ВІДГУК

офіційного опонента на дисертацію

Резуненка Олександра Вячеславовича

"*Якісні властивості динамічних систем, що породжені нелінійними диференціальними рівняннями у частинних похідних з загаюванням*",

що представлена на здобуття наукового ступеня

доктора фізико-математичних наук за спеціальністю

01.01.03 — математична фізика

Диференціальні рівняння з загаюванням зустрічаються в математичній літературі давно та привертають увагу дослідників різних прикладних задач. Зокрема, загаювання виникає природнім чином в різноманітних постановках задач керування. Такими задачами займались такі відомі математики як М.М.Красовський, Р.Ф.Габасов, Ф.М.Кирилова та інші. Багато методів дослідження рівнянь з загаюванням розроблені на основі методів звичайний диференціальних рівнянь. Однак різні типи загаювання вимагають відповідні поглиблення методів, що відрізняються від методів звичайних диференціальних рівнянь, а також пошук нових підходів. Згадаємо роботи А.Д.Мишкіса, Дж.Хейла, В.Вольтера. Зважаючи на те, багато природніх та штучних процесів описуються диференціальними рівняннями з загаюванням, в наш час активно досліджуються як теоретичні так і прикладні питання цього напрямку. Наприклад, дослідження Н.В.Азбелева, Р.Белмана, К.Кука, Г.А.Каменського, Дж.Мале-Паре, Х.О.Вальтера, Т.Кристина, Дж.Ву, Ф.Хартунга та інших. Отже тема дослідження є актуальною та важливою.

Загаювання можуть бути дискретними та розподіленими, сталими, залежними від часу та стану системи. Слід зауважити, що в дисертації розглядаються всі пераховані типи загаювання, але центральним є загаювання, що залежить від стану. Цей тип загаювання є найбільш природнім з точки зору прикладних задач, та найбільш складним для аналізу з математичної точки зору. Як показано на простих прикладах (Р.Драйвер, Е.Вінстон), навіть скалярні рівняння з загаюваннями, що залежать від стану можуть втрачати властивість єдиності розв'язків для класичного випадку неперервних початкових функцій. В дисертації досліджуються як звичайні диференціальні рівняння з загаюванням, так і рівняння у частинних похідних з загаюванням, тож ситуація є ще складнішою.

Перше коло питань, що вивчаються, стосується коректної розв'язності початкових задач, коректності за Ж.Адамаром. Для досягнення коректності за Ж.Адамаром розроблені різні напрямки. Одні результати стосуються звуження фазових просторів для отримання властивості Липшиця відповідних нелінійних загаюваних елеменів. В цьому напрямку запропоновані декілька підходів в різних функціональних просторах.

Інші результати спираються на запропоновану автором так звану 'ігноруючу умову' та її узагальнення. Ця умова виділяє новий клас задач (з математичної точки зору), які є корекно поставленими на класичному просторі неперервних за часом функцій.

З моєї точки зору, цей підхід є основним і найбільш оригінальним. Він є новим не тільки для рівнянь у частинних похідних, а і для звичайних диференціальних рівнянь.

Для дослідження рівнянь у частинних похідних використовуються різні типи слабких та класичних розв'язків. Відповідно і методи доведення існування розв'язків різні. Зокрема, використані метод Шаудера нерухомої точки та метод компактності. Метод компактності полягає у доведенні існування та збіжності наближених розв'язків. Після доведення коректної розв'язності, будуються динамічні системи у відповідних просторах. Зокрема, у просторі $C([-r, 0]; L^2(\Omega))$ та його підмножинах таких, як липшицеві за часом функції зі значеннями в різних просторах $D(A^\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Вибір простору пов'язаний як з типом розв'язків (слабких, класичних) так і з класом загаюваних функціоналів (липшицеві, або такі, що задовільняють ігноруючій умові).

Другим колом питань, що вивчаються, є асимптотична поведінка розв'язків, коли час прямує до нескінченності.

В другому розділі дисертації результати отримані для рівнянь у частинних похідних зі сталим загаюванням. Досліджується рівняння наступного класу реакції-дифузії

$$\dot{u} + Au = B(u_t) \quad \text{для} \quad t > 0.$$

В рівнянні вище, лінійний оператор A є додатнім, з дискретним спектром в сеперабельному гільбертовому просторі H з щільною областтю визначення $D(A) \subset H$. Також використовується стандартне для рівнянь із загаюванням позначення стану u_t (у випадку неперервних розв'язків). Це функція $u_t = u_t(\theta) \equiv u(t+\theta)$ для $\theta \in [-r, 0]$. Нелінійне відображення B в цьому розділі є липшицевим (деталі у припущенні (A2) на стор. 48).

Для рівняння вище побудовані інерційні многовиди з загаюванням (теорема 2.2) та наближені інерційні многовиди (теорема 2.21). Останні є липшицевими скінченновимірними поверхнями, які мають поглинаючі околи.

Важливо підкреслити, що збудовані наближені інерційні многовиди є новими навіть для випадку без загаювання. Підхід развинутий як для параболічних рівнянь так і для рівнянь другого порядку за часом (зокрема рівняння коливань)

$$\ddot{u} + 2\varepsilon\dot{u} + Au = B(u_t) \quad \text{для} \;\; t > 0, \quad \varepsilon > 0$$

з початковими умовами

$$u(\theta) = u^0(\theta) \quad \text{для} \;\; \theta \in [-r, 0], \quad \dot{u}\big|_{t=0+} = u^1.$$

Для цього рівняння побудовані інерційні многовиди з загаюванням (теорема 2.41), за допомогою яких будуються стаціонарні наближені інерційні многовиди (теорема 2.49).

