Об одной проблеме Громова

Д.В.Болотов

Макроскопическая размерность Риманова многообразия была определена М. Громовым в [3]. В некотором смысле она характеризует толщину многообразия.

Определение 1 *Макроскопическая размерность метрического пространства V не превосходит k ($\dim_{mc} V \leq k$) если существует k - мерный полиэдр P и собственное непрерывное отображение $\varphi : V \to P$ такие что $Diam(\varphi^{-1}(p)) \leq \varepsilon$ для всех $p \in P$ и некоторого фиксированного действительного числа ε. Скажем, что $dim_{mc}V = k$, если k нельзя уменьшить.*

Видно, что данное определение зависит от Римановой метрики на многообразии. Однако заметим, что если мы ограничимся рассотрением пространтв, которые являются универсальными накрытиями компактных многообразий с поднятой метрикой, то определение уже не будет зависеть от выбора метрики. Это следует из того, что любые две поднятые метрики g_1 и g_2 будут эквивалентны в следующем смысле: Существуют константы c и C такие что $cg_1 \leq g_2 \leq Cg_1$.

В [3] ставится вопрос:

Существует ли замкнутое ориентируемое многообразие M размерности n, такое что $dim_{mc}\widetilde{M} = n - 1$ в случае когда фундаментальная группа M не имеет кручения.

Здесь $\widetilde{M}$ – универсальная накрывающая M.

В [1] дается ответ на этот вопрос в случае, когда $n = 3$ без ограничения на фундаментальную группу. В доказательстве существенно используется разложение Кнезера-Милнора ориентируемого замкнутого 3-многообразия. Так же используется аппарат теории грубых когомологий Ро.

В случай большей размерности проблема становится чрезвачайно трудной хотя бы потому что компактные многообразия размерности большей трех могут уже содержать любую конечно порожденную группу в качестве фундаментальной, а проблема во многом зависит именно от фундаментальной группы. Кроме того если проблема классификации трехмерных многообразий посути завершена (Перельман ?) то в случае большей размерности классификация в принципе невозможна (Марков).

Однако, обратим внимание на два подхода к решению проблемы Громова - гомотопический и геометрический:

1. Гомотопический подход к данной проблеме использует теорию препятствий. А именно если $f : M^n \to B\pi$ - классифицирующее отображение, где π - фундаментальная группа многообразия M, то задача сводится к следующей: *Если f стягивается на $n - 1$ - мерный остов классифицирующего пространства $B\pi$, то f*

стягивается и на $n-2$ - мерный остов $B\pi$. Теперь, когда проблема сведена к теории препятствий, ясно что вся сложность содержится в фундаментальной группе, но даже для свободных абелевых групп проблема представляется достаточно нетривиплльной.

2. Геометрический подход заключается в обобщении понятия категории Люстерника - Шнирельмана, а именно:

Определение 2 *Скажем, что $Cat_1(M) = k$, если M можно покрыть $k+1$ открытыми множествами B_s $(s = 1, \ldots, k)$, каждое из которого индуцирует тривиальный гомоморфизм фундаментальных групп относительно вложения $i_s : B_s \to M$ и число k - минимально возможное.*

Нетрудно видеть, что покрытие $\{B_s,\ s = 1, \ldots, k\}$ поднимается в равномерно ограниченное покрытие $\{\widetilde{B}_s,\ s = 1, \ldots, k\}$ универсального накрытия $\widetilde{M}$ и каноническое отображение в нерв порытия будет собственным и коограниченным. Поэтому теперь для решения проблемы Громова достаточно показать, что если $Cat_1(M^n) = n-1$, то $Cat_1(M^n) = n-2$. Обратим внимание на то, что категория $Cat_1(M)$ связана с оценкой числа $sys_1(M)$, которое определяется как нижняя граница замкнутых нестягиваемых кривых в M [2].

Наконец отметим, что макроскопическая размерность тесно связана с проблемой Громова - Лоусена о возможности задания метрики положительной скалярной кривизны на замкнутом асферическом пространстве. Нетрудно показать, что универсальная накрывающая асферического пространства, будучи стягиваемой, имеет макроскопическую размерность равную размерности многообразия. Поэтому для доказательства проблемы Громова - Лоусена достаточно показать , что макроскопическая размерность универсального накрытия замкнутого многообразия положительной скалярной кривизны падает как минимум на единицу или $Cat_1(M^n) = n-1$. Заметим, что излагаемая проблема Громова утверждает, что падение произойдет сразу на две размерности.

Список литературы

[1] D. Bolotov. Macroscopic dimension of 3- manifolds. *Math. Physics, Analysis and Geometry*, 6:291 – 299, 2003.

[2] M. Gromov. Filling riemannian manifolds. *J.Diff.Geom.*, 18:1 – 149, 1983.

[3] M. Gromov. Positive curvature, macroscopic dimension, spectral gaps and higher signature. *Prog. Math.*, 132:1–213, 1996.