ВІДГУК

офіційного опонента, доктора фізико-математичних наук
Дудкіна Миколи Євгеновича
на дисертацію
Хейфеця Олександра Яковича
"Унітарні системи розсіювання та задачі інтерполяції"
на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук
зі спеціальності
01.01.01 - математичний аналіз

В дисертації отримано важливі результати в галузі математичного аналізу яка вивчає задачі інтерполяції в класах аналітичних і гармонійних функцій. Ці задачі беруть початок з класичних робіт Стільт'єса, Ріса, Шура, Каратеодорі, Неванлінни і тісно пов'язані з теорією розширень симетричних та ізометричних операторів у просторах Ґільберта. Основи теорії розширень було закладено в роботах фон Неймана, Стоуна, Гамбургера, Лівшиця, Крейна, Штрауса і вперше застосовано до вивчення задач інтерполяції Неванлінни-Піка Секефальві-Надєм і Кораньі і до задачі Нехарі — Адамяном, Аровим і Крейном. Спільною рисою цих задач є той факт, що множину розв'язків можна описати за допомогою дробово-лінійного перетворення над довільним параметром. Формула що дає параметризацію всіх розв'язків задачі є наслідком з'єднання певних лінійних систем і того як при цьому обчислюються спектральні функції. Дисертація є суттєвим внеском в розвиток цього напрямку аналізу.

Дисертація складається з анотації, вступу, семи розділів, висновків і списку використаних джерел.

У вступі обгрунтовано актуальність теми дисертації, сформульовано мету й завдання досліджень, визначено наукову новизну і практичне значення одержаних результатів, наведено перелік публікації за темою дисертації і установ та організацій, де доповідались результати.

У першому розділі наведено огляд літератури по інтерполяційним проблемам, методам їх досліджень та сформульовано основні результати дисертації. Зокрема, докладно пояснюється схема Абстрактної Задачі Інтерполяції, що була розроблена в роботах В.Е. Кацнельсона, П. Юдицького і здобувача.

Основним засобом розв'язання Абстрактної Задачі Інтерполяції є теорія унітарних вузлів і їх з'єднань. Для побудови функціональної моделі унітарного вузла використовується простір де Бранжа-Ровняка. Ця техніка є ефективною для таких задач як проблема Неванлінни–Піка, бідотична проблема, проблема Сарасона і проблема моментів, де розшукуються функції аналітичні в області з вузлами інтерполяції всередині області або на її межі. Але для таких задач як проблема ліфтинга комутанта і проблема Нехарі ця техніка не спрацьовує, тому що їх розв'язки не є аналітичними функціями. Для таких задач замість унітарних вузлів автор розглядає унітарні системи розсіювання введені в спільній роботі автора з С. Бойко і В. Дубовим, а замість просторів де Бранжа-Ровняка використовуються простори мір Хеллінгера.

У Розділі 2 містяться необхідні відомості про унітарні системи розсіювання. Сукупність $\mathfrak{S} = (\mathcal{U}, \rho; \mathcal{K}, \mathcal{E})$, де $\mathcal{K}$ – *гільбертів простір станів*, $\mathcal{E}$ – *простір коефіцієнтів*, $\mathcal{U}$ – унітарний оператор еволюції, що діє в $\mathcal{K}$ і ρ – оператор *масштабу* що діє з $\mathcal{E}$ в $\mathcal{K}$. З кожною унітарною системою розсіювання $\mathfrak{S}$ пов'язується її *спектральна функція*

$$\sigma(\zeta) = (1 - |\zeta|^2)\rho^*(I - \bar{\zeta}\mathcal{U})^{-1}(I - \zeta\mathcal{U}^*)^{-1}\rho. \tag{1}$$

яка є позитивною гармонійною операторно-значною функцією в просторі $\mathcal{E}$. Викладено числення з'єднань унітарних системи розсіювання зі зворотним зв'язком та обчислено динаміку з'єднаної системи. Обчислено функції розсіювання з'єднаної системи відносно заданого масштабу та масштабу з'єднання.

У Розділі 3 схему Абстрактної Задачі Інтерполяції розширено на клас задач, розв'язками яких є додатні гармонійні функції. Таку узагальнену Абстрактну Задачу Інтерполяції сформульовано в термінах унітарних систем розсіювання. В Теоремі 3.6 множина розв'язків узагальненої Абстрактної Задачі Інтерполяції описується формулой (1), де $\mathcal{U}$ пробігає множину всіх унітарних розширень деякого оператора $\widetilde{V}$, який визначається за даними задачі. З урахуванням результатів Розділу 2 це приводить до параметризації розв'язків узагальненої АЗІ з вільним параметром $\omega(\zeta)$, який може бути довільною операторно-значною функцією класу Шура в колі $\mathbb{T}$, $\omega(\zeta) : N_1 \to N_2$.

У Розділі 4 розглядається загальна проблема про ліфтинг комутанту, розв'язність якої було доведено Б. С-Надєм і Ч. Фойашем в 1968 р. Показано, що вона вкладається в схему Абстрактної Задачі Інтерполяції, розглянуту в Розділі 3, вивчено специфіку даних задачі про ліфтинг і отримано опис всіх ліфтингів заданого стиснення в термінах їх символів. Поняття символу ліфтингу також введено в цій роботі і узагальнює класичне поняття символу Ганкелева оператора. В Теоремі 4.18 отримано повну характеризацію коефіцієнтів параметризуючої формули проблеми ліфтинга комутанту.

