НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ

ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ НИЗЬКИХ ТЕМПЕРАТУР ІМ. Б.І. ВЄРКІНА

ГРЕЧНЄВА МАРИНА ОЛЕКСАНДРІВНА

УДК 514.764

ГЕОМЕТРІЯ ДВОВИМІРНОЇ ПОВЕРХНІ ПРОСТОРУ МІНКОВСЬКОГО ТА ЇЇ ГРАССМАНОВОГО ОБРАЗУ

01.01.04 – геометрія та топологія

АВТОРЕФЕРАТ

дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Харків – 2018

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана на кафедрі загальної математики математичного факультету Запорізького національного університету Міністерства освіти і науки України.

Науковий керівник: кандидат фізико-математичних наук, доцент,
Стєганцева Поліна Георгіївна,
Запорізький національний університет,
доцент кафедри загальної математики.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, старший науковий співробітник,
член-кореспондент Національної академії наук України
Максименко Сергій Іванович,
Інститут математики НАН України (м. Київ),
завідувач лабораторії топології у складі відділу алгебри та топології;

доктор фізико-математичних наук, доцент
Ямпольський Олександр Леонідович,
Харківський національний університет ім. В.Н. Каразіна,
завідувач кафедри фундаментальної математики

Захист відбудеться «03» жовтня 2018 р. о 14-00 год. на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 64.175.01 у Фізико-технічному інституті низьких температур ім. Б.І. Вєркіна НАН України за адресою: пр. Науки, 47, м. Харків, 61103.

З дисертацією можна ознайомитися у науковій бібліотеці Фізико-технічного інституту низьких температур ім. Б.І. Вєркіна НАН України за адресою: пр. Науки, 47, м. Харків, 61103.

Автореферат розісланий «30» серпня 2018 р.

Учений секретар
спеціалізованої вченої ради В. О. Горькавий

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Інтерес до вивчення об’єктів простору Мінковського не слабшає вже протягом довгого часу. Однією з причин є той факт, що простір Мінковського (чотиривимірний псевдоевклідів простір індексу 1) є математичною моделлю простору-часу в спеціальній теорії відносності. Метричні властивості простору Мінковського і евклідового простору різні. Це слід враховувати при вивченні диференціальної геометрії об’єктів простору Мінковського.

У класичній диференціальній геометрії важливу роль відіграє гауссове сферичне відображення поверхонь. У багатовимірних просторах його узагальненням є поняття грассманового відображення підмноговидів. При грассмановому відображенні кожній точці x підмноговиду F^p, зануреного в евклідів простір R_{l+p}, ставиться у відповідність l-площина із грассманового многовиду $G(l, l+p)$, паралельна нормальній l-площині підмноговиду F^p в точці x. Множина отриманих l-вимірних площин, які розглядаються як точки грассманового многовиду $G(l, l+p)$, називається грассмановим образом підмноговиду F^p. Вивченню грассманового образу й, у зв’язку з цим, дослідженню геометричних властивостей грассманових многовидів останнім часом приділяється багато уваги. Серед задач, пов’язаних з вивченням грассманового образу, найбільш цікавими є такі: класифікація точок поверхні; вивчення поверхонь із заданим значенням секційної кривини грассманового многовиду уздовж площин, дотичних до їх грассманового образу, зокрема, з екстремальними значеннями секційної кривини; відновлення поверхні за її грассмановим образом й інші. Багато із цих задач важливі як для самої геометрії так і для її застосувань.

У просторі Мінковського також можна розглядати грассманів многовид, який є об’єднанням множин просторовоподібних, часоподібних і ізотропних площин однієї розмірності. Оскільки в цьому просторі існують поверхні різних типів, то дослідження грассманового образу кожного типу поверхні є окремою змістовною задачею. Крім того, перераховані вище задачі майже не досліджені або недостатньо досліджені в просторі Мінковського на відміну від евклідова простору. Усе це свідчить про актуальність теми дослідження.

Основи загальної теорії сімей l-вимірних площин у різних n-вимірних просторах були закладені Вагнером В. В., Гейдельманом Р. М., Розенфельдом Б. А.[1].

Грассманове відображення многовидів ефективно використовується як у локальних дослідженнях, так і у геометрії «в цілому». Грассманів образ підмноговиду в евклідовому просторі є його важливою геометричною характеристикою. Систематичне вивчення диференціальної геометрії грассманових многовидів l-вимірних підпросторів n-вимірного евклідова й

[1] Розенфельд Б.А. Дифференциальная геометрия семейств многомерных плоскостей / Б. А. Розенфельд // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1947. – т. 11. – С. 283–308.

ермітова просторів почали Лейхтвейс К.[2] і Вонг Ю.[3]. Ними були введені локальні координати спеціального виду, знайдені метричні тензори, тензори кривини, секційна кривина, розглянуті геодезичні на многовидах Грассмана.

Дослідження грассманового образу підмноговидів в евклідовому просторі проводилися в роботах Обата М., Муто Ю., Вонга Ю., Амінова Ю. А., Хоффмана Д., Оссермана Р., Вайнера Дж., Борисенка О. А., Ніколаєвського Ю. А., Горькавого В. О., Савельєва В. М. та інших геометрів. Геометрія дійсних грассманових многовидів у ріманових просторах постійної кривини викладена алгебраїчним методом у роботах Козлова С. О., Іванова Д. В. Результати, які були отримані до 1989 року, висвітлені в оглядовій статті Борисенка О. А., Ніколаєвського Ю. А. [4] .

Одним із важливих питань є дослідження властивостей секційної кривини грассманового многовиду, зокрема, уздовж площин, дотичних до грассманових образів підмноговидів. Вонг Ю.[5] довів, що секційна кривина $\overline{K}(\sigma)$ дійсного грассманового многовиду двовимірних площин чотиривимірного евклідова простору обмежена, а саме $\overline{K}(\sigma)\in[0,2]$, й описав ті двовимірні напрямки σ, у яких $\overline{K}(\sigma)$ приймає граничні значення. Муто Ю.[6] і Борисенко О.А., Ніколаєвський Ю. А.[7] описали підмноговиди з максимальною й мінімальною секційними кривинами уздовж площин, дотичних до їх грассманового образу.

Питання про класифікацію точок многовиду є одним із основних у диференціальній геометрії занурених многовидів. В роботі Амінова Ю. А.[8] була запропонована класифікація точок підмноговидів за типом грассманового образу. Множину всіх точок гіперповерхні завжди можна розбити на класи, причому тип точки гіперповерхні визначає вигляд околу цієї точки. У випадку, коли корозмірність поверхні більша за одиницю, не завжди можна розбити точки поверхні на скінченне число класів. В роботі Борисенка О. А.[9] описані випадки, коли це можливо. В цій же роботі наведена афінна класифікація точок двовимірних поверхонь чотиривимірного евклідова простору за видом дотичного параболоїда, а також вказується на еквівалентність цієї класифікації та класифікації за допомогою грассманового образу поверхні.

Однією з цікавих задач, пов'язаних із вивченням грассманового образу, є задача про відновлення поверхні за її грассмановим образом. Сформулювати її можна в такий спосіб: в $G(l,l+p)$ задано регулярний підмноговид Γ^p.

---

[2] Leichtweiss K. Zur Riemannschen Geometrie in Grassmanschen Mannigfultigkeiten / K. Leichtweiss // Math. Zeit. – 1961. - 76, №4, – S.334-366.

[3] Wong Y.C. Differential geometry of Grassman manifolds / Y.C. Wong // Proc. Math. Acad. Sci. USA. – 1967. – 57. – P. 589-594.

[4] Борисенко А.А. Многообразия Грассмана и грассманов образ подмногообразий / А.А. Борисенко, Ю.А. Николаевский // УМН – 1991. – Т.46. Вып.2(278). – С.41-80.

[5] Wong Y.C. Sectional curvatures of Grassman manifolds / Y.C. Wong // Ibid. – 1960. – 60. – P. 75-79.

[6] Muto Y. The Gauss map of submanifold in a Euclidean space / Y. Muto // J. Math. Soc. Japan. – 1978. – 30, №1. – P.85-100.

