \right\|_{H^w}^2 = \left\| \widetilde{K}_z^{(n)} \right\|_{H^w}^2 = d_{w,n}(z), \tag{96}$$

де $d_{w,n}(z)$ визначена формулою (89). Отже, умова (90) означає, що

$$\liminf_{z\to t_0}\|K_z^{(n)}\|_{H^w}=\liminf_{z\to t_0}\|\widetilde{K}_z^{(n)}\|_{H^w}<\infty.$$

Зауваження 6.7. Матриця $\mathbf{P}_n^w(z)$ збігається з матрицею Грама системи функцій $\{K_z^{(j)}\}_{j=0}^n$

$$\mathbf{P}_n^w(z)=\left[\left\langle K_z^{(j)},\ K_z^{(i)}\right\rangle_{H^w}\right]_{i,j=0}^n \tag{97}$$

У *підрозділі 6.1.3* Розглянуто межові відтворюючі ядра $K_{t_0}^{(n)}$ і $\widetilde{K}_{t_0}^{(n)}$, які визначаються за тими самими формулами (94) і (95) з заміною внутрішньої точки z на межову t_0. У Теоремі 6.11 зокрема доведено що умови Теореми 6.2 є еквівалентними тому що ядра $K_{t_0}^{(n)}$ і $\widetilde{K}_{t_0}^{(n)}$ належать до простору H^w. Крім того ядра $K_z^{(n)}$ і $\widetilde{K}_z^{(n)}$ збігаються відповідно до $K_{t_0}^{(n)}$ і $\widetilde{K}_{t_0}^{(n)}$ в просторі H^w коли $z\widehat{\to}t_0$.

У *підрозділі 6.1.4* завершено доведення Теореми 6.2. Крім того показано що властивість (3) Теореми 6.2 випливає навіть з таких, більш слабких припущень (і не тільки для функцій класу Шура)

Теорема 6.21. Припустимо, що функція w аналітична в околі $\{z\in\mathbb{D}:\ |z-t_0|<\varepsilon\}$ точки $t_0\in\mathbb{T}$. Припустимо, що недотичні межові значення (86) існують, що

$$|w_0|=1\quad\text{і}\quad\mathbb{P}_n^w(t_0)=\mathbb{P}_n^w(t_0)^*. \tag{98}$$

Тоді властивість (90) має місце.

У *підрозділі 6.2* розглянуто межову інтерполяційну задачу що пов'язана з кратним аналогом теореми Жюліа - Каратеодорі (яку доведено в розділі 6.1) а також з задачею розглянутою в розділі 5.2.

Позначимо матриці асоційовані з точкою $t_0\in\mathbb{T}$ і довільною послідовністю комплексних чисел $\{w_j\}$:

$$\mathbb{U}(w_0,\dots,w_n)=\begin{bmatrix} w_0^* & \dots & w_n^*\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \dots & w_0^*\end{bmatrix},\quad \mathbb{H}(w_1,\dots,w_{2n+1})=[w_{i+j+1}]_{i,j=0}^n, \tag{99}$$

$$\mathbb{P}(t_0,w_0,\dots,w_{2n+1}):=\mathbb{H}(w_1,\dots,w_{2n+1})\mathbf{\Psi}_n(t_0)\mathbb{U}(w_0,\dots,w_n). \tag{100}$$

Визначення 6.22. Нехай $t_0\in\mathbb{T}$. Будемо говорити, що послідовність

$$\{w_0,\dots,w_n\}$$

комплексних чисел є t_0-ізометричною, якщо

$$\overline{\mathbb{U}}(w_0,\dots,w_n)\mathbf{\Psi}_n(t_0)\mathbb{U}(w_0,\dots,w_n)=\mathbf{\Psi}_n(t_0), \tag{101}$$

де матриця $\overline{\mathbb{U}}$ складена з елементів комплексно-спряжених елементам $\mathbb{U}$. Нескінченну послідовність $\{w_i\}_{i=0}^\infty$ будемо називати t_0-ізометричною, якщо рівності (101) виконуються при будь-якому $n\in\mathbb{Z}_+$.

У *підрозділі 6.2.3* доведено наступну теорему

Теорема 6.25. Припустимо що функція w аналітична в околі $\mathcal{U}_{t_0}$ точки $t_0 \in \mathbb{T}$, припустимо що існують недотичні межові значення $w_j(t_0)$ при $j = 0, \ldots, 2n+1$. Тоді такі властивості еквівалентні:

