# Многообразия с замкнутыми геодезическими и резонанс в гамильтоновых системах
## В.Т.Лисица

(Записано Ю.А.Аминовым)

На сферах $S^n$, проективных пространствах $RP^n$, $PC^n$ геодезические замкнуты. При этом под замкнутой геодезической понимается кривая, которая возвращается в точку выхода с той же самой касательной.

В 1894 г. Г.Дарбу поставил задачу определения всех 2-мерных поверхностей с замкнутыми геодезическими. Г.Дарбу первый вывел условие замыкания геодезических на поверхности вращения. Как известно метрику поверхности вращения можно записать в виде

$$ds^2 = (du^1)^2 + f^2(u^1)(du^2)^2.$$

Изменением параметризации метрику можно переписать так

$$ds^2 = F^2(\cos r)dr^2 + \cos^2 r d\theta^2.$$

Условие Дарбу: Для каждого целого числа $i$ должно выполняться

$$\int_i^{\pi-i} \frac{\sin i f(\cos r)dr}{\sin r(\sin^2 r - \sin^2 i)} = \frac{p}{q}\pi,$$

где $p$ и $q$ - целые числа. Дарбу не построил гладкой метрики. Впервые такая метрика была посторена в 1904 г. Цоллем (Zoll).

В книге Бессе приведен пример Вайнштейна n-мерной метрики, относящийся к 1976 г.

$$ds^2 = [1 + h(u^1)]^2(du^1)^2 + \sin^2 u^1 ds^2_{n-1},$$

где функция $h$ удовлетворяет условию $h(1) = h(-1)$. После Цолля было доказано, что метрика

$$ds^2 = [\frac{p}{q} + h(\cos r)]^2 dr^2 + \sin^2 r d\theta^2,$$

где функция $h$ определена на отрезке [-1,1], обладает замкнутыми геодезическими.

Мой пример метрики на $S^n$

$$ds^2 = [1+h_1(\cos u^1)]^2 (du^1)^2 + [1+h_2(\cos u^2)]^2 \sin^2 u^1 (du^2)^2 + ...$$

$$+[1 + h_n(\cos u^n)]^2 \sin^2 u^1 ... \sin^2 u^{n-1} (du^n)^2.$$

Вопрос существования таких метрик на пространствах гомеоморфных проективным пространствам остается открытым.

Новый шаг в этом старом вопросе был сделан Колокольцевым (учеником Степина) в 1982 г., который связал вопрос о метриках с замкнутыми геодезическими с теорией гимильтоновых систем.

Еще в 1893 г. Штекель (Stackel) рассматривал гамильтоновы системы с разделяющимися переменными. Пусть задана метрика

$$ds^2 = g_{ij} du^i du^j.$$

Рассмотрим гамильтониан вида

$$H = g^{ij} p_i p_j.$$

Условие для того, чтобы некоторая функция $F$, была певым интегралом соответствующей гамильтоновой системы, стстоит в том, что скобка Пуассона равна нулю:

$$\{H, F\} = 0.$$

Рассмотрим первый интеграл $F$ квадратичный по импульсам $p^i$:

$$F = a^{ij} p_i p_j.$$

Колокольцев применил теорию гамильтоновых систем к метрикам в форме Лиувилля

$$ds^2 = (f(u^1) + h(u^2))[(du^1)^2 + (du^2)^2]$$

и получил некоторое интегральное условие на функции $f$ и $h$ для того, чтобы геодезические такой метрики были замкнуты.

Теперь я рассмотрю гамильтонову систему с гамильтонианом $F_1 = H$ и первыми интегралами $F_2, F_3, ..., F_n$. Пусть выполняются соотношения

$$\{F_i, F_j\} = 0, \quad i, j = 1, ..., n.$$

Известна теория Лиувилля-Арнольда о таких системах. Если рассмотреть подмногообразия $F_i = const$, то они являются n-мерными торами $T^n$. Можно ввести переменные действие-угол $I_1, I_2, ..., \phi_1, ...\phi_n$, так что гамильтониан запишется в виде $H = H(I_1, ..., I_n)$, а уравнения движения запишутся в виде

$$\frac{\partial I_i}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \phi_i}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial I_i} = \omega_i,$$

где $\omega_i$ - постоянные числа, которые называются частотами системы. Частоты называются независимыми, если равенство

$$\alpha_1\omega_1 + ... + \alpha_n\omega_n = 0$$

не выполняется ни для каких рациональных чисел $\alpha_1, ..., \alpha_n$. В противном случае мы говорим, что частоты зависимы и в гамильтоновой системе имеется резонанс.

Эти частоты трудно вычислить , но в некоторых случаях возможно. Например, если гамильтониан имеет вид

$$H = \frac{1}{2(f(x)+h(y))}(\frac{p_i^2}{a_1(x)} + \frac{p_2^2}{a_2(y)} + c_1(x) + c_2(y))$$

Соответствующая гамильтонова система называется Лиувиллевой.

Но условие зависимости частот выражает условие замкнутости траекторий. Поэтому имеем основной вывод метрики с замкнутыми геодезическими соответствуют резонансным гамильтоновым системам.


1.Козлов . Симметрические пространства и резонанс в гамильтоновых системах.

2.Сагдеев. Методы нелинейной физики.