Ці результати застосовано до наступної задачі Нехарі: *задано послідовність комплексних чисел* $\{\gamma_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$, *і потрібно описати всі* L^∞*-функції* w *на одиничному колі* $\mathbb{T}$ *такі, що*

$$\|w\|_\infty \le 1 \quad \text{і} \quad \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} e^{int} f(e^{it})dt = \gamma_n \text{ при } n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Загальна формула, що дає параметризацію розв'язків проблеми ліфтинга комутанта у випадку проблеми Нехарі може бути записана як

$$w = \frac{a}{\overline{a}} \frac{\omega - \overline{b}}{1 - \omega b}, \quad \omega \in S, \tag{2}$$

де функції a, b задовольняють умови:
(1) $a, b \in H^\infty$; (2) a зовнішня, $b(0) = 0$; (3) $|a|^2 + |b|^2 = 1$ майже всюди на $\mathbb{T}$. Пару функцій (a, b), що має перелічені вище властивості, називають *γ-твірною парою.* γ-твірна пара називається регулярною, якщо формула (2) дає опис всіх розв'язків деякої задачі Нехарі. Це поняття було введено Д. З. Аровим і ним же була отримана характеризація таких пар. Інший критерій регулярністі γ-твірної пари знайдено в Теоремі 4.28.

У Розділі 5 розв'язано задачу Д. Сарасона про регуляризацію γ-твірних пар. Основним результатом цього розділу є Теорема 5.7, яка стверджує, що для кожної γ-твірної пари (a, b) існує внутрішня функція θ така, що пара $(a, b\theta)$ є регулярною, що є відповіддю на проблему поставлену Сарасоном в 1989 р.

У підрозділі 5.2 побудовано контрприклад до іншої проблеми Д. Сарасона. Про γ-твірну пара (a, b) говорять, що вона має властивість абсолютної неперервності, якщо для будь-якої функції ω класу Шура міра $\sigma_{b\omega}$ в представленні Ріса-Герглотца

$$\frac{1 + b(\zeta)\omega(\zeta)}{1 - b(\zeta)\omega(\zeta)} = \int_{\mathbb{T}} \frac{t + \zeta}{t - \zeta} \sigma_{b\omega}(dt), \quad |\zeta| < 1$$

є абсолютно неперервною. Сарасон сформулював як гіпотезу, що з цієї властивості пари (a, b) випливає її регулярність. Автором показано, що пари (a, b), що виникають при параметризації розв'язків проблеми моментів Гамбургера мають властивість абсолютної неперервності, але є сингулярними, тобто не можуть бути регулярними. Більш того, в дисертації побудовано клас сингулярних γ-твірних пар, які мають властивість абсолютної неперервності.

У Розділі 6 отримано аналог класичної теореми Жюліа-Каратеодорі про кутову межову похідну для похідних вищого порядку. Виявлено усі еквівалентні умови для її існування у сенсі аналогічному до похідної першого порядку. Теорему сформульовано у термінах властивостей відповідних матриць. У Теоремі 6.25 розглянуто відповідну межову інтерполяційну задачу і доведено що кратний аналог умови Жюліа-Каратеодорі є еквівалентним умові симетрії межових похідних, яка виникала в працях І.В. Ковалішиної.

У Розділі 7 вивчено розширений клас Крейна-Лангера S_κ, який визначається від'ємним індексом інерції матриць Шварца- Піка і який (на відміну від узагальненого класу Шура) містить не тільки функції з полюсами, але й функції зі стрибками. В Теоремі 7.18 розв'язано інтерполяційну задачу

Неванлінни-Піка у розширеному класі Крейна-Лангера та отримано параметризацію всіх її розв'язків в класі S_κ. Формула, що описує множину розв'язків має вигляд дробово-лінійного перетворення над довільною функцією класу Шура, тобто на відміну від задачі Неванлінни-Піка в узагальненому класі Шура, коли дозволяються лише розв'язки з полюсами, в цьому класі не виникає ефект сторонніх розв'язків.

Переходячи до загальної оцінки дисертації, відмітимо, що дисертація Хейфеця О. Я. є завершеною працею, в ній отримано низку нових, цікавих результатів в галузі комплексного аналізу і теорії операторів, які охоплюють абстрактні інтерполяційні задачі, пряма і зворотню проблеми ліфтингу комутанту, проблему Нехарі і повязані з нею проблеми Сарасона, межову кратну інтерполяційну проблему, задачу Неванлінни-Піка у розширеному класі Крейна-Лангера. Усі наведені в дисертації результати є новими. Вони чітко сформульовані й строго доведені, вчасно опубліковані, що забезпечує достовірність основних дисертаційних положень та висновків з них. Автореферат правильно відображає зміст дисертації.

На підставі сказаного вважаю, що дисертаційна робота "Унітарні системи розсіювання та задачі інтерполяції" за актуальністю тематики і одержаними в ній науковими результатами повністю відповідає усім вимогам щодо докторських дисертацій зі спеціальності 01.01.01 - математичний аналіз, зокрема вимогам постанови Кабінету Міністрів України за № 567 від 24 липня 2013 року "Про затвердження Порядку присудження наукових ступенів" зі змінами і доповненнями, внесеними постановами Кабінету Міністрів України від 19 серпня 2015 року за №656, від 30 грудня 2015 року за №1159, від 27 липня 2016 року за №567 і наказом №40 МОН України від 12 січня 2017 року, а її автор Хейфець Олександр Якович заслуговує на присудження наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 – математичний аналіз.

Офіційний опонент:
доктор фіз.-мат. наук, професор,
в.о. завідувача кафедри диференціальних рівнянь
Національного технічного університету України
"Київський політехнічний інститут
імені Ігоря Сікорського" Дудкін М. Є.

Підписи засвідчую Учений секретар
Національного технічного університету України
"Київський політехнічний інститут
імені Ігоря Сікорського" Мельниченко А. А.