

## **Відгук**

офіційного опонента на дисертаційну роботу

**Болотова Дмитра Валерійовича**

*“Топологія та макроскопічна геометрія ріманових многовидів”*,

подану на здобуття наукового ступеня

доктора фізико-математичних наук

за спеціальністю 01.01.04 – геометрія і топологія.

**Актуальність теми.** Встановлення зв'язків між топологічними і геометричними характеристиками многовидів та їх відображень є одним з найважливіших завдань, які вивчає геометрична топологія. Природно виникає питання про існування на гладкому многовиді метрик, обмежених додатковими умовами на кривину. Доволі складним виявилось питання опису топології замкнутих многовидів, які допускають метрику додатної скалярної кривини. Дослідженням цих питань займалось досить багато математиків (А.Ліхнерович, У.Терстон, Н.Хітчін, Дж. Розенберг, С.Штольц, М.Громов, В.Топоногов, Б.Вілкінг, Г.Лоусон, К.Шоен, С.Яо). Незважаючи на отримані ними важливі результати, в цій області залишилося багато нерозв'язаних проблем. Якщо многовид має додаткову структуру (що цікаво для фізиків і в питаннях космогонії), наприклад, симплектичну, контактну або структуру шарування, то природно виникає питання про топологічні обмеження на многовид, якщо додаткова структура має обмеження на геометрію. В цьому напрямку відомі роботи У.Лікоріша, Дж.Вуда, Дж.Чігера, Д.Громолла, Д.Джонсона, Л.Вітта, Д.Сулівана, С.Новікова, О.Борисенка, Ю.Амінова, Г.Штака.

Дисертація присвячена вивченню різних питань геометричної топології таких як макроскопічна вимірність ріманових многовидів, топологічні характеристики ріманових многовидів, що допускають шарування ковимірності один з обмеженнями на внутрішню або зовнішню кривину шарів, а також топологічні і макроскопічні властивості спеціальних класів відображень многовидів в евклідовий простір.

**Наукова новизна й вірогідність результатів дисертації.** Дисертаційна робота складається зі вступу, огляду літератури, 5 розділів, висновків і списку використаних джерел, який містить 131 посилання.

Огляд літератури, що містить результати близькі до теми дисертації, зроблений у першому розділі. Тут наведено також постановку задач і формулювання питань, які досліджуються в дисертаційній роботі, що показує новизну одержаних результатів.

У другому розділі описані методи сучасної геометричної топології, які використовуються в дисертації.

Третій розділ присвячений частковому вирішенню ряду проблем Громова щодо макроскопічній вимірності ріманових многовидів. Тут доведено, що макроскопічна вимірність універсального накриття тривимірного замкнутого

многовиду не може дорівнювати 2, що підтверджує гіпотезу Громова про падіння макроскопічної вимірності в тривимірному випадку (теорема 3.1.1).

В теоремі 3.2.1 побудовано контрприклад до гіпотези Громова про падіння макроскопічної вимірності при  $n \geq 4$ .

Показано, що гіпотеза Громова про падіння макроскопічної вимірності має місце для цілком неспінових многовидів вимірності більше 4. Підтверджена сильна гіпотеза Громова в спіновому випадку, коли фундаментальна група многовиду є вільною абелевою групою, добутком вільних груп або має обмеження на тип та асимптотичну вимірність.

У четвертому розділі отримано результати, які описують топологію ріманових многовидів, зі структурою шарування ковимірності один та із заданими обмеженнями на внутрішню або зовнішню геометрію шарів, що розглядаються як ріманові підмноговиди. Показано, що універсальне накриття повного ріманова многовиду з універсально рівномірно стягуваним шаруванням ковимірності один є стягуваним (теорема 4.1.1).

Отримана класифікація орієнтованих замкнутих тривимірних многовидів, які допускають шарування ковимірності один невід'ємної кривини (теорема 4.2.1), з якої, зокрема, випливає, що не всі тривимірні сферичні форми допускають шарування невід'ємної кривини.

