ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

МАТЕМАТИКА

doi: https://doi.org/10.15407/dopovidi2017.11.003
УДК 517.94

**К.Н. Андреев, И.Е. Егорова**

Физико-технический институт низких температур
им. Б.И. Веркина НАН Украины, Харьков
E-mail: kyrylo.andreiev@gmail.com, iraegorova@gmail.com

# Единственность решения задачи Римана — Гильберта для волны разрежения уравнения Кортевега —де Фриза

*Представлено академиком НАН Украины Е.Я. Хрусловым*

*Существенным моментом в асимптотическом анализе решений нелинейных вполне интегрируемых уравнений методом наискорейшего спуска является исследование единственности решения соответствующей задачи Римана — Гильберта. В работе устанавливается единственность решения задачи Римана—Гильберта, построенной по левым данным рассеяния для уравнения Кортевега — де Фриза с начальными данными типа ступеньки, соответствующими волне разрежения. Такая задача позволяет исследовать асимптотическое поведение решения позади заднего волнового фронта. Доказательство единственности проведено как для нерезонансного, так и для резонансного случаев.*

***Ключевые слова:*** *уравнение Кортевега — де Фриза, волна разрежения, задача Римана — Гильберта.*

Асимптотическое поведение решения задачи Коши для уравнения Кортевега–де Фриза (КдФ):

$$q_t(x,t) = 6q(x,t)\,q_x(x,t) - q_{xxx}(x,t), \quad (x,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+, \tag{1}$$

с начальными данными $q(x,0) = q_0(x)$, соответствующими волне разрежения ($q_0(x) \to c^2$ при $x \to -\infty$ и $q_0(x) \to 0$ при $x \to \infty$), полностью исследовано на физическом уровне строгости. Известно (см. [1, 2]), что решение при $t \to \infty$ имеет следующие асимптотики:

• в области $x < -6c^2 t$ позади заднего волнового фронта решение асимптотически близко к фоновой константе $c^2$;

• в средней области $-6c^2 t < x < 0$ решение асимптотически близко точному решению КдФ вида $-\frac{x}{6t}$;

• впереди переднего фронта волны, т. е. при $0 < x$, оно асимптотически представляется в виде суммы солитонов.

Математически строгие обоснования этих асимптотик в средней и солитонной областях были получены сравнительно недавно [3]. Они основаны на применении нелинейного метода наискорейшего спуска для векторной задачи Римана—Гильберта (РГ) и получены при следующем дополнительном условии на начальные данные: существует малое $\kappa > 0$ такое, что

$$\int_0^{+\infty} e^{\kappa x}(|q_0(x)| + |q_0(-x) - c^2|)dx < \infty \text{ и } x^4 q^{(i)}(x) \in L_1(\mathbb{R}), \quad i = 1, \ldots, 8. \tag{2}$$

В [3] была также предложена возможная асимптотика второго члена асимптотического разложения решения задачи (1), (2) в области позади заднего фронта волны ($x < -6c^2 t$). Эта формула была выведена для случая нерезонансных начальных данных в предположении единственности решения соответствующей задачи РГ по левым данным рассеяния. Заметим, что отсутствие единственности решения задачи РГ может поставить под сомнение достоверность асимптотики. Цель настоящей работы — доказать единственность решения вышеупомянутой задачи РГ как в нерезонансном, так и в резонансном случаях. Отметим, что единственность решения этой задачи доказывается для более широкого класса начальных данных, чем (2), а именно мы предполагаем, что

$$\int_0^{+\infty} |x|(|q(x,t)| + |q(x,t) - c^2|)dx < \infty, \quad \forall t \geqslant 0. \tag{3}$$

Достаточными условиями выполнимости свойства (3) являются такие условия на начальные данные: $x^4 q_0^{(i)}(x) \in L_1(\mathbb{R}_+)$ и $x^4 (d^i/dx^i)(q_0(x) - c^2) \in L_1(\mathbb{R}_-)$ (см. [4]).

Пусть теперь $q(x,t)$ — это решение уравнения (1), удовлетворяющее условию (3).