[7] Борисенко А.А. О поверхностях с максимальной кривизной грассманова образа / А.А. Борисенко, Ю.А. Николаевский // Мат. заметки. – 1990. – Т.48, №3.

[8] Аминов Ю.А. Проблемы вложений: геометрические и топологические аспекты / Ю.А. Аминов // Итоги науки и техники. Сер. Пробл. геом. – 1982. – 13 – с.119-156

[9] Борисенко А.А. Классификация точек трехмерных поверхностей по грассманову образу / А.А. Борисенко, Ю.А. Николаевский // Укр. геом. сб. – 1989. – Вып.32. – С.11-27.

Відновити регулярний p-вимірний підмноговид V^p в R_{l+p}, що має Γ^p своїм грассмановим образом. Перші публікації щодо розв'язання цієї задачі належать Амінову Ю. А.[10], який довів теореми про існування та єдиність двовимірної поверхні корозмірності два евклідова простору, а потім і двовимірної поверхні довільної корозмірності, що має заданий грассманів образ[11]. Цього питання стосуються також роботи Вайнера Дж.[12] Горькавий В. О.[13] знайшов необхідні й достатні умови, при яких регулярний тривимірний підмноговид у грассмановому многовиді $G(l,l+3)$ є грассмановим образом регулярного тривимірного підмноговиду $(l+3)$-вимірного евклидова простору при $l \geq 4$. Горькавий В. О. розглядав також задачу відновлення підмноговидів за виродженим в лінію грассмановим образом.

Одним з перших дослідників грассманового многовиду псевдоевклідова простору є Т. Ханган[14]. В 1965 році він визначив ріманову структуру на множині площин псевдоевклідова простору. Також питаннями ріманової геометрії грассманових многовидів неізотропних підпросторів псевдоевклідова простору та конгруенцій 2-площин евклідова простору займався І. Маазікас[15]. Він довів існування інваріантної метрики грассманового многовиду l-площин індексу k псевдоевклідова n-простору індексу m й показав, що ця метрика перетворює грассманів многовид в простір Ейнштейна постійної скалярної кривини при всіх припустимих значеннях k і m. Теорією поверхонь у псевдоевклідовому просторі займалися Соколов Д. Д. і Горох В. П. У роботах Гороха В.П. розглядались мінімальні поверхні псевдоевклідова простору. Горькавий В.О. розглядав деформації поверхонь різних типів простору Мінковського, що зберігають грассманів образ.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконувалась відповідно до планів наукових досліджень на кафедрі загальної математики Запорізького національного університету МОНУ поза межами держбюджетних та госпдоговірних тем.

Мета і задачі дослідження. Метою роботи є знаходження зв'язків між геометріями неізотропних двовимірних поверхонь простору Мінковського та їх грассманових образів.

Досягнення цієї мети пов'язане з постановкою та розв'язанням таких задач:

- вивчення грассманового многовиду l-площин простору Мінковського та його підмноговидів;

---

[10] Аминов Ю.А. Определение поверхности в четырехмерном евклидовом пространстве по ее грассманову образу/ Ю.А. Аминов // Мат. сборник – 1982. – Т.117, №2. – С.147-160.

[11] Аминов Ю.А. Восстановление двумерной поверхности в n-мерном евклидовом пространстве по ее грассманову образу / Ю.А. Аминов // Мат. заметки. – 1984. – Т.36. – №2. – С.223-228.

[12] Weiner J.L. The Gauss map for surfaces Part I. Affine case / J.L. Weiner // Trans. AMS. – 1986. – V. 293, N.2. – P.341-446, Part II. Euclidean case / J.L. Weiner // Trans. AMS. – 1986. – V. 293, N.2. – P. 447-466.

[13] Горькавый В. А. Восстановление трехмерных подмногообразий евклидова пространства с большой коразмерностью по грассманову образу / В. А. Горькавый // Матем. заметки. – 1997. – 62. - №5. – С.694–699.

[14] Hangan Th. Structures pseudoriemanniennes sur l'ensemble des p-plans d'un espace pseudoeuclidien / Th. Hangan // Bull. Math. Soc. Sci. math. RSR. – 1965. – Vol.9. –1. – P.265-278.

[15] Маазикас И. К римановой геометрии грассмановых многообразий неизотропных подпространств псевдоевкидова пространства / И. Маазикас // Уч. записки Тартуского ун-та. - 1974. – Вып.342. – С.76-82.

- вивчення диференціальної геометрії двовимірної поверхні простору Мінковського;
- дослідження грассманового образу неізотропної поверхні;
- класифікація точок неізотропних поверхонь;
- виділення класів неізотропних поверхонь із заданими значеннями кривини грассманового многовиду уздовж площин, дотичних до грассманового образу поверхні;
- знаходження необхідних і достатніх умов існування поверхні простору Мінковського із заданим грассмановим образом.

Об'єкт дослідження: двовимірні неізотропні поверхні простору Мінковського та їх грассманові образи.

Предмет дослідження: диференціально-геометричні інваріанти поверхні простору Мінковського та її грассманового образу.

Методи дослідження. При розв'язанні поставлених задач у дисертації використовувались методи диференціальної геометрії підмноговидів, лінійної алгебри, диференціальних рівнянь в частинних похідних.

Наукова новизна одержаних результатів. У дисертаційній роботі:

- виведені формули для обчислення відстані між площинами грассманового многовиду площин псевдоевклідова простору в локальних координатах і за допомогою стаціонарних кутів;
- отримано вид однопараметричних сімей *l*–площин, які є геодезичними лініями в грассмановому многовиді;
- побудована індикатриса нормальної кривини для кожного типу неізотропних поверхонь простору Мінковського та за допомогою параметрів індикатриси записані формули для обчислення гауссової кривини поверхні та кривини грассманового многовиду уздовж площин, дотичних до грассманового образу;
- отримані афінна й грассманова класифікації точок неізотропної поверхні й доведена їх еквівалентність;
- описані класи поверхонь зі стаціонарними значеннями секційної кривини грассманового многовиду уздовж площин, дотичних до грассманового образу;
- доведені локальні теореми про існування околу точки, який є грассмановим образом поверхні простору Мінковського, описана процедура відновлення поверхні;
- доведені теореми про існування регулярної поверхні з краєм, що має заданий грассманів образ.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертація носить теоретичний характер. У роботі встановлений зв'язок між властивостями поверхонь простору Мінковського й властивостями їх грассманових образів. Отримані результати можуть бути використані для подальших досліджень у теорії підмноговидів неевклідових просторів і їх застосувань.

Особистий внесок здобувача. Формулювання мети дисертаційного дослідження та постановка основних задач для її досягнення належать науковому керівникові Стєганцевій П. Г., формулювання деяких уточнюючих і узагальнюючих задач здійснювалось за участю геометрів харківської геометричної школи на семінарах у ФТІНТ ім. Б. І. Вєркіна НАНУ та у ХНУ ім. В. Н. Каразіна та під час доповідей на конференціях. Усі основні результати дисертаційної роботи, що виносяться на захист, отримані автором особисто.

Апробація результатів дисертації. Основні положення дисертаційної роботи доповідались на таких наукових конференціях і семінарах:

− міжнародній школі-семінарі з геометрії та аналізу пам'яті М. В. Єфімова (Абрау-Дюрсо, 2006);

− міжнародних конференціях «Геометрія в Одесі» (м. Одеса, 2007 − 2009, 2015-2016);

− міжнародній конференції з геометрії та топології (м. Черкаси, 2007);

− міжнародному семінарі «Геометрия в Астрахани – 2007, 2008» «Симметрии: теоретические и методические аспекты». (м. Астрахань, 2007, 2008);

− наукових семінарах кафедри алгебри та геометрії Запорізького національного університету (м. Запоріжжя − 2005-2009, 2015-2017);

− семінарі відділу диференціальних рівнянь та геометрії ФТІНТ ім. Б.І.Вєркіна (керівник – професор, д.ф.-м.н. Амінов Ю.А. , м. Харків, 2016);

− міжнародній конференції "Modern Advances in Geometry and Topology", (м. Харків, 2016)

− міжнародній конференції «Алгебраїчні та геометричні методи аналізу» (м. Одеса, 2017-2018);

− Харківському міському геометричному семінарі (керівник – член-кореспондент НАН України, професор, д.ф.-м.н. О. А. Борисенко, м. Харків, 2017).