1. Мають місце співвідношення (98).
2. Недотичні межові границі (86) існують і послідовність
$$\{w_0(t_0), \ldots, w_{2n+1}(t_0)\}$$
є t_0-ізометричною, тобто,
$$\overline{\mathbb{U}}(w_0, \ldots, w_{2n+1})\boldsymbol{\Psi}_{2n+1}(t_0)\mathbb{U}(w_0, \ldots, w_{2n+1}) = \boldsymbol{\Psi}_{2n+1}(t_0).$$
3. Існує раціональна унімодулярна на колі $\mathbb{T}$ функція f (відношення двох скінченних добутків Бляшке) така що
$$w(z) = f(z) + o((z - t_0)^{2n+1}) \quad \text{при} \;\; z \widehat{\rightarrow} t_0 \tag{102}$$
зсередини кругу.
4. Асимптотика
$$w(z) \;\; = \;\; \sum_{j=0}^{2n+1} w_j(t_0)(z - t_0)^j + o((z - t_0)^{2n+1}) \tag{103}$$
має місце коли z прямує до t_0 недотичним чином зсередини і (!) ззовні одиничного кругу $\mathbb{D}$, де при $|z| > 1$ ми визначаємо
$$w(z) := \frac{1}{\overline{w(1/\bar{z})}}. \tag{104}$$

Крім того, при виконанні цих умов межова матриця Шварца-Піка $\mathbf{P}_n^w(t_0)$ існує і дорівнює $\mathbb{P}_n^w(t_0)$.

Зауваження 6.26. Продовження (104) називається продовженням за симетрією і ніяк не пов'язане з аналітичним продовженням за винятком того випадку коли функція w унімодулярна на деякій дузі кола T. Існування недотичної асимптотики (103) для функції $w(z)$ зсередини кругу $\mathbb{D}$ з $w(t_0) \neq 0$ тягне існування асимптотики того ж порядку ззовні кругу (для продовження функції w за симетрією). Однак, в загальному випадку, коефіцієнти асимптотик зсередини і ззовні відрізняються одні від одних. Таким чином, збіг двох асимптотик є спеціальною властивістю функції w. Комбінація Теореми 6.2 і Теореми 6.25 зокрема доводить що для функцій w класу Шура збіг внутрішньої і зовнішньої асимптотик (103) є еквівалентним умові (90).

Збіг внутрішньої і зовнішньої асимптотик було покладено І. В. Ковалішиною в основу її вивчення граничної задачі інтерполяції. На відміну від цього, наші побудови засновано на умові (90).

У *розділі 7* розглянуто розширений клас Крейна-Лангера.

Визначення 7.1. Через $\mathcal{S}_\kappa$ ми будемо позначати клас функцій (не обов'язково мероморфних), що задані всюди в одиничному крузі, за винятком можливо дискретної множини точок, і що мають наступну властивість: для будь-якого скінченного набору точок з області визначення від'ємний індекс інерції відповідної матриці Піка не перевищує κ, а для деяких наборів точок він дорівнює κ.

Крейн і Лангер розглядали тільки мероморфні функції з такою властивістю і довели що вони мають вигляд $\frac{s}{b}$, де s функція класу Шура, а b скінченний добуток Бляшке ступеня κ. Відомо що для $\kappa = 0$ всі функції класу $\mathcal{S}_0$ є аналітичними. Більш того, як довів Хіндмарш, для цього навіть досить невід'ємності всіх 3×3 матриць Піка. При $\kappa > 0$ це вже не так: функція, матриці Піка якої мають цю властивість, не обов'язково мероморфна, вона може мати скінченні стрибки. Таким чином клас Крейна - Лангера є підкласом класу $\mathcal{S}_\kappa$ що розглядається в дисертації.

В дисертації дано визначення *стандартної функції* класу $\mathcal{S}_\kappa$.

Визначення 7.4. Стандартні функції класу $\mathcal{S}_\kappa$ можна описати таким чином: розглянемо мероморфну функцію типу Крейна-Лангера $\frac{s}{b}$, потім в деяких регулярних точках змінимо значення (так що у нової функції будуть стрибки в цих точках) і в деяких полюсах визначимо скінченні значення (можна сказати що у нової функції в цих точках будуть нескінченні стрибки). Отримані таким чином функції будемо називати *стандартними*.

Наступна теорема дає кілька еквівалентних описів класу $\mathcal{S}_\kappa$ і, зокрема, показує що будь яка функція класу $\mathcal{S}_\kappa$ допускає єдине продовження до стандартної функції цього ж класу.

Теорема 7.5. Припустимо що функція f визначена в $\mathbb{D} \setminus \Lambda$, де Λ є дискретна множина. Нехай κ є невід'ємне ціле число. Наступні властивості еквівалентні:

1. f належить до $\mathcal{S}_\kappa$.
2. f допускає продовження до стандартної функції із ℓ стрибками, $0 \leq \ell \leq \kappa$, і $\kappa - \ell$ полюсами. Всі стрибки продовження містяться в $\mathbb{D} \setminus \Lambda$. Таке продовження єдине.
3. Існує $n \geq 0$ таке що
$$\mathbf{k}_n(f) = \mathbf{k}_{n+3}(f) = \kappa, \tag{105}$$
де $\mathbf{k}_n(f)$ максимальне число від'ємних квадратів матриць Піка функції f розміру $n \times n$. [1]

Далі розглядається питання яким повинен бути мінімальний розмір матриці Піка функції f щоб ця матриця могла мати κ від'ємних квадратів.