Серед шарувань невід'ємної кривини плоскі шарування охарактеризовані теоремою 4.4.1. Отримано повне вирішення проблеми Г. Штака щодо існування шарування ковимірності один невід'ємної секційної кривини на сферах (теорема 4.5.1). У підрозділі 4.6 вивчається питання, поставлене О.Борисенком, щодо існування сідлових шарувань на тривимірних замкнутих многовидах. Теорема 4.6.6 дає відповідь на це питання. У підрозділі 4.7 досліджено зв'язок між гомотопічним типом розподілу на рімановому торі, дотичного до деякого шарування, з абсолютною кривиною цього шарування (теорема 4.7.4).

П'ятий розділ присвячений частковому вирішенню окремих питань, пов'язаних із відображеннями топологічних просторів, зокрема многовидів, в евклідовий простір. Теорема 5.1.3 дає частковий розв'язок гіпотези Коена-Ласка, яка узагальнює класичну теорему про антиподи Борсука-Улама. Доведено неможливість ізометричного занурення простору Лобачевського в евклідовий простір з плоскою нормальною зв'язністю у разі обмеженості довжини вектора середньої кривини (теорема 5.2.1). При додатковій умові гладкості розв'язана проблема опонента про існування 2-опуклого вкладення двовимірної сфери в чотиривимірний евклідовий простір (теорема 5.3.2).

### Зауваження.

- 1) Відсутність списку використаних позначень викликає по-перше ускладнення в пошуку даного терміну при читанні, по-друге виникають дублювання – деякі терміни використовуються декілька разів в абсолютно різних значеннях, наприклад:
  - ♦ а)  $*$  - оператор Ходжа стор. 28<sub>3</sub>, точкова множина стор. 31<sub>3</sub>, вільний добуток груп стор. 48<sup>2</sup>;

- ♦ b)  $\#$  - кількість точок множини стор. 57<sup>10</sup>, зв'язну суму стор. 99,
- ♦ c)  $(M, F)$  - шарування стор.58, гладкий многовид стор.59,

по-третє деякі терміни в різних місцях позначені по різному:

- a) евклідов простір  $\square^n$  і  $E^n$  стор.42,
- b) гомології точки  $h(*)$  стор. 74<sup>2</sup> і  $h(pt)$  стор. 74<sub>1</sub>, 84<sup>10</sup>,
- c) розшарування  $(F, E, B, p)$  стор. 88<sup>6</sup> і  $F \rightarrow E \rightarrow B$  стор. 70<sub>3</sub>.

- 2) На мою думку ряд означень (кообмежене відображення, рівномірно обмежене відкрите покриття, порядок росту, тотожна функція рівномірності, кокомпактна група, сфероїд, тавтологічне розшарування, чашковий добуток, гомоморфізм аугментації, група типу  $FP$ ), які не входять в математичну енциклопедію потрібно було або привести, або дати посилання.
- 3) Деякі терміни використані раніше ніж означені, наприклад: означення з стор.71 використане на стор. 32, означення з стор. 135 використане на стор.131.
- 4) В доведенні теореми 5.3.2 стор. 247<sup>14</sup> і стор. 247<sub>8</sub> розглядається точка  $x$ , що належить межі опуклого тіла, а далі стор. 247<sub>5</sub>, 247<sub>2</sub>, 247<sub>1</sub>, точка  $x$  належить внутрішності цього тіла, що неможливо. Потрібно було слідкувати за позначеннями.
- 5) Є помилки в спектральних таблицях стор.182, 192, 200.
- 6) Відмічу також граматичні помилки на стор. 11<sub>3</sub>, 26<sup>1</sup>, 35<sup>2</sup>, 45<sup>12</sup>, 69<sup>11</sup>, 70<sup>11</sup>, 85<sub>5</sub>, 92<sup>1</sup>, 105<sub>13</sub>, 106<sub>8</sub>, 112<sup>2</sup>, 141<sup>11</sup>, 147<sub>11</sub>, 151<sup>6</sup>, 174<sup>9</sup>, 186<sub>10</sub>, 208<sub>10</sub>, 240<sup>11</sup>, 261<sub>4</sub>, 263<sub>8</sub>, 266<sub>8</sub>, є також подібні помилки в авторефераті.
- 7) Що до цитування. В роботі є посилання на фундаментальні результати У.Лікоріша, Дж.Вуда але в списку робіт вони не цитуються. Також в розділі 5 варто було згадати оглядову роботу Р.Карасьова (Топологические методы в комбинаторной геометрии, УМН, 2008, том 63, выпуск 6(384), 39–90), де дано широкий огляд результатів і проблем комбинаторної геометрії в тому числі задач пов'язаних з теоремою Борсука-Улама.