Публікації. Основні результати за темою дисертації викладено у 20 опублікованих роботах: 8 [1−8] статей у наукових журналах і збірниках, що входять до переліку фахових видань, затверджених МОН України, та міжнародних виданнях, з них 2 статті [4,6] в журналах з наукометричної бази SCOPUS, 12 тез доповідей в збірниках праць наукових конференцій та семінарів.

Структура та обсяг дисертації. Дисертаційна робота складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків, списку використаних джерел із 95 найменувань (10 сторінок). Загальний обсяг роботи складає 162 сторінки, у тому числі 138 основного тексту.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** обґрунтовано актуальність теми дисертаційної роботи, сформульовані мета, предмет, методи проведених досліджень та їх зв'язок з тематикою дисертаційної роботи, зазначені наукове, практичне значення та новизна. Наявна інформація про публікації автора за темою дисертаційної роботи.

В **першому розділі** проведено огляд літературних джерел за тематикою дисертації. Зроблено аналіз задач, пов'язаних із теорією грассманового образу поверхні в евклідових просторах. Серед цих задач виділяються задачі класифікації точок поверхні, знаходження поверхонь з екстремальними значеннями кривини грассманового многовиду уздовж площин, дотичних до грассманового образу, відновлення поверхні за її грассмановим образом та інші.

Описано результати досліджень грассманових многовидів у неевклідових просторах, зокрема у просторі Мінковського. В цьому просторі грассманів многовид є об'єднанням підмноговидів просторовоподібних, часоподібних та ізотропних площин. Зроблено аналіз задач, пов'язаних з дослідженням поверхонь простору Мінковського.

У **другому розділі** розглядається структура простору Мінковського ${}^1R_n$, наводиться класифікація прямих та площин цього простору, їх взаємне розташування. Розглядається множина всіх *l*-площин, які проходять через фіксовану точку простору. Оскільки в просторі Мінковського існують площини трьох типів, то розглянута множина є диз'юнктним об'єднанням трьох підмножин. В кожній з цих підмножин вводиться структура гладкого многовиду, визначається вид метрики в локальних координатах та за допомогою стаціонарних кутів.

Основні означення та теореми наведені згідно з нумерацією в дисертаційній роботі.

Визначення 2.1 Вектори простору ${}^1R_n$, скалярні квадрати яких додатні, називаються *просторовоподібними* векторами. Вектори з від'ємними скалярними квадратами називаються *часоподібними* векторами. Ненульові вектори, скалярні квадрати яких дорівнюють нулю, називаються *ізотропними* векторами.

Координати векторів в ортонормованому базисі будемо так само, як і в евклідовому просторі, називати декартовими. Скалярний добуток векторів $\bar{x}=(x_1,x_2,...,x_n)$ і $\bar{y}=(y_1,y_2,...,y_n)$, заданих декартовими координатами, має вигляд $(\bar{x},\bar{y})=-x_1y_1+x_2y_2+...+x_ny_n$.

Тип прямої простору ${}^1R_n$ визначається типом її напрямного вектора. Площини розмірності *l*, $2\le l\le n$-1, у яких усі вектори просторовоподібні, і площини, у яких є вектори всіх трьох типів називають відповідно просторовоподібними й часоподібними площинами. У просторі ${}^1R_n$ можливі також площини, у яких є тільки просторовоподібні й ізотропні вектори. Вони називаються ізотропними площинами.

Визначення 2.2. Нехай π і τ – дві неізотропні *l*-площини одного типу простору ${}^1R_n$, що проходять через початок координат. Розглянемо двовимірну площину, що проходить через початок координат і перпендикулярна кожній з *l*-площин π і τ. Кут між прямими перетину цієї двовимірної площини з *l*-площинами π й τ будемо називати *стаціонарним кутом* *l*-площин π і τ, а саму двовимірну площину - *кутовою площиною*.

Теорема 2.2. Для пари неізотропних l-площин одного типу завжди існує l кутових площин, деякі з яких можуть вироджуватися в прямі; будь-які дві кутові площини цілком ортогональні.

У просторі ${}^1R_{l+p}$ розглянемо множину l-площин, що проходять через фіксовану точку O. Будемо називати цю множину, за аналогією з евклідовим простором, грассмановим многовидом і позначати $PG(l,l+p)$. У просторі ${}^1R_{l+p}$ кожна з l-площин є l-площиною певного типу: просторовоподібною, часоподібною або ізотропною, тобто грассманів многовид простору ${}^1R_{l+p}$ можна представити у вигляді диз'юнктного об'єднання трьох підмноговидів $PG(l,l+p)={}^TPG(l,l+p)\cup{}^SPG(l,l+p)\cup{}^{Is}PG(l,l+p)$.

Метрику в підмноговиді ${}^TPG(l,l+p)$ часоподібних l-площин будемо визначати формулою

$$ds^2 = Tr[(E' + ZZ^t)^{-1}dZ(E + Z^tE'Z)^{-1}dZ^t],$$

а в підмноговиді ${}^SPG(l,l+p)$ просторовоподібних l-площин – формулою

$$ds^2 = Tr[(E + ZE'Z^t)^{-1}dZ(E' + Z^tZ)^{-1}dZ^t],$$

де Z - матриця локальних координат l-площини, $E' = diag(-1,1,...,1)$. Відносно ортонормованого базису простору, в якому матриця локальних координат набуває вигляду $Z = diag(th(\varphi_1 t), tg(\varphi_2 t),...,tg(\varphi_l t),0,...,0)$, ($\varphi_i$ – набір стаціонарних кутів пари l-площин) обидві формули приймають вигляд

$$ds^2 = (-\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + ... + \varphi_l^2)dt^2,$$

У підмноговиді ${}^{Is}G(l,l+p)$ ізотропних l-площин метрику визначимо наступною формулою

$$ds^2 = \lim_{k\to 0} Tr[(E''_{l\times l} + ZE''_{p\times p}Z^t)^{-1}dZ(E''_{p\times p} + Z^tE''_{l\times l}Z)^{-1}dZ^t],$$

де $E''_{l\times l} = diag(k,1...,1)$ або $ds^2 = (\varphi_2^2 + ... + \varphi_l^2)dt^2$.

У **третьому розділі** досліджується диференціальна геометрія двовимірної неізотропної поверхні чотиривимірного простору Мінковського та її грассманового образу. Для просторовоподібних та часоподібних поверхонь знайдено розклади Гаусса й Вейнгартена та вигляд тензора кривини. Розглядається поняття індикатриси нормальної кривини для кожного типу поверхонь, визначається вид цієї кривої. Грассманів образ поверхні досліджується за допомогою плюккерового вкладення.

Нехай V^2 – гладка поверхня класу $C^k, k \ge 1$ в ${}^1R_4$, задана векторним рівнянням $\bar{r} = \bar{r}(u^1,u^2)$, $x \in V^2$. Припустимо, що поверхня параметризована так, що $(\bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2)$ – ортонормований базис рухомого реперу поверхні в точці x, в якому вектори $\bar{r}_i = \dfrac{\partial \bar{r}}{\partial u^i}$ є дотичними до поверхні, а $\bar{\xi}_1$ і $\bar{\xi}_2$ – вектори нормальної площини N_x. Тип поверхні визначається типом дотичної площини. Якщо поверхня просторовоподібна, то нормальні площини в кожній точці до цієї поверхні будуть часоподібними, якщо ж поверхня часоподібна, то нормальні площини – просторовоподібні. У випадку ізотропної поверхні нормальні площини у всіх точках ізотропні, причому ізотропний вектор дотичної і нормальної площин буде спільним.

За допомогою нормалей $\bar{\xi}_1$ і $\bar{\xi}_2$ визначимо другі квадратичні форми

$$II^k = (\bar{\xi}_k, \bar{r}_{ij}) du^i du^j, k = 1,2,$$

коефіцієнти яких позначимо $L_{ij}^k = (\bar{\xi}_k, \bar{r}_{ij})$.