[1] Це твердження є узагальненням теореми Хіндмарша. Теорема Хіндмарша стверджує що якщо $\mathbf{k}_3(f) = 0$, то f належить класу Шура, тобто, $\mathcal{S}_0$.

Теорема 7.6. Припустимо що f це стандартна функція з q полюсами і ℓ стрибками. Тоді $f \in \mathcal{S}_\kappa$, де $\kappa = q + \ell$ и

$$q + \ell \le N(f) \le q + 2\ell. \tag{106}$$

Ці нерівності є точними.

Наступна теорема уточнює твердження (105) Теореми 7.5.

Теорема 7.9. Припустимо що функція f визначена в $\mathbb{D} \setminus \Lambda$, де Λ дискретна множина. Нехай κ є невід'ємне ціле число. Тоді:

1. якщо $\mathbf{k}_{2\kappa}(f) = \mathbf{k}_{2\kappa+3}(f) = \kappa$, то $f \in \mathcal{S}_\kappa$.
2. якщо $f \in \mathcal{S}_\kappa$, то $\mathbf{k}_{2\kappa}(f) = \kappa$.

Приклад 7.7 показує що при $\kappa = 1$ індекс 2κ в цій теоремі не може бути зменшений.

У *підрозділі 7.2* вивчено інтерполяційну задачу Неванлінни - Піка в класі $\mathcal{S}_\kappa$: Задані точки $z_1, \dots, z_k \in \mathbb{D}$ и комплексні числа $F_1, \dots, F_k$, знайти всі функції $F \in \mathcal{S}_\kappa$ (не обов'язково мероморфні) такі що $z_1, \dots, z_k$ належать області визначення F і

$$F(z_i) = F_i, \qquad (i = 1, \dots, k). \tag{107}$$

Припустимо що матриця Піка даних задачі

$$P = \left[\frac{1 - F_i F_j^*}{1 - z_i z_j^*}\right]_{i,j=1}^{k} \tag{108}$$

має властивості

$$\mathrm{sq}_-(P) = \kappa \quad \text{і} \quad \det P \neq 0, \tag{109}$$

Визначимо 2×2 матрицю-функцію

$$\begin{aligned} \Theta(z) &= \begin{bmatrix} \Theta_{11}(z) & \Theta_{12}(z) \\ \Theta_{21}(z) & \Theta_{22}(z) \end{bmatrix} \\ &= I_2 + (z-1) \begin{bmatrix} E^* \\ C^* \end{bmatrix} (I - zT^*)^{-1} P^{-1} (I - T)^{-1} \begin{bmatrix} E & -C \end{bmatrix}, \end{aligned} \tag{110}$$

де

$$T = \begin{bmatrix} z_1 & & \\ & \ddots & \\ & & z_k \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_k \end{bmatrix}. \tag{111}$$

Теорема 7.18. Припустимо що матриця Піка P задачі $\mathbf{NP}_\kappa$ задовольняє умовам (109). Нехай Θ матриця-функція визначена в (110). Тоді всі стандартні розв'язки F задачі описуються наступним чином

$$F(z) = \begin{cases} \dfrac{\Theta_{11}(z)\mathcal{E}(z) + \Theta_{12}(z)}{\Theta_{21}(z)\mathcal{E}(z) + \Theta_{22}(z)}, & \text{якщо} \quad z \notin (\{z_1, \dots, z_k\} \cup \{\text{ нулі } \Theta_{21}\mathcal{E} + \Theta_{22}\}) \\ F_i, & \text{якщо} \quad z = z_i \ (i = 1, \dots, k). \end{cases} \tag{112}$$

Тут параметр $\mathcal{E}$ пробігає весь клас Шура $\mathcal{S}_0$. Підкреслимо що при удаваній тривіальності твердження теореми (всі функції F є розв'язками за визначенням), не є очевидним той факт що всі вони лежать в $\mathcal{S}_\kappa$ і що інших розв'язків в цьому класі у задачі немає. Відзначимо також що не всі розв'язки мають бути мероморфними.

У *підрозділі 7.2.3* розглянуто вироджений випадок. Припустимо що ранг матриці Піка

$$P = \left[\frac{1 - F_i F_j^*}{1 - z_i z_j^*}\right]_{i,j=1}^{n} \tag{113}$$

дорівнює $k < n$ і що $\mathrm{sq}_-(P) = \kappa$. За самим змістом величин, маємо $\kappa \le k$.