Напомним некоторые факты задачи рассеяния для оператора $H(t) = -(d^2/dx^2) + q(x,t)$ на всей оси, связанные с постановкой исследуемой задачи РГ. Рассмотрим спектральную задачу

$$(H(t)f)(x) = \lambda f(x), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{4}$$

где $\lambda \in \mathbb{C}$ — спектральный параметр. Как известно [5], спектр оператора $H(t)$ состоит из абсолютно непрерывной части $\mathbb{R}_+$ и конечного числа отрицательных собственных значений $-\kappa_1^2 < \ldots < -\kappa_N^2 < 0$. В свою очередь, абсолютно непрерывный спектр состоит из однократного спектра на интервале $[0, c^2]$ и спектра кратности два на $[c^2, \infty]$. Вместо $\lambda$ в уравнении (4) нам будет удобно использовать другой спектральный параметр $k = \sqrt{\lambda - c^2}$, где для корня выбирается такая ветвь, что функция $k = k(\lambda)$ взаимно однозначно отображает область $\mathcal{D} := \mathbb{C}_+ \setminus \overline{\mathbb{R}}_+$ на область $\mathfrak{D} := \mathbb{C}_+ \setminus (0, \mathrm{i}c]$. Решения уравнения (4) рассматриваются как функции от параметра $k \in \overline{\mathfrak{D}} = \mathfrak{D} \cup \partial\mathfrak{D}$. В частности, уравнение (4) имеет два решения Йоста $\phi(k,x,t)$ и $\phi_1(k,x,t)$, удовлетворяющих условиям

$$\lim_{x \to +\infty} e^{-\mathrm{i}\sqrt{k^2 + c^2}\,x} \phi_1(k,x,t) = \lim_{x \to -\infty} e^{\mathrm{i}kx} \phi(k,x,t) = 1 \text{ при } k \in \overline{\mathfrak{D}}.$$

Эти решения связаны между собой соотношением рассеяния

$$T(k,t)\,\phi_1(k,x,t) = \overline{\phi(k,x,t)} + R(k,t)\,\phi(k,x,t) \text{ при } k \in \mathbb{R},$$

где $T(k,t)$ и $R(k,t)$ — это левые коэффициенты прохождения и отражения соответственно.

Имеет место формула $T(k,t) = 2\mathrm{i}kW^{-1}(k,t)$, где

$$W(k,t) := \frac{d}{dx}\phi_1(k,x,t)\phi(k,x,t) - \phi_1(k,x,t)\frac{d}{dx}\phi(k,x,t)$$

это вронскиан решений Йоста. Он является голоморфной функцией в области $\mathfrak{D}$ и имеет непрерывные предельные значения на границе $\partial\mathfrak{D}$, причем на $\partial\mathfrak{D}$ он нигде не обращается в нуль, за исключением, возможно, точки $k = \mathrm{i}c$. При этом:

(a) если $W(\mathrm{i}c, 0) \neq 0$, то $W(\mathrm{i}c, t) \neq 0$ для всех $t$. Такой случай называется нерезонансным, и это, вообще говоря, ситуация общего положения;

(b) если $W(\mathrm{i}c, 0) = 0$ (т. е. $W(\mathrm{i}c, t) = 0$ для любого $t$), то это так называемый резонансный случай. При этом $W(k,t) = C\sqrt{k - \mathrm{i}c}(1 + o(1)), \quad C = C(t) \neq 0.$ [1]

Очевидно, что коэффициент прохождения $T(k,t)$ имеет мероморфное продолжение в область $\mathfrak{D}$ с простыми полюсами в точках $\mathrm{i}\kappa_1, \dots, \mathrm{i}\kappa_N$. Положим

$$\chi(k,t) := -\lim_{\varepsilon \to +0} \frac{\sqrt{(k+\epsilon)^2 + c^2}}{k} |\mathrm{T}(k+\varepsilon, t)|^2, \quad k \in [0, \mathrm{i}c].$$

Эта функция чисто мнимая, более того,

$$\chi(k,t) = \mathrm{i}\,|\chi(k,t)|, \quad k \in [0, \mathrm{i}c]. \tag{5}$$

Она непрерывна на полуинтервале $[0, \mathrm{i}c)$. Если точка $\mathrm{i}c$ — нуль функции $\chi(k,t)$ (нерезонансный случай), то

$$\chi(k,t) = C(t)\sqrt{k - \mathrm{i}c}(1 + o(1)), \quad k \to \mathrm{i}c. \tag{6}$$