Тензор кривини для просторовоподібної поверхні має вигляд

$$R_{\beta ijk} = -L_{ik}^1 L_{j\beta}^1 + L_{ij}^1 L_{k\beta}^1 + L_{ik}^2 L_{j\beta}^2 - L_{ij}^2 L_{k\beta}^2,$$

а для часоподібної поверхні

$$R_{\beta ijk} = L_{ik}^1 L_{j\beta}^1 - L_{ij}^1 L_{k\beta}^1 + L_{ik}^2 L_{j\beta}^2 - L_{ij}^2 L_{k\beta}^2.$$

Індикатриса нормальної кривини неізотропної поверхні в заданій точці x описується кінцем вектора нормальної площини N_x, який є проекцією вектора нормальної кривини поверхні на цю площину. У випадку просторовоподібної поверхні індикатрисою є центральна невироджена крива часоподібної площини, а у випадку часоподібної поверхні – гіпербола просторовоподібної площини. Якщо початок координат є центром (α, β) індикатриси, а вісі координат направлені по її осям, то аналогом формули Картана для гауссової кривини просторовоподібної поверхні є формула $K = -\alpha^2 + \beta^2 + a^2 - b^2$, де a, b – піввісі індикатриси. Для гауссової кривини часоподібної поверхні формула Картана має вигляд $K = \alpha^2 + \beta^2 - a^2 + b^2$.

Поставимо у відповідність кожній точці x поверхні V^2 площину, яка паралельна нормальній площині N_x та проходить через фіксовану точку O простору ${}^1R_4$. Цим встановлюється відображення поверхні V^2 в грассманів многовид $PG(2,4)$. *Грассмановим образом* поверхні V^2 називають образ зазначеного відображення. Будемо позначати грассманів образ символом Γ^2.

Грассманів образ поверхні простору ${}^1R_4$ можна, як і в евклідовому просторі, задавати за допомогою *плюккерових* координат $p^{ij} = \begin{vmatrix} \xi_1^i & \xi_1^j \\ \xi_2^i & \xi_2^j \end{vmatrix}$, $i < j,\ i, j = 1,..,4$. Набір цих координат $(p^{12}, p^{13}, p^{14}, p^{23}, p^{24}, p^{34})$, який можна розглядати як координати точки шестивимірного афінного простору A_6, задовольняє співвідношенню Плюккера $p^{12}p^{34} - p^{13}p^{24} + p^{14}p^{23} = 0$, а також умові

$$-(p^{12})^2 - (p^{13})^2 - (p^{14})^2 + (p^{23})^2 + (p^{24})^2 + (p^{34})^2 = A,$$

де $A = -1$ у випадку часоподібної, $A = 1$ – просторовоподібної і $A = 0$ – ізотропної площини.

Білінійну форму, асоційовану з квадратичною формою в лівій частині останньої рівності можна розглядати як скалярний добуток векторів $\overline{p}=(p^{12},p^{13},p^{14},p^{23},p^{24},p^{34})$ і $\overline{q}=(q^{12},q^{13},q^{14},q^{23},q^{24},q^{34})$, тобто

$$(\overline{p},\overline{q})=-(p^{12}q^{12}+p^{13}q^{13}+p^{14}q^{14})+p^{23}q^{23}+p^{24}q^{24}+p^{34}q^{34},$$

і тим самим ввести в A_6 структуру шестивимірного псевдоевклідова простору індексу 3, який будемо позначати ${}^3R_6$.

Точковий підмноговид ${}^TPG(2,4)$ в цьому просторі задається двома рівняннями – $\overline{p}^2=-1$ та умовою Плюккера, тобто є чотиривимірним. Нормалями до нього є лінійні комбінації лінійно незалежних векторів $\overline{p}$ і $\overline{q}=(-p^{34},p^{24},-p^{23},p^{14},-p^{13},p^{12})$, причому $\overline{q}^2=1$. Оскільки нормальний простір до ${}^TPG(2,4)$ визначається часоподібним і просторовоподібним векторами, то цей підмноговид є чотиривимірним, причому його метрика має сигнатуру (– – + +). Метрика підмноговиду ${}^SPG(2,4)$ має таку саму сигнатуру. Таким чином, кожен з підмноговидів ${}^TPG(2,4)$ та ${}^SPG(2,4)$ можна задати вектор-функцією $\overline{p}=\overline{p}(y^1,y^2,y^3,y^4)$, де y^i – локальні координати. Нехай $d\sigma^2=a_{\alpha\beta}dy_\alpha dy_\beta$, $\alpha,\beta=1,\ldots,4$ – метрика на підмноговиді ${}^TPG(2,4)$, індукована метрикою охопного простору ${}^3R_6$, а $II^\sigma=\Omega^\sigma_{\alpha\beta}dy_\alpha dy_\beta,\sigma=1,2$ – його другі квадратичні форми. Рівняння Гаусса для ${}^TPG(2,4)$ має вигляд

$$\overline{R}_{\alpha\beta\gamma\delta}=-\Omega^1_{\alpha\gamma}\Omega^1_{\beta\delta}+\Omega^1_{\alpha\delta}\Omega^1_{\beta\gamma}+\Omega^2_{\alpha\gamma}\Omega^2_{\beta\delta}-\Omega^2_{\alpha\delta}\Omega^2_{\beta\gamma}=$$
$$=-a_{\alpha\gamma}a_{\beta\delta}+a_{\alpha\delta}a_{\beta\gamma}+(\frac{\partial\overline{p}}{\partial y^\alpha},\frac{\partial\overline{q}}{\partial y^\gamma})(\frac{\partial\overline{p}}{\partial y^\beta},\frac{\partial\overline{q}}{\partial y^\delta})-(\frac{\partial\overline{p}}{\partial y^\alpha},\frac{\partial\overline{q}}{\partial y^\delta})(\frac{\partial\overline{p}}{\partial y^\beta},\frac{\partial\overline{q}}{\partial y^\gamma}),$$

а для ${}^SPG(2,4)$

$$\overline{R}_{\alpha\beta\gamma\delta}=\Omega^1_{\alpha\gamma}\Omega^1_{\beta\delta}-\Omega^1_{\alpha\delta}\Omega^1_{\beta\gamma}-\Omega^2_{\alpha\gamma}\Omega^2_{\beta\delta}+\Omega^2_{\alpha\delta}\Omega^2_{\beta\gamma}=$$
$$=a_{\alpha\gamma}a_{\beta\delta}-a_{\alpha\delta}a_{\beta\gamma}-(\frac{\partial\overline{p}}{\partial y^\alpha},\frac{\partial\overline{q}}{\partial y^\gamma})(\frac{\partial\overline{p}}{\partial y^\beta},\frac{\partial\overline{q}}{\partial y^\delta})+(\frac{\partial\overline{p}}{\partial y^\alpha},\frac{\partial\overline{q}}{\partial y^\delta})(\frac{\partial\overline{p}}{\partial y^\beta},\frac{\partial\overline{q}}{\partial y^\gamma}).$$

Грассманів многовид евклідова простору характеризується тим, що має обмежену секційну кривину. В дисертаційній роботі доведено (**теорема 3.1**), що підмноговиди грассманового многовиду простору Мінковського мають протилежну властивість.

Теорема 3.1 Секційна кривина $\overline{K}(\sigma)$ грассманових підмноговидів ${}^TPG(2,4)$ і ${}^SPG(2,4)$ псевдоевклідова простору ${}^1R_4$ може приймати будь-які дійсні значення.

Знайдено також зв’язок кривини підмноговиду грассманового многовиду для площини, дотичної до грассманового образу поверхні $V^2\in{}^1R_4$, з геометрією цієї поверхні. Наприклад, для підмноговиду часоподібних площин має місце

Теорема 3.2. Кривина підмноговиду ${}^{T}PG(2,4)$ для площини, дотичної до грассманового образу просторовоподібної поверхні $V^2 \in {}^1R_4$, обчислюється за формулою $\overline{K}(\sigma) = \dfrac{-K^2 + 4a^2b^2}{K^2 - 4(\alpha^2 b^2 + \beta^2 a^2)}$.