Теорема 7.20. В цьому випадку задача має єдиний розв'язок в класі стандартних функцій з $\mathcal{S}_\kappa$. Мероморфна частина цього розв'язку є відношенням двох добутків Бляшке: чисельник ступеня k і знаменник ступеня не вище κ.

У *підрозділі 7.2.4* доведено теорему про продовження

Теорема 7.21. Нехай функція F визначена на множині $\Omega \subseteq \mathbb{D}$. Припустимо що матриці Піка $P_n(F; z_1, \dots, z_n)$, $z_1, \dots, z_n \in \Omega$, мають не більше κ від'ємних власних значень а якась із них має κ від'ємних власних значень. Тоді F допускає продовження до стандартної функції класу $\mathcal{S}_\kappa$.

В дисертації наведемо приклад функції F класу $\mathcal{S}_1$, що визначена на дискретній множині $\Omega \subset \mathbb{D}$, яка допускає єдине продовження до стандартної функції класу $\mathcal{S}_1$ і це єдине продовження не є мероморфним в $\mathbb{D}$; в той же час обмеження F на будь-яку скінченну підмножину Ω має неєдине продовження в класі $\mathcal{S}_1$ і, зокрема, має багато мероморфних продовжень.

ВИСНОВКИ

Таким чином у дисертації запропоновано і розвинено методи розв'язання інтерполяційних задач аналізу, основані на використанні унітарних систем розсіювання, які природно пов'язані з даними задачі та її розв'язками. Також вирішуються відповідні зворотні задачі.

У роботі описано множину розв'язків загальної задачі про ліфтинг комутанту, отримано кратний аналог умови Жюліа-Каратеодорі про кутову межову похідну та вивчено пов'язану з нею межову інтерполяційну задачу у класі Шура, вивчено розширений клас Крейна-Лангера та розв'язано задачу Неванлінни-Піка в ньому. Для задачі про ліфтинг комутанту отримано параметризацію усіх символів ліфтингу у самому загальному випадку а також отримано повну характеризацію коефіцієнтів цієї параметризуючої формули. Для аналогу умови Жюліа-Каратеодорі отримано низку еквівалентних умов, зокрема, одна з цих умов формулюється у термінах певної симетрії межових похідних. Як застосування цих методів та результатів, у роботі розв'язані дві проблеми Д. Сарасона про регулярні та сингулярні γ-твірні пари.

Детальніше, в Розділі 2 викладено попередні відомості які використовуються у дисертації. Наведено усі необхідні визначення що стосуються унітарних систем розсіювання. Детально описано простір мір Хеллінгера, що відповідає заданій операторній мірі, та деякі його властивості. Показано як унітарні системи розсіювання реалізуються у просторі Хеллінгера. Викладено конструкцію Шурівських доповнень мір та відповідного ортогонального розкладу простору Хеллінгера. Наведено параметризацію унітарних розширень ізометрій, їх резольвент. Викладено числення з'єднань зі зворотним зв'язком та обчислено динаміку з'єднаної системи. Обчислено функції розсіювання з'єднаної системи відносно заданого масштабу та масштабу з'єднання.

В Розділі 3 спочатку викладено схему Абстрактної Задачі Інтерполяції, яку було розвинуто раніше і яка добре працює в задачах аналізу де розв'язки є аналітичними функціями (таких як задача Неванлінни-Піка, задача Сарасона, Проблема Моментів). В основу цієї схеми покладено теорію операторних вузлів. Далі показано як унітарний вузол вкладається в унітарну систему розсіювання. Показано як Абстрактна Задача Інтерполяції переформулюється (еквівалентним чином) у термінах систем розсіювання (замість унітарних вузлів). Після цього відкинуто умову ортогональності, яка була присутня в попередній схемі, і сформульовано нову схему Абстрактної Задачі Інтерполяції, розв'язками якої можуть бути не тільки аналітичні, але й гармонійні функції. Далі цю нову Абстрактну Задачу Інтерполяції розв'язано з використанням унітарних розширень ізометрій та відповідних систем розсіювання. Отримано параметризацію розв'язків задачі.

У Розділі 4 дисертації вивчено загальну проблему про ліфтинг комутанту: показано що вона вкладається в схему Абстрактної Задачі Інтерполяції, досліджену в першому розділі, вивчено специфіку даних задачі про ліфтинг і отримано опис всіх ліфтингів заданого стиснення в термінах їх символів. Поняття символу ліфтингу також введено в цій роботі і узагальнює класичне поняття символу Ганкелева оператора. У цьому більш загальному випадку символами є міри, а не функції.

В цьому ж розділі розв'язано відповідну зворотну задачу, яка полягає в характеризації резольвентних матриць що виникають при розв'язанні прямої задачі. У дисертації отримані необхідні і достатні умови на коефіцієнти параметризуючої формули загальної задачі про ліфтинг комутанту в термінах функціональних моделей. Більш того, у роботі розглянуто загальний (а не тільки цілком невизначений) випадок. І в цьому випадку доведено екстремальні властивості коефіцієнтів, які тут мають вигляд максимальних факторизаційних нерівностей (на відміну від рівностей цілком невизначеного випадку).