Если в точке $\mathrm{i}c$ функция $\chi(k,t)$ имеет особенность (резонансный случай), то

$$\chi(k,t) = \frac{C(t)}{\sqrt{k - \mathrm{i}c}}(1 + o(1)), \quad k \to \mathrm{i}c. \tag{7}$$

Решения Йоста $\phi(\mathrm{i}\kappa_j, x, t)$ являются собственными функциями оператора $H(t)$. Обозначим обратные их квадратов норм через

$$\gamma_j(t) := \Big(\int_{\mathbb{R}} \phi^2(\mathrm{i}\kappa_j, x, t)\, dx\Big)^{-1}.$$

Функции $R(k,t)$, $k \in \mathbb{R}$, и $\chi(k,t)$, $k \in [0, \mathrm{i}c]$, и величины $-\kappa_j^2, \gamma_j(t)$, $j = 1, \dots, N$, представляют собой левые данные рассеяния оператора $H(t)$. Их эволюция в силу уравнения КдФ имеет следующий вид [6]:

$$\chi(k,t) = \chi(k)\mathrm{e}^{-8\mathrm{i}tk^3 - 12\mathrm{i}tkc^2}, \quad R(k,t) = R(k)\mathrm{e}^{-8\mathrm{i}tk^2 - 12\mathrm{i}tkc^2}, \quad \gamma_j(t) = \gamma_j \mathrm{e}^{-8\kappa_j^3 t + 12c^2\kappa_j t},$$

где $\chi(k) = \chi(k,0)$, $\quad R(k) = R(k,0)$, $\quad \gamma_j = \gamma_j(0)$. Методом обратной задачи рассеяния решение $q(x,t)$ задачи (1), (3) может быть однозначно восстановлено по левым начальным данным рассеяния (см. [7])

$$\{R(k), \quad k \in \mathbb{R}; \quad \chi(k), \quad k \in [0, \mathrm{i}c]; \quad -\kappa_j^2, \gamma_j > 0, \quad j = 1, \dots, N\}.$$

Покажем теперь, как по этим данным формулируется векторная задача РГ. В области $\mathfrak{D}$ введем мероморфную вектор-функцию $\breve{m}(k) = \breve{m}(k, x, t)$:

$$\breve{m}(k) := (\breve{m}_1(k), \quad \breve{m}_2(k)) = (T(k,t)\phi_1(k,x,t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}, \quad \phi(k,x,t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}),$$

---

[1] Мы будем обозначать через $C$, $C_1$, $C_2$ любую ненулевую константу по переменной $k$. Эти константы могут зависеть от $t$, а иногда и от $x$.

имеющую полюса первой компоненты вектора в точках $\mathrm{i}\kappa_j$. В остальном эта функция непрерывна вплоть до границы области $\mathfrak{D}$, за исключением, возможно, точки $\mathrm{i}c$ (в резонансном случае). Предельные значения этой функции на границах разреза $(0,\mathrm{i}c]$, вообще говоря, различны. На бесконечности она ограничена:

$$\breve{m}(k)=(1\quad 1)+\frac{1}{2\mathrm{i}k}\left(\int_{-\infty}^{x}(q(y,t)-c^2)\,dy\right)(1\quad -1)+O\left(\frac{1}{k^2}\right),\quad k\to\infty .$$

Эта формула позволяет восстановить решение задачи (1), (2) по асимптотическому разложению вектор-функции $\breve{m}(k)$ бесконечно удаленной точке. Продолжим теперь $\breve{m}(k)$ в область $\mathfrak{D}^*=\{k:-k\in\mathfrak{D}\}$ по формуле $\breve{m}(-k)=\breve{m}(k)\sigma_1$, где $\sigma_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ — матрица Паули. После такого продолжения функция $\breve{m}(k)$ имеет полюсы в точках $-\mathrm{i}\kappa_j$ и скачки вдоль вещественной оси и вдоль отрезка $[-\mathrm{i}c,\mathrm{i}c]$. Введем крестообразный контур $\mathbb{R}\cup[-\mathrm{i}c,\mathrm{i}c]$ с естественной ориентацией слева направо на $\mathbb{R}$ и сверху вниз на $[\mathrm{i}c,-\mathrm{i}c]$. Обозначим через $\breve{m}_+(k)$ (соответственно, $\breve{m}_-(k)$) предельные нетангенциальные значения $\breve{m}(k)$ справа (соответственно, слева) по направлению контура. В работе [3] было показано (в нерезонансном случае), что функция $\breve{m}(k)$ является решением следующей задачи РГ:

*Найти вектор-функцию $m(k)$, мероморфную в области $\mathbb{C}\setminus(\mathbb{R}\cup[\mathrm{i}c,-\mathrm{i}c])$, с полюсами в точках $\mathrm{i}\kappa_j,\quad j=1,\dots,N$, которая имеет непрерывные граничные значения на обеих сторонах контура, за исключением, возможно, точек $\pm\mathrm{i}c$, и удовлетворяет следующим условиям:*

*I) условию скачка $m_+(k)=m_-(k)\nu(k)$, где*

$$\nu(k)=\begin{cases}\begin{pmatrix}1-|R(k)|^2 & -\overline{R(k)\mathrm{e}^{-2t\Phi(k)}}\\ R(k)\mathrm{e}^{2t\Phi(k)} & 1\end{pmatrix}, & k\in\mathbb{R},\\ \begin{pmatrix}1 & 0\\ \chi(k)\mathrm{e}^{2t\Phi(k)} & 1\end{pmatrix}, & k\in[\mathrm{i}c,0],\\ \sigma_1\nu^{-1}(-k)\sigma_1, & k\in[0,-\mathrm{i}c],\end{cases}\tag{8}$$

*причем $\Phi(k):=\Phi(k,x,t)=-4\mathrm{i}k^3-6\mathrm{i}c^2k-\mathrm{i}kxt^{-1}$ — это фазовая функция левых данных рассеяния;*

*II) полюсному условию*

$$\begin{aligned}&\mathrm{Res}_{\mathrm{i}\kappa_j}m(k)=\lim_{k\to\mathrm{i}\kappa_j}m(k)\begin{pmatrix}0&0\\ \mathrm{i}\gamma_j\mathrm{e}^{2t\Phi(\mathrm{i}\kappa_j)}&0\end{pmatrix},\\ &\mathrm{Res}_{-\mathrm{i}\kappa_j}m(k)=\lim_{k\to-\mathrm{i}\kappa_j}m(k)\begin{pmatrix}0&-\mathrm{i}\gamma_j\mathrm{e}^{-2t\Phi(\mathrm{i}\kappa_j)}\\ 0&0\end{pmatrix};\end{aligned}\tag{9}$$

*III) условию симметрии*

$$m(-k)=m(k)\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix};\tag{10}$$

*IV) условию нормировки*

$$\lim_{k\to\infty} m(k) = (1, \quad 1);$$

*V) при* $k \to \pm \mathrm{i}c$ *функция* $m(k)$ *имеет следующее поведение:* $(a)$ *в нерезонансном случае, т. е. если* $\chi(k)$ *удовлетворяет условию (6), вектор-функция* $m(k)$ *непрерывна в* $\pm\mathrm{i}c$*;* $(b)$ *в резонансном случае, при условии (7),*

$$m(k) = \left(\frac{C_1}{\sqrt{k-\mathrm{i}c}}, \quad C_2\right)(1+o(1)), \quad k\to \mathrm{i}c, \quad C_1 \neq 0. \tag{11}$$

*В точке* $-\mathrm{i}c$ *аналогичное условие формулируется по симметрии (10).*

Докажем, что решение этой задачи РГ единственно. Пусть $\tilde{m}(k)$ и $\hat{m}(k)$ — два разных решения. Тогда их разность $m(k) := \tilde{m}(k) - \hat{m}(k)$ удовлетворяет условиям *I* — *III* и *V*, а условие *IV* переходит с учетом мероморфности в следующее:

$$m(k) = O(k^{-1}), \quad k\to\infty. \tag{12}$$

В области $\mathfrak{D}$ введем мероморфную функцию $F(k) := m_1(k)\overline{m_1(\overline{k})} + m_2(k)\overline{m_2(\overline{k})}$, имеющую простые полюсы в точках $\mathrm{i}\kappa_j$ и асимптотическое поведение $F(k) = O(k^{-2})$ при $k\to\infty$ в силу (12). Так как $-\overline{k} = k$ для $k \in \mathrm{i}\mathbb{R}$, то условие (9) влечет за собой

$$\mathrm{Res}_{\mathrm{i}\kappa_j} F(k) = 2\mathrm{i}\gamma_j\,|m_2(\mathrm{i}\kappa_j)|^2\,\mathrm{e}^{2t\Phi(\mathrm{i}\kappa_j)} \in \mathrm{i}\mathbb{R}_+. \tag{13}$$

Отметим, что точное значение константы $C_1$ в условии (11) не оговорено, т. е. $m_2(-k) = m_1(k) = \tilde{m}_1(k) - \hat{m}_1(k) = O((k-\mathrm{i}c)^{-1/2})$, $m_2(\overline{k}) = m_1(k) = O(1)$ при $k\to \mathrm{i}c$. Но тогда в силу симметрии $m_1(\overline{k}) = O(1)$, $k\to\mathrm{i}c$, т. е. $F(k) = O((k-\mathrm{i}c)^{-1/2})$ при $k\to\mathrm{i}c$ в резонансном случае. В нерезонансном она ограничена в окрестности этой точки. В остальных точках $\partial\mathfrak{D}$ функция $F(k)$ имеет непрерывные предельные значения. Для простоты изложения обозначим значения функции $F(k)$ на отрезке $[0, \mathrm{i}c]$ слева и справа через $F_l(k)$ и $F_r(k)$ соответственно, сохранив обозначение $F_+(k)$ на вещественной оси. Это непрерывные функции на своих областях определения, за исключением точки $\mathrm{i}c$ в резонансном случае. Согласно условию (10)

$$F_+(k) = m_{1,+}(k)\overline{m_{1,-}(k)} + m_{2,+}(k)\overline{m_{2,-}(k)},$$

$$F_r(k) = m_{1,r}(k)\overline{m_{2,l}(k)} + m_{2,r}(k)\overline{m_{1,l}(k)},$$

$$F_l(k) = m_{1,l}(k)\overline{m_{2,r}(k)} + m_{2,l}(k)\overline{m_{1,r}(k)}.$$

Из условия скачка (8) получаем

$$\begin{aligned} &F_+(k) = (1-|R(k)|^2)|m_{1,-}(k)|^2 + |m_{2,-}(k)|^2 + 2\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(R(k)\mathrm{e}^{2t\Phi(k)}\overline{m_{1,-}(k)}m_{2,-}(k)),\\ &F_l(k) = m_{1,l}(k)\overline{m_{2,l}(k)} + m_{2,l}(k)\overline{m_{1,l}(k)} + |m_{2,l}(k)|^2\,\overline{\chi(k)}\mathrm{e}^{2t\Phi(k)},\\ &F_r(k) = m_{1,l}(k)\overline{m_{2,l}(k)} + m_{2,l}(k)\overline{m_{1,l}(k)} + |m_{2,l}(k)|^2\chi(k)\mathrm{e}^{2t\Phi(k)}. \end{aligned} \tag{14}$$

Отметим, что по определению $\Phi(k) \in \mathbb{R}$ при $k \in [0, \mathrm{i}c]$, а согласно (5) $\chi(k) \in \mathrm{i}\mathbb{R}_+$, т. е. в силу (14)

$$\begin{aligned}\operatorname{Re} F_l(k) &= \operatorname{Re} F_r(k) = m_{1,l}(k)\overline{m_{2,l}(k)} + m_{2,l}(k)\overline{m_{1,l}(k)},\\ \operatorname{Im} F_l(k) &= -\operatorname{Im} F_r(k) \in \mathrm{i}\mathbb{R}_-.\end{aligned} \tag{15}$$

Пусть теперь $\rho > \kappa_l$ — большое положительное число и пусть $\mathcal{C}_\rho$ — граница множества $\mathfrak{D} \cap \{k : |k| < \rho\}$. Будем считать замкнутый контур $\mathcal{C}_\rho$ ориентированным против часовой стрелки. Так как особенности $F(k)$ на данном контуре интегрируемые, то по теореме Коши и (13)

$$\oint_{\mathcal{C}_\rho} F(k)dk = 2\pi \mathrm{i} \sum_{j=1}^{N} \operatorname{Res}_{\mathrm{i}\kappa_j} F(k) = -4\pi \sum_{j=1}^{N} \gamma_j \, |m_2(\mathrm{i}\kappa_j)|^2 \, \mathrm{e}^{2t\Phi(\mathrm{i}\kappa_j)}. \tag{16}$$

Но $F(k) = O(k^{-2})$ при $k \to \infty$, т. е. $\lim_{\rho\to\infty} \int_0^\pi F(\rho \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\rho \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} d\theta = 0$, и при $\rho \to \infty$ формула (16) переходит в

$$\int_{\mathbb{R}} F_+(k)\,dk + \int_0^{\mathrm{i}c} F_l(k)\,dk + \int_{\mathrm{i}c}^{0} F_r(k)\,dk + 4\pi \sum_{j=1}^{N} \gamma_j \, |m_2(\mathrm{i}\kappa_j)|^2 \, \mathrm{e}^{2t\Phi(\mathrm{i}\kappa_j)} = 0.$$

Возьмем вещественную часть этого выражения, учитывая (15) и то, что интервал $[0, \mathrm{i}c]$ обходится при интегрировании в противоположных направлениях:

$$\begin{aligned} 0 = &\int_{\mathbb{R}} ((1 - |R(k)|^2)\,|m_{1,-}(k)|^2 + |m_{2,-}(k)|^2)\,dk + \\ &+ 2\int_0^c |m_{2,l}(\mathrm{i}s)|^2 \chi(\mathrm{i}s)\,|\,\mathrm{e}^{t\Phi(\mathrm{i}s)} ds + 4\pi \sum_{j=1}^{N} \gamma_j \, |m_2(\mathrm{i}\kappa_j)|^2 \, \mathrm{e}^{2t\Phi(\mathrm{i}\kappa_j)}. \end{aligned}$$

Все слагаемые справа неотрицательны, так как $|R| < 1$ при $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, т. е.

$$m_{2,-}(k) = 0 \text{ при } k \in (\mathbb{R} \cup [0, \mathrm{i}c] \cup_j \{\mathrm{i}k_j\}), \;\; m_{1,-}(k) = 0 \text{ при } k \in \mathbb{R}. \tag{17}$$

Из этих равенств вытекает, что в действительности вектор-функция $m(k) = \tilde{m}(k) - \hat{m}(k)$ не имеет полюсов. Кроме того, из условий скачка (8) следует, что $m_2(k) = 0$ при $k \in \partial\mathfrak{D}$. Продолжим её аналитически в нижнюю полуплоскость. Полученная функция голоморфна в $\mathbb{C}$ и стремится к нулю при $k \to \infty$. Тогда в силу теоремы Лиувилля $m_2(k) \equiv 0$ при $k \in \overline{\mathfrak{D}}$. Из этого и из последнего из равенств (17) следует, что $m_{1,+}(k) = 0$ при $k \in \mathbb{R}$. Более того, из того, что $m_2(k) = 0$ при $[0, \mathrm{i}c]$ и условий (8) следует, что $m_1(k)$ не имеет скачка на $[0, \mathrm{i}c]$. Продолжая её в нижнюю полуплоскость и вновь применяя теорему Лиувилля, мы приходим к требуемому равенству $\tilde{m}(k) - \hat{m}(k) \equiv 0$ при $k \in \mathbb{C}$. Единственность доказана.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П. Теория солитонов: метод обратной задачи, Москва: Наука, 1980. 319 с.
2. Leach J.A., Needham D.J. The large-time development of the solution to an initial-value problem for the Korteweg–de Vries equation. I. Initial data has a discontinuous expansive step. *Nonlinearity*. 2008. **21**. P. 2391—2408.
3. Andreiev K., Egorova I., Lange T.-L., Teschl G. Rarefaction waves of the Korteweg — de Vries equation via nonlinear steepest descent. *J. Differ. Equat.* 2016. **261**. P. 5371—5410.
4. Гладкая З.Н. О решениях уравнения Кортевега–де Фриза с начальными данными типа ступеньки. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2015. № 2. С. 7—14. doi: https://doi.org/10.15407/dopovidi2015.02.007

5. Буслаев В.С., Фомин В.Н. Обратная задача рассеяния для одномерного уравнения Шредингера на всей оси. *Вестн. Ленингр. ун-та*. 1962. **17**, № 1. С. 56—64.
6. Хруслов Е.Я. Асимптотика решения задачи Коши для уравнения Кортевега–де Фриза с начальными данными типа ступеньки. *Матем. сб*. 1976. **141**, № 2. С. 261–281.
7. Egorova I., Gladka Z., Lange T.-L., Teschl G. Inverse scattering theory for Schrödinger operators with steplike potentials. *Zh. Mat. Fiz. Anal. Geom*. 2015. **11**. P. 123–158.

Поступило в редакцию 12.07.2017

REFERENCES

1. Zakharov, V. E., Manakov, S. V., Novikov, S. P. & Pitaevskii, L. P. (1980). Solitons theory: Inverse problem method. Moscow: Nauka (in Russian).
2. Leach, J. A. & Needham, D. J. (2008). The large–time development of the solution to an initial-value problem for the Korteweg–de Vries equation. I. Initial data has a discontinuous expansive step. Nonlinearity, 21, pp. 2391-2408.
3. Andreiev, K., Egorova, I., Lange, T.-L. & Teschl, G. (2016). Rarefaction waves of the Korteweg — de Vries equation via nonlinear steepest descent. J. Differ. Equat., 261, pp. 5371-5410.
4. Gladka, Z. N. (2015). On solutions of the Korteweg — de Vries equation with initial data of the step type. Dopov. Nac. akad. nauk Ukr., No. 2, pp. 7-14 (in Russian). doi: https://doi.org/10.15407/dopovidi2015.02.007
5. Buslaev, V. S. & Fomin, V. N. (1962). An inverse scattering problem for one-dimentional Schrodinger equation on the entire axis. Vestn. Leningr. Univ., 17, No. 1, pp. 56-64 (in Russian).
6. Khruslov, E. Ya. (1976). Asymptotics of the solution of the Cauchy problem for the Korteweg — de Vries equation with initial data of step type. Math. USSR Sb., 28, pp. 229-248.
7. Egorova, I., Gladka, Z., Lange, T.-L. & Teschl, G. (2015). Inverse scattering theory for Schrödinger operators with steplike potentials. Zh. Mat. Fiz. Anal. Geom., 11, pp. 123-158.

Received 12.07.2017

*К.М. Андреєв, І.Є. Єгорова*

Фізико-технічний інститут низьких температур ім. Б.І. Вєркіна НАН України, Харків
E-mail: kyrylo.andreiev@gmail.com, iraegorova@gmail.com

ЄДИНІСТЬ РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ РІМАНА — ГІЛЬБЕРТА
ДЛЯ ХВИЛІ РОЗРІДЖЕННЯ РІВНЯННЯ КОРТЕВЕГА — ДЕ ФРІЗА

Істотним моментом в асимптотичному аналізі розв'язків нелінійних цілком інтегровних рівнянь методом найшвидшого спуску є дослідження єдиності розв'язку відповідної задачі Рімана — Гільберта. У роботі встановлюється єдиність розв'язку задачі Рімана — Гільберта, побудованої за лівими даними розсіювання для рівняння Кортевега — де Фріза з початковими даними типу сходинки, що відповідають хвилі розрідження. Ця задача дає змогу дослідити асимптотичну поведінку розв'язку позаду заднього фронту хвилі. Доказ єдиності проведено як для нерезонансного, так і для резонансного випадків.

***Ключові слова:*** *рівняння Кортевега—де Фріза, хвиля розрідження, задача Рімана—Гільберта.*

*K.M. Andreiev, I.Ye. Egorova*

B. Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering of the NAS of Ukraine, Kharkiv
E-mail: kyrylo.andreiev@gmail.com, iraegorova@gmail.com

UNIQUENESS OF THE SOLUTION OF THE RIEMANN — HILBERT PROBLEM
FOR A RAREFACTION WAVE OF THE KORTEWEG — DE VRIES EQUATION

An essential aspect in the asymptotic analysis of solutions for nonlinear completely integrable equations by the method of steepest descent is the study of the uniqueness of the corresponding Riemann–Hilbert problem. We establish the uniqueness of the solution for the Riemann — Hilbert problem associated the left scattering data for the Korteweg — de Vries equation with the steplike initial data, which correspond to a rarefaction wave. Such a problem allows us to investigate the asymptotic behavior of the solution behind the back wave front. The proof of the uniqueness is done for the nonresonant and resonant cases.

***Keywords:*** *Korteweg — de Vries equation, rarefaction wave, Riemann — Hilbert problem.*