Знайдено також зв'язок між кривиною $\overline{K}(\sigma)$ та гауссовою кривиною $\overline{K}_{\Gamma^2}$ грассманового образу у вигляді $\overline{K}_{\Gamma^2} = \overline{K}(\sigma) - 1$ для часоподібної та $\overline{K}_{\Gamma^2} = \overline{K}(\sigma) + 1$ – для просторовоподібної поверхні.

В евклідовому просторі досліджувались поверхні, для яких кривини грассманового многовиду уздовж площин, дотичних до грассманового образу поверхні, приймають мінімальне й максимальне значення. Оскільки секційна кривина підмноговидів ${}^{T}PG(2,4)$ і ${}^{S}PG(2,4)$ може приймати будь-які дійсні значення, то були розглянуті значення секційної кривини в точках локальних екстремумів. В роботі Маазікаса І.[16] для грассманових підмноговидів неізотропних підпросторів псевдоевклідова простору довільного індексу, знайдені стаціонарні значення їх секційної кривини. В дисертаційній роботі показано, що стаціонарні точки та відповідні значення секційної кривини підмноговиду ${}^{S}PG(2,4)$ мають вигляд

1. $\sigma^{12} = \sigma^{34}$, $\sigma^{24} = -\sigma^{13}$ і $\overline{K}(\sigma) = 0$;
2. $\sigma^{12} = \sigma^{34} = 0$, $\sigma^{23} = \sigma^{14}$ і $\overline{K}(\sigma) = 1$;
3. $\sigma^{13} = \sigma^{24} = 0$, $\sigma^{23} = -\sigma^{14}$ і $\overline{K}(\sigma) = 1$,

а для підмноговиду ${}^{T}PG(2,4)$

1. $\sigma^{12} = \sigma^{34}$, $\sigma^{24} = -\sigma^{13}$ і $\overline{K}(\sigma) = 0$;
2. $\sigma^{12} = \sigma^{34} = 0$, $\sigma^{23} = \sigma^{14}$ і $\overline{K}(\sigma) = -1$;
3. $\sigma^{13} = \sigma^{24} = 0$, $\sigma^{23} = -\sigma^{14}$ і $\overline{K}(\sigma) = -1$.

Ці результати дозволили описати ті класи поверхонь V^2 простору ${}^1R_4$, для яких кривина підмноговидів ${}^{T}PG(2,4)$ і ${}^{S}PG(2,4)$ уздовж площин, дотичних до їх грассманових образів Γ^2, приймає стаціонарні значення.

Теорема 3.4. Нехай $V^2 \subset {}^1R_4$ – регулярна часоподібна (або просторовоподібна) поверхня з невиродженим грассмановим образом Γ^2. Стаціонарне значення секційної кривини підмноговиду ${}^{S}PG(2,4)$ (або ${}^{T}PG(2,4)$) уздовж будь-якої неізотропної площини, дотичної до Γ^2, дорівнює нулю тоді й тільки тоді, коли виконуються умови:

1. Поверхня V^2 є плоским многовидом у просторі ${}^1R_4$.
2. Поверхня V^2 має плоску нормальну зв'язність, тобто її перша та друга квадратичні форми одночасно приводяться до діагонального вигляду.

---

[16] Маазикас И. К римановой геометрии грассмановых многообразий неизотропных подпространств псевдоевкидова пространства / И. Маазикас // Уч. записки Тартуского ун-та. - 1974. – Вып.342. – С.76-82.

Теорема 3.5. Нехай $V^2 \subset {}^1R_4$ – регулярна часоподібна (або простороводібна) поверхня з невиродженим грассмановим образом Γ^2. Стаціонарне значення секційної кривини підмноговиду ${}^S PG(2,4)$ (або ${}^T PG(2,4)$) уздовж будь-якої неізотропної площини, дотичної до Γ^2, дорівнює 1 (або -1) тоді й тільки тоді, коли поверхня V^2 є гіперповерхнею деякого тривимірного підпростору простору ${}^1R_4$.

Для афінної класифікації точок поверхні $V^2 \subset {}^1R_4$ в дисертаційній роботі використовується поняття дотичного параболоїда. Оскільки евклідів простір та простір Мінковського мають однакові афінні властивості, то ця класифікація співпадає з запропонованою в роботі[17] афінною класифікацією точок двовимірної поверхні чотиривимірного евклідова простору.

Якщо точка Q часоподібної поверхні $V^2 \subset {}^1R_4$ є початком координат, а дотичний простір в точці Q до поверхні співпадає з підпростором $\{x^1, x^2\}$, тоді рівняння дотичного параболоїда з вершиною в точці Q мають вигляд $x^{k+2} = L^k_{ij} x^j x^j$.

Залежно від виду елементарних дільників пучка $A^1 - \lambda A^2$ других квадратичних форм рівняння дотичного параболоїда невиродженим афінним перетворенням охопного простору зводяться до одного з наступних канонічних видів:

1) $x^3 = (x^1)^2$, $x^4 = (x^2)^2$ для випадку елементарних дільників $\lambda - \lambda_1, \lambda - \lambda_2$, $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in R$;

2) $x^3 = 2x^1x^2$, $x^4 = (x^2)^2$, якщо маємо один лінійний елементарний дільник кратності 2, тобто $(\lambda - \lambda_1)^2$, $\lambda_1 \in R$;

3) $x^3 = 2x^1x^2$, $x^4 = (x^1)^2 - (x^2)^2$ для квадратичного елементарного дільника $\lambda^2 - 2\alpha\lambda + (\alpha^2 + \beta^2)$, $\beta \neq 0$.

Таким чином, точки поверхні можна розбити на три класи.

У випадку простороводібної поверхні також виділяються три класи точок. Для отримання рівнянь дотичних параболоїдів дотичний простір в точці Q до поверхні обирається так, щоб він співпадав з підпростором $\{x^3, x^4\}$.

В дисертаційній роботі розглядається також класифікація точок поверхні простору Мінковського, яка здійснюється за допомогою кривини грассманового многовиду уздовж площини, дотичної до грассманового образу поверхні. За аналогією з евклідовим простором цю класифікацію названо *грассмановою*.

Визначення 3.2. Точка грассманового образу Γ^2 часоподібної поверхні V^2 називається еліптичною (параболічною, гіперболічною), якщо для

---

[17] Борисенко А.А. Классификация точек трехмерных поверхностей по грассманову образу /А.А. Борисенко, Ю.А. Николаевский // Укр. геом. сб. – 1989. – Вып.32. – С.11-27.

площини, дотичної до Γ^2 в цій точці, секційна кривина грассманового підмноговиду ${}^{S}PG(2,4)$ задовольняє умові $\overline{K}(\sigma)<1$ ($\overline{K}(\sigma)=1,\ \overline{K}(\sigma)>1$).

Визначення 3.3 Точка грассманового образу Γ^2 просторовоподібної поверхні V^2 називається еліптичною (параболічною, гіперболічною), якщо для площини, дотичної до Γ^2 в цій точці, секційна кривина грассманового підмноговиду ${}^{T}PG(2,4)$ задовольняє умові $\overline{K}(\sigma)>-1$ ($\overline{K}(\sigma)=-1,\ \overline{K}(\sigma)<-1$).

Оскільки кожна точка грассманового образу є зображенням деякої точки поверхні V^2, то будемо тип точки поверхні визначати за типом точки її образа.

В наступних теоремах знайдені умови, при яких першому (другому, третьому) класу точок в афінній класифікації відповідають еліптичні (параболічні, гіперболічні) точки в грассмановій класифікації.

Теорема 3.6. Для часоподібної поверхні з просторовоподібним грассмановим образом афінна та грассманова класифікації еквівалентні.

Теорема 3.7 Для просторовоподібної поверхні з часоподібним грассмановим образом афінна та грассманова класифікації еквівалентні.

У **четвертому розділі** розглядається задача відновлення поверхні простору Мінковського за її грассмановим образом, яка зводиться до доведення існування розв'язку диференціального рівняння другого порядку у частинних похідних. У евклідовому просторі ця задача розв'язувалась як локально, так і в глобальному аспекті. Для випадку гіперболічного типу рівняння в роботі[18] Амінов Ю.А. довів теорему про існування околу точки на двовимірному підмноговиді Γ^2 грассманова многовиду, що є грассмановим образом деякої регулярної поверхні класу C^2 евклідова простору. Для еліптичного типу рівняння в цій же роботі доведено більш сильну теорему про відновлення однозв'язної області деякої поверхні евклідова простору, яка має заданий грассманів образ.