У Розділі 5 результати по загальній Задачі про Ліфтинг застосовано до скалярної невизначеної задачі Нехарі. Головним чином застосовано результат по зворотній задачі. Це дозволило доповнити класичні результати Адамяна, Арова і Крейна новою характеризацією резольвентних матриць задачі Нехарі, еквівалентно: регулярних γ - твірних пар функцій. Далі, використовуючи отриманий критерій, в роботі розв'язано дві проблеми, поставлені Д. Сарасоном: проблему регуляризації довільної γ - твірної пари - відповідь позитивна, регуляризація завжди можлива; і проблему про достатність абсолютної неперервності мір пов'язаних з γ - твірною парою - відповідь негативна: умова не є достатньою. В роботі наведено клас контрприкладів, заснованих на межовій інтерполяційній задачі, що розглянуто у наступному розділі. Більш конкретно, було показано що пари (a, b), що виникають при параметризації розв'язків межової інтерполяційної задачі (що тісно пов'язана з нескінченною проблемою моментів) мають властивість абсолютної неперервності, але є сингулярними, тобто не можуть бути регулярними.

У Розділі 6 отримано узагальнення класичної теореми Жюліа-Каратеодорі про кутову межову похідну на випадок похідних вищого порядку. Виявлено усі еквівалентні умови для її існування у сенсі аналогічному до похідної першого порядку. Теорему сформульовано у термінах властивостей відповідних матриць. Розгляди істотно використовують функціональні моделі Л. де Бранжа- Д. Ровняка і їх відтворюючі ядра, зокрема відтворюючі ядра що відповідають межовій точці. У підрозділі 6.2 досліджено відповідну межову інтерполяційну задачу, яка еквівалентна задачі розглянутій у Розділі 5.2 Але на відміну від Розділу 5.2, де увагу сконцентровано на множині розв'язків та на властивостях коефіцієнтів параметризуючої формули, у Розділі 6.2 йдеться про конкретно аналітичний зміст межової задачі. Зокрема доведено що кратний аналог умови Жюліа-Каратеодорі є еквівалентним умові симетрії межових похідних, яка виникала в працях І.В. Ковалішиної.

У Розділі 7 вивчено розширений клас Крейна-Лангера, який визначається негативним індексом інерції матриць Шварца-Піка і який (на відміну від класичного класу Крейна-Лангера) містить не тільки функції з полюсами, але й функції зі стрибками. Зокрема введено та вивчено стандартні функції цього класу та доведено що будь-яку функцію цього класу може бути поширено до стандартної функції цього ж класу. У підрозділі 7.2 розглянуто задачу Неванлінни-Піка у розширеному класі Крейна-Лангера та отримано параметризацію всіх її розв'язків (з полюсами та зі стрибками). Усім параметрам відповідають розв'язки, виключних значень параметрів немає, на відміну від випадку коли дозволяються лише розв'язки з полюсами. Крім того розглянуто вироджений випадок і доведено що тоді задача завжди має єдиний розв'язок, який може мати стрибки, на відміну від класичної постановки коли розв'язків може не бути.

Загалом, у дисертації запропонований і систематично розвинутий підхід, який використовує унітарні системи розсіювання для дослідження інтерполяційних задач аналізу. Цей підхід дозволяє отримувати тонкі аналітичні результати виходячи з внутрішньої структури відповідних систем розсіювання, які у свою чергу відображають структуру даних задачі інтерполяції. Усі основні результати наведено з повними доведеннями. Отримані результати мають теоретичний характер. Запропоновані методи можуть бути використані для дослідження та розв'язання різноманітних інтерполяційних задач аналізу.