**Обґрунтованість, оформлення, публікації, автореферат.** Висловлені вище зауваження не є принциповими і не применшують позитивного враження від дисертаційної роботи. Робота переконливо демонструє високий рівень математичної кваліфікації і глибоку наукову інтуїцію її автора. Усі результати роботи супроводжуються строгими доведеннями. Всі теореми, отримані в дисертаційній роботі є новими, причому вони істотно розвивають результати, отримані раніше, і дають відповіді на відкриті гіпотези з даної тематики. Їх вірогідність не викликає сумніву.

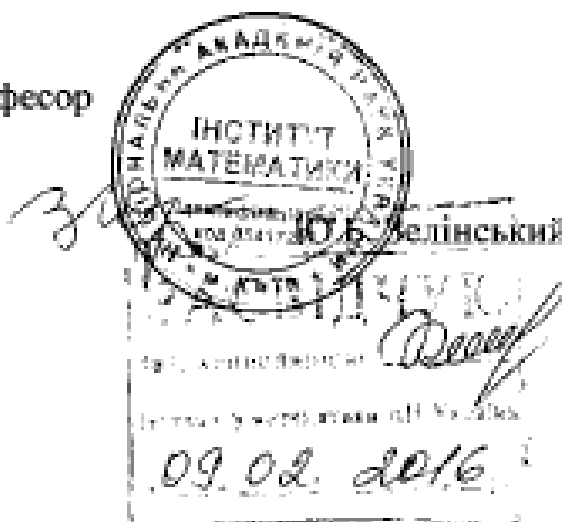
Результати дисертаційної роботи опубліковано в 37 наукових роботах, 21 з яких – у виданнях з переліку, затвердженого ВАК України, з них 11 – в закордонних журналах. Результати дістали свою апробацію на багатьох

міжнародних математичних конференціях. Автореферат адекватно відображає зміст дисертації.

**Значення для науки, отриманих дисертантом результатів.** Результати дисертаційної роботи можуть знайти застосування в топології, теорії функцій та функціональному аналізі. З ними слід ознайомитись фахівцям, що працюють у Київському, Львівському, Харківському національних університетах, Інституті математики НАНУ.

**Висновки.** Усе вищесказане дозволяє зробити висновок про те, що за обсягом проведених наукових досліджень, їх науковим рівнем, актуальністю, науковою новизною та значимістю одержаних результатів, кількістю публікацій дисертаційна робота Болотова Дмитра Валерійовича задовольняє всі вимоги пунктів 9 і 10 діючого „Порядку присудження наукових ступенів та присвоєння вченого звання старшого наукового співробітника” постанови КМУ №567 від 24 липня 2013 року, а її автор заслуговує присудження наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.04 – геометрія і топологія.

Доктор фізико-математичних наук, професор  
завідувач відділу комплексного  
аналізу і теорії потенціалу  
Інституту математики НАН України



Відрук надіслано 12.02.2016р.

Вчений секретар

Секр. Вченої ради D 64.175.01 ВЛШ (В.О. Горюнов)