В дисертаційній роботі доведено аналогічні теореми. У наступній теоремі показано, що процедура відновлення поверхні починається з обчислення коефіцієнтів диференціального рівняння другого порядку в частинних похідних за заданим рівнянням грассманового образу Γ^2 та показано, який вигляд має це диференціальне рівняння.

Теорема 4.1. Якщо існує часоподібна поверхня V^2 простору ${}^{1}R_4$, грассманів образ якої є заданою поверхнею Γ^2 підмноговиду ${}^{S}PG(2,4)$ простору ${}^{3}R_6$, то кожна компонента радіус-вектора поверхні V^2 задовольняє одному диференціальному рівнянню другого порядку в частинних похідних

$$C\Psi_{u^1u^1}+(A-D)\Psi_{u^1u^2}-B\Psi_{u^2u^1}+\Psi_{u_1}(C_{u^1}+A_{u^2})-\Psi_{u^2}(D_{u^1}+B_{u^2})=0,$$

тип якого збігається з типом грассманового образу (еліптичний, гіперболічний, параболічний).

[18] Аминов Ю.А. Геометрия подмногообразий / Ю.А. Аминов. – К.: Наукова думка, 2002.– 467 с.

Зауваження. У випадку, коли поверхня V^2 просторовоподібна й її грассманів образ є заданою поверхнею Γ^2 підмноговиду ${}^{T}PG(2,4)$ простору ${}^{3}R_6$, тоді кожна компонента її радіус-вектора також задовольняє диференціальному рівнянню другого порядку в частинних похідних наведеного вище вигляду. Тип цього рівняння буде еліптичним та буде збігатися з типом грассманового образу, якщо $\overline{K}(\sigma) > -1$, гіперболічним, якщо $\overline{K}(\sigma) < -1$, й параболічним, якщо $\overline{K}(\sigma) = -1$.

При доведенні локальної теореми 4.2 існування околу точки на Γ^2, який є грассмановим образом деякої поверхні простору ${}^{1}R_4$, використовуються наступні леми про властивості підмноговидів грассманового многовиду.

Лема 4.3. Нехай T^2 – двовимірна площина, дотична до ${}^{S}PG(2,4) \subset {}^{3}R_6$ в точці P_0, і секційна кривина задовольняє умові $\overline{K}(T^2) \neq 1$. Тоді знайдеться такий тривимірний підпростір $T^3 \subset {}^{3}R_6$, який проходить через точку P_0, що проекція T^2 на T^3 є двовимірною площиною (інакше кажучи, знайдеться T^3, на яке T^2 проектується регулярно).

Лема 4.4. Нехай T^2 – двовимірна площина, дотична до ${}^{T}PG(2,4) \subset {}^{3}R_6$ в точці P_0, і секційна кривина задовольняє умові $\overline{K}(T^2) \neq -1$. Тоді знайдеться такий тривимірний підпростір $T^3 \subset {}^{3}R_6$, який проходить через точку P_0, що проекція T^2 на T^3 є двовимірною площиною (інакше кажучи, знайдеться T^3, на яке T^2 проектується регулярно).

Теорема 4.2. Нехай Γ^2 – двовимірна регулярна класу C^4 поверхня в ${}^{S}PG(2,4)$ (або ${}^{T}PG(2,4)$). Якщо кривина $\overline{K}(\sigma)$ грассманового підмноговиду ${}^{S}PG(2,4)$ (або ${}^{T}PG(2,4)$) для площини, дотичної до Γ^2 в точці P_0, задовольняє умові $\overline{K}(\sigma) > 1$ (або $\overline{K}(\sigma) < -1$), то існує окіл точки P_0, що є грассмановим образом регулярної класу C^2 поверхні V^2 простору ${}^{1}R_4$.

Умова на кривину в останній теоремі означає, що задача відновлення поверхні розв'язується для гіперболічного типу рівняння з теореми 4.1. Для еліптичного типу рівняння можна довести більш сильну теорему 4.3.

Теорема 4.3. Нехай D – область на регулярній класу $C^{2,\alpha}$ поверхні Γ^2 в ${}^{S}PG(2,4)$ (або ${}^{T}PG(2,4)$), у кожній точці якої $\overline{K}(\sigma) < 1$ (або $\overline{K}(\sigma) > -1$). Нехай на границі області D задано три точки P_1, P_2, P_3, уся область D однозначно й регулярно проектується на деякий простір $T^3(\bar{e})$ ($\bar{e}$ – фіксований вектор в ${}^{1}R_4$) і опорна функція проекції не дорівнює нулю. Якщо Δ - однозв'язна область у двовимірній площині π простору ${}^{1}R_4$, що проходить через $\bar{e}$, і Q_1, Q_2, Q_3 – точки на границі області Δ, то в просторі ${}^{1}R_4$ існує регулярна класу $C^{2,\alpha}$ поверхня, яка проектується на площину π в область Δ та має D своїм грассмановим образом і така, що точки, які проектуються в Q_i, мають своїм грассмановим образом точки P_i.

Для гіперболічного типу рівняння також розв'язана задача відновлення поверхні евклідова простору в глобальному аспекті. В роботі Кізбікенова К.О.[19] доведена теорема про існування й єдиність поверхні з краєм, що має заданий грассманів образ. Перед формулюванням теореми автор будує спеціальний рухомий репер та з його допомогою виводить основне рівняння.

В дисертаційній роботі розв'язана задача відновлення двовимірних неізотропних поверхонь з краєм простору Мінковського за їх грассмановим образом. При розв'язанні цієї задачі також будується спеціальний рухомий репер. Доведено можливість відновлення такої часоподібної поверхні V^2 класу C^2 в ${}^1R_4$, яка бієктивно проектується на часоподібну поверхню $\tilde{V}^2$ тривимірного простору ${}^1R_3$, причому $\tilde{V}^2$ має бієктивний сферичний образ. В цьому випадку поставлену задачу можна почати з відновлення поверхні $\tilde{V}^2$, яка при вказаних умовах повністю визначається своєю опорною функцією. Вказані вимоги можна задовольнити наступним чином. Розглянемо центральне проектування із центру сфери одиничного радіусу простору ${}^1R_3$ на дотичну до неї площину в точці $(0,0,1)$. Центральне проектування є гомеоморфізмом півсфери і області на дотичній площині, декартові координати x, y точок якої задовольняють умову $x^2 - y^2 < 1$. Саме ці декартові координати оберемо в якості внутрішніх координат шуканої поверхні. Для отримання рівняння відносно опорної функції (основного рівняння) рухомий репер $\left(\bar{f}^1, \bar{f}^2, \bar{f}^3, \bar{f}^4\right)$ простору Мінковського обираємо спеціальним чином, пов'язуючи його з розглянутою півсферою. Помістивши вектори $\bar{f}^1$, $\bar{f}^2$ у дотичну площину поверхні V^2, а вектори $\bar{f}^3$, $\bar{f}^4$ – у її нормальну площину, отримаємо рухомий репер поверхні V^2. Відзначимо, що вектор $\bar{f}^3$ є водночас нормальним і до поверхні $\tilde{V}^2$.

Якщо поверхню V^2 задавати радіус-вектором $\bar{r}(x,y) = (z^1(x,y), z^2(x,y), z^3(x,y), z^4(x,y))$, а тривимірний простір ${}^1R_3$ рівнянням $z^4 = 0$, то поверхня $\tilde{V}^2$ має векторне рівняння $\bar{r}_1(x,y) = (z^1(x,y), z^2(x,y), z^3(x,y), 0)$. У випадку часоподібної поверхні $V^2 \subset {}^1R_4$ основне рівняння набуває вигляду

$$A_y h_{xx} - \left(A_x + B_y\right) h_{xy} + B_x h_{yy} = 0,$$

в якому коефіцієнтами є частинні похідні функцій $A = \dfrac{k\lambda}{n} + \dfrac{xy}{n}\mu$, $B = -n\mu$ від локальних координат x, y, λ, μ грассманового многовиду, $k = \sqrt{1 - x^2 + y^2}$,

---

[19] Кизбикенов К.О. Двумерные поверхности в четырехмерном евклидовом пространстве с данным грассмановым образом / К.О. Кизбикенов // ЛГПИ, Л.1983. 25 с. Рук. деп. В ВИНИТИ 5.12.83. №6568-83 ДЕП.