СПИСОК ОПУПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Kheifets A. Ya., *On necessary but not sufficient condition for gamma-generating pair to be a Nehari pair*, Integral Equations and Operator Theory **21** (1995), no. 3, 334-341.
2. Kheifets A. Ya., *Regularization of gamma-generating pairs and exposed points in H^1*, Journal of Functional Analysis, **130** (1995), no. 2, 310–333.
3. Kheifets A. Ya., *Hamburger moment problem: Parseval equality and Arov - singularity*, Journal of Functional Analysis, **141** (1996), no. 2, 374-420.
4. Kheifets A., *Nehari problem and exposed points of the unit ball in the Hardy space*, Israel Mathematical Conference Proceedings, **11** (1997), 145-151.
5. Boiko S., Dubovoy V., Kheifets A., *On some extremal problem for harmonic operator functions on the unit disk*, Dopov. Akad. Nauk Ukr. (Prirodozn. Tekh. Nauki), **9** (1999), 37-41.
6. Kheifets A., *Parameterization of solutions of the Nehari Problem and non - orthogonal dynamics*, Operator Theory: Advances and Applications, **115** (2000), 213-233.
7. Boiko S., Dubovoy V., Kheifets A., *Measure Schur complements and spectral functions of unitary operators with respect to different scales*, Operator Theory: Advances and Applications, **123** (2001), 89-138.
8. Kheifets A., *Abstract Interpolation Scheme for Harmonic Functions*, Operator Theory: Advances and Applications, **134** (2002), 287-317.
9. Bolotnikov V., Kheifets A., Rodman L., *Functions with Pick matrices having bounded number of negative eigenvalues*, Contemporary Mathematics, **323** (2003), 393-417.
10. Bolotnikov V., Kheifets A., Rodman L., *Pairs of functions with indefinite Pick matrices*, Linear Algebra and its Applications, **367** (2003), 271—290.
11. Bolotnikov V., Kheifets A., Rodman L., *Nevanlinna – Pick interpolation: Pick matrices have bounded number of negative eigenvalues*, Proceedings of Amer. Math. Soc., **132** (2004), no. 3, 769-780.
12. Bolotnikov V., Kheifets A., Rodman L., *Operator valued jet functions with positive Carathéodory-Pick matrices*, Integral Equations and Operator Theory **50** (2004), no. 3, 291—304.
13. Bolotnikov V., Kheifets A., Rodman L., *Jet functions having indefinite Carathéodory - Pick matrices*, Linear Algebra and its Applications, **385** (2004), 215-286.

14. Bolotnikov V., Kheifets A., *On negative inertia of Pick matrices associated with generalized Schur functions*, Integral Equations and Operator Theory, **56** (2006), no. 3, 323–355.

15. Bolotnikov V., Kheifets A., *Boundary Nevanlinna-Pick interpolation problems for generalized Schur functions*, Operator Theory: Advances and Applications, **165** (2006), 67—119.

16. Bolotnikov V., Kheifets A., A higher order analogue of the Carathéodory-Julia theorem, Journal of Functional Analysis, 237 (2006) no. 1, 350-371

17. Bolotnikov V., Kheifets A., *The higher order Carathéodory-Julia theorem and related boundary interpolation problems*, Operator Theory: Advances and Applications, **179** (2008), 63-102.

18. Bolotnikov V., Kheifets A., *Carathéodory-Julia type theorems for operator valued Schur functions*, Journal d'Analyse Mathematique, **106** (2008), no. 1, 237-270.

19. Bolotnikov V., Kheifets A., *Carathéodory-Julia type conditions and symmetries of boundary asymptotics for analytic functions on the unit disk*, Mathematische Nachrichten, **282** (2009), no. 11, 1513-1536.

20. Ball J., Kheifets A., *The inverse commutant lifting problem. I: coordinate free formalism*, Integral equations and Operator Theory, **70** (2011), no. 1, 17-62.

21. Ball J., Kheifets A., *The inverse commutant lifting problem. II: Hellinger functional - model spaces*, Complex Analysis and Operator Theory, **7** (2013), no. 4, 873-907.

22. Boiko S., Dubovoy V., Kheifets A., *Defect functions of holomorphic contractive operator-functions and the scattering sub-operator through the internal channels of a system. II*, Complex Analysis and Operator Theory, **8** (2014), no. 5, 991-1036.

23. Boiko S., Dubovoy V., Kheifets A., *On some special cases of Radon – Nikodym theorem for vector- and operator-valued measures*, Operator Theory: Advances and Applications, **244** (2015), 131 – 147.

24. Kheifets A., Abstract Interpolation Problem and Commutant Lifting Problem, Book of abstracts of the IX-th International Workshop on Operator Theory and Applications (IWOTA), Bloomington, USA (1996), p. 25.

25. Kheifets A., Solutions of an Indeterminate Nehari Problem, Book of abstracts of the international conference Mathematical Theory of Networks and Systems (MTNS), Saint Louis, USA (1996), p. 57.

26. Kheifets A., Abstract Interpolation Problem for Harmonic Functions, Book of abstracts of the Conference in Honor of H. Dym 60's Anniversary, the Weizmann Institute of Science, Rehovot, Israel (1999), p. 17.

27. Kheifets A., Couplings, Scales and Wave Operators in Interpolation Problems, Book of abstracts of the XIII-th International Workshop on Operator Theory and Applications (IWOTA), Bordeaux, France (2000), p. 54.

28. Kheifets A., Computing the Scattering Function of the Feedback Loading, Book of abstracts of the meting of the Israel Mathematical Union (IMU), Haifa, Israel (2000), p. 42.

29. Kheifets A., The Abstract Interpolation Problem in the Scattering Setting, Book of abstracts of the International Akhiezer Centenary Conference, Theory of Functions and Mathematical Physics, Kharksv, Ukraine (2001), p. 45.

