Відгук

на дисертацію Болотова Дмитра Валерійовича
"ТОПОЛОГІЯ ТА МАКРОСКОПІЧНА ГЕОМЕТРІЯ РІМАНОВИХ МНОГОВИДІВ", подану на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю геометрія і топологія

Центральним поняттям геометричної топології є поняття многовида. Сама геометрична топологія в основному зосереджена навколо дослідження многовидів та їх відображень, співвідношень між їх геометричними та топологічними властивостями. У цій області математики одержано багато глибоких результатів, які у свою чергу привели до формулювання нових проблем. Для різноманітних застосувань важливо вивчати (гладкі) многовиди з додатковими структурами: спінорні, симплектичні, контактні, а також з виділеними на них шаруваннями. Для многовидів з шаруваннями Д. Суллівам показав, що існують топологічні перешкоди до існування гармонійних шарувань на замкнених тривимірних многовидах. З цим результатом, зокрема, пов'язані деякі питання, які сформулював О.А. Борисенко: чи кожен замкнений тривимірний многовид допускає сідлове, сильно сідлове, або параболічне шарування? чи допускає тривимірна сфера такі шарування? чи існують параболічні і сідлові шарування на терстонових і однорідних многовидах?

Теорії шарувань на многовидах стосується також проблема Г. Штака (G. Stuck): чи на сфері S^{2n+1}, $n \geq 2$, в деякій метриці існує шарування ковимірності один невід'ємної секційної кривини?

У зв'язку з відомими результатами теорії шарувань природно виникають питання характеризації плоских шарувань серед шарувань невід'ємної кривини, класифікації замкнених тривимірних многовидів з шаруванням невід'ємної кривини, опис фундаментальної групи замкненого многовида з шаруванням ковимірності один невід'ємної кривини.

Інтенсивно досліджувалася топологія многовидів додатньої скалярної кривини. Важливі результати у цьому напрямку одержували Ліхнерович, Розенберг, Громов, Лоусен та інші відомі математики. Залишається відкритою гіпотеза Громова-Лоусена про те, що замкнені $K(\pi, 1)$-многовиди не допускають метрики додатньої скалярної кривини.

У 90-х роках М. Громов запровадив поняття асимптотичної та макроскопічної вимірності для метричних просторів. Він висловив гіпотезу, що макроскопічна вимірність універсального накриття замкнутого n-вимірного многовиду, який допускає метрику додатної скалярної кривини, не перевищує

$n-2$. Про важливість цієї гіпотези Громова свідчить той факт, що з неї безпосередньо випливає відома гіпотеза Громова-Лоусена, яка стверджує, що замкнутий асферичний многовид не допускає метрики позитивної скалярної кривини.

Вище стисло окреслено проблематику, у якій лежать результати дисертації Д.В. Болотова. Численні зв'язки з відомими важливими результатами та відкритими гіпотезами геометрії і топології многовидів свідчить про беззаперечну актуальність теми дисертації.

Опис наукових результатів та огляд літератури, пов'язаних з тематикою дисертації, наведено у Главі 1. Тут сформульовано деякі результати Маєрса, Бішопа, Топоногова, Чігера, Ґромола, Мілнора, Ліхнеровича та інших математиків, детально розглянуто відомі результати, приклади і гіпотези, що стосуються макроскопічної вимірності Громова. Значна частина глави присвячена шаруванням. Зокрема, наведено означення О. Борисенка параболічних, еліптичних, сідлових та сильно сідлових шарувань на тривимірних многовидах, результати Амінова, Новикова, Суллівана.

Глава 2 дисертації містить огляд методів і конструкцій сучасної алгебраїчної топології; вона дуже полегшує читання наступних глав дисертації. У ній наведено опис узагальнених теорій гомологій і когомологій є використанням мови теорії гомотопій, на основі поняття спектра. Крім того, наведено необхідну інформацію про гомології і когомології з локальними коефіцієнтами. Розглянуто також дуальність Пуанкаре на орієнтовних многовидах, апарат спектральних послідовностей, теорію перешкод, грубо еквіваріантні теорії гомологій та когомологій, теорему про h-кобордизм, елементи топології тривимірних многовидів.