$n=\sqrt{1+y^2}$. Введемо ще позначення $a=\sqrt{1+\mu^2-\lambda^2}$. Заданий грассманів образ будемо задавати явними рівняннями $\lambda=\lambda(x,y),\ \mu=\mu(x,y)$. Зрозуміло, що використання спеціалізованого рухомого реперу визначає певний вигляд плюккерових координат грассманового образу. Має місце

Теорема 4.4. Нехай $\Gamma^2 \subset {}^S PG(2,4)$ – двовимірна поверхня в ${}^3R_6$, задана радіус-вектором $\sigma(x,y)=\left(\dfrac{yA+xB}{ak},\dfrac{A}{ak},\dfrac{x}{ak},-\dfrac{B}{ak},\dfrac{y}{ak},\dfrac{1}{ak}\right)$, де x,y – координати на півсфері S^2 одиничного радіусу. Нехай Ω – область на S^2, обмежена двома кривими, які є перетинами півсфери площинами, що проходять через її діаметр; Ω' – проекція області Ω на дотичну площину до S^2 в точці M. Функції $A(x,y)$, $B(x,y)$ є функціями класу C^2 в області Ω' й разом зі своїми похідними до другого порядку включно обмежені в Ω'. Нехай виконуються умови

$$4A_yB_x-\left(A_x+B_y\right)^2<0,$$
$$\min_{\Omega'}\{|\,4A_yB_x-\left(A_x+B_y\right)^2\,|,|\,A_y\,|,|\,B_x\,|\}\ge n_0=const>0$$

і нехай на одній із кривих l, що обмежують область Ω, задана неперервна функція $\overline{R}(s)=(R^1(s),R^2(s),R^3(s),R^4(s))$, $R_s^3=-a_0R_s^1-sR_s^2$, $R_s^4=-A|_l\,R_s^1+B|_l\,R_s^2$, $a_0=const$. Тоді існує єдина двовимірна регулярна часоподібна поверхня V^2 класу C^1 в ${}^1R_4$ така, що її грассманів образ збігається з поверхнею Γ^2 й край поверхні V^2 збігається з кривою $\overline{R}=\overline{R}(s)$.

Перша з умов теореми визначає гіперболічний тип основного рівняння.

Доведена також можливість відновлення просторовоподібної поверхні за її грассмановим образом. В цьому випадку вимагається її бієктивне відображення на евклідову гіперплощину R_3 і бієктивне відображення проекції поверхні на її сферичний образ.

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі проведено дослідження диференціальної геометрії поверхонь простору Мінковського та їх грассманових образів.

Відповідно до задач дисертаційного дослідження отримані такі основні наукові результати:

1. У підмножинах часоподібних, просторовоподібних і ізотропних площин грассманового многовиду простору Мінковського побудована структура гладкого многовиду й визначено вид метрики на кожному з підмноговидів.

2. Для неізотропних поверхонь простору Мінковського отримано вид дериваційних формул і тензора кривини.

3. Розглянуто поняття індикатриси нормальної кривини просторовоподібної та часоподібної поверхонь; отримані рівняння індикатриси й визначено її вид для кожного типу поверхні.

4. Отримані аналоги формули Картана для гауссової кривини неізотропної поверхні.

5. Вивчені властивості грассманового образу неізотропної двовимірної поверхні простору Мінковського.

6. Доведена теорема про необмеженість секційної кривини грассманового многовиду двовимірних площин простору Мінковського.

7. Виділені класи неізотропних поверхонь зі стаціонарними значеннями кривини грассманового многовиду уздовж площин, дотичних до грассманового образу поверхні.

8. Отримано дві класифікації точок неізотропних поверхонь – афінну та грассманову. Знайдені умови, при яких ці класифікації еквівалентні.

9. Розв’язана задача відновлення поверхні простору Мінковського за її грассмановим образом. Описано процедуру відновлення поверхні, грассманів образ якої співпадає з заданою двовимірною поверхнею на грассмановому многовиді. Доведені теореми існування поверхні з краєм, що має заданий грассманів образ.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Статті у фахових виданнях

1. Гургенидзе М. А. О погружении грассманова многообразия псевдоевклидова пространства / М. А. Гургенидзе // Зб. праць інституту математики НАН України. – 2006. – 3. № 3. – С. 107-114.

2. Гургенидзе М. А. Внутренняя геометрия грассманова многообразия псевдоевклидова пространства / М. А. Гургенидзе, П. Г. Стеганцева // Вісн. Харк. нац. ун-ту. Математика, прикл. математика і механіка. – 2008. – 826, № 58. – С. 141-150.

3. Величко И. Г. Подмногообразия грассманова многообразия плоскостей псевдоевклидова пространства / И. Г. Величко, М. А. Гургенидзе, П. Г. Стеганцева // Зб. праць інституту математики НАН України. – 2009. – 6. № 2. – С. 56-76.

4. Гречнева М. А. О существовании поверхности псевдоевклидова пространства с заданным грассмановым образом / М. А. Гречнева, П. Г. Стеганцева // Укр. мат. журнал. – 2016. – т. 68. – № 10. – С. 1320-1329.

5. Гречнева М. А. О поверхностях со стационарными значениями секционной кривизны грассманова образа / М. А. Гречнева, П. Г. Стеганцева // Proceedings of the International Geometry Center. – 2016. – Vol. 9. – № 2. – pp. 42-48.

6. Стеганцева П. Г. Грассманов образ неизотропной поверхности псевдоевклидова пространства / П. Г. Стеганцева, М. А. Гречнева // Известия вузов. Математика. 2017, № 2, С. 65-75.

7. Стеганцева П. Г. Эквивалентность аффинной и грассмановой классификаций точек поверхности пространства Минковского. / П. Г. Стеганцева, М. А. Гречнева // Proceedings of the International Geometry Center. – 2017. – Vol. 10. – № 1. – pp. 59-66.

8. Гречнева М. А. Существование в пространстве Минковского поверхности с краем, имеющей заданный грассманов образ / М. А. Гречнева, П. Г. Стеганцева // Proceedings of the International Geometry Center. – 2018. – Vol. 11. – № 1. – pp. 27-38.

Тези наукових доповідей

9. Гургенидзе М. А. Гладкая структура на множестве двумерных плоскостей в пространстве ${}^1R_4$ / М. А. Гречнева, П. Г. Стеганцева // Труды участников междунар. школы-семинара по геометри и анализу памяти Н. В. Ефимова, 5-11 сент. 2006 г. – Ростов-на-Дону, 2006 – С. 28

10. Гургенидзе М. А. Метрика в грассмановом многообразии псевдоевклидова пространства индекса 1 / М. А. Гургенидзе, П. Г. Стеганцева // Тези доповідей міжнародної конференції «Геометрія в Одесі – 2007». – Одесса, 2007. – С. 47

11. Гургенидзе М. А. Геодезические в грассмановом многообразии псевдоевклидова пространства / М. А. Гургенидзе, П. Г. Стеганцева // Тези доповідей 7-ої міжнародної конференції з геометрії та топології. – Черкаси, 2007. – С. 16-17.

12. Гургєнідзе М. А. Грасманів образ поверхні псевдоевклідового простору / М. А. Гургєнідзе, П. Г. Стєганцева // Геометрия в Астрахани – 2007. Симметрии: теоеретические и геометрические аспекты: междун. семинар 11-14 сентября 2007 г.: тез. докл. – Изд. дом «Астраханский университет», 2007. – С. 70.

13. Гургєнідзе М. А. Про секційну кривину грасманова многовиду псевдоевклідового простору / М. А. Гургєнідзе, П. Г. Стєганцева // Тези доповідей міжнародної конференції «Геометрія в Одесі – 2008». – Одесса, 2008. – С. 43-44.