30. Kheifets A., Defect and Equality in Boundary Interpolation Problem, Book of abstracts of the XIV-th International Workshop on Operator Theory and Applications (IWOTA), Blacksburg, USA (2002), p. 33.

31. Kheifets A., Abstract Interpolation in Scattering Setting, Book of abstracts of the International Conference Mathematical Theory of Networks and Systems (MTNS), South Bend, USA (2002), p. 21.

32. Kheifets A., Multiple Analogue of Julia – Caratheodory Theorem on Angular Derivative, Book of abstracts of the Southeastern Analysis Meeting (SEAM), Knoxville, USA (2003), p. 26.

33. Kheifets A., On the Commutant Lifting Problem, Book of abstracts of the XV-th International Workshop on Operator Theory and Applications (IWOTA), Newcastle, UK (2004), p. 43.

34. Kheifets A., On Boundary Interpolation, Book of abstracts of the XVI-th International Workshop on Operator Theory and Applications (IWOTA), Storrs, USA (2005), p. 37.

35. Kheifets A., Direct and Inverse Lifting Type Interpolation Problems, Book of abstracts of the B. Ya. Levin Centennial Conference, Entire and Subharmonic Functions and Related Topics, Kharkiv, Ukraine (2006), p. 22.

36. Kheifets A., Direct and Inverse Lifting Problem, Book of abstracts of the XVI-th Summer St.-Petersburg Meeting in Mathematical Analysis, St.-Petersburg, Russia (2007), p. 24.

37. Kheifets A., Abstract Interpolation Problem. Direct and Inverse Lifting Problem, Book of abstracts of the International Conference Analysis and Mathematical Physics, Kharkiv, Ukraine (2013), p. 9-10.

АНОТАЦІЯ

Хейфець О. Я. Унітарні системи розсіювання та задачі інтерполяції. - Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 - математичний аналіз. Фізико-технічний інститут низьких температур ім. Б. І. Вєркіна Національної академії наук України, Харків, 2019.

У дисертації запропоновано і розвинено методи розв'язання інтерполяційних задач аналізу, основані на використанні унітарних систем розсіювання, які природно пов'язані з даними задачі та її розв'язками. Також вирішуються відповідні зворотні задачі. У дисертації розроблено узагальнення схеми Абстрактної Задачі Інтерполяції, що дозволяє вивчати задачі розв'язки яких не є аналітичними функціями (такі як задача Нехарі).

У роботі вивчаються задача про ліфтинг комутанту, кратний аналог умови Жюліа - Каратеодорі про кутову межову похідну та пов'язана з нею межова інтерполяційна задача у класі Шура, розширений клас Крейна-Лангера та задача Неванлінни - Піка в ньому. Для задачі про ліфтинг комутанту отримано параметризацію усіх символів заданого стиснення у самому загальному випадку а також отримано повну характерізацію коефіцієнтів цієї параметризуючої формули. Ці результати є новими навіть для скалярної задачі Нехарі і дозволяють отримати нову характеризацію регулярних γ-твірних пар. Як застосування цих методів та результатів, у роботі розв'язані дві проблеми Д. Сарасона. У першій доведено що будь яку γ-твірну функцію можна зробити регулярною шляхом множення на внутрішній множник. У другій побудовано клас сингулярних γ-твірних функцій які мають властивість абсолютної неперервності. Цей клас дає контрприклади до гіпотези Д. Сарасона, яка твердила що абсолютна неперервність тягне регулярність. В роботі отримано кратний аналог класичної умови Жюліа - Каратеодорі щодо кутових межових похідних функцій класу Шура. Наведено низку умов що є еквівалентними цій умові. Зокрема доведено що кратна умова Жюліа - Каратеодорі є еквівалентною збіжності межових похідних зсередини і ззовні кругу при продовженні функції за симетрією. В роботі вивчено розширений клас Крейна-Лангера який містить не тільки мероморфні функції але й функції зі стрибками. Показано що інтерполяційні задачі більш природно розв'язувати в цьому класі ніж в класичному, таким чином вдається усунути ефект сторонніх розв'язків.

Ключові слова: унітарна система розсіювання, спектральна функція, функціональний простір де Бранжа - Ровняка, функціональний простір Хеллінгера, абстрактна задача інтерполяції, пряма та зворотна задача про ліфтинг комутанту, задача Нехарі, символи сплітаючого стиску, Аров-регулярні та Аров-сингулярні γ-твірні функції, теорема Жюліа - Каратеодорі, межова інтерполяція, клас Крейна-Лангера.

АННОТАЦИЯ

Хейфец А. Я. Унитарные системы рассеяния и задачи интерполяции. - Рукопись.

Диссертация на соискание научной степени доктора физико - математических наук по специальности 01.01.01 - математический анализ. Физико-технический институт низких температур им. Б. И. Веркина Национальной академии наук Украины, Харьков, 2019.