Решта дисертації присвячена результатам автора. Не ставлячи перед собою мету детального огляду всіх результатів, зупинимося на найосновніших з них.

Один з яскравих результатів дисертації – розв'язок проблем про макроскопічну вимірність ріманових многовидів, сформульованих М. Громовим. Зокрема, в дисертації показано, що макроскопічна вимірність $\dim_{mc}\tilde{M} \neq 2$ для універсального накриття $\tilde{M}$ замкненого 3-вимірного ріманового многовида M. Що стосується n-вимірних многовидів при $n \geq 4$, то тут гіпотеза Громова не підтверджується (теорема 3.2.1): для кожного $n \geq 4$ існує замкнений неістотний спіновий многовид M^n такий, що $\dim_{mc}\tilde{M}^n = n-1$. При $n = 4$ многовид $M = M^4$ одержується такою конструкцією. Нехай $S^3 \times S^1 \to S^2 \times S^1$ — розшарування Гопфа $S^3 \times S^2$, помножене на S^1, а $T^4 = T^3 \times S^1 \to T^3$ — тривіальне розшарування. Тоді $M^4 = S^3 \times S^1 \#_{S^1} T^4$, де зв'язна сума над S^1 береться вздовж маленьких розшарованих трубочок навколо фіксованих шарів з природною тривіалізацією, визначеною розшаруваннями. У дисертації доведено (теорема 3.2.2), що характеристичне відображення $f: M^4 \to B\pi$, де $\pi = \pi_1(M^4)$, не може бути продеформоване до 2-скелета $B\pi$.

Якщо би многовид M^3 з теореми 3.2.1 допускав сталої скалярної кривини, то це був би контрприклад до гіпотез Громова. Однак, у розділі 3.3.3 дисертації показано, що це не так (наслідок 3.3.3). Більше того, доведено, що якщо група π містить підгрупу, яка задовольняє сильну гіпотезу Новикова та умову Розенберга-Штольца, то гіпотеза Громова справедлива для для спінових многовидів з фундаментальною групою π (теорема 3.3.4).

Розділ 3.4 дисертації присвячено неспіновому випадку. Тут, зокрема, доведено гіпотезу Громова про падіння макроскопічної вимірності для цілком неспінових замкнених многовидів вимірності ≥ 5. Проаналізовано деякі спеціальні випадки, зокрема, віртуально абелевих груп.

Значна частина дисертації присвячена топології і геометрії шарувань. У одноіменній главі 4 показано, що універсальне накриття повного рімановoго многовиду з універсально рівномірно стягуваним шаруванням ковимірності один є стягуваним. Також отримано класифікаційну теорему для орієнтованих замкнутих тривимірних многовидів, які допускають шарування ковимірності один невід'ємної кривини (з неї, зокрема, випливає, що не всі тривимірні сферичні форми допускають шарування невід'ємної кривини; наприклад, за наслідком 4.2.2 такі шарування неможливі на гомологічній сфері Пуанкаре з фундаментальною групою, що є групою симетрії ікосаедра, ізоморфною A_5).

Теорема 4.4.1 містить класифікаційний результат для плоских C^2-шарувань $\mathcal{F}$ ковимірності один невід'ємної кривини Річчі у замкненому рімановому n-вимірному многовиді: шарування $\mathcal{F}$ плоске тоді і тільки тоді, коли M є $K(\pi, 1)$-многовидом. У цьому випадку виконана одна з трьох можливостей: 1) $\mathcal{F}$ не містить компактних шарів, тоді воно є шаруванням без голономії, а M гомеоморфний розшаруванню над S^2; 2) $\mathcal{F}$ містить компактні шари, а при $\dim M \geq 5$ многовид M або його дволисне накриття гомеоморфні розшаруванню над S^1 з шаром, гомеоморфним компактному шарові; 3) $\operatorname{asdim} \pi_1(M) \leq n$.

Теорема 4.5.1. про те, що 3-зв'язний многовид M^n при $n \geq 5$ не допускає C^2-шарування ковимірності один невід'ємної кривини, дає повний розв'язок гіпотези Штака (G. Stuck).