14. Гургєнідзе М. О. Підмноговид ізотропних *l*-площин грассманова многовиду псевдоевклідового простору / М. О. Гургєнидзе, П. Г. Стєганцева // Тези доповідей міжнародної конференції «Геометрия в Астрахани – 2008». Астрахань. – 2008. – С. 69.

15. Гургенидзе М. А. Подмногообразие изотропных плоскостей грассманова многообразия псевдоевклидова пространства/ М. А. Гургенидзе, П. Г. Стеганцева, Е. В. Величко // Тези доповідей міжнародної конференції «Геометрія в Одесі – 2009». – Одесса, 2009. – С. 46

16. Гречнева М. А. Индикатриса нормальной кривизны евклидовой поверхности псевдоевклидова пространства / М. А. Гречнева, П. Г. Стеганцева // Тези міжнародної конференції «Геометрія в Одесі – 2015»: 25-31 травня 2015. – Одесса, 2015. – С. 72

17. Гречнева М. А. Стационарные значения секционной кривизны грассманова многообразия псевдоевклидова пространства / М. А. Гречнева,

П. Г. Стеганцева // Тезисы международной конференции «Геометрия и топология в Одессе – 2016» : 2-8 июня 2016 г. – Одесса, 2016. – С. 67

18. Stegantseva P. G. On the surfaces in Minkowski spase which correspond to the stationary values of the sectional curvature of the Grassmann manifold / P. G. Stegantseva, M. A. Grechneva // Abstracts of the International Conference “Modern Advances in Geometry and Topology”. – Kharkiv, 2016. – P. 48

19. Стеганцева П. Г. Классификация точек поверхности пространства Минковского / П. Г.Стеганцева, М. А. Гречнева // Тези міжнародної конференції «Алгебраїчні та геометричні методи аналізу». – Одеса, 31 травня – 5 червня 2017. – Одесса, 2017. – С. 143

20. Гречнєва М. О. Відновлення поверхні з краєм простору Мінковського за її грассмановим образом / М. О. Гречнєва, П. Г. Стєганцева, // Тези міжнародної конференції «Алгебраїчні та геометричні методи аналізу». – Одеса, 30 травня – 4 червня 2018. – Одесса, 2018. – С. 73

АНОТАЦІЯ

Гречнєва М. О. *Геометрія двовимірної поверхні простору Мінковського та її грассманового образу* − Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.04 – геометрія та топологія. Фізико-технічний інститут низьких температур ім. Б.І. Вєркіна НАН України, Харків, 2018.

Дисертація присвячена знаходженню зв’язків між диференціальними геометріями поверхонь простору Мінковського та їх грассманових образів. В підмножинах *l*-площин простору Мінковського побудована структура гладкого многовиду та досліджена його геометрія. Показано, що точкові грассманові многовиди двовимірних площин є чотиривимірними псевдорімановими многовидами шестивимірного простору, знайдено формули для обчислення їх секційної кривини уздовж дотичних площин різних типів і доведено, що вона може приймати будь-які дійсні значення. Для двовимірних неізотропних поверхонь простору Мінковського знайдено вид індикатриси нормальної кривини, аналоги формули Картана для обчислення гауссової кривини. Розглянуто поняття грассманового образу поверхні та його задання плюккеровими координатами. Виділені класи поверхонь, для яких кривина грассманового многовиду уздовж площин, дотичних до грассманового образу, приймає стаціонарні значення. Отримані афінна та грассманова класифікації точок неізотропної поверхні та знайдені умови еквівалентності цих класифікацій. Розв’язана задача відновлення поверхні простору Мінковського за її грассмановим образом.

Ключові слова: простір Мінковського, грассманів многовид, грассманів образ поверхні, індикатриса нормальної кривини, секційна кривина.

АННОТАЦИЯ

Гречнева М.А. *Геометрия двумерной поверхности пространства Минковского и ее грассманова образа* − Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.04 – геометрия и топология. Физико-технический институт низких температур им. Б.И.Веркина НАН Украины, Харьков, 2018.

Диссертационная работа посвящена нахождению связей между дифференциальными геометриями поверхностей пространства Минковского и их грассмановых образов. В подмножествах *l*-плоскостей пространства Минковского построена структура гладкого многообразия и изучена его геометрия. Показано, что точечные грассмановы многообразия являются четырехмерными псевдоримановыми многообразиями шестимерного пространства, найдены формулы для вычисления их секционной кривизны вдоль касательных площадок разных типов и доказано, что она может принимать любые действительные значения. Для двумерных неизотропных поверхностей пространства Минковского найден вид индикатрисы нормальной кривизны и получены аналоги формулы Картана для вычисления гауссовой кривизны. Рассмотрено понятие грассманова образа поверхности и его задание плюккеровыми координатами. Выделены классы поверхностей пространства Минковского, для которых кривизна грассманова многообразия вдоль площадок, касательных к грассманову образу, принимает стационарные значения. Получены аффинная и грассманова классификации точек неизотропной поверхности и найдены условия эквивалентности этих классификаций. Решена задача восстановления поверхности пространства Минковского по ее грассманову образу.

Ключевые слова: пространство Минковского, грассманово многообразие, грассманов образ поверхности, индикатриса нормальной кривизны, секционная кривизна.

ABSTRACT

Grechneva M.O. *The geometry of the two-dimensional surface of Minkowski space and its grassman image* - Manuscript.

The thesis for the Candidate of physical and mathematical sciences degree on specialty 01.01.04 – the geometry and the topology. – B.Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kharkiv, 2018.

The dissertation deals with the research of the links between the differential geometries of the surfaces and their Grassman images in Minkowski space and with the use of these links for the investigation of the surfaces.

The concept of the stationary angles of the couple of the *l*-planes has been defined on the set of the *l*-planes in Minkowski space, the relative positions of the *l*-

planes have been investigated. The smooth manifold structure has been constructed on the subsets of the timelike, the spacelike and the isotropic *l*-planes. The metric with the local coordinates and with the stationary angles has been defined on each submanifold. The formulas for the calculation of Christoffel symbols of the second kind and the geodesic lines equations have been obtained.

The Gauss and Weingarten derivation formulas for two-dimensional timelike and spacelike surfaces in the Minkowski space have been obtained. It has been proved that the indicatrix of the normal curvature of the spacelike surface is the central non-degenerated curve on the timelike normal plane and the indicatrix of the normal curvature of the timelike surface is the hyperbola. The analogues of Cartan formula for the calculation of Gauss curvature have been obtained.

The metric in the six-dimensional space of the images of Grassman manifold in Minkowski space has been determined. The submanifolds of Grassman manifold are mapped by the algebraic surfaces in the six-dimensional space. It has been proved that on these surfaces the pseudo-Riemannian metric is induced and the form of this metric has been obtained. Some properties of the submanifolds of Grassman manifold and of its point images have been proved. The tensor of the curvature of the submanifolds of the non-isotropic planes has been constructed. The formulas for the calculation of the sectional curvature of the submanifolds along the different types of the tangential planes have been obtained and it has been proved that the sectional curvature of this manifold can take on any real values.

The concept of Grassman image of the surface and its determination by Plucker coordinates has been considered. One has found the link between the curvature of the submanifolds of the non-isotropic planes along the domains which are tangential to Grassman image of the two-dimensional surface in Minkowski space and the intrinsic geometry of the surface. The classes of the surfaces in Minkowski space with the stationary values of the sectional curvature of Grassman manifold along the domains which are tangential to Grassman image have been found.

The affine classification of the points of the non-isotropic surface in the four - dimensional Minkowski space and the classification with the help of Glassman image have been made. The conditions of the equivalence of these classifications have been found.

The problem connected with the finding of the surface in Minkowski space with the given Grassman image has been solved. The procedure of the reconstruction of the surface, Grassman image of which coincides with the given two-dimensional surface on Grassman manifold has been presented. The theorems which state the existence of the surface with boundary which has the given Grassman image have been proved.

Key words: Minkowski space, Grassman manifold, Grassman image of the surface, indicatrix of the normal curvature, sectional curvature.