В диссертации предложены и развиты методы решения интерполяционных задач анализа, основанные на использовании унитарных систем рассеяния, которые естественно связаны с данными задачи и с её решениями. Также решаются соответствующие обратные задачи. В диссертации разработано обобщение схемы Абстрактной Задачи Интерполяции, которое позволяет изучать задачи решения которых не являются аналитическими функциями (таких как задача Нехари). В работе изучается задача о лифтинге коммутанта, кратный аналог теоремы Жюлиа-Каратеодори об угловой граничной производной и связанная с ней граничная задача интерполяции в классе Шура, расширенный класс Крейна-Лангера и задача Неванлинны-Пика в этом классе. Для задачи о лифтинге коммутанта получена параметризация всех символов заданного сжатия в самом общем случае а также получена полная характеризация коэффициентов этой параметризующей формулы. Эти результаты являются новыми даже для скалярной задачи Нехари и позволяют получить новую характеризацию регулярных γ- производящих пар. Как применение этих методов и результатов, в работе решены две проблемы Д. Сарасона. В первой доказано, что любую γ - производящую функцию можно сделать регулярной путем умножения на внутренний множитель. Во второй построен класс сингулярных γ- производящих функций которые имеют свойство абсолютной непрерывности. Этот класс дает контрпримеры к гипотезе Д. Сарасона, которая утверждала что абсолютная непрерывность влечет регулярность. В работе получен кратный аналог классического условия Жюлиа - Каратеодори об угловых граничных производных функций класса Шура. Приведен ряд условий, которые эквивалентны этому условию. В частности доказано, что кратное условие Жюлиа - Каратеодори эквивалентно совпадению граничных производных изнутри и снаружи круга при продолжении функции по симметрии. В работе изучен расширенный класс Крейна-Лангера, который содержит не только мероморфные функция но и функции со скачками. Показано что интерполяционные задачи более естественно решать в этом классе чем в классическом, при этом удается устранить эффект посторонних решений.

Ключевые слова: унитарная система рассеяния, спектральная функция, пространства де Бранжа - Ровняка и Хеллингера, абстрактная задача интерполяции, прямая и обратная задача о лифтинге коммутанта, задача Нехари, символы сжатия, Аров-регулярные и Аров-сингулярные γ-производящие функции, теорема Жюлиа - Каратеодори, граничная интерполяция, класс Крейна-Лангера.

ABSTRACT

Kheifets O. Y. Unitary Scattering Systems and Interpolation Problems. - Manuscript.

Thesis for obtaining the degree of Doctor of Sciences (Doctor Habilitatus) in physics and mathematics, specialty 01.01.01 – Mathematical Analysis. B. I. Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kharkiv, 2019.

The thesis proposes and develops methods for solving interpolation problems of analysis, based on the use of unitary scattering systems, which are naturally associated to the data of the problem and its solutions. The corresponding inverse problems are also solved. In the thesis, a generalization of the scheme of the Abstract Interpolation Problem is developed, which allows studying the problems, whose solutions are not analytic functions (such as the Nehari problem). The thesis studies the Commutant Lifting problem, a higher order analogue of the Julia - Carathéodory theorem on an angular boundary derivative and the related boundary interpolation problem in the Schur class, the extended Krein - Langer class, and the Nevanlinna - Pick problem in it. For the Commutant Lifting problem, a parametrization of all symbols of the given contraction is obtained for the most general case and a complete characterization of the coefficients of this parametrizating formula is given. These results are new even for the scalar Nehari problem, they allow us to obtain a new characterization of regular γ - generating pairs. As the application of these methods and results, two problems of D. Sarason are solved in the thesis. In the first one, it is proved that any γ - generating function can be made regular by multiplying with an inner factor. In the second, a class of singular γ - generating functions is constructed that have the property of absolute continuity. This class gives counterexamples to the hypothesis of D. Sarason, who conjectured that absolute continuity implies regularity. A higher order analogue of the classical Julia – Carathéodory condition on the angular boundary derivatives of functions of the Schur class is obtained. A number of conditions are given that are equivalent to this condition. In particular, it is proved that the higher order Julia – Carathéodory condition is equivalent to the coincidence of the boundary derivatives from inside and outside the circle as the function is continued by symmetry. In the thesis, an extended Krein - Langer class is studied, that contains not only meromorphic functions but also functions with jumps. It is shown that interpolation problems are more naturally solved in this class than in the classical one, since it is possible to eliminate the effect of extraneous solutions.

Key words: unitary scattering system, spectral function, spaces of de Branges - Rovnyak of Hellinger, abstract interpolation problem, direct and inverse Commutant Lifting problem, Nehari problem, symbols of the intertwiner, Arov-regular and Arov-singular γ-generating functions, Julia - Carathéodory theorem, boundary interpolation, Krein-Langer class.