Г.М.ФЕЛЬДМАН

ХАРАКТЕРИЗАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ НА ЛОКАЛЬНО КОМПАКТНЫХ АБЕЛЕВЫХ ГРУППАХ

Оглавление

Предисловие

Характеризационными задачами в математической статистике называют утверждения, в которых описание возможных распределений случайных величин вытекает из свойств некоторых функций от этих величин. Одним из ярких примеров характеризационной задачи является классическая теорема Каца–Бернштейна ([3], [91]), в которой гауссовское распределение характеризуется независимостью суммы $\xi_1 + \xi_2$ и разности $\xi_1 - \xi_2$ независимых случайных величин ξ_j. Принимая во внимание, что характеристической функцией случайной величины ξ_j с распределением μ_j является математическое ожидание $f_j(y) = \widehat{\mu}_j(y) = \mathbf{E}[e^{i\xi_j y}]$, нетрудно проверить, что теорема Каца–Бернштейна равносильна утверждению о том, что все решения функционального уравнения Каца–Бернштейна

$$f_1(u+v)f_2(u-v) = f_1(u)f_1(v)f_2(u)f_2(-v), \quad u, v \in \mathbb{R},$$

в классе нормированных непрерывных положительно определенных функций имеют вид $f_j(y) = \exp\{-\sigma y^2 + ib_j y\}$, где $\sigma \geq 0$, а $b_j \in \mathbb{R}$.

Теорема Каца–Бернштейна была первой в ряду характеризационных теорем, в которых изучались независимые линейные формы от независимых случайных величин ξ_j при тех или иных ограничениях на ξ_j. Эти исследования завершились следующей теоремой Скитовича–Дармуа ([23], [61]). Пусть $\xi_j,\ j = 1, 2, \dots, n,\ n \geq 2,$ – независимые случайные величины, а $\alpha_j,\ \beta_j$ – отличные от нуля вещественные числа. Тогда из независимости линейных форм $L_1 = \alpha_1\xi_1 + \dots + \alpha_n\xi_n$ и $L_2 = \beta_1\xi_1 + \dots + \beta_n\xi_n$ вытекает, что все случайные величины ξ_j – гауссовские. Также, как и в случае теоремы Каца–Бернштейна, теорема Скитовича–Дармуа равносильна утверждению о том, что все решения функционального уравнения Скитовича–Дармуа

$$\prod_{j=1}^{n} f_j(\alpha_j u + \beta_j v) = \prod_{j=1}^{n} f_j(\alpha_j u) \prod_{j=1}^{n} f_j(\beta_j v), \quad u, v \in \mathbb{R},$$

в классе нормированных непрерывных положительно определенных функций имеют вид

$$f_j(y) = \exp\{-\sigma_j y^2 + ib_j y\}, \tag{1}$$

где $\sigma_j \geq 0$, а $b_j \in \mathbb{R}$.

Теорема Скитовича–Дармуа была обобщена Гурье и Олкиным ([82]) на случай, когда вместо случайных величин рассматриваются случайные векторы ξ_j в пространстве $\mathbb{R}^m$, а коэффициентами линейных форм L_1 и L_2 являются невырожденные матрицы. И в этом случае из независимости L_1 и L_2 вытекает, что все независимые случайные векторы ξ_j – гауссовские. Доказательство теоремы Гурье–Олкина также сводится к решению соответствующего функционального уравнения. Отметим, что невырожденные матрицы – это топологические автоморфизмы группы $\mathbb{R}^m$.

Следующая характеризационная теорема, близкая к теореме Скитовича–Дармуа, была доказана Хейде ([87]). Пусть $\xi_j,\ j = 1, 2, \dots, n,\ n \geq 2,$ – независимые случайные величины, а $\alpha_j,\ \beta_j$ – отличные от нуля вещественные числа такие, что $\beta_i\alpha_i^{-1} \pm \beta_j\alpha_j^{-1} \neq 0$ для любых $i \neq j$. Если условное распределение линейной формы $L_2 = \beta_1\xi_1 + \dots + \beta_n\xi_n$ при фиксированной $L_1 = \alpha_1\xi_1 + \dots + \alpha_n\xi_n$ симметрично, то все ξ_j — гауссовские. Теорема Хейде также равносильна утверждению о том, что все решения функционального уравнения Хейде

$$\prod_{j=1}^{n} f_j(\alpha_j u + \beta_j v) = \prod_{j=1}^{n} f_j(\alpha_j u - \beta_j v), \quad u, v \in \mathbb{R},$$

в классе нормированных непрерывных положительно определенных функций имеют вид (1).

В последние десятилетия большое внимание уделялось перенесению характеризационных теорем на различные алгебраические структуры, такие как локально компактные абелевы группы, группы Ли, квантовые группы, симметрические пространства (см. напр. [4], [6], [13]–[16], [18]–[21], [27], [28], [30]–[41], [43], [64]–[72], [74], [75], [78], [83], [90], [98]–[102], [107]). Связано это, в первую очередь, с желанием получить естественные границы возможного обобщения классических результатов. Настоящая книга посвящена аналогам характеризационных теорем Каца–Бернштейна, Скитовича–Дармуа и Хейде в ситуации, когда независимые случайные величины принимают значения в локально компактной абелевой группе X, удовлетворяющей второй аксиоме счетности, а коэффициентами линейных форм являются топологические автоморфизмы X. Оказывается, что возможность перенесения на X соответствующей характеризационной теоремы не только зависит от структуры группы X, но и определяет эту структуру. Например, предположим, что ξ_1 и ξ_2 принимают значения в группе X , а характеристические функции случайных величин ξ_j не обращаются в нуль. Для того чтобы из независимости их суммы и разности вытекало, что ξ_j гауссовские, необходимо и достаточно, чтобы группа X не содержала подгруппы, топологически изоморфной группе вращений окружности $\mathbb{T}$. Отметим, что также, как и в классическом случае, в групповой ситуации доказательство каждой, из упомянутых выше характеризационных теорем, сводится к решению соответствующего функционального уравнения в классе нормированных непрерывных положительно определенных функций на группе характеров группы X.

Опишем вкратце и прокомментируем содержание книги.

Глава I содержит, главным образом, хорошо известные факты из абстрактного гармонического анализа и теории бесконечных абелевых групп. В §1 даны основные определения и рассматриваются примеры локально компактных абелевых групп, с которыми мы будем иметь дело в дальнейшем. В частности, приведено описание всех подгрупп группы рациональных чисел $\mathbb{Q}$, рассматриваются группы целых p-адических чисел Δ_p и $\mathbf{a}$-адические соленоиды $\Sigma_{\mathbf{a}}$. Сформулированы структурные теоремы для различных классов локально компактных абелевых групп. Описываются группы топологических автоморфизмов групп $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{T}^n$, Δ_p, $\Sigma_{\mathbf{a}}$. Сформулированы основные результаты теории Ульма для счетных p-примарных абелевых групп. В §2 приведены основные результаты, относящиеся к вероятностным распределениям на локально компактных абелевых группах (свойства характеристических функций вероятностных распределений, теорема Бохнера, формула Леви–Хинчина, идемпотентные распределения).

Глава II посвящена гауссовским распределениям на локально компактной абелевой группе X. В §3 мы определяем гауссовские распределения и изучаем их свойства. В §4 дано полное описание локально компактных абелевых групп, на которых любое гауссовское распределение имеет только гауссовские делители (групповой аналог теоремы Крамера о разложении гауссовского распределения). В §5 рассматриваются многочлены на локально компактных абелевых группах и изучаются их свойства. Дано полное описание локально компактных абелевых групп, на которых распределение μ с характеристической функцией $\widehat{\mu}(y) = e^{P(y)}$, где $P(y)$ – непрерывный многочлен, является гауссовским (групповой аналог теоремы Марцинкевича). Групповые аналоги теорем Крамера и Марцинкевича являются аналитической основой доказательства характеризационных теорем, изучаемых в главах III – VI. В §6 рассматриваются гауссовские распределения в смысле Урбаника, т.е. такие распределения на X, которые любым характером переводятся в гауссовские распределения на группе $\mathbb{T}$. Описаны локально компактные абелевы группы, на которых классы гауссовских распределений и гауссовских распределений в смысле Урбаника совпадают.

В главе III изучаются распределения независимых случайных величин ξ_1 и ξ_2 со значениями в локально компактной абелевой группе X, имеющие независимые сумму и разность. В §7 дано полное описание локально компактных абелевых групп X, на которых такие распределения инвариантны относительно некоторой компактной подгруппы K группы X и при естественном гомоморфизме $X \mapsto X/K$ индуцируют на фактор-группе X/K гауссовские распределения. Это максимально широкий подкласс локально компактных абелевых групп, на котором справедлива теорема Каца–Бернштейна. Он состоит из групп X, связная компонента нуля которых не содержит элементов порядка 2. Поэтому, если связная компонента нуля группы X содержит элементы порядка 2, то для таких групп возникает естественная задача описания распределений независимых случайных величин ξ_j, принимающих значения в X и имеющих независимую сумму и разность. Эта задача решается в §8 для группы $\mathbb{R} \times \mathbb{T}$ и для $\mathbf{a}$-адических соленоидов $\Sigma_{\mathbf{a}}$. В §9 изучаются также распределения независимых одинаково распределенных случайных величин со значениями в группе X, имеющие независимые сумму и разность (гауссовские распределения в смысле Бернштейна).

Главы IV и V посвящены групповым аналогам теоремы Скитовича–Дармуа. Пусть $\xi_j,\ j = 1, 2, \ldots, n,\ n \geq 2,$ – независимые случайные величины со значениями в локально компактной абелевой группе X. Пусть $\alpha_j,\ \beta_j$ – топологические автоморфизмы X. Положим $L_1 = \alpha_1\xi_1 + \cdots + \alpha_n\xi_n$ и $L_2 = \beta_1\xi_1 + \cdots + \beta_n\xi_n$.

В главе IV изучается случай, когда характеристические функции независимых случайных величин ξ_j не обращаются в нуль. В §10 доказано, что из независимости линейных форм L_1 и L_2 вытекает, что все случайные величины ξ_j – гауссовские тогда и только тогда, когда группа X не содержит подгруппы, топологически изоморфной $\mathbb{T}$. При условии, что характеристические функции случайных величин ξ_j не обращаются в нуль это максимально широкий подкласс локально компактных абелевых групп, на котором справедлива теорема Скитовича–Дармуа. Предположим, что X содержит подгруппу, топологически изоморфную $\mathbb{T}$. Тогда возникает естественная задача описания возможных распределений случайных величин ξ_j, принимающих значения в X, которые характеризуются независимостью линейных форм L_1 и L_2. Оставшаяся часть главы IV посвящена решению этой задачи.

Если характеристические функции независимых случайных величин ξ_j с распределениями μ_j не обращаются в нуль, и L_1 и L_2 независимы, то, оказывается, что μ_j можно так заменить их сдвигами μ'_j, что носители μ'_j содержатся в связной компоненте нуля группы X. Поэтому, если мы предполагаем, что L_1 и L_2 независимы, и нас интересуют возможные распределения независимых случайных величин ξ_j, не ограничивая общности, группу X можно считать связной. Важной характеристикой связной локально компактной абелевой группы X является ее размерность $\dim X$. Если $\dim X = 1$, то X топологически изоморфна одной из групп: $\mathbb{R},\ \Sigma_{\mathbf{a}},\ \mathbb{T}$. Если $\dim X = 2$, то либо X не содержит подгруппы, топологически изоморфной $\mathbb{T}$, либо X топологически изоморфна одной из групп: $\mathbb{T}^2,\ \mathbb{R} \times \mathbb{T},\ \Sigma_{\mathbf{a}} \times \mathbb{T}$. Предположим, что число случайных величин ξ_j равно двум. В §11 для двумерного тора $\mathbb{T}^2$ дано описание возможных распределений случайных величин ξ_j в предположении, что L_1 и L_2 независимы. Вообще говоря, такие распределения могут быть негауссовскими, но мы описываем, в частности, все топологические автоморфизмы

$\alpha_j,\ \beta_j$ двумерного тора $\mathbb{T}^2$, для которых соответствующие распределения являются гауссовскими. Аналогичная задача решается в §12 для групп $\mathbb{R}\times\mathbb{T}$ и $\Sigma_{\mathbf{a}}\times\mathbb{T}$.

В главе V мы отказываемся от предположения, что характеристические функции независимых случайных величин ξ_j не обращаются в нуль, и предполагаем, что ξ_j принимают значения в различных классах локально компактных абелевых групп (конечные, дискретные, дискретные периодические, компактные вполне несвязные группы и т.д.). Поскольку на вполне несвязной группе гауссовские распределения вырождены, идемпотентные распределения на таких группах играют важную роль. Оказывается, что в отличие от классической ситуации, существует принципиальная разница между случаями, когда мы рассматриваем линейные формы от двух случайных величин, от трех случайных величин и от $n\geq 4$ случайных величин. В групповой ситуации возникают эффекты, отсутствующие, вообще говоря, на вещественной прямой. Проиллюстрируем это следующим примером. Пусть $\mathbb{Z}(5)$ – группа вычетов по модулю 5, а $\xi_j,\ j=1,2,\dots,n,\ n\geq 2,$ – независимые случайные величины со значениями в $\mathbb{Z}(5)$. Тогда, если $n=2$, то из независимости L_1 и L_2 вытекает, что все случайные величины ξ_j имеют идемпотентные распределения. Если $n=3$ и L_1 и L_2 независимы, то можно лишь утверждать, что распределение по крайней мере одной случайной величины ξ_{j_1} идемпотентно. С другой стороны, для любого $n\geq 4$ существуют независимые случайные величины $\xi_j,\ j=1,2,\dots,n$ со значениями в группе $\mathbb{Z}(5)$ и автоморфизмы α_j,β_j группы $\mathbb{Z}(5)$ такие, что L_1 и L_2 независимы, а все ξ_j имеют не идемпотентные распределения.

В §13 изучается случай, когда число независимых случайных величин ξ_j равно двум. Доказано, что если группа X дискретна, то из независимости линейных форм L_1 и L_2 вытекает, что случайные величины ξ_j имеют идемпотентные распределения. Полностью описаны также компактные вполне несвязные группы X, для которых имеет место аналогичное утверждение. Мы доказываем, что теорема Скитовича–Дармуа неверна для связных компактных групп. В §14 изучается случай, когда число n случайных величин ξ_j больше двух. Вначале мы изучаем случай, когда независимые случайные величины принимают значения в конечных абелевых группах, затем – в компактных вполне несвязных группах и дискретных периодических группах. В каждом из этих случаев для $n=3$ полностью описываются те группы X, для которых из независимости линейных форм L_1 и L_2 вытекает, что либо все случайные величины ξ_j имеют идемпотентные распределения, либо распределения по крайней мере двух случайных величин ξ_{j_1} и ξ_{j_2} идемпотентны, либо распределение по крайней мере одной случайной величины ξ_{j_1} идемпотентно. Мы также изучаем случай произвольного числа $n\geq 4$ случайных величин ξ_j. При этом группа X предполагается либо дискретной периодической, либо компактной. Интересно отметить, что доказательство теоремы Скитовича–Дармуа для дискретных абелевых групп при $n=2$, в отличие от доказательства теоремы Скитовича–Дармуа для дискретных абелевых групп при $n\geq 3$, не опирается на теорию Ульма.

В §15 мы рассматриваем случайные величины ξ_1 и ξ_2, принимающие значения в $\mathbf{a}$-адическом соленоиде $\Sigma_{\mathbf{a}}$. Мы описываем возможные распределения случайных величин ξ_j при условии, что линейные формы L_1 и L_2 независимы. Оказывается, что это описание зависит, как от вида $\mathbf{a}$-адического соленоида $\Sigma_{\mathbf{a}}$, так и от топологических автоморфизмов α_j,β_j.

Глава VI посвящена групповым аналогам теоремы Хейде. Пусть $\xi_j,\ j=1,2,\dots,n,\ n\geq 2,$ – независимые случайные величины со значениями в локально компактной абелевой группе X.

Пусть $\alpha_j,\ \beta_j$ – топологические автоморфизмы X, удовлетворяющие условию:

$$(i) \qquad \beta_i\alpha_i^{-1} \pm \beta_j\alpha_j^{-1} \text{ – топологические автоморфизмы группы } X \text{ для любых } i \neq j.$$

Положим $L_1 = \alpha_1\xi_1 + \cdots + \alpha_n\xi_n$ и $L_2 = \beta_1\xi_1 + \cdots + \beta_n\xi_n$.