Доведено, що на тривимірній сфері існує ріманова метрика така, що шарування Ріба є сильно сідловим (теорема 4.6.6). Запропоновано метод побудови сідлових та омбілічно вільних шарувань. При цьому встановлено, що достатньою умовою для існування таких шарувань є наявність трансверсального регулярного аносовского і, відповідно, регулярного проективно аносовского потоків.

Показано (теорема 4.7.4) , що мінімальне можливе число рібовских компонент шарування тора з дотичним розподілом заданого гомотопійного типу (m, n) равне абсолютному числу обертання $|\mu|$ розподілу. Якщо $m \neq 0$ і $n \neq 0$, то $|\mu|$ є найбільшим спільним дільником m і n.

Глава 5 дисертації присвячена геометрії відображень в евклідовий простір. Тут запропонований частковий розв'язок гіпотези Коена-Ласка про часткову склейку орбіти $\mathbf{Z}_p$-простору при відображенні в евклідовий простір. Варто зазначити, що через кілька років після результату автора гіпотезу Коена-Ласка повністю довів А. Воловиков.

Відзначимо також негативну відповідь на одне запитання, сформульоване Ю.Б. Зелінським. У дисертації доведено, що що не існує C^2-гладкого 2-опуклого вкладення двовимірної сфери у чотиривимірний евклідовий простір (Теорема 5.3.2.)

В цілому дисертацію Д.В. Болотова можна характеризувати як цілісне наукове дослідження, що становить істотний внесок у сучасну геометричну топологію, містить розв'язки важливих проблем цієї області математики. Результати носять теоретичний характер. Вони можуть бути застосовані до топології многовидів, геометрії і топології шарувань, теорії макроскопічного виміру та близьких областях геометричної топології. При доведенні автор ефективно поєднує методи класичної рімановой геометрії з сучасною диференціальною та алгебраїчною топологією.

Автор доповідав свої результати на різних авторитетних наукових конференціях та семінарах в Україні та за кордоном. Самі результати опубліковані в наукових журналах, при цьому виконано всі вимоги, що формулюються до опублікування результатів докторських дисертацій. У списку публікації дисертації Д. Болотова — такі журнали високого рівня як Proceedings of the American Mathematical Society та Algebraic and Geometric Topology. У дисертації результати супроводжуються повними доведеннями, що дозволяє зробити висновок про їх достовірність.

Не викликає жодного сумніву, що Д.В. Болотову належить авторство усіх результатів, що виносяться на захист.

Автореферат дисертації дає змогу адекватно і повно судити про її зміст.

Дисертацію написано з належною увагою до читача. Як уже зазначено вище, наведено необхідні відомості з різних областей геометрії і топології, потрібні для розуміння результатів дисертації. Звичайно, у такому великому за обсягом тексті важко уникнути огріхів. Зокрема, не всюди виглядає логічним поділ матеріалу між першою та другою главою, оскільки іноді огляд літератури плавно перетікає у наведення необхідних означень та фактів. Трапляються також помилки при написанні деяких прізвищ. Напевно, варто було оновити зауваження 4.6.7 (і додати відповідну позицію у списку літератури) та 5.1.1. Однак, жодним чином ці зауваження не впливають на сприймання змісту дисертації та на її оцінку.

Все сказане вище є обґрунтуванням для такого твердження: дисертація Болотова Дмитра Валерійовича задовольняє всі вимоги до докторських дисертацій, а Болотов Дмитро Валерійович заслуговує на присудження йому наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю геометрія і топологія.

Офіційний опонент, М.М. Зарічний
доктор фізико-математичних наук,
професор

Підпис Зарічного М.М.
ПІДТВЕРДЖУЮ
ВЧЕНИЙ СЕКРЕТАР
ЛЬВІВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО
УНІВЕРСИТЕТУ імені ІВАНА ФРАНКА

Відгук надійшов 15.02.2016 р.
Вчений секретар
Спец. вченої ради Д 64.175.01 [illegible] ([illegible])