Розіли 3-6 присвячені рівнянням з загаюванням, що залежить від стану. Окрім результатів по коректній розв'язності, яка обговорювалась вище, в цих розділах досліджується асимптотична поведінка розв'язків. Основними є результати про стійкість стаціонарних розв'язків за Ляпуновим та існування глобальних атракторів. Стійкість та обмеженість за нормою розв'язків отримані з використанням функцій Ляпунова. Існування атракторів у різних фазових просторах отримано, спираючись на класичну теорему хоча присутність загаювання, що залежить від стану додає технічних складнощів. Скінченновимірність атрактора доведена (теорема 3.117) методом квізістійких оцінок, що був нещодавно розвинутий І.Д.Чуєшовим та І.Лашецькою.

Цікавими є застосування розроблених математичних підходів до такої прикладної задачі (розділи 4 та 5) як вірусна динаміка всередені організму. Вперше досліджені такі вірусні моделі, що мають загаювання, що залежить від стану. Основні результати отримані як для систем звичайних диференціальних рівнянь (розділ 4) так і для системи реакції-дифузії (розділ 5). В четвертому розділі моделі мають п'ять змінних: сприйнятливі (неінфіковані) клітини організму, інфіковані клітини, вільні вірусні частинки, CTL-відповідь (клітини), та антитіла. Нелінійності функціональної відповіді f можуть бути з класу д'Анжеліса-Беддінгтона або більш широких класів (деталі надані в тексті дисертації). Асимптотична поведінка розв'язків (стійкість) досліджується методом функцій Ляпунова з відповідними модифікаціями для врахування присутності загаювання, що залежить від стану. Результати стійкості в різних випадках постановки задачі наведені в теоремах 4.7, 4.8, 4.11, 4.12, 4.19. У розділі 5 досліджена модель реакції-дифузії для динаміки вірусних захворювань із урахуванням загаювання, що залежить від стану. Слід відмітити, що загальний клас нелінійностей f в системі (5.2) дозволяє досліджувати одночасне існування багатьох стаціонарних розв'язків. Теореми 5.7, 5.11 надають достатні умови їх локальної стійкості.

Отримані результати є чітко обґрунтованими та супроводжуються повними доведеннями. Їх достовірність не викликає сумніву. В опублікованих працях повністю викладені всі результати. Результати дисертації оприлюднені в міжнародних наукових фахових виданнях високого рівня та доповідались на численних математичних конференціях та семінарах. Зокрема на семінарі кафедри прикладної математики Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна та семінарі, що присвячений 60-ти річчю проф. Г.М. Скляра (керівник проф. В.І. Коробов), семінарах кафедри математичної фізики та обчислювальної математики Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна (керівник чл.-кор. НАН України І.Д. Чуєшов), математичному семінарі ФТІНТ НАН України (керівник акад. НАН України Є.Я. Хруслов), двічі на семінарі Математичного інституту Університету м.Гісена, Німеччина (керівник проф. Х.О. Вальтер), математичному семінарі університету Нью Фаундленда, Канада (керівник проф. К. Зоу), семінарі кафедри математичної фізики Київського національного університету імені Тараса Шевченка (керівники проф. Т.А. Мельник, проф. В.Г. Самойленко), семінарі кафедри диференціальних рівнянь Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара (керівник проф. П.І. Когут).

Автореферат повністю відображає основні положення та результати дисертації.

Зауваження.

1) На сторінці 34 слід писати "М.М. Красовський" замість "Н.Н. Красовський" (два рази) та "Л.Е. Ельсгольц" замість "Л.Э. Ельсгольц".

2) Цікаво було б дослідити питання наближення розв'язків задачі з загаюванням, що залежить від стану в якій не виконується ігноруюча умова (та відсутня єдиність розв'язків) за допомогою послідовності допоміжних задач, в яких стала ігнорування $\eta^k_{ign} \to 0$ при $k \to \infty$.

3) Слід зазначити, що в деяких прикладних задачах (наприклад, ситуації швидкого розігріву в останній момент) використання ігноруючої умови може бути не цілком доречним. Але це не стосується збудованої дисертантом теорії та розглянутих прикладів застосування.

Викладене вище дає підстави зробити висновок, що дисертаційна робота Резуненка Олександра Вячеславовича "*Якісні властивості динамічних систем, що породжені нелінійними диференціальними рівняннями у частинних похідних з загаюванням*", що представлена на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.03 — математична фізика, за обсягом проведених досліджень, її актуальністю, новизною, науковим рівнем та кількістю публікацій відповідає всім вимогам "Порядку присудження наукових ступенів", затвердженого Постановою Кабінету Міністрів України від 24.07.2013 року № 567, а її автор — Резуненко О.В. заслуговує на присудження йому наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.03 — математична фізика.

Офіційний опонент,
доктор фізико-математичних наук, професор,
завідувач кафедри прикладної математики
Харківського національного університету
імені В.Н.Каразіна — Коробов В.І.

Підпис проф. Коробова Валерія Івановича засвідчую:

Підпис засвідчую
Начальник служби управління персоналом

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ * ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ В.Н. КАРАЗІНА * КОД 02071205