В §16 изучается случай, когда характеристические функции независимых случайных величин ξ_j не обращаются в нуль. Доказано, что из симметрии условного распределения линейной формы L_2 при фиксированной L_1 вытекает, что все ξ_j – гауссовские, тогда и только тогда, когда группа X не содержит элементов порядка 2. При условии, что характеристические функции случайных величин ξ_j не обращаются в нуль, это максимально широкий подкласс локально компактных абелевых групп, на котором справедлива теорема Хейде. Если группа X содержит элементы порядка 2, то возникает естественная задача описания возможных распределений случайных величин ξ_j, принимающих значения в X, в предположении, что условное распределение линейной формы L_2 при фиксированной L_1 симметрично. При этом предполагается, что на X существуют топологические автоморфизмы $\alpha_j,\ \beta_j$, удовлетворяющие условию (i). Одним из важных примеров таких групп является двумерный тор $\mathbb{T}^2$, и уже в этом случае задача весьма содержательна. Оказывается, что распределения, которые характеризуются симметрией условного распределения линейной формы L_2 при фиксированной L_1 – это свертки гауссовских распределений, и распределений с носителем в подгруппе $\mathbb{T}^2$, порожденной элементами порядка 2. Аналогичный результат доказан также для групп, не содержащих подгруппы, топологически изоморфной $\mathbb{T}$.

В §17 мы отказываемся от предположения, что характеристические функции независимых случайных величин ξ_j не обращаются в нуль. Вначале мы изучаем случай, когда ξ_j принимают значения в конечной группе, а затем в дискретной группе X. В случае, когда группа X дискретна, а число случайных величин ξ_j равно двум, доказано, в частности, что из симметрии условного распределения линейной формы L_2 при фиксированной L_1 вытекает, что распределения случайных величин ξ_j идемпотентны, тогда и только тогда, когда группа X не содержит элементов порядка 2.

В приложении A изучены решения функциональных уравнений Каца–Бернштейна и Скитовича–Дармуа на локально компактных абелевых группах в классах непрерывных функций и измеримых функций.

В приложении B рассматриваются гауссовские распределения в смысле Бернштейна на топологических неабелевых группах (дискретных, компактных, нильпотентных и некоторых разрешимых). Оказывается, что для указанных классов групп носитель гауссовского распределения в смысле Бернштейна на группе X содержится в некоторой абелевой подгруппе группы X.

В приложении C изучаются распределения независимых одинаково распределенных случайных величин $\xi_j,\ j = 1, 2, 3, 4$, со значениями в локально компактной абелевой группе X, которые обладают тем свойством, что $2\xi_1$ и $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4$ одинаково распределены (гауссовские распределения в смысле Полиа).

Эта книга под названием "Functional equations and characterization problems on locally compact Abelian groups" была опубликована в 2008-м году Европейским математическим обществом в серии "EMS Tracts in Mathematics Vol. 5. Настоящее издание существенно дополнено, по сравнению с предыдущим. Добавлены, в частности, пункты 9.17–9.18, 12.4, 13.27–13.30, 16.11–16.16, 17.25–17.27, 17.33, приложения B и C, расширен список литературы, в отдельных местах улучшено изложение и исправлены замеченные опечатки. Объем книги при этом увеличился.

Я хочу поблагодарить Физико-технический институт низких температур им. Б.И. Веркина Национальной академии наук Украины за создание прекрасных условий для занятий математикой и написания этой книги.

Г.М. Фельдман

Глава I

Предварительные сведения

§1. Локально компактные абелевы группы

В этом параграфе мы дадим сводку результатов абстрактного гармонического анализа и теории бесконечных абелевых групп, которые нам понадобятся в дальнейшем. Основными источниками для нас будут монографии Хьюита и Росса ([85]) и Фукса ([79], [80]). Если не оговорено противное, мы будем рассматривать в книге лишь локально компактные абелевы группы (в дальнейшем просто группы).

1.1. Некоторые определения и обозначения. Пусть X – локально компактная абелева группа. Как правило, мы будем использовать аддитивную запись для операции в группе, а нейтральный элемент группы обозначать через "0". Топологический изоморфизм групп, т.е. алгебраический изоморфизм, который является гомеоморфизмом, будем обозначать символом "$\cong$". Элемент $x \in X$ называется *компактным*, если наименьшая замкнутая подгруппа в X, содержащая x, компактна. Обозначим через b_X множество всех компактных элементов группы X, а через c_X — связную компоненту нуля группы X. Группа X называется *периодической*, если каждый ее элемент имеет конечный порядок. Если в группе X нет элементов конечного порядка за исключением нуля, то X называется *группой без кручения.* Пусть $f : \mathbb{R} \mapsto X$ — непрерывный гомоморфизм. Тогда образ $f(\mathbb{R})$ называется *однопараметрической подгруппой* в X.

Конечное подмножество $\{x_1, \dots, x_n\}$ группы X называется *независимым*, если оно не содержит нуля, и для любых целых $k_1, \dots, k_n$ из равенства $k_1x_1 + \dots + k_nx_n = 0$ вытекает, что $k_1x_1 = \dots = k_nx_n = 0$. Бесконечное подмножество A группы X называется *независимым*, если любое его конечное подмножество независимо. *Рангом* группы X называется мощность ее максимальной независимой системы, содержащей только элементы бесконечного порядка или порядка, равного степени простого числа. Ранг группы X обозначим через $r(X)$. Через $\dim X$ обозначим размерность связной группы X.

Пусть $\{X_\iota : \iota \in \mathcal{I}\}$ – непустое семейство групп. Через $\mathop{\mathbf{P}}\limits_{\iota\in\mathcal{I}} X_\iota$ мы будем обозначать *прямое произведение групп* X_ι, т.е. группу, совпадающую с декартовым произведением групп X_ι с покоординатными операциями. Обозначим через $\mathop{\mathbf{P}^*}\limits_{\iota\in\mathcal{I}} X_\iota$ подмножество в $\mathop{\mathbf{P}}\limits_{\iota\in\mathcal{I}} X_\iota$, состоящее из элементов $(x_\iota) \in \mathop{\mathbf{P}}\limits_{\iota\in\mathcal{I}} X_\iota$ таких, что $x_\iota \neq 0$ лишь для конечного числа индексов ι. Тогда $\mathop{\mathbf{P}^*}\limits_{\iota\in\mathcal{I}} X_\iota$ – подгруппа в $\mathop{\mathbf{P}}\limits_{\iota\in\mathcal{I}} X_\iota$. Она называется *слабым прямым произведением групп* X_ι. Если $X_\iota = X$ для любого $\iota \in \mathcal{I}$, то прямое произведение групп X_ι мы будем обозначать через $X^{\mathfrak{n}}$, а слабое прямое произведение групп X_ι – через $X^{\mathfrak{n}*}$, где $\mathfrak{n}$ — мощность множества $\mathcal{I}$. Пусть $\{K_\iota : \iota \in \mathcal{I}\}$ – непустое семейство компактных групп. Группу $\mathop{\mathbf{P}}\limits_{\iota\in\mathcal{I}} K_\iota$ мы всегда будем рассматривать в топологии произведения. По теореме Тихонова группа $\mathop{\mathbf{P}}\limits_{\iota\in\mathcal{I}} K_\iota$ также компактна. Если $\{D_\iota : \iota \in \mathcal{I}\}$ – непустое семейство дискретных групп, то группу $\mathop{\mathbf{P}^*}\limits_{\iota\in\mathcal{I}} D_\iota$ мы всегда будем рассматривать в дискретной топологии.

Пусть n – целое. Обозначим через $f_n : X \mapsto X$ гомоморфизм, определяемый формулой $f_nx = nx$. Положим $X_{(n)} = \mathrm{Ker} f_n$, $X^{(n)} = f_n(X)$. Группа X называется *группой Корвина*, если $X^{(2)} = X$. Группа X называется *делимой*, если $X^{(n)} = X$ для любого натурального n.

Если G – подгруппа X, элементы фактор-группы X/G будем обозначать либо $x+G$ либо $[x]$. Пусть A – подмножество в X. Под *подгруппой, порожденной* A, мы понимаем множество элементов вида $x = l_1 x_1 + \cdots + l_k x_k$, где $x_j, \in A$, а l_j – целые. Пусть A и B подмножества в X. Через $A+B$ будем обозначать множество $A+B = \{x \in X : x = a+b,\ a \in A,\ b \in B\}$. Замыкание множества A будем обозначать через $\overline{A}$. Для конечного множества A обозначим через $|A|$ число его элементов.

Если не оговорено противное, слово "функция" будет обозначать отображение, принимающее вещественные или комплексные значения. Пусть Y – произвольная абелева группа, $f(y)$ — функция на Y, h — произвольный элемент группы Y. Обозначим через Δ_h *оператор конечной разности*

$$\Delta_h f(y) = f(y+h) - f(y).$$

Многочленом на Y называется такая функция $f(y)$, что при некотором n выполнено

$$\Delta_h^{n+1} f(y) = 0$$

для всех $y, h \in Y$. Минимальное n, при котором выполнено это равенство, называется *степенью* многочлена $f(y)$. Функцию $f(y)$ на группе Y будем называть *нормированной*, если $f(0) = 1$.

Обозначим через $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение в $\mathbb{R}^k$.

Мы будем использовать обозначение ω для наименьшего бесконечного порядкового числа и $\aleph_0$ – для наименьшего бесконечного кардинального числа. Через $\mathbb{N}$ будем обозначать множество натуральных чисел, а через $\mathcal{P}$ – множество простых чисел. Обозначим через $\mathbb{C}$ – множество комплексных чисел.

1.2. Примеры локально компактных абелевых групп. Рассмотрим наиболее важные локально компактные абелевы группы, которые нам понадобятся при изучении характеризационных задач. Заметим, что все конечные группы мы будем рассматривать в дискретной топологии.

(a) $\mathbb{R}$ – аддитивная группа вещественных чисел с обычной топологией.

(b) $\mathbb{Z}$ – аддитивная группа целых чисел (бесконечная циклическая группа) с дискретной топологией.

(c) $\mathbb{T}$ – группа вращений окружности (одномерный тор), т.е. $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} :\ |z| = 1\}$ относительно операции умножения с обычной топологией.

(d) $\mathbb{Z}(m)$ – группа вычетов по модулю m с дискретной топологией (конечная циклическая группа). Элементы группы $\mathbb{Z}(m)$ будем обозначать $\{0, 1, \dots, m-1\}$. Отметим, что группа $\mathbb{Z}(m)$ изоморфна мультипликативной группе корней степени m из 1. Мы также сохраним для этой группы обозначение $\mathbb{Z}(m)$, а ее элементы будем обозначать через $\exp\{2\pi i k/m\},\ k = 0, 1, \dots, m-1$.

(e) Пусть p — простое число. Рассмотрим множество рациональных чисел вида $\{k/p^n : k = 0, 1, \dots, p^n - 1,\ n = 0, 1, \dots\}$ и обозначим это множество через $\mathbb{Z}(p^\infty)$. Если операцию в $\mathbb{Z}(p^\infty)$ определить, как сложение по модулю 1, то $\mathbb{Z}(p^\infty)$ превращается в абелеву группу, которую мы будем рассматривать в дискретной топологии. Очевидно, что эта группа изоморфна рассматриваемой в дискретной топологии мультипликативной группе корней степени p^n из единицы, где n пробегает все неотрицательные целые числа. Эту группу мы также будем обозначать через $\mathbb{Z}(p^\infty)$, а ее элементы через $\exp\{2\pi i k/p^n\},\ k = 0, 1, \dots, p^n - 1,\ n = 0, 1, \dots$.

(f) Пусть $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \dots, a_n, \dots)$ — произвольная фиксированная последовательность целых чисел, больших 1. Определим $\Delta_{\mathbf{a}}$ — *аддитивную группу* **a**-*адических целых чисел.* Как множество, $\Delta_{\mathbf{a}}$ совпадает с декартовым произведением $\overset{\infty}{\underset{n=0}{\mathbf{P}}}\{0, 1, \dots, a_n - 1\}$. Рассмотрим $\mathbf{x} = (x_0, x_1, x_2, \dots)$, $\mathbf{y} = (y_0, y_1, y_2, \dots) \in \Delta_{\mathbf{a}}$ и определим сумму $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$ следующим образом. Пусть $x_0 + y_0 = t_0 a_0 + z_0$, где $z_0 \in \{0, 1, \dots, a_0 - 1\}$, $t_0 \in \{0, 1\}$. Предположим, что числа $z_0, z_1, \dots, z_k$; $t_0, t_1, \dots, t_k$ уже определены. Тогда положим $x_{k+1} + y_{k+1} + t_k = t_{k+1} a_{k+1} + z_{k+1}$, где $z_{k+1} \in \{0, 1, \dots, a_{k+1} - 1\}$, $t_{k+1} \in \{0, 1\}$. Тем самым, по индукции определена последовательность $\mathbf{z} = (z_0, z_1, z_2, \dots)$. Относительно так определенной операции $\Delta_{\mathbf{a}}$ является абелевой группой, нулем которой служит последовательность, состоящая только из нулей. Рассмотрим $\Delta_{\mathbf{a}}$ в топологии произведения. Тогда $\Delta_{\mathbf{a}}$ — компактная вполне несвязная абелева группа ([85, (10.2)]).

Важный частный случай: $\mathbf{a} = (p, p, \dots, p, \dots)$, где p — простое число. Соответствующая группа называется группой p-*адических целых чисел* и обозначается через Δ_p. Отметим, что группу Δ_p можно представлять себе следующим образом. Каждому $\mathbf{x} = (x_0, x_1, x_2, \dots) \in \Delta_p$ сопоставим формальный степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n p^n$. Естественным образом определенное сложение формальных степенных рядов определяет операцию в Δ_p, совпадающую с определенным выше сложением. Можно также естественным образом определить умножение формальных степенных рядов. В результате Δ_p превращается в локально компактное коммутативное кольцо ([85, (10.10)]).

(g) Пусть $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \dots, a_n, \dots)$ — произвольная фиксированная последовательность целых чисел, больших 1. Рассмотрим группу $\mathbb{R} \times \Delta_{\mathbf{a}}$. Обозначим через B подгруппу в $\mathbb{R} \times \Delta_{\mathbf{a}}$ вида $B = \{(n, n\mathbf{u})\}_{n=-\infty}^{\infty}$, где $\mathbf{u} = (1, 0, \dots, 0, \dots)$. Фактор-группа $\Sigma_{\mathbf{a}} = (\mathbb{R} \times \Delta_{\mathbf{a}})/B$ называется **a**-*адическим соленоидом* ([85, (10.12)]). В частном случае, когда $\Delta_{\mathbf{a}} = \Delta_p$, фактор-группа $(\mathbb{R} \times \Delta_p)/B$ называется p-адическим соленоидом и обозначается Σ_p. Группа $\Sigma_{\mathbf{a}}$ компактна, связна ([85, (10.13)]) и имеет размерность 1 ([85, (24.28)]).

(h) $\mathbb{Q}$ – аддитивная группа рациональных чисел с дискретной топологией.

1.3. Группы без кручения ранга 1 ([80, §85]). Пусть A — группа без кручения, p — простое число и $a \in A$. Наибольшее целое неотрицательное число k, для которого уравнение $p^k x = a$ имеет решение $x \in A$, называется p-*высотой* элемента a и обозначается $h_p(a)$. Если такого k не существует, полагаем $h_p(a) = \infty$. Последовательность p-высот

$$\chi(a) = (h_{p_1}(a), \dots, h_{p_n}(a), \dots),$$

где p_j — j-ое простое число, называется *характеристикой* элемента a. Каждая последовательность $(k_1, \dots, k_n, \dots)$ неотрицательных целых чисел и символов ∞ является характеристикой. Именно, рассмотрим подгруппу A в группе рациональных чисел $\mathbb{Q}$, порожденную всеми элементами $p_n^{-l_n}$, где $l_n \leq k_n$ для всех n. Тогда последовательность $(k_1, \dots, k_n, \dots)$ является характеристикой элемента $1 \in A$. Две характеристики $(k_1, \dots, k_n, \dots)$ и $(m_1, \dots, m_n, \dots)$ называются эквивалентными, если $k_n \neq m_n$ только для конечного числа n таких, что если $k_n \neq m_n$, то оба числа k_n и m_n конечны. Класс эквивалентности характеристик называется *типом.* Тип $\mathbf{t}$ мы будем представлять характеристикой, принадлежащей этому типу.

Группа без кручения A, в которой все отличные от нуля элементы имеют один и тот же тип, называется *однородной*, а ее типом $\mathbf{t}(A)$ называется тип, общий для всех ненулевых элементов

$a \in A$. Каждая подгруппа B группы $\mathbb{Q}$ однородна. Именно, если $a \in B$ и $\chi(a) = (k_1, \dots, k_n, \dots)$, то B изоморфна подгруппе A, описанной выше. Каждая группа без кручения ранга 1 однородна и изоморфна некоторой подгруппе в $\mathbb{Q}$. Две группы без кручения ранга 1 изоморфны тогда и только тогда, когда они имеют один и тот же тип ([80, теорема 85.1]). Таким образом, существует взаимно однозначное соответствие между группами без кручения ранга 1 и типами. В качестве примеров отметим, что $\mathbf{t}(\mathbb{Z}) = (0, \dots, 0, \dots)$, $\mathbf{t}(\mathbb{Q}) = (\infty, \dots, \infty, \dots)$. Отметим также, что $(\infty, 0, \dots, 0, \dots)$ – тип подгруппы двоично-рациональных чисел, а $(1, \dots, 1, \dots)$ – тип подгруппы, состоящей из рациональных чисел со знаменателями, свободными от квадратов.

1.4. Группа характеров. *Характером* локально компактной абелевой группы X называется непрерывный гомоморфизм X в группу $\mathbb{T}$. Множество всех характеров группы X будем обозначать через X^*. Положим $X^* = Y$. Обозначим через (x, y) значение характера $y \in Y$ на элементе $x \in X$. Относительно поточечного умножения Y является абелевой группой. Для любого компактного подмножества $F \subset X$ и любого $\varepsilon > 0$ пусть $P(F, \varepsilon) = \{y \in Y : |(x, y) - 1| < \varepsilon$ для всех $x \in F\}$. Если систему множеств $P(F, \varepsilon)$ взять в качестве открытой базы в нейтральном элементе группы Y, то относительно этой топологии Y является локально компактной абелевой группой ([85, (23.15)]). Группа Y называется группой характеров группы X. Пусть τ — отображение $\tau : X \mapsto Y^*$, определяемое формулой $(y, \tau x) = (x, y)$. Следующая теорема является центральной в абстрактном гармоническом анализе.

1.5. Теорема двойственности Понтрягина. *Отображение τ является топологическим изоморфизмом групп X и Y^** ([85, (24.8)]).

1.6. Дуальные свойства групп X и Y. Согласно теореме двойственности Понтрягина любое топологическое или алгебраическое свойство локально компактной абелевой группы может быть описано в терминах топологических или алгебраических свойств ее группы характеров. В частности, справедливы следующие теоремы.

1. *Локально компактная абелева группа тогда и только тогда компактна, когда ее группа характеров дискретна* ([85, (23.17)]).

2. *Компактная абелева группа тогда и только тогда связна, когда ее группа характеров – группа без кручения* ([85, (24.25)]).

3. *Связная компактная абелева группа X тогда и только тогда и имеет размерность $\mathfrak{m}$, когда ранг $r(Y)$ ее группы характеров равен $\mathfrak{m}$. Если связная группа X удовлетворяет второй аксиоме счетности, то* $\dim \mathrm{X} \le \aleph_0$. ([85, (24.25), (24.28)]).

4. *Компактная абелева группа тогда и только тогда вполне несвязна, когда ее группа характеров периодична* ([85, (24.26)]).

1.7. Группы характеров прямых произведений. Группу характеров прямого произведения групп можно вычислить, зная группы характеров сомножителей. Справедливы следующие теоремы.

1. *Пусть X_j, $j = 1, 2, \dots, n$ – локально компактные абелевы группы и $Y_j = X_j^*$. Тогда*

$$\big(X_1 \times \cdots \times X_n\big)^* \cong Y_1 \times \cdots \times Y_n,$$

([85, (23.18)]).

2. *Пусть* $\{K_\iota : \iota \in \mathcal{I}\}$ *– непустое семейство компактных абелевых групп и* $D_\iota = K_\iota^*$. *Тогда*

$$\left(\mathop{\mathbf{P}}_{\iota\in\mathcal{I}} K_\iota\right)^* \cong \mathop{\mathbf{P}^*}_{\iota\in\mathcal{I}} D_\iota.$$

Если $\{D_\iota : \iota \in \mathcal{I}\}$ *– непустое семейство дискретных абелевых групп и* $K_\iota = D_\iota^*$, *то*

$$\left(\mathop{\mathbf{P}^*}_{\iota\in\mathcal{I}} D_\iota\right)^* \cong \mathop{\mathbf{P}}_{\iota\in\mathcal{I}} K_\iota,$$

([85, (23.21)]).

1.8. Аннулятор. Пусть X – локально компактная абелева группа, Y – ее группа характеров и B – непустое подмножество в X. Положим

$$A(Y,B) = \{y \in Y : \ (x,y) = 1 \ \text{ для всех } x \in B\}.$$

Множество $A(Y,B)$ называется *аннулятором* множества B.

1.9. Некоторые следствия из теоремы двойственности Понтрягина. Справедливы следующие теоремы.

1.9.1. *Пусть* G *— замкнутая подгруппа группы* X. *Тогда* $G = A(X, A(Y,G))$ ([85, §24.10]).

1.9.2. *Пусть* G *— замкнутая подгруппа группы* X. *Группа характеров группы* G *топологически изоморфна фактор-группе* $Y/A(Y,G)$, *причем каждый характер группы* G *имеет вид* $x \mapsto (x,y)$ *для некоторого* $y \in Y$. *Два характера* y_1 *и* y_2 *из* Y *определяют один и тот же характер подгруппы* G *тогда и только тогда, когда* $y_1 - y_2 \in A(Y,G)$. *Группа характеров фактор-группы* X/G *топологически изоморфна группе* $A(Y,G)$ ([85, (24.11), (23.25)]).

1.9.3. *Множества* b_X *и* c_X *являются замкнутыми подгруппами группы* X. *Имеют место равенства* $b_Y = A(Y, c_X)$, $c_X = A(X, b_Y)$ ([85, (24.17)]).

1.9.4. *Пусть* K *– компактная подгруппа группы* X. *Тогда аннулятор* $A(Y,K)$ *– открытая подгруппа в* Y. *Если* H *– открытая подгруппа в* Y, *то* $A(X,H)$ *– компактная подгруппа в* X ([85, (23.29)]).

1.9.5. *Для любого натурального* n *выполнено* $A\left(Y, X^{(n)}\right) = Y_{(n)}$, $A\left(Y, X_{(n)}\right) = \overline{Y^{(n)}}$ ([85, (24.22)]).

1.9.6. *Если группа* X *связна, то* $X^{(n)} = X$ *для любого натурального* n ([85, (24.25)]).

1.10. Примеры групп характеров. Рассмотрим примеры групп характеров некоторых локально компактных абелевых групп.

(a) $\mathbb{R}^* \cong \mathbb{R}$, $(x,y) = e^{ixy}$, где $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$.

(b) $\mathbb{Z}^* \cong \mathbb{T}$, $(n,z) = z^n$, где $n \in \mathbb{Z}$, $z \in \mathbb{T}$.

(c) $\mathbb{Z}(m)^* \cong \mathbb{Z}(m)$, $(k,l) = \exp\{2\pi ikl/m\}$, где $k \in \mathbb{Z}(m)$, $l \in \mathbb{Z}(m)$.

(d) $\Delta_p^* \cong \mathbb{Z}(p^\infty)$,

$$(\mathbf{x}, y) = \exp\left\{\left(x_0 + x_1 p + \cdots + x_{n-1}p^{n-1}\right)\frac{2\pi il}{p^n}\right\},$$

где

$$\mathbf{x} = (x_0, x_1, x_2, \dots) \in \Delta_p, \quad y = \exp\left\{\frac{2\pi il}{p^n}\right\} \in \mathbb{Z}(p^\infty)$$

([85, (25.2)]).

(e) Рассмотрим группу $\Sigma_{\mathbf{a}} = (\mathbb{R}\times\Delta_{\mathbf{a}})/B$, где $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \dots, a_n, \dots)$. Тогда $\Sigma_{\mathbf{a}}^* \cong H_{\mathbf{a}}$, где

$$H_{\mathbf{a}} = \left\{\frac{m}{a_0a_1\cdots a_n} : n = 0, 1, \dots; m \in \mathbb{Z}\right\}$$

– подгруппа в группе $\mathbb{Q}$, а

$$(\mathbf{x}, y) = \exp\left\{\Big(t - (x_0 + a_0x_1 + \dots + a_0a_1\dots a_{n-1}x_n)\Big)\frac{2\pi i m}{a_0a_1\cdots a_n}\right\},$$

где

$$\mathbf{x} = (t; x_0, x_1, x_2, \dots) + B \in \Sigma_{\mathbf{a}}, \quad (t; x_0, x_1, x_2, \dots) \in \mathbb{R}\times\Delta_{\mathbf{a}}, \quad y = \frac{m}{a_0a_1\cdots a_n} \in H_{\mathbf{a}}$$

([85, (25.3)]). Отметим, что если $\mathbf{a} = (2, 3, 4, \dots)$, то $\Sigma_{\mathbf{a}}^* \cong \mathbb{Q}$.

1.11. Структурные теоремы для некоторых классов локально компактных абелевых групп. Справедливы следующие теоремы.

1.11.1. *Каждая локально компактная абелева группа X топологически изоморфна группе вида $\mathbb{R}^m \times G$, где $m \geq 0$, а группа G содержит компактную открытую подгруппу* ([85, (24.30)]).

1.11.2. *Каждая связная локально компактная абелева группа X топологически изоморфна группе $\mathbb{R}^m \times K$, где $m \geq 0$, а K — связная компактная группа* ([85, (9.14)]).

1.11.3. *Пусть X – связная локально компактная абелева группа, удовлетворяющая второй аксиоме счетности. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(i) *группа X локально связна;*

(ii) *группа X линейно связна;*

(iii) *группа X топологически изоморфна группе $\mathbb{R}^m \times \mathbb{T}^{\mathfrak{n}}$, где $m \geq 0$, и $\mathfrak{n} \leq \aleph_0$* ([42, (8.27)]).

1.11.4. *Каждая компактная абелева группа без кручения топологически изоморфна группе*

$$(\Sigma_{\mathbf{a}})^{\mathfrak{n}} \times \mathop{\mathbf{P}}_{p\in\mathcal{P}} \Delta_p^{\mathfrak{n}_p},$$

где $\mathbf{a} = (2, 3, 4, \dots)$, $\mathfrak{n}$ и $\mathfrak{n}_p$ – кардинальные числа([85, (25.8)]).

1.11.5. *Пусть X – такая локально компактная абелева группа, что каждый ее элемент, отличный от нуля, имеет порядок p, где p – простое число. Тогда X топологически изоморфна группе*

$$\mathbb{Z}(p)^{\mathfrak{n}} \times \mathbb{Z}(p)^{\mathfrak{m}*},$$

где $\mathfrak{n}$ и $\mathfrak{m}$ – произвольные кардинальные числа, $\mathbb{Z}(p)^{\mathfrak{n}}$ рассматривается в обычной топологии, а $\mathbb{Z}(p)^{\mathfrak{m}*}$ рассматривается в дискретной топологии ([85, (25.29)]).

1.12. Малые подгруппы в локально компактных абелевых группах. Справедливы следующие теоремы.

1.12.1. *Пусть X – вполне несвязная локально компактная абелева группа. Тогда любая окрестность нуля в X содержит компактную открытую подгруппу* ([85, (7.7)]).

1.12.2. *Пусть X – компактная абелева группа. Тогда любая окрестность нуля в X содержит такую замкнутую подгруппу G, что фактор-группа X/G топологически изоморфна $\mathbb{T}^m \times F$, где $m \geq 0$, а F – конечная абелева группа* ([85, (24.7)]).

1.13. Сопряженные гомоморфизмы. Пусть X_1 и X_2 – локально компактные абелевы группы с группами характеров Y_1 и Y_2 и $p : X_1 \mapsto X_2$ — непрерывный гомоморфизм. Для каждого $y_2 \in Y_2$ определим отображение $\widetilde{p} : Y_2 \mapsto Y_1$ формулой $(px_1, y_2) = (x_1, \widetilde{p}y_2)$ для любых $x_1 \in X_1,\ y_2 \in Y_2$. Отображение $\widetilde{p}$ — непрерывный гомоморфизм. Он называется *сопряженным* к p. Отметим следующие свойства сопряженных гомоморфизмов ([85, (24.41)]):

(a) гомоморфизм p удовлетворяет условию $p = \widetilde{\widetilde{p}}$;

(b) гомоморфизм $\widetilde{p}$ является мономорфизмом тогда и только тогда, когда подгруппа $p(X_1)$ плотна в X_2;

(c) гомоморфизм $\widetilde{p}$ является топологическим изоморфизмом групп Y_2 и Y_1 тогда и только тогда, когда p – топологический изоморфизм групп X_1 и X_2;

(d) гомоморфизм $\widetilde{f_n} : Y \mapsto Y$, сопряженный к $f_n : X \mapsto X$ имеет вид $\widetilde{f_n}y = ny$.

1.14. Группы топологических автоморфизмов некоторых локально компактных абелевых групп. Пусть X – локально компактная абелева группа, Y – ее группа характеров. Обозначим через $\mathrm{Aut}(X)$ группу всех топологических автоморфизмов группы X, т.е. отображений, одновременно являющихся алгебраическими автоморфизмами и гомеоморфизмами. Тождественный автоморфизм группы обозначим через I. В группе $\mathrm{Aut}(X)$ можно ввести топологию, относительно которой $\mathrm{Aut}(X)$ превращается в топологическую группу ([85, (26.3)]). При изучении характеризационных задач у нас нет необходимости рассматривать $\mathrm{Aut}(X)$, как топологическую группу. Поэтому, когда мы говорим, что группа $\mathrm{Aut}(X)$ изоморфна некоторой группе, мы имеем в виду алгебраический, а не топологический изоморфизм групп, хотя в рассматриваемых нами случаях имеет место и топологический изоморфизм. Пусть $\alpha \in \mathrm{Aut}(X)$. Отображение $\alpha \mapsto \widetilde{\alpha}$ является антиизоморфизмом групп $\mathrm{Aut}(X)$ и $\mathrm{Aut}(Y)$ ([85, (26.9)]). Подгруппу G группы X назовем *характеристической*, если всякий автоморфизм $\alpha \in \mathrm{Aut}(X)$ переводит G в себя. Подгруппы c_X, b_X, $X_{(n)}$ и $X^{(n)}$ являются характеристическими. Приведем примеры групп $\mathrm{Aut}(X)$ для некоторых локально компактных абелевых групп X.

(a) Каждый топологический автоморфизм α группы $\mathbb{R}$ имеет вид $\alpha t = ct$, где $c \in \mathbb{R},\ c \neq 0,\ \ t \in \mathbb{R}$. Поэтому группа $\mathrm{Aut}(\mathbb{R})$ изоморфна мультипликативной группе всех ненулевых вещественных чисел, т.е. группе $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}(2)$.

(b) В группе $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z})$ есть лишь два автоморфизма $\pm I$. Поэтому группа $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z})$ изоморфна $\mathbb{Z}(2)$.

(c) Пусть p – произвольное простое число. Группа $\mathrm{Aut}(\Delta_p)$ изоморфна группе обратимых элементов кольца Δ_p, т.е. мультипликативной группе $\Delta_p^0 = \{\mathbf{c} = (c_0, c_1, c_2, \dots) \in \Delta_p : c_0 \neq 0\}$. Действительно, каждый элемент $\mathbf{c} \in \Delta_p^0$ определяет автоморфизм $\alpha_{\mathbf{c}} \in \mathrm{Aut}(\Delta_p)$ по формуле $\alpha_{\mathbf{c}}\mathbf{x} = \mathbf{cx},\ \mathbf{x} \in \Delta_p$. Пусть $\alpha \in \mathrm{Aut}(\Delta_p)$ – произвольный автоморфизм. Обозначим через $\mathbf{u}$ – элемент $(1, 0, 0, \dots) \in \Delta_p$. Поскольку кратные элемента $\mathbf{u}$ плотны в Δ_p, то же справедливо и для $\alpha\mathbf{u}$. Поэтому $\alpha\mathbf{u} = \mathbf{c}$, где $\mathbf{c} \in \Delta_p^0$. Откуда следует, что $\alpha = \alpha_{\mathbf{c}}$ ([85, (26.18e)]).

(d) Для нахождения группы $\mathrm{Aut}(\Sigma_{\mathbf{a}})$, где $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \dots, a_n, \dots)$, заметим, что $\Sigma_{\mathbf{a}}{}^* \cong H_{\mathbf{a}}$, где $H_{\mathbf{a}} = \left\{\dfrac{m}{a_0 a_1 \cdots a_n} : n = 0, 1, \dots; m \in \mathbb{Z}\right\}$ – некоторая подгруппа в $\mathbb{Q}$ (см. 1.10(e)). Легко видеть, что либо у группы $H_{\mathbf{a}}$ есть лишь два автоморфизма $\pm I$, и тогда группа $\mathrm{Aut}(H_{\mathbf{a}})$ изоморфна $\mathbb{Z}(2)$, либо любой автоморфизм α группы $H_{\mathbf{a}}$ имеет вид $\alpha r = \frac{m}{n} r,\ r \in H_{\mathbf{a}}$, где m, n – некоторые взаимно простые целые числа. При этом $f_m, f_n \in \mathrm{Aut}(H_{\mathbf{a}})$, и по крайней мере один из автоморфизмов f_m

или f_n отличен от $\pm I$. Если число простых чисел p таких, что $f_p \in \mathrm{Aut}(H_{\mathbf{a}})$ конечно и равно l, то, как легко видеть, группа $\mathrm{Aut}(H_{\mathbf{a}})$ изоморфна $\mathbb{Z}^l \times \mathbb{Z}(2)$. Если же это число бесконечно, то группа $\mathrm{Aut}(H_{\mathbf{a}})$ изоморфна $\mathbb{Z}^{\aleph_0 *} \times \mathbb{Z}(2)$. Поскольку группы $\mathrm{Aut}(\Sigma_{\mathbf{a}})$ и $\mathrm{Aut}(H_{\mathbf{a}})$ изоморфны, мы нашли группу $\mathrm{Aut}(\Sigma_{\mathbf{a}})$. Кроме того, так как любой автоморфизм $\alpha \in \mathrm{Aut}(H_{\mathbf{a}})$ имеет вид $\alpha = f_m f_n^{-1}$, то в силу 1.13(d) любой автоморфизм $\widetilde{\alpha} \in \mathrm{Aut}(\Sigma_{\mathbf{a}})$ также имеет такой вид.

Отметим также, что если p_j – j-е простое число, то $f_{p_j} \in \mathrm{Aut}(\Sigma_{\mathbf{a}})$ тогда и только тогда, когда на j-м месте в $\mathbf{t}(H_{\mathbf{a}})$ стоит символ ∞.

(e) Группа $\mathrm{Aut}(\mathbb{T}^m)$ изоморфна группе всех целочисленных матриц $A = (a_{ij})_{i,j=1}^m$, для которых $\det A = \pm 1$. Если $\alpha \in \mathrm{Aut}(\mathbb{T}^m)$ и $A = (a_{ij})_{i,j=1}^m$ – соответствующая матрица, то

$$\alpha(z_1, \dots, z_m) = (z_1^{a_{11}} z_2^{a_{21}} \cdots z_m^{a_{m1}}, \dots, z_1^{a_{1m}} z_2^{a_{2m}} \cdots z_m^{a_{mm}}),$$

где $(z_1, \dots, z_m) \in \mathbb{T}^m$ ([85, (26.18h)]).

1.15. a-адический соленоид $\Sigma_{\mathbf{a}}$, как подгруппа в бесконечномерном торе $\mathbb{T}^{\aleph_0}$. Как известно, любая компактная абелева группа X, удовлетворяющая второй аксиоме счетности, топологически изоморфна некоторой компактной подгруппе G в бесконечномерном торе $\mathbb{T}^{\aleph_0}$. Мы опишем эту подгруппу G для $\mathbf{a}$-адического соленоида $X = \Sigma_{\mathbf{a}}$. Соответствующее рассуждение может быть проведено для произвольного $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \dots, a_n, \dots)$, но мы для простоты ограничимся случаем, когда $\mathbf{a} = (p, p, \dots, p, \dots)$, где p — простое число, т.е. случаем p-адического соленоида Σ_p. Пусть $\mathbf{u} = (1, 0, \dots, 0, \dots) \in \Delta_p$, $B = \{(n, n\mathbf{u})\}_{n=-\infty}^{\infty} \subset \mathbb{R} \times \Delta_p$ и $\Sigma_p = (\mathbb{R} \times \Delta_p)/B$ – соответствующий p-адический соленоид. Рассмотрим отображение $\tau : \mathbb{R} \times \Delta_p \mapsto \mathbb{T}^{\aleph_0}$, определяемое формулой

$$\tau(t,\ \mathbf{x}) = (z_1, z_2, \dots, z_n, \dots),\ t \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{x} = (x_0, x_1, \dots, x_n, \dots) \in \Delta_p,$$
$$z_n = \exp\left\{\frac{2\pi i}{p^{n-1}}\left(t - \sum_{k=0}^{n-1} x_k p^k\right)\right\}.$$

Нетрудно проверить, что τ – непрерывный гомоморфизм, $\mathrm{Ker}\ \tau = B$ и $G = \mathrm{Im}\ \tau = \{z = (z_1, z_2, \dots, z_n, \dots) \in \mathbb{T}^{\aleph_0} : z_k^p = z_{k-1},\ k \geq 2\}$ – замкнутая подгруппа в бесконечномерном торе $\mathbb{T}^{\aleph_0}$. Из ([85, (5.27)]) и ([85, (5.29)]) вытекает, что $G \cong \Sigma_p$.

Реализация p-адического соленоида Σ_p, в виде подгруппы

$$G = \{z = (z_1, z_2, \dots, z_n, \dots) \in \mathbb{T}^{\aleph_0} : z_k^p = z_{k-1},\ k \geq 2\}$$

позволяет легко проверить следующее:

(a) если $h = \dfrac{m}{p^n}$ – произвольный характер группы Σ_p, то $(z, h) = z_{n+1}^m,\ z = (z_1, z_2, \dots, z_n, \dots) \in G$;

(b) автоморфизм f_p действует на G следующим образом $f_p z = (z_1^p, z_2^p, \dots, z_n^p, \dots)$;

(c) $\tau(\mathbb{R}) = \{(e^{2\pi i t}, e^{2\pi i t/p}, e^{2\pi i t/p^2}, \dots),\ t \in \mathbb{R}\}$– плотная однопараметрическая подгруппа в G.

1.16. Замкнутые подгруппы группы $\mathbb{R}^m$. *Пусть G – замкнутая подгруппа в группе $\mathbb{R}^m$. Тогда G топологически изоморфна группе $\mathbb{R}^p \times \mathbb{Z}^q$, где $p + q \leq m$.*

1.17. Подгруппы $\mathbb{T}^{\mathfrak{n}}$ как прямые сомножители. Пусть X – локально компактная абелева группа, Y – ее группа характеров, $\mathfrak{n}$ - некоторое ненулевое кардинальное число. Тогда справедлива следующая теорема.

1.17.1. Если группа X содержит подгруппу G топологически изоморфную $\mathbb{T}^{\mathfrak{n}}$, то G является топологическим прямым сомножителем в X ([85, (25.31)]).

Принимая во внимание теорему 1.9.2 и топологический изоморфизм $(\mathbb{T}^{\mathfrak{n}})^* \cong \mathbb{Z}^{\mathfrak{n}*}$ эта теорема может быть переформулирована следующим образом.

1.17.2. Если группа Y содержит замкнутую подгруппу H такую, что фактор-группа Y/H топологически изоморфна группе $\mathbb{Z}^{\mathfrak{n}*}$, то группа Y топологически изоморфна группе $H \times \mathbb{Z}^{\mathfrak{n}*}$.

Мы переходим сейчас к результатам, относящимся к алгебраической теории абелевых групп. Поэтому в оставшейся части параграфа мы будем предполагать, что все рассматриваемые группы абелевы и дискретны.

1.18. Еще несколько определений. Группа X называется *ограниченной*, если порядки ее элементов ограничены в совокупности. Группа X называется *редуцированной*, если она не содержит ненулевых делимых подгрупп. Подгруппа G группы X называется *сервантной*, если для любого натурального n и $g \in G$ из разрешимости уравнения $nx = g$ в X следует его разрешимость в G. Периодическая группа X называется *p-примарной*, если порядок любого ее элемента есть степень простого числа p.

1.19. Теорема Прюфера. *Ограниченная группа является слабым прямым произведением циклических групп* ([79, теорема 17.2]).

1.20. Теоремы о разложении. Пусть X – абелева группа. Справедливы следующие теоремы.

1.20.1. *Пусть X периодическая группа. Для каждого простого числа p обозначим через X_p подгруппу в X, состоящую из элементов, порядки которых – степени числа p. Тогда,*

$$X = \mathop{\mathbf{P}^*}_{p \in \mathcal{P}} X_p$$

([79, теорема 8.4]). Подгруппы X_p называются *p-компонентами* группы X.

1.20.2. *Группа X разлагается в прямое произведение $X = D \times N$, где D – делимая группа, N – редуцированная группа. Подгруппа D здесь определена однозначно, а подгруппа N – однозначно с точностью до изоморфизма* ([79, теорема 21.3]).

1.20.3. *Пусть X – делимая группа. Тогда группа X изоморфна слабому прямому произведению*

$$\mathbb{Q}^{\mathfrak{n}_{\mathfrak{o}}*} \times \mathop{\mathbf{P}^*}_{p \in \mathcal{P}} \mathbb{Z}(p^\infty)^{\mathfrak{n}_p*},$$

где $\mathfrak{n}_{\mathfrak{o}}$ и $\mathfrak{n}_p$ – кардинальные числа ([85, §A.14]).

1.20.4. *Пусть группа X порождена элементами $x_1, \dots, x_n$. Тогда*

$$X = X_1 \times \cdots \times X_n,$$

где подгруппа X_j изоморфна либо $\mathbb{Z}$, либо $\mathbb{Z}(n_j)$ ([85, §A.27]).

1.21. Редуцированные p-примарные абелевы группы. Пусть A — редуцированная p-примарная абелева группа. Положим

$$A^1 = \bigcap_{n=1}^{\infty} A^{(p^n)}, \quad A^{\sigma+1} = (A^\sigma)^1, \quad A^\sigma = \bigcap_{\rho<\sigma} A^\rho, \quad \text{если } \sigma\text{— предельное порядковое число.}$$

Тогда определена вполне упорядоченная последовательность подгрупп

$$A = A^0 \supset A^1 \supset \cdots \supset A^\sigma \supset \cdots \supset A^\tau = \{0\},$$

где τ – наименьшее порядковое число, для которого $A^\tau = \{0\}$. Фактор-группа $A_\sigma = A^\sigma / A^{\sigma+1}$ называется σ-м *ульмовским фактором* группы A. Вполне упорядоченная последовательность

$$A_0, A_1, \ldots, A_\sigma, \ldots \ (\sigma < \tau)$$

называется последовательностью Ульма группы A, а τ - *ульмовским типом* группы A. Для порядкового числа σ определим подгруппу $A^{(p^\sigma)}$ так:

$$A^{(p^0)} = A, \quad A^{(p^{\sigma+1})} = \left(A^{(p^\sigma)}\right)^{(p)} \quad A^{(p^\sigma)} = \bigcap_{\rho<\sigma} A^{(p^\rho)}, \quad \text{если } \sigma\text{— предельное порядковое число.}$$

Рассмотрим фактор-группу $\left(A^{(p^\sigma)}\right)_{(p)} \Big/ \left(A^{(p^{\sigma+1})}\right)_{(p)}$. Ее ранг называется *$\sigma$-инвариантом Ульма–Капланского* группы A. Отметим, что $A^\sigma = A^{(p^{\omega\sigma})}$.

Следующие две теоремы являются основой теории счетных редуцированных p-примарных абелевых групп.

1. *Счетная редуцированная p-примарная абелева группа A ульмовского типа τ с последовательностью Ульма A_σ $(0 \le \sigma < \tau)$ существует тогда и только тогда, когда*

1) *τ – счетное порядковое число;*

2) *каждая группа A_σ – слабое прямое произведение циклических p-примарных групп, причем при $\sigma + 1 < \tau$ порядки элементов группы A_σ неограничены* ([80, теорема 76.2]).

2. *Счетные редуцированные p-примарные абелевы группы A и C изоморфны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковый ульмовский тип τ и для любого порядкового числа $\sigma < \tau$ их ульмовские факторы A_σ и C_σ изоморфны.*

Последнее имеет место в том и только в том случае, когда инварианты Ульма–Капланского групп A и C совпадают ([80, теорема 77.3]).

Отметим, что если A – счетная группа, то число циклических прямых сомножителей порядка p^n в разложении A_σ совпадает с $\big(\omega\sigma + n - 1)$-м инвариантом Ульма–Капланского группы A.

§2. Вероятностные распределения на локально компактных абелевых группах

В этом параграфе мы приведем необходимые нам сведения о вероятностных распределениях на группах. Мы будем использовать для ссылок монографии Гренандера ([84]) и Партасарати ([104]). Мы будем предполагать, специально не оговаривая этого, что все рассматриваемые в этом параграфе группы удовлетворяют второй аксиоме счетности, хотя часть утверждений справедлива и без этого ограничения.

2.1. Основные определения и обозначения. Пусть X – топологическая абелева группа. Под *мерой* на группе X будем понимать неотрицательную счетно-аддитивную функцию, определенную на σ-алгебре борелевских множеств $\mathfrak{B}(X)$ (наименьшей σ-алгебре, содержащей все открытые подмножества X).

Зарядом называется разность двух мер. Мера μ называется *распределением*, если $\mu(X) = 1$. Множество распределений на группе X обозначим через $\mathrm{M}^1(X)$. Через $\sigma(\mu)$ обозначим *носитель* распределения μ, т.е. наименьшее замкнутое подмножество $A \subset X$, для которого $\mu(A) = \mu(X)$. Каждой паре распределений $\mu, \nu \in \mathrm{M}^1(X)$ поставим в соответствие распределение $\mu * \nu \in \mathrm{M}^1(X)$, называемое *сверткой* распределений μ и ν и определяемое формулой

$$(\mu * \nu)(B) = \int\limits_X \mu(B - x) d\nu(x), \;\; B \in \mathfrak{B}(X).$$

Множество $\mathrm{M}^1(X)$ относительно операции свертки является полугруппой. Свертку n одинаковых распределений, каждое из которых равно μ, обозначим через μ^{*n}. Если $\mu = \mu_1 * \mu_2$, то распределения μ_j называются *делителями* распределения μ. Для $\mu \in \mathrm{M}^1(X)$ определим распределение $\bar{\mu} \in \mathrm{M}^1(X)$ по формуле $\bar{\mu}(B) = \mu(-B)$ для всех $B \in \mathfrak{B}(X)$.

Будем говорит, что *распределение μ сосредоточено на множестве* $A \in \mathfrak{B}(X)$, если $\mu(B) = 0$ для любого такого $B \in \mathfrak{B}(X)$, что $B \cap A = \emptyset$. Ясно, что множество A не обязано быть замкнутым, и вообще говоря, не единственно. Через E_x обозначим *вырожденное распределение*, сосредоточенное в точке $x \in X$. Множество вырожденных распределений на группе X обозначим через $D(X)$. *Сдвигом распределения* μ назовем свертку этого распределения с вырожденным распределением E_x.

Рассмотрим вероятностное пространство $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$, где Ω – некоторое множество, $\mathfrak{A}$ – σ-алгебра подмножеств в Ω и $P(A)$ – вероятностная мера, определенная на $\mathfrak{A}$, для которой $P(\Omega) = 1$. *Случайной величиной* на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ со значениями в группе X называется функция $\xi(\omega)$, определенная на Ω со значениями в X и обладающая тем свойством, что $\xi^{-1}(B) \in \mathfrak{A}$ для любого борелевского подмножества $B \subset X$. Случайная величина ξ определяет распределение μ_ξ на $\mathfrak{B}(X)$ по формуле

$$\mu_\xi(B) = P\{\omega \in \Omega : \quad \xi(\omega) \in B, \; B \in \mathfrak{B}(X)\}.$$

Отметим, что для любого $x \in X$ выполнено

$$\mu_{\xi + x} = \mu_\xi * E_x.$$

Случайные величины ξ и η со значениями в группе Xназываются *независимыми*, если для любых $A, B \in \mathfrak{B}(X)$ выполнено:

$$P\{\omega : \xi(\omega) \in A, \; \eta(\omega) \in B\} = P\{\omega : \xi(\omega) \in A\} P\{\omega : \eta(\omega) \in B\}.$$

Если случайные величины ξ и η независимы, то

$$\mu_{\xi + \eta} = \mu_\xi * \mu_\eta. \tag{2.1}$$

Следующее простое утверждение часто оказывается полезным.

2.2. Предложение. *Пусть X – топологическая группа, G — борелевская подгруппа в X, $\mu \in \mathrm{M}^1(G)$, $\mu = \mu_1 * \mu_2$, где $\mu_j \in \mathrm{M}^1(X)$. Тогда распределения μ_j можно так заменить их сдвигами μ'_j, чтобы $\mu = \mu'_1 * \mu'_2$ и $\mu'_j \in \mathrm{M}^1(G)$.*

Доказательство. Из равенства

$$1 = \mu(G) = \int\limits_X \mu_1(G - x) d\mu_2(x)$$

вытекает, что $\mu_2\{x \in X : \mu_1(G - x) = 1\} = 1$. Следовательно, $\mu_1(G - x_1) = 1$ для некоторого $x_1 \in X$, т.е. распределение μ_1 сосредоточено на множестве $G - x_1$, а значит $\mu'_1 = \mu_1 * E_{x_1} \in \mathrm{M}^1(G)$. Положим $\mu'_2 = \mu_2 * E_{-x_1}$. Тогда $\mu = \mu'_1 * \mu'_2$ и

$$1 = \mu(G) = \int\limits_X \mu'_2(G - x) d\mu'_1(x) = \int\limits_G \mu'_2(G - x) d\mu'_1(x).$$

Отсюда следует, что $\mu'_1\{x \in G : \mu'_2(G - x) = 1\} = 1$. Поэтому $\mu'_2(G - x_2) = 1$ для некоторого $x_2 \in G$. Поскольку G – группа, мы имеем $\mu'_2(G) = 1$, т.е. $\mu'_2 \in \mathrm{M}^1(G)$. $\square$

Нам понадобится также следующее общее утверждение.

2.3. Теорема Суслина. *Пусть X_1 – сепарабельное полное метрическое пространство, а X_2 – метрическое пространство, $p : X_1 \mapsto X_2$ – непрерывное взаимно однозначное отображение. Если B – борелевское множество в X_1, то $p(B)$ – борелевское множество в X_2* ([93, §39, IV]).

2.4. Предложение. *Пусть X_1 и X_2 – топологические абелевы группы, $p : X_1 \mapsto X_2$ — такой алгебраический изоморфизм, что образы и прообразы борелевских множеств при отображении p являются борелевскими множествами. Тогда изоморфизм p порождает изоморфизм полугрупп $p : \mathrm{M}^1(X_1) \mapsto \mathrm{M}^1(X_2)$ по формуле*

$$p(\mu)(B) = \mu(p^{-1}(B)), \tag{i}$$

где $\mu \in \mathrm{M}^1(X_1)$, $B \in \mathfrak{B}(X_2)$ (мы сохраним обозначение p для этого изоморфизма).

Доказательство этого утверждения состоит в ряде стандартных проверок. Следующее утверждение непосредственно вытекает из теоремы Суслина и предложения 2.4.

2.5. Следствие. *Пусть X_1 – сепарабельная полная топологическая абелева метрическая группа и X_2 – топологическая абелева метрическая группа, $p : X_1 \mapsto X_2$ – непрерывный мономорфизм. Тогда p порождает изоморфизм полугрупп $\mathrm{M}^1(X_1)$ и $\mathrm{M}^1(p(X_1))$ по формуле 2.4(i).*

2.6. Топология в $\mathrm{M}^1(X)$. Пусть X – топологическая группа. Введем в $\mathrm{M}^1(X)$ слабую топологию следующим образом: последовательность распределений $\mu_n \in \mathrm{M}^1(X)$ сходится к распределению $\mu \in \mathrm{M}^1(X)$ ($\mu_n \Rightarrow \mu$), если

$$\int\limits_X f(x) d\mu_n(x) \to \int\limits_X f(x) d\mu(x)$$

для любой ограниченной непрерывной функции $f(x)$ на X.

2.7. Характеристические функции. Пусть X – локально компактная абелева группа, Y – ее группа характеров. *Характеристической функцией (преобразованием Фурье) распределения* $\mu \in \mathrm{M}^1(X)$ называется функция $\widehat{\mu}(y)$ на группе Y, определяемая равенством

$$\widehat{\mu}(y) = \int\limits_X (x, y) d\mu(x).$$

Функция $f(y)$ на группе Y называется *характеристической*, если $f(y) = \widehat{\mu}(y)$ для некоторого распределения $\mu \in \mathrm{M}^1(X)$. Отметим, что если ξ — случайная величина со значениями в группе X и с распределением μ, то характеристической функцией распределения μ является математическое ожидание

$$\widehat{\mu}(y) = \mathbf{E}[(\xi, y)]. \tag{2.2}$$

Характеристической функцией случайной величины называется характеристическая функция ее распределения. Если ξ и η – случайные величины со значениями в X, то ξ и η независимы тогда и только тогда, когда для любых $u, v \in Y$ выполнено

$$\mathbf{E}[(\xi, u)(\eta, v)] = \mathbf{E}[(\xi, u)]\ \mathbf{E}[(\eta, v)].$$

Пусть $\mu \in \mathrm{M}^1(X)$. Тогда характеристическая функция $\widehat{\mu}(y)$ обладает следующими свойствами (см. напр. [84, §3.3]):

(a) $|\widehat{\mu}(y)| \le \widehat{\mu}(0) = 1$;

(b) функция $\widehat{\mu}(y)$ определяет распределение μ однозначно;

(c) $(\widehat{\mu * \nu})(y) = \widehat{\mu}(y)\widehat{\nu}(y),\ \mu, \nu \in \mathrm{M}^1(X)$;

(d) $\widehat{\bar{\mu}}(y) = \overline{\widehat{\mu}(y)} = \widehat{\mu}(-y)$;

(e) если H — замкнутая подгруппа группы Y и $|\widehat{\mu}(y)| = 1$ для всех $y \in H$, то существует такой элемент $x \in X$, что $\widehat{\mu}(y) = (x, y)$ для всех $y \in H$;

(f) функция $\widehat{\mu}(y)$ непрерывна;

(g) для любых $y_1, y_2 \in Y$ справедливо неравенство

$$|\widehat{\mu}(y_1) - \widehat{\mu}(y_2)|^2 \le 2(1 - \mathrm{Re}\ \widehat{\mu}(y_1 - y_2)).$$

(h) $\mu_n \Rightarrow \mu$ тогда и только тогда, когда $\widehat{\mu}_n(y) \to \widehat{\mu}(y)$ равномерно на каждом компактном подмножестве группы Y;

(i) пусть $\mu_n \in \mathrm{M}^1(X)$ и последовательность $\widehat{\mu}_n(y)$ сходится к пределу равномерно на каждом компактном подмножестве Y; тогда существует такое распределение $\mu \in \mathrm{M}^1(X)$, что

$$(i)\ \widehat{\mu}_n(y) \to \widehat{\mu}(y); \qquad (ii)\ \mu_n \Rightarrow \mu.$$

Отметим, что свойства (b)–(d) и (f) справедливы также для произвольных зарядов.

2.8. Положительно определенные функции. Пусть Y – произвольная абелева группа. Функция $f(y)$ на Y называется *положительно определенной*, если для любого натурального n и для любых $y_1, \ldots, y_n \in Y$, $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ выполнено неравенство

$$(i) \qquad \sum_{i,j=1}^{n} f(y_i - y_j) z_i \bar{z}_j \ge 0.$$

2.9. Теорема Бохнера. *Пусть X – локально компактная абелева группа, Y – ее группа характеров. Функция $f(y)$ на группе Y тогда и только тогда является характеристической функцией некоторого распределения $\mu \in \mathrm{M}^1(X)$, когда $f(y)$ непрерывна, положительно определена, и $f(0) = 1$* ([86, (33.3)]).

Теорема Бохнера позволяет не делать различия между характеристическими функциями и нормированными непрерывными положительно определенными функциями.

2.10. Предложение. *Пусть X_1 и X_2 – локально компактные абелевы группы с группами характеров Y_1 и Y_2, $p : X_1 \mapsto X_2$ — непрерывный гомоморфизм групп, порождающий отображение $p : \mathrm{M}^1(X_1) \mapsto \mathrm{M}^1(X_2)$ по формуле 2.4(i). Если $\mu \in \mathrm{M}^1(X_1)$, то характеристическая функция распределения $p(\mu)$ имеет вид $\widehat{p(\mu)}(y_2) = \widehat{\mu}(\widetilde{p}y_2)$, где $y_2 \in Y_2$, а $\widetilde{p} : Y_2 \mapsto Y_1$ — сопряженный к p гомоморфизм.*

2.11. Следствие. *Пусть X – локально компактная абелева группа, Y – ее группа характеров, G – замкнутая подгруппа в X, $H = A(Y, G)$, $p : X \mapsto X/G$ – естественный гомоморфизм, $\mu \in \mathrm{M}^1(X)$. Тогда ограничение характеристической функции $\widehat{\mu}(y)$ на H является характеристической функцией распределения $p(\mu) \in \mathrm{M}^1(X/G)$.*

Следующее утверждение часто оказывается полезным при построении положительно определенных функций.

2.12. Предложение. *Пусть Y — произвольная абелева группа. H — подгруппа в Y, $f_0(y)$ — положительно определенная функция на H, а $f(y)$ — такая функция на Y, что*

$$f(y) = \begin{cases} f_0(y), & \text{если} \quad y \in H, \\ 0, & \text{если} \quad y \notin H. \end{cases}$$

Тогда функция $f(y)$ положительно определена ([86, (32.43)]).

2.13. Предложение. *Пусть X – локально компактная абелева группа, Y – ее группа характеров и $\mu \in \mathrm{M}^1(X)$. Тогда множество $E = \{y \in Y : \ \widehat{\mu}(y) = 1\}$ — замкнутая подгруппа в Y, а характеристическая функция $\widehat{\mu}(y)$ E-инвариантна, т.е. постоянна на классах смежности группы Y по подгруппе E, и $\sigma(\mu) \subset A(X, E)$.*

Доказательство. Очевидно, что для любых $x \in X$, $y_1, y_2 \in Y$ справедливо неравенство

$$1 - \mathrm{Re}\ (x, y_1 + y_2) \le 2[(1 - \mathrm{Re}\ (x, y_1)) + (1 - \mathrm{Re}\ (x, y_1))].$$

Отсюда следует неравенство

$$1 - \mathrm{Re}\ \widehat{\mu}(y_1 + y_2) \le 2[(1 - \mathrm{Re}\ \widehat{\mu}(y_1)) + (1 - \mathrm{Re}\ \widehat{\mu}(y_1))]. \tag{2.3}$$

Из (2.3) следует, что E – подгруппа, очевидно, замкнутая. Из 2.7(g) следует, что если $y_1 - y_2 \in E$, то $\widehat{\mu}(y_1) = \widehat{\mu}(y_2)$, т.е. функция $\widehat{\mu}(y)$ E-инвариантна. Положим $H = Y/E$. По теореме 1.9.2 $H^* \cong A(X, E)$. Как отмечено выше, функцию $\widehat{\mu}(y)$ можно рассматривать, как функцию на H.

Обозначим эту функцию через $f([y])$. Функция $f([y])$ непрерывна, положительно определена и $f(0) = 1$. По теореме Бохнера $f([y]) = \widehat{\lambda}([y]),\ \lambda \in \mathrm{M}^1(A(X,E))$. Имеем,

$$\widehat{\mu}(y) = \int\limits_X (x,y) d\mu(x) = f([y]) = \int\limits_{A(X,E)} (x,[y]) d\lambda(x) = \int\limits_X (x,y) d\lambda(x) = \widehat{\lambda}(y).$$

Из 2.7(b) следует, что $\mu = \lambda$. $\square$

2.14. Мера Хаара и идемпотентные распределения. Пусть X – локально компактная абелева группа, Y – ее группа характеров. На группе X существует мера m_X, обладающая следующими свойствами:

(a) $m_X(B + x) = m_X(B)$ для любых $B \in \mathfrak{B}(X),\ x \in X$;

(b) $m_X(-B) = m_X(B)$ для любого $B \in \mathfrak{B}(X)$.

Мера m_X называется *мерой Хаара.* Если группа X компактна, то $m_X(X) < \infty$ и в этом случае будем считать, что $m_X \in \mathrm{M}^1(X)$ ([85, гл. 3, 4]).

Отметим, что характеристическая функция распределения Хаара m_K, где K — компактная подгруппа X, имеет вид

$$(i) \qquad \widehat{m}_K(y) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad y \in A(Y,K), \\ 0, & \text{если} \quad y \notin A(Y,K). \end{cases}$$

Распределение $\mu \in \mathrm{M}^1(X)$ называется *идемпотентным,* если $\mu^{*2} = \mu * E_x$ для некоторого $x \in X$. Множество $I(X)$ всех идемпотентных распределений совпадает с множеством сдвигов распределений Хаара m_K компактных подгрупп K группы X. Действительно, пусть $\mu^{*2} = \mu * E_x$. Положим $\lambda = \mu * E_{-x}$. Отсюда $\lambda^{*2} = \lambda$, а следовательно, по 2.7(c) $\widehat{\lambda}^2(y) = \widehat{\lambda}(y)$. Поэтому либо $\widehat{\lambda}(y) = 0$, либо $\widehat{\lambda}(y) = 1$. Рассмотрим $E = \{y \in Y : \widehat{\lambda}(y) = 1\}$. Положим $K = A(X,E)$. По теореме 1.9.1 $E = A(Y,K)$. Из 2.7(b) вытекает, что $\lambda = m_K$. Отметим также, что $D(X) \subset I(X)$.

2.15. Безгранично делимые распределения. Пусть X – локально компактная абелева группа, Y – ее группа характеров. Распределение μ на группе X называется *безгранично делимым,* если для каждого натурального n существуют элемент $x_n \in X$ и распределение $\mu_n \in \mathrm{M}^1(X)$ такие, что $\mu = \mu_n^{*n} * E_{x_n}$. Примерами безгранично делимых распределений могут служить идемпотентные распределения, в частности, вырожденные распределения, а также обобщенные распределения Пуассона $e(F)$, порожденные конечной мерой F

$$e(F) = \exp\{-F(X)\} \left(E_0 + F + F^{*2}/2! + \cdots + F^{*n}/n! + \cdots\right).$$

Отметим следующие свойства безгранично делимых распределений:

(a) для того чтобы характеристическая функция безгранично делимого распределения μ обращалась в нуль, необходимо и достаточно, чтобы μ имело невырожденный идемпотентный делитель ([104, теорема 4.2]);

(b) если μ – безгранично делимое распределение, то множество $N = \{y \in Y : \widehat{\mu}(y) \neq 0\}$ – открытая подгруппа в Y ([104, лемма 5.4]);

(c) множество безгранично делимых распределений образует замкнутую подполугруппу в $\mathrm{M}^1(X)$ ([104, теорема 4.1]).

2.16. Формула Леви–Хинчина. Пусть X – локально компактная абелева группа, Y – ее группа характеров. Для того чтобы сформулировать групповой аналог формулы Леви–Хинчина о представлении характеристической функции безгранично делимого распределения на группе X, нам понадобится следующее утверждение.

На произведении $X \times Y$ существует функция $g(x, y)$, обладающая следующими свойствами:

(a) $g(x, y)$ непрерывна по обеим переменным x и y;

(b) $\sup\limits_{x \in X} \sup\limits_{y \in K} |g(x, y)| < \infty$ для каждого компактного подмножества $K \subset Y$;

(c) $g(x, y_1 + y_2) = g(x, y_1) + g(x, y_2)$ для всех $x \in X,\ y_1, y_2 \in Y$ и $g(-x, y) = -g(x, y)$;

(d) если K – произвольный компакт в Y, то существует такая окрестность нуля U_K в X, что $(x, y) = \exp\{ig(x, y)\}$ для всех $x \in U_K$ и $y \in K$;

(e) если K – произвольный компакт в Y, то $g(x, y)$ стремится к нулю равномерно по $y \in K$ при x стремящимся к нулю группы X ([104, лемма 5.3]).

Теперь мы можем сформулировать теорему об искомом представлении.

Пусть X – локально компактная абелева группа. Если μ – безгранично делимое распределение на X без идемпотентных делителей, то характеристическая функция $\widehat{\mu}(y)$ имеет представление

$$(i) \qquad \widehat{\mu}(y) = (x_0, y) \exp\left\{ \int\limits_{X \setminus \{0\}} [(x, y) - 1 - ig(x, y)] dF(x) - \varphi(y) \right\},$$

где x_0 – фиксированный элемент X, $g(x, y)$ – функция на $X \times Y$, которая не зависит от μ и обладает указанными выше свойствами, F – σ-конечная мера, конечная на дополнении любой окрестности нуля группы X, для которой

$$\int\limits_{X \setminus \{0\}} [1 - \mathrm{Re}(x, y)] dF(x) < \infty$$

для любого $y \in Y$ и $\varphi(y)$ – неотрицательная непрерывная функция, удовлетворяющая уравнению

$$(ii) \qquad \varphi(u + v) + \varphi(u - v) = 2[\varphi(u) + \varphi(v)], \quad u, v \in Y.$$

Обратно, любая функция, представимая в виде (i) – характеристическая функция некоторого безгранично делимого распределения без идемпотентных делителей ([104, теорема 7.1]).

Представление (i) называется *формулой Леви–Хинчина.* Мера F называется мерой Леви безгранично делимого распределения μ. Назовем для краткости представление (i) – представлением (x_0, F, φ). Если характеристическая функция одного и того же безгранично делимого распределения μ имеет два представления (x_1, F_1, φ_1) и (x_2, F_2, φ_2), то $\varphi_1(y) = \varphi_2(y),\ y \in Y$, а $F_1 = F_2$ на дополнении к подгруппе b_X. Представление (i) единственно тогда и только тогда, когда либо $b_X = \{0\}$, либо $b_X = X_{(2)}$ ([104, глава IV, §8]).

Следующее утверждение в некоторых случаях позволяет сводить изучение произвольного безгранично делимого распределения к изучению безгранично делимого распределения без идемпотентных делителей.

2.17. Теорема. *Пусть X – локально компактная абелева группа, μ – безгранично делимое распределение на X. Тогда $\mu = m_K * \nu$, где K – некоторая компактная подгруппа в X, а ν – безгранично делимое распределение без идемпотентных делителей* ([104, теорема 7.2]).

2.18. Теорема Крамера. *Пусть γ – гауссовское распределение в пространстве $\mathbb{R}^m$ и $\gamma = \gamma_1 * \gamma_2$, где $\gamma_j \in \mathrm{M}^1(\mathbb{R}^m)$. Тогда γ_j – также гауссовские распределения* ([12, теорема 6.3.2]).

2.19. Теорема. *Пусть $F(t),\ t \in \mathbb{R}^m$, – характеристическая функция, $\Phi(t),\ t \in \mathbb{R}^m$, – ограничение на $\mathbb{R}^m$ целой функции $\Phi(z),\ z \in \mathbb{C}^m$. Предположим, что*

$$(i) \qquad F(t) = \Phi(t), \quad t \in U,$$

где U – некоторая окрестность нуля в $\mathbb{R}^m$. Тогда $F(t)$ может быть продолжена в $\mathbb{C}^m$, как целая функция и (i) справедливо для всех $t \in \mathbb{R}^m$ ([12, гл. VI, §1]).

2.20. Предложение. *Пусть G – локально компактная абелева группа, $X = \mathbb{R}^m \times G$. Обозначим элементы группы $X^* \cong \mathbb{R}^m \times H$, где $H = G^*$, через $(s, h),\ s \in \mathbb{R}^m,\ h \in H$. Пусть $\mu \in \mathrm{M}^1(X)$ и предположим, что $\widehat{\mu}(s, 0)$ – целая функция относительно s. Тогда $\widehat{\mu}(s, h)$ – целая функция относительно s при любом фиксированном $h \in H$, и представление*

$$\widehat{\mu}(s, h) = \int\limits_X e^{i\langle t,s\rangle}(g, h) d\mu(x)$$

справедливо при любых $s \in \mathbb{C},\ h \in H$.

2.21. Условное распределение. Пусть X – топологическая группа. Пусть ξ и η – случайные величины со значениями в группе X. Условным распределением случайной величины η при фиксированной ξ называется такая функция $P_{\eta|\xi}(x, B)$, заданная на $X \times \mathfrak{B}(X)$, что

(i) при любом фиксированном $x \in X$ функция $P_{\eta|\xi}(x, B)$ – распределение на X;

(ii) при любом фиксированном $B \in \mathfrak{B}(X)$ и любом $C \in \mathfrak{B}(X)$ выполнено

$$P\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) \in C,\ \eta(\omega) \in B\} = \int\limits_C P_{\eta|\xi}(x, B) d\mu_\xi(x).$$

Из определения условного распределения случайной величины η при фиксированной ξ следует, что это распределение симметрично, т.е.

$$P_{\eta|\xi}(x, B) = P_{\eta|\xi}(x, -B)$$

тогда и только тогда, когда

$$P\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) \in C,\ \eta(\omega) \in B\} = P\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) \in C,\ \eta(\omega) \in -B\}$$

для любых $B, C \in \mathfrak{B}(X)$.

Глава II

Гауссовские распределения на локально компактных абелевых группах

Эта глава посвящена гауссовским распределениям на локально компактных абелевых группах X, удовлетворяющих второй аксиоме счетности. Мы определяем гауссовское распределение на группе X и изучаем его свойства. Мы полностью описываем те группы X, на которые могут быть перенесены классические теоремы Крамера и Марцинкевича. Мы также полностью описываем группы X, обладающие свойством, что на них любое распределение, которое каждый характер группы X переводит в гауссовское распределение на группе $\mathbb{T}$, является гауссовским.

§3. Свойства гауссовских распределений

Пусть X – локально компактная абелева группа, удовлетворяющая второй аксиоме счетности, Y – ее группа характеров. В этом параграфе, следуя Партасарати, мы определяем гауссовское распределение на группе X и изучаем его свойства.

3.1. Определение гауссовского распределения. Распределение γ на группе X называется *гауссовским*, если его характеристическая функция представима в виде

$$(i) \qquad \widehat{\gamma}(y) = (x, y)\exp\{-\varphi(y)\}, \quad y \in Y,$$

где $x \in X$, а $\varphi(y)$ — непрерывная неотрицательная функция на Y, удовлетворяющая уравнению 2.16(ii) (см. [104, гл. 4, §6]).

Множество гауссовских распределений на группе X обозначим через $\Gamma(X)$. Гауссовское распределение называется *симметричным*, если в (i) $x = 0$. Множество симметричных гауссовских распределений на группе X обозначим через $\Gamma^s(X)$.

3.2. Для групп $X = \mathbb{R}^k$ и $X = \mathbb{T}^k$ приведенное в 3.1 определение гауссовского распределения совпадает с классическим. Действительно, если $X = \mathbb{R}^k$, то $Y \cong \mathbb{R}^k$. Элементы группы Y будем обозначать через $y \in \mathbb{R}^k$. Очевидно, что непрерывная неотрицательная функция $\varphi(y)$ на Y, удовлетворяющая уравнению 2.16(ii), имеет вид

$$\varphi(y) = \langle Ay, y\rangle, \quad y \in \mathbb{R}^k,$$

где A – симметричная неотрицательно определенная матрица. Отсюда следует, что определение 3.1 гауссовского распределения для группы $X = \mathbb{R}^k$ совпадает с классическим. В частности, если $\mu \in \Gamma(\mathbb{R})$, то характеристическая функция $\widehat{\mu}(s)$ может быть записана в виде

$$\widehat{\mu}(s) = \exp\left\{ias - \frac{\sigma^2 s^2}{2}\right\}, \ a \in \mathbb{R}, \ \sigma \geq 0, \ s \in \mathbb{R}. \tag{3.1}$$

Если в (3.1) $\sigma > 0$, то μ имеет плотность $\rho(t)$ относительно меры Лебега

$$\rho(t) = \frac{d\mu}{dt} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Пусть $X = \mathbb{T}^k$, тогда $Y \cong \mathbb{Z}^k$. Элементы группы Y будем обозначать через $n \in \mathbb{Z}^k$. В соответствии с классическим определением гауссовского распределения, $\gamma \in \Gamma(\mathbb{T}^k)$ если γ является образом некоторого гауссовского распределения $\mu \in \Gamma(\mathbb{R}^k)$ при естественном гомоморфизме $p : \mathbb{R}^k \mapsto \mathbb{T}^k \cong \mathbb{R}^k/(2\pi\mathbb{Z})^k$. Если характеристическая функция распределения μ имеет вид

$$\widehat{\mu}(s) = \exp\{i\langle t, s\rangle - \langle As, s\rangle\}, \quad s \in \mathbb{R}^k,$$

где $t \in \mathbb{R}^k$, а A – симметричная неотрицательно определенная матрица, то по предложению 2.10

$$\widehat{\gamma}(n) = \widehat{p(\mu)}(n) = \exp\{i\langle t, n\rangle - \langle An, n\rangle\},\ n \in \mathbb{Z}^k.$$

Таким образом, γ является гауссовским распределением согласно определению 3.1. Легко видеть, что обратное утверждение также верно (ср. с предложением 3.8). Отметим также, что если $\mu \in \Gamma(\mathbb{R})$ – невырожденное распределение, то γ также имеет плотность $\varrho(e^{it})$ относительно распределения Хаара $m_{\mathbb{T}}$

$$\varrho(e^{it}) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sigma} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(t - a + 2\pi n)^2\right\}, \tag{3.2}$$

а характеристическая функция $\widehat{\gamma}(n)$ имеет вид

$$\widehat{\gamma}(n) = \exp\left\{ian - \frac{\sigma^2 n^2}{2}\right\},\ n \in \mathbb{Z}.$$

3.3. Замечание. Непрерывную функцию $\varphi(y)$, удовлетворяющую уравнению 2.16(ii), называют также квадратичной формой на группе Y. По функции $\varphi(y)$, удовлетворяющей уравнению 2.16(ii), можно построить соответствующую билинейную форму по формуле

$$\Phi(u, v) = \frac{1}{2}[\varphi(u + v) - \varphi(u) - \varphi(v)], \quad u, v \in Y. \tag{3.3}$$

Очевидно, что функция $\Phi(u, v)$ удовлетворяет условиям

$$(i) \quad \Phi(u, v) = \Phi(v, u);$$

$$(ii) \quad \Phi(u + v, w) = \Phi(u, w) + \Phi(v, w).$$

Легко видеть, что если функция $\Phi(u, v)$ удовлетворяет условиям (i) и (ii), то функция

$$\varphi(y) = \Phi(y, y) \tag{3.4}$$

удовлетворяет уравнению 2.16(ii) (ср. с теоремой 5.5).

3.4. Замечание. Заметим, что если $f(y) = \exp\{-\varphi(y)\}$, где $\varphi(y)$ – непрерывная неотрицательная функция на группе Y, удовлетворяющая уравнению 2.16(ii), то $f(y)$ – характеристическая функция, а значит – характеристическая функция некоторого гауссовского распределения на X. Действительно, пусть $y_1, \dots, y_k$ – фиксированные элементы группы Y. Рассмотрим функцию $\varphi(n_1y_1 + \dots + n_ky_k)$, как функцию от целочисленных переменных n_j. Пусть функция $\psi(y_1, y_2)$ построена по функции $\varphi(y)$ по формуле (3.3). Из (3.4) находим

$$\varphi(n_1y_1 + \dots + n_ky_k) = \langle An, n\rangle, \quad n = (n_1, \dots, n_k) \in \mathbb{Z}^k,\ A = (\alpha_{ij})_{i,j=1}^k,\ \alpha_{ij} = \psi(y_i, y_j).$$

Так как $\varphi(y) \geq 0$, то матрица A неотрицательно определена. Отсюда следует, что функция $\exp\{-\varphi(n_1y_1 + \dots + n_ky_k)\}$, рассматриваемая как функция от целочисленных переменных n_j, является положительно определенной на группе $\mathbb{Z}^k$. Это влечет положительную определенность функции $f(y)$, а значит, по теореме Бохнера $f(y)$ – характеристическая функция.

3.5. Замечание. Пусть $\varphi(y)$ – непрерывная функция на группе Y, удовлетворяющая уравнению 2.16(ii). Тогда $\varphi(y+y_0)=\varphi(y)$ для любых $y\in Y$, $y_0\in b_Y$. В частности, $\varphi(y)=0$ при $y\in b_Y$. Действительно, пусть H – компактная подгруппа группы Y. Рассмотрим равенство 2.16(ii), считая, что $u,v\in H$ и проинтегрируем его по мере $dm_H(u)$. Учитывая 2.14 (a), получаем $\varphi(v)=0$, $v\in H$. Следовательно, $\varphi(v)=0$, $v\in b_Y$. Зафиксируем $y\in Y$, $y_0\in b_Y$. Обозначим через M наименьшую замкнутую подгруппу в Y, содержащую элемент y_0. Поскольку $y_0\in b_Y$, то M – компактная группа. Рассмотрим на группе $\mathbb{Z}$ функцию $P(l)=\varphi(y+ly_0)$. Легко видеть, что функция $P(l)$ удовлетворяет уравнению

$$P(m+n)+P(m-n)=2P(m),\quad m,n\in\mathbb{Z}.$$

Отсюда следует, что $P(l)=a_0+la_1$, $l\in\mathbb{Z}$, где a_0,a_1 – некоторые константы, зависящие, вообще говоря, от y и y_0. Функция $\varphi(y)$ непрерывна на компакте $y+M$, а значит, ограничена на нем. Поэтому $a_1=0$, а следовательно $\varphi(y+y_0)=\varphi(y)$.

Изучим вопрос о носителе гауссовского распределения. Очевидно, что не ограничивая общности, можно считать гауссовское распределение симметричным.

3.6. Предложение. *Пусть γ – симметричное гауссовское распределение на группе X. Тогда $\sigma(\gamma)=G$, где G – связная подгруппа группы X.*

Доказательство. Рассмотрим множество $E=\{y\in Y:\widehat{\gamma}(y)=1\}$ и положим $G=A(X,E)$. Как следует из предложения 2.13, $\sigma(\gamma)\subset G$. Поэтому γ можно рассматривать, как гауссовское распределение на G. Обозначим $H=G^*$. Характеристическая функция $\widehat{\gamma}(h)$, $h\in H$ обладает тем свойством, что

$$\{h\in H:\widehat{\gamma}(h)=1\}=\{0\}.\tag{3.5}$$

Из (3.5) и замечания 3.5 следует, что $b_H=\{0\}$, а тогда по теореме 1.9.3 $c_G=G$, т.е. группа G связна.

Предложение 3.6 будет доказано, если мы проверим, что $\gamma(U)>0$ для любого открытого подмножества $U\subset G$. Допустим противное. Тогда $\gamma(U)=0$ для некоторого открытого множества $U\subset G$. Выберем такое открытое подмножество U_0 в U и такую окрестность нуля V в G, что $U_0+V\subset U$. По теореме 1.11.2 $G=L\times K$, где $L\cong\mathbb{R}^m$, $m\geq 0$, а K – связная компактная группа. Воспользуемся теоремой 1.12.2 и выберем в $K\cap V$ такую замкнутую подгруппу S, чтобы $K/S\cong\mathbb{T}^k\times F$, где $k\geq 0$, а F – конечная группа. Поскольку группа K связна, то $F=\{0\}$. Имеем в результате $G/S\cong\mathbb{R}^m\times\mathbb{T}^k$. Обозначим этот топологический изоморфизм через τ и положим $p=\tau\alpha$, где α – естественный гомоморфизм $\alpha:G\mapsto G/S$. Очевидно, что $p(\gamma)\in\Gamma(\mathbb{R}^m\times\mathbb{T}^k)$, причем

$$\{y\in\mathbb{R}^m\times\mathbb{Z}^k:\widehat{p(\gamma)}(y)=1\}=\{0\}.\tag{3.6}$$

Из (3.6) следует, что $\sigma(p(\gamma))=\mathbb{R}^m\times\mathbb{T}^k$. Кроме того,

$$p(\gamma)(p(U_0))=\gamma\{p^{-1}(p(U_0))\}=\gamma\{U_0+S\}\leq\gamma\{U_0+V\}\leq\gamma\{U\}=0,$$

что невозможно, ибо множество $p(U_0)$ открыто. Полученное противоречие доказывает, что $\gamma(U)>0$. $\square$

Из доказательства предложения 3.6 непосредственно вытекает следующее утверждение.

3.7. Следствие. *Пусть γ – симметричное гауссовское распределение на группе X. Предположим, что $\{y \in Y : \widehat{\gamma}(y) = 1\} = \{0\}$. Тогда группа X связна и $\sigma(\gamma) = X$.*

Итак, изучая гауссовские распределения, мы можем ограничиться лишь связными группами. Мы докажем сейчас, что произвольное симметричное гауссовское распределение на связной группе X может быть представлено, как непрерывный гомоморфный образ гауссовского распределения в линейном пространстве. Это пространство либо конечномерно, либо бесконечномерно, в зависимости от того, конечна или бесконечна размерность группы X. Рассмотрим вначале случай, когда группа X имеет конечную размерность.

3.8. Предложение. *Пусть X – связная группа конечной размерности l. Тогда существует непрерывный гомоморфизм $p : \mathbb{R}^l \mapsto X$, обладающий следующим свойством: для любого симметричного гауссовского распределения γ на группе X существует симметричное гауссовское распределение μ на группе $\mathbb{R}^l$ такое, что $\gamma = p(\mu)$.*

Доказательство. По теореме 1.11.2 группа X топологически изоморфна группе $\mathbb{R}^m \times K$, где $m \geq 0$, а K – связная компактная группа. Предположим вначале, что $X = K$. Обозначим $D = K^*$. Из теорем 1.6.1 и 1.6.2 вытекает, что D – дискретная группа без кручения. По теореме 1.6.3 $r(D) = l$. Выберем в D максимальную независимую систему элементов $d_1, \dots, d_l$. Тогда для каждого $d \in D$ существуют целые числа $k, k_1, \dots, k_l$ такие, что

$$kd = k_1 d_1 + \dots + k_l d_l. \tag{3.7}$$

Из независимости множества $\{d_j\}_{j=1}^l$ следует, что набор рациональных чисел $\{k_j/k\}_{j=1}^l$ однозначно определяется по d. Поскольку D – группа без кручения, то отображение

$$\pi d = (k_1/k, \dots, k_l/k) \tag{3.8}$$

является мономорфизмом $\pi : D \mapsto \mathbb{R}^l$.

Пусть функция $\varphi(d)$ на группе D удовлетворяет уравнению 2.16(ii). Учитывая замечание 3.3, из (3.7) и (3.3) получаем

$$k^2\varphi(d) = k^2\psi(d, d) = \psi(kd, kd) = \psi\left(k_1 d_1 + \dots + k_l d_l, k_1 d_1 + \dots + k_l d_l\right) = \sum_{i,j=1}^{l} \alpha_{ij} k_i k_j,$$

где $\alpha_{ij} = \psi(d_i, d_j),\ 1 \leq i, j \leq l$. Следовательно,

$$\varphi(d) = \sum_{i,j=1}^{l} \alpha_{ij}(k_i/k)(k_j/k) = \langle A\pi d, \pi d\rangle, \tag{3.9}$$

где $A = (\alpha_{ij})_{i,j=1}^l$. Если $\varphi(d) \geq 0$ при $d \in D$, то симметричная матрица A является неотрицательно определенной, т.е. квадратичная форма $\langle As, s\rangle$ неотрицательна для любого $s \in \mathbb{R}^l$.

Пусть $\gamma \in \Gamma^s(K)$ и характеристической функции $\widehat{\gamma}(d)$ отвечает функция $\varphi(d)$ в 3.1(i). Из (3.9) вытекает, что

$$\widehat{\gamma}(d) = \exp\{-\langle A\pi d, \pi d\rangle\}, \quad d \in D. \tag{3.10}$$

Пусть μ – гауссовское распределение на $\mathbb{R}^l$ с характеристической функцией

$$\widehat{\mu}(s) = \exp\{-\langle As, s\rangle\}, \quad s \in \mathbb{R}^l. \tag{3.11}$$

Обозначим через p сопряженный к π гомоморфизм $p : \mathbb{R}^l \mapsto K$. Поскольку $\pi = \widetilde{p}$, то из предложения 2.10 и (3.11) вытекает, что

$$\widehat{p(\mu)}(d) = \exp\{-\langle A\pi d, \pi d\rangle\}, \quad d \in D. \tag{3.12}$$

Из (3.10), (3.12) и 2.7 (b) заключаем, что $\gamma = p(\mu)$.

Предположим теперь, что группа X некомпактна. Тогда $X \cong \mathbb{R}^m \times K$, где $m \geq 1$, а K – связная компактная группа конечной размерности n, $m + n = l$. Обозначим $D = K^*$. Тогда по теореме 1.7.1 $Y \cong \mathbb{R}^m \times D$. По теоремам 1.6.1 и 1.6.2 D – дискретная группа без кручения. По теореме 1.6.3 $r(D) = n$. Чтобы не вводить дополнительных обозначений, будем считать, что $Y = \mathbb{R}^m \times D$. Обозначим через H подгруппу в Y вида $H = \mathbb{Q}^m \times D$. Очевидно, что подгруппа H плотна в Y. Рассмотрим в $\mathbb{Q}^m$ максимальную независимую систему элементов $e_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, e_m = (0, \dots, 0, 1)$. Пусть $d_1, \dots, d_n$ – максимальная независимая системy элементов в D. Тогда $e_1, \dots, e_m, d_1, \dots, d_n$ – максимальная независимая система элементов в H. Элементы группы Y обозначим через $y = (s, d),\ s \in \mathbb{R}^m,\ d \in D$. Пусть $h \in H$. Тогда существуют целые числа $k, p_1, \dots, p_m, k_1, \dots, k_n$ такие, что

$$kh = p_1 e_1 + \dots + p_m e_m + k_1 d_1 + \dots + k_n d_n.$$

Отображение

$$\pi h = (p_1/k, \dots, p_m/k, k_1/k, \dots, k_n/k)$$

является мономорфизмом $\pi : H \mapsto \mathbb{R}^l$. Кроме того, легко видеть, что ограничение мономорфизма π на $\mathbb{Q}^m$ является тождественным отображением. Поэтому мономорфизм π можно продолжить по непрерывности с H на Y по формуле

$$\pi(s, d) = (s, k_1/k, \dots, k_n/k), \quad (s, d) \in Y \tag{3.13}$$

(мы сохраняем для продолженного мономорфизма обозначение π).

Рассуждения, аналогичные проведенным в случае, когда $X = K$, показывают, что ограничение функции $\varphi(y)$ на H имеет вид

$$\varphi(h) = \langle A\pi h, \pi h\rangle, \quad h \in H, \tag{3.14}$$

где $A = (\alpha_{ij})_{i,j=1}^l$ – симметричная неотрицательно определенная матрица, $\alpha_{ij} = \psi(e_i, e_j),\ 1 \leq i, j \leq m,\ \alpha_{i,j+m} = \psi(e_i, d_j),\ 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n,\ \alpha_{i+m,j+m} = \psi(d_i, d_j),\ 1 \leq i, j \leq n$. Так как функция $\varphi(y)$ непрерывна на Y, то равенство (3.14) будет выполнено при любом $y \in Y$. При этом π в правой части (3.14) определяется по формуле (3.13). Окончание доказательства проводится так же, как в случае, когда $X = K$. $\Box$

3.9. Следствие *Пусть X – связная группа конечной размерности l. Тогда любое симметричное гауссовское распределение γ на X является непрерывным мономорфным образом симметричного гауссовского распределения на группе* $\mathbb{R}^m \times \mathbb{T}^n$ при некоторых $m \geq 0, n \geq 0$

Доказательство. Пусть $\mu \in \Gamma^s(\mathbb{R}^l)$ и $p : \mathbb{R}^l \mapsto X$ такие, как в предложении 3.8. Заметим, что $L = \sigma(\mu)$ – подпространство в $\mathbb{R}^l$. Обозначим через q ограничение p на L. Положим $E = \mathrm{Ker}\ q$. Тогда по теореме 1.16 $E \cong \mathbb{R}^a \times \mathbb{Z}^n$, где $a \geq 0,\ n \geq 0$. Обозначим через τ естественный гомоморфизм $\tau : L \mapsto L/E$. Очевидно, что $L/E \cong \mathbb{R}^m \times \mathbb{T}^n$, где $m \geq 0$. Чтобы не вводить дополнительных обозначений, будем считать, что $L/E = \mathbb{R}^m \times \mathbb{T}^n$. Тогда $\lambda = \tau(\mu) \in \Gamma(\mathbb{R}^m \times \mathbb{T}^n)$. Положим $\varsigma = q\tau^{-1}$. Очевидно, что

$$\varsigma : \mathbb{R}^m \times \mathbb{T}^n \mapsto X$$

– непрерывный мономорфизм и $\gamma = \varsigma(\lambda)$. $\square$

Перейдем теперь к рассмотрению случая, когда связная группа X имеет бесконечную размерность. Отметим, что поскольку мы предполагаем, что группа X удовлетворяет второй аксиоме счетности, то по теоремам 1.6.3 и 1.11.2, если размерность группы X бесконечна, то $\dim X = \aleph_0$. Для дальнейшего нам понадобится понятие гауссовского распределения в пространстве $\mathbb{R}^{\aleph_0}$.

3.10. Гауссовское распределение в пространстве $\mathbb{R}^{\aleph_0}$. Обозначим через $\mathbb{R}^{\aleph_0}$ пространство всех последовательностей вещественных чисел в топологии прямого произведения. Сходимость элементов

$$t^{(k)} = (t_1^{(k)}, \dots, t_n^{(k)}, \dots) \to t = (t_1, \dots, t_n, \dots)$$

в этой топологии означает покоординатную сходимость. Пространство $\mathbb{R}^{\aleph_0}$ можно рассматривать, как проективный предел фильтрующегося семейства пространств $\mathbb{R}^n$. Отметим, что топологическая группа $\mathbb{R}^{\aleph_0}$ не локально компактна. В группе $\mathbb{R}^{\aleph_0}$ можно ввести расстояние по формуле

$$\rho(u, v) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|u_n - v_n|}{1 + |u_n - v_n|}, \quad u = (u_1, \dots, u_n, \dots),\ v = (v_1, \dots, v_n, \dots) \in \mathbb{R}^{\aleph_0}.$$

Относительно введенного расстояния $\mathbb{R}^{\aleph_0}$ является полной сепарабельной группой.

Обозначим через $\mathbb{R}^{\aleph_0 *}$ – пространство всех финитных последовательностей вещественных чисел с топологией строгого индуктивного предела пространств $\mathbb{R}^n$. Сходимость элементов

$$s^{(k)} = (s_1^{(k)}, \dots, s_n^{(k)}, 0, \dots) \to s = (s_1, \dots, s_n, 0, \dots)$$

в этой топологии означает, что все $s^{(k)}$ лежать в одном пространстве $\mathbb{R}^n$ и там сходятся. Топологическая группа $\mathbb{R}^{\aleph_0 *}$ также не локально компактна. Пусть $t = (t_1, \dots, t_n, \dots) \in \mathbb{R}^{\aleph_0}$ и $s = (s_1, \dots, s_n, 0, \dots) \in \mathbb{R}^{\aleph_0 *}$. Обозначим через $\langle t, s \rangle = \sum\limits_{j=1}^{\infty} t_j s_j$. При фиксированном $s \in \mathbb{R}^{\aleph_0 *}$ функция

$$(t, s) = \exp\{i\langle t, s \rangle\} \tag{3.15}$$

на группе $\mathbb{R}^{\aleph_0}$ является непрерывным гомоморфизмом группы $\mathbb{R}^{\aleph_0}$ в группу $\mathbb{T}$ и является поэтому характером группы $\mathbb{R}^{\aleph_0}$. Легко видеть также, что любой характер группы $\mathbb{R}^{\aleph_0}$ имеет вид (3.15). Обозначим через $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^{\aleph_0})$ – σ-алгебру борелевских множеств в $\mathbb{R}^{\aleph_0}$, т.е. минимальную σ-алгебру, порожденную множествами вида $U_J^n \times \mathbb{R}^{\aleph_0 \setminus J}$, где U_J^n – открытое множество в $\mathbb{R}_J^n$, $J = (j_1, \dots, j_n)$, $\mathbb{R}_J^n = \{t \in \mathbb{R}^{\aleph_0} : t_j = 0 \text{ при } j \notin J\}$ и $\mathbb{R}^{\aleph_0 \setminus J} = \{t \in \mathbb{R}^{\aleph_0} : t_j = 0 \text{ при } j \in J\}$. Из определения топологии в $\mathbb{R}^{\aleph_0}$ и σ-алгебры $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^{\aleph_0})$ вытекает, что каждая непрерывная функция на $\mathbb{R}^{\aleph_0}$ является $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^{\aleph_0})$-измеримой. Пусть μ – распределение на $\mathbb{R}^{\aleph_0}$. Определим характеристическую функцию распределения μ по формуле

$$\widehat{\mu}(s) = \int\limits_{\mathbb{R}^{\aleph_0}} (t, s) d\mu(t), \quad s \in \mathbb{R}^{\aleph_0 *}.$$

Легко видеть, что характеристическая функция $\widehat{\mu}(s)$ обладает следующими свойствами:

(a) $\widehat{\mu}(0) = 1$;

(b) функция $\widehat{\mu}(s)$ непрерывна;

(c) функция $\widehat{\mu}(s)$ положительно определена на каждом подпространстве $\mathbb{R}^n_J \subset \mathbb{R}^{\aleph_0 *}$.

Из теоремы Колмогорова и теоремы Бохнера для группы $\mathbb{R}^n$ следует, что каждой функции $g(s)$ на группе $\mathbb{R}^{\aleph_0 *}$, обладающей свойствами $(a) - (c)$, соответствует такое единственное распределение μ_g на группе $\mathbb{R}^{\aleph_0}$, что $\widehat{\mu}_g(s) = g(s)$.

Пусть $A = (\alpha_{ij})_{i,j=1}^{\infty}$ – симметричная неотрицательно определенная матрица, т.е. квадратичная форма $\langle As, s\rangle = \sum\limits_{i,j=1}^{\infty} \alpha_{ij} s_i s_j$ неотрицательна для любого $s \in \mathbb{R}^{\aleph_0 *}$.

Теперь мы можем определить гауссовское распределение на группе $\mathbb{R}^{\aleph_0}$.

Распределение μ на группе $\mathbb{R}^{\aleph_0}$ называется *гауссовским*, если его характеристическая функция представима в виде

$$\widehat{\mu}(s) = (t, s) \exp\{-\langle As, s\rangle\}, \quad s \in \mathbb{R}^{\aleph_0 *}, \tag{3.16}$$

где $t \in \mathbb{R}^{\aleph_0}$, а $A = (\alpha_{ij})_{i,j=1}^{\infty}$ – симметричная неотрицательно определенная матрица.

Множество гауссовских распределений на группе $\mathbb{R}^{\aleph_0}$ обозначим через $\Gamma(\mathbb{R}^{\aleph_0})$. Гауссовское распределение называется *симметричным*, если в (3.16) $t = 0$. Множество симметричных гауссовских распределений на группе $\mathbb{R}^{\aleph_0}$ обозначим через $\Gamma^s(\mathbb{R}^{\aleph_0})$.

Теперь для связных групп бесконечной размерности мы можем доказать утверждение, аналогичное предложению 3.8.

3.11. Предложение. *Пусть X – связная группа и $\dim X = \aleph_0$. Тогда существует непрерывный гомоморфизм $p : \mathbb{R}^{\aleph_0} \mapsto X$, обладающий следующим свойством: для любого симметричного гауссовского распределения γ на группе X существует симметричное гауссовское распределение μ на группе $\mathbb{R}^{\aleph_0}$ такое, что $\gamma = p(\mu)$.*

Доказательство. По теореме 1.11.2 группа X топологически изоморфна группе $\mathbb{R}^m \times K$, где $m \geq 0$, а K – связная компактная группа. Предположим вначале, что $X = K$. Обозначим $D = K^*$. Тогда по теоремам 1.6.1 и 1.6.2 D – дискретная группа без кручения. По теореме 1.6.3 $r(D) = \aleph_0$. Выберем в D максимальную независимую систему элементов $d_1, \dots, d_l, \dots$. Тогда для каждого $d \in D$ существуют целые числа $k, k_1, \dots, k_l$ такие, что

$$kd = k_1 d_1 + \dots + k_l d_l.$$

Из независимости множества $\{d_j\}_{j=1}^{l}$ следует, что набор рациональных чисел $\{k_j/k\}_{j=1}^{l}$ однозначно определяется по d. Поскольку D – группа без кручения, то отображение

$$\pi d = (k_1/k, \dots, k_l/k, 0, \dots) \tag{3.17}$$

является мономорфизмом $\pi : D \mapsto \mathbb{R}^{\aleph_0 *}$.

Пусть отображение $p : \mathbb{R}^{\aleph_0} \mapsto K$ определяется из равенства $(pt, d) = (t, \pi d)$ для любых $t \in \mathbb{R}^{\aleph_0}$, $d \in D$. Легко непосредственно проверить, что p – непрерывный гомоморфизм.

Заметим теперь, что если α – произвольное распределение на группе $\mathbb{R}^{\aleph_0}$, то характеристическая функция распределения $p(\alpha) \in \mathrm{M}^1(K)$ имеет вид

$$\widehat{p(\alpha)}(d) = \widehat{\alpha}(\pi d), \quad d \in D. \tag{3.18}$$

Отметим, что поскольку группы $\mathbb{R}^{\aleph_0}$ и $\mathbb{R}^{\aleph_0 *}$ не локально компактны, то равенство (3.18) не вытекает из предложения 2.10, а доказывается независимо.

Аналогично тому, как это сделано при доказательстве предложения 3.8, убеждаемся, что любая неотрицательная функция $\varphi(d)$ на D, удовлетворяющая уравнению 2.16(ii), представима в виде

$$\varphi(d) = \langle A\pi d, \pi d\rangle, \quad d \in D, \tag{3.19}$$

где $A = (\alpha_{ij})_{i,j=1}^{\infty}$ – некоторая симметричная неотрицательно определенная матрица, $\alpha_{ij} = \psi(d_i, d_j)$, а πd определяется по формуле (3.17).

Пусть $\gamma \in \Gamma^s(K)$ и характеристической функции $\widehat{\gamma}(d)$ отвечает функция $\varphi(d)$ в 3.1 (i). Из (3.19) вытекает, что

$$\widehat{\gamma}(d) = \exp\{-\langle A\pi d, \pi d\rangle\}, \quad d \in D. \tag{3.20}$$

Пусть μ – гауссовское распределение на $\mathbb{R}^{\aleph_0}$ с характеристической функцией

$$\widehat{\mu}(s) = \exp\{-\langle As, s\rangle\}, \quad s \in \mathbb{R}^{\aleph_0 *}. \tag{3.21}$$

Из (3.18) и (3.21) следует, что

$$\widehat{p(\mu)}(d) = \exp\{-\langle A\pi d, \pi d\rangle\}, \quad d \in D. \tag{3.22}$$

Сравнивая (3.20) и (3.22) и учитывая 2.7(b), заключаем, что $\gamma = p(\mu)$.

Общий случай, т.е. когда $X \cong \mathbb{R}^m \times K$, где $m \geq 1$, а K – связная компактная группа, $\dim K = \aleph_0$, рассматривается аналогично тому, как это сделано при доказательстве предложения 3.8. При этом мономорфизм $\pi : Y \mapsto \mathbb{R}^{\aleph_0 *}$ определяется по формуле

$$\pi(s, d) = (s, k_1/k, \dots, k_l/k, 0, \dots), \quad (s, d) \in Y. \tag{3.23}$$

□

3.12. Замечание В предложении 3.6 доказано, что носитель любого симметричного гауссовского распределения на группе X – некоторая связная подгруппа G группы X. Предложения 3.8 и 3.11 позволяют легко доказать, что для любой связной группы X существует симметричное гауссовское распределение γ на группе X такое, что $\sigma(\gamma) = X$. Действительно, поскольку на группе $\mathbb{R}^m$ существует симметричное гауссовское распределение γ такое, что $\sigma(\gamma) = \mathbb{R}^m$, то в силу теоремы 1.11.2 это утверждение достаточно доказать для связной компактной группы. Итак, предположим, что группа X связна и компактна, а π – либо мономорфизм, такой, как в доказательстве предложения 3.8, если $\dim X = l < \infty$, либо такой, как в доказательстве предложения 3.11, если $\dim X = \aleph_0$. В обоих случаях распределение $\gamma \in \Gamma(X)$ с характеристической функцией вида

$$\widehat{\gamma}(y) = \exp\{-\langle \pi y, \pi y\rangle\}, \quad y \in D,$$

– искомое. Это вытекает из того, что $\widehat{\gamma}(y) = 1$ лишь при $y = 0$ и следствия 3.7.

Отметим также, что из доказательства предложений 3.8 и 3.11 непосредственно вытекает, что если $f(y) = \exp\{-\varphi(y)\}$, где $\varphi(y)$ – непрерывная неотрицательная функция на группе Y, удовлетворяющая уравнению 2.16(ii), то $f(y)$ – характеристическая функция (ср. с замечанием 3.4).

3.13. Предположим, что группа X недискретна и γ – мера на X. Разложим меру γ в сумму

$$\gamma = \gamma_{ac} + \gamma_s + \gamma_d,$$

где γ_{ac} – мера, абсолютно непрерывная относительно меры m_X, γ_s – мера, сингулярная относительно меры m_X, γ_d – дискретная мера. Такое разложение будем называть *структурой* меры γ.

Обсудим вопрос о структуре гауссовского распределения. Учитывая предложение 3.6, группу X будем считать связной. Проверим вначале, что если γ – невырожденное гауссовское распределение на X, то в (i) $\gamma_d = 0$. По теореме 1.11.2 $X \cong \mathbb{R}^m \times K$, где $m \geq 0$, а K – связная компактная группа. Обозначим $D = K^*$. По теоремам 1.7.1, 1.6.1 и 1.6.2 $Y \cong \mathbb{R}^m \times D$, где D – дискретная группа без кручения. Пусть y_0 – произвольный элемент группы Y. Обозначим через M подгруппу в Y, порожденную элементом y_0. Очевидно, что $M \cong \mathbb{Z}$, а следовательно $M^* \cong \mathbb{T}$. Из теоремы 1.9.2 вытекает, что $M^* \cong X/A(X,M)$. Таким образом, $X/A(X,M) \cong \mathbb{T}$. Обозначим этот топологический изоморфизм через τ и положим $p = \tau\alpha$, где $\alpha : X \mapsto X/A(X,M)$ – естественный гомоморфизм. Тогда $p : X \mapsto \mathbb{T}$ – непрерывный гомоморфизм. Если $\gamma(\{x_0\}) > 0$, то мы имеем

$$p(\gamma)(\{px_0\}) = \gamma(p^{-1}(\{px_0\})) \geq \gamma(\{x_0\}) > 0,$$

что невозможно, так как $p(\gamma) \in \Gamma(\mathbb{T})$, а любое невырожденное гауссовское распределение на группе $\mathbb{T}$ абсолютно непрерывно.

Дальнейшее изучение структуры гауссовского распределения проведем отдельно для не локально связных групп и локально связных групп. Напомним, что по теореме 1.11.3 каждая связная локально связная локально компактная абелева группа X, удовлетворяющая второй аксиоме счетности, топологически изоморфна группе $\mathbb{R}^m \times \mathbb{T}^{\mathfrak{n}}$, где $m \geq 0$ и $\mathfrak{n} \leq \aleph_0$.

3.14. Предложение. *Пусть X – связная не локально связная группа. Пусть γ – невырожденное гауссовское распределение на X. Тогда γ сингулярно.*

Доказательство. Очевидно, что утверждение достаточно доказать в предположении, что γ – симметричное гауссовское распределение. Обозначим через L либо группу $\mathbb{R}^m$, где m – натуральное число, если $\dim X = m$, либо группу $\mathbb{R}^{\aleph_0}$, если $\dim X = \aleph_0$. Как следует из предложений 3.8 и 3.11, существует такой непрерывный гомоморфизм $p : L \mapsto X$, что $\gamma = p(\nu)$, где ν – некоторое гауссовское распределение на L. Поэтому распределение γ сосредоточено на подгруппе $p(L)$. Проверим, что подгруппа $p(L)$ – борелевская. Положим $G = L/\mathrm{Ker}\ p$. Гомоморфизм p определяет непрерывный мономорфизм $\widehat{p} : G \mapsto X$ по формуле $\widehat{p}[t] = pt$. Заметим, что так как L – полная сепарабельная метрическая группа и $\mathrm{Ker}\ p$ – замкнутая подгруппа в L, то и G – полная сепарабельная метрическая группа. Применяя теорему Суслина к отображению $\widehat{p}$ и замечая, что $\widehat{p}(G) = p(L)$, заключаем, что $p(L)$ – борелевское множество. Подгруппа $p(L)$ не может совпадать с X. Действительно, в таком случае группа X являлась бы объединением своих однопараметрических подгрупп, а значит была бы линейно связной. Тогда по теореме 1.11.3 группа X была бы локально связной, что противоречит условию.

Заметим теперь, что если группа X удовлетворяет второй аксиоме счетности и B – такое борелевское подмножество в X, что $m_X(B) > 0$, то разностное множество $B - B = \{x \in X : x = u - v,\ u, v \in B\}$ содержит окрестность нуля группы X ([85, (20.17)]). Отсюда следует, что если группа X связна, B – измеримая подгруппа в X такая, что $m_X(B) > 0$, то $B = X$. Из сказанного выше при $B = p(L)$ заключаем, что $m_X(p(L)) = 0$, а поэтому $\gamma = \gamma_s$. $\square$

3.15. Предположим теперь, что группа X связна и локально связна. Пусть γ – невырожденное симметричное гауссовское распределение на X. Если $\dim\ X = l < \infty$, то по теореме 1.11.3 $X \cong \mathbb{R}^m \times \mathbb{T}^n$, где $m \geq 0,\ n \geq 0,\ m + n = l$. По предложению 3.8 $\gamma = p(\mu)$, где μ – симметричное гауссовское распределение в $\mathbb{R}^l$. Положим $G = \sigma(\mu)$. Тогда G – некоторое подпространство в $\mathbb{R}^l$. Отсюда следует, что если $G = \mathbb{R}^l$, то $\gamma = \gamma_{ac}$, а если $G \neq \mathbb{R}^l$, то $\gamma = \gamma_s$.

Предположим теперь, что $\dim\ X = \aleph_0$. Тогда по теореме 1.11.3 $X \cong \mathbb{R}^m \times \mathbb{T}^{\aleph_0}$, где $m \geq 0$. Воспользуемся следующей теоремой Какутани ([92]).

Теорема. *Пусть $\{\mu_i\}$ и $\{\nu_i\}$ – две последовательности распределений на вероятностном пространстве Ω. Предположим, что для всех $i = 1, 2, \ldots$ распределения μ_i и ν_i взаимно абсолютно непрерывны. Тогда прямые произведения распределений*

(i) $$\mu = \bigotimes_{i=1}^{\infty} \mu_i, \qquad \nu = \bigotimes_{i=1}^{\infty} \nu_i$$

взаимно абсолютно непрерывны, если сходится бесконечное произведение

(ii) $$\prod_{i=1}^{\infty} \int\limits_{\Omega} \sqrt{\frac{d\mu_i}{d\nu_i}} d\nu_i$$

($d\mu_i/d\nu_i$ – производная Радона–Никодима) и взаимно сингулярны, если это произведение расходится.

Теорема Какутани позволяет строить на связных локально связных группах X бесконечной размерности, как абсолютно непрерывные, так и сингулярные гауссовские распределения. Ограничимся рассмотрением случая, когда $X = \mathbb{T}^{\aleph_0}$. Тогда $Y \cong \mathbb{Z}^{\aleph_0 *}$. Элементы группы Y будем обозначать через $n \in \mathbb{Z}^{\aleph_0 *}$. Из предложения 3.11 следует, что характеристическая функция распределения $\mu \in \Gamma^s(\mathbb{T}^{\aleph_0})$ имеет вид

$$\widehat{\mu}(n) = \exp\{-\langle An, n\rangle\}, \quad n \in \mathbb{Z}^{\aleph_0 *}, \tag{3.24}$$

где $A = (\alpha_{ij})_{i,j=1}^{\infty}$ – симметричная неотрицательно определенная матрица.

Пусть μ_i – симметричное гауссовское распределение на группе $\mathbb{T}$ с характеристической функцией

$$\widehat{\mu}_i(n) = \exp\{-\sigma_i^2 n^2/2\},\ \sigma_i > 0,\ n \in \mathbb{Z},$$

(см. 3.2), а $\nu_i = m_{\mathbb{T}}$. Тогда в (i) $\mu \in \Gamma(\mathbb{T}^{\aleph_0})$ и отвечающая гауссовскому распределению μ матрица $A = (\alpha_{ij})_{i,j=1}^{\infty}$ в представлении (3.24) диагональна, т.е. $\alpha_{ij} = 0$ при $i \neq j,\ \alpha_{ii} = \frac{1}{2}\sigma_i^2$, а $\nu = m_{\mathbb{T}^{\aleph_0}}$. Заметим, что плотность $\dfrac{d\mu_i}{d\nu_i}(e^{it})$ может быть записана в виде

$$\frac{d\mu_i}{d\nu_i}(e^{it}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\sigma_i^2 n^2/2 + int\right\}.$$

Легко видеть, что если $\sigma_i^2 = i,\ i = 1, 2, \ldots$, то бесконечное произведение (ii) в этом случае сходится, а значит $\mu = \mu_{ac}$. Если же $\sigma_i^2 = 1,\ i = 1, 2, \ldots$, то бесконечное произведение (ii) расходится, а значит, $\mu = \mu_s$.

Сформулируем теперь два критерия того, что распределение γ на группе X является гауссовским.

3.16. Предложение. *Распределение γ на группе X является гауссовским тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет следующим условиям:*

(i) γ – безгранично делимое распределение;

(ii) если $\gamma = e(\Phi) * \alpha$, где Φ – конечная мера на X, а α – безгранично делимое распределение, то мера Φ вырождена в нуле.

Доказательство непосредственно вытекает из формулы Леви–Хинчина 2.16 (i) и единственности функции $\varphi(y)$ в представлении 2.16 (i).

3.17. Предложение. *Распределение γ на группе X является гауссовским тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет следующим условиям:*

(i) γ – безгранично делимое распределение;

(ii) любым характером $y \in Y$ распределение γ переводится в гауссовское распределение на группе $\mathbb{T}$.

Доказательство. Очевидно, что гауссовское распределение удовлетворяет условиям (i) и (ii). Пусть γ – безгранично делимое распределение, удовлетворяющее условию (ii). Предположим, что $\gamma = e(\Phi) * \alpha$, где Φ – конечная мера на X, а α – безгранично делимое распределение. Пусть $y \in Y$. Тогда $y(\gamma)$ и $y(\alpha)$ – безгранично делимые распределения на группе $\mathbb{T}$, и $y(\gamma) = e(y(\Phi)) * y(\alpha)$. По условию (ii) $y(\gamma) \in \Gamma(\mathbb{T})$. Из предложения 3.16 вытекает, что мера $y(\Phi)$ вырождена в нуле. Значит, и мера Φ вырождена в нуле. Снова применяя предложение 3.16, получаем, что $\gamma \in \Gamma(X)$. $\square$

Для дальнейшего нам понадобится следующая лемма.

3.18. Лемма. *Пусть H – открытая подгруппа в Y, $\varphi_0(h)$ – непрерывная неотрицательная функция на H, удовлетворяющая уравнению 2.16(ii). Тогда существует непрерывная неотрицательная функция $\varphi(y)$ на Y, удовлетворяющая уравнению 2.16(ii) такая, что ее ограничение на H совпадает с $\varphi_0(h)$.*

Доказательство. Пусть $y_1 \notin H$. Стандартные рассуждения, которые мы опускаем, показывают, что достаточно продолжить функцию $\varphi_0(h)$ с сохранением ее свойств с подгруппы H на открытую подгруппу $H_1 = \{y \in Y : y = ny_1 + h,\ n \in \mathbb{Z},\ h \in H\}$. Возможны 2 случая.

1. $ny_1 \cap H = \emptyset$ для любого $n \in \mathbb{Z},\ n \neq 0$. Положим $\varphi(ny_1 + h) = \varphi_0(h),\ n \in \mathbb{Z},\ h \in H$.

2. $ny_1 \in H$ при некотором $n \in \mathbb{Z},\ n \neq 0$. Пусть n_0 – такое минимальное натуральное число, что $n_0 y_1 \in H$. Тогда $n_0 y \in H$ для любого $y \in H_1$. Положим $\varphi(y) = \varphi_0(n_0 y)/n_0^2,\ y \in H_1$.

Очевидно, что так определенная функция $\varphi(y)$ неотрицательна и непрерывна. Мы имеем,

$$\varphi(u+v) + \varphi(u-v) = \varphi_0(n_0(u+v))/n_0^2 + \varphi_0(n_0(u-v))/n_0^2$$

$$= 2\left(\varphi_0(n_0 u)/n_0^2 + \varphi_0(n_0 v)/n_0^2\right) = 2[\varphi(u) + \varphi(v)].$$

Таким образом, функция $\varphi(y)$ обладает всеми требуемыми свойствами. $\square$

3.19. Докажем в заключение несколько утверждений о свойствах множества $\Gamma(X)$.

(a) Множество $\Gamma(X)$ является подполугруппой в $\mathrm{M}^1(X)$.

Доказательство непосредственно вытекает из определения 3.1.

(b) *Пусть K – компактная подгруппа в X, $\gamma_0 \in \Gamma(X/K)$, $p : X \mapsto X/K$ – естественный гомоморфизм. Тогда существует такое гауссовское распределение* $\gamma \in \Gamma(X)$, что $\gamma_0 = p(\gamma)$.

Для доказательство положим $H = A(Y, K)$. Тогда по теореме 1.9.4 H – открытая подгруппа в Y. Из теорем 1.9.1 и 1.9.2 следует, что $(X/K)^* \cong H$. Поэтому характеристическая функция $\widehat{\gamma}_0(h)$ имеет вид $\widehat{\gamma}_0(h) = ([x_0], h)\exp\{-\varphi_0(h)\}$, где $[x_0] \in X/K$, $\varphi_0(h)$ – непрерывная неотрицательная функция на H, удовлетворяющая уравнению 2.16(ii). Возьмем $x \in [x_0]$. По лемме 3.18 существует функция $\varphi(y)$, продолжающая функцию $\varphi_0(h)$ сохранением ее свойств с подгруппы H на Y. Пусть функция $f(y)$ на группе Y имеет вид $f(y) = (x, y)\exp\{-\varphi(y)\}$. По замечанию 3.4 $f(y)$ – характеристическая функция некоторого гауссовского распределения γ на X. По следствию 2.11 $\gamma_0 = p(\gamma)$.

(c) *Пусть $I_C(X)$ – множество сдвигов распределений Хаара связных компактных подгрупп группы X. Имеет место равенство*

$$\overline{\Gamma(X)} = \Gamma(X) * I_C(X). \tag{3.25}$$

Докажем вначале включение

$$\overline{\Gamma(X)} \supset \Gamma(X) * I_C(X). \tag{3.26}$$

Пусть K – связная компактная подгруппа в X, $H = A(Y, K)$. По замечанию 3.12 существует такое симметричное гауссовское распределение $\gamma \in \Gamma^s(K)$, что $\sigma(\gamma) = K$. Распределение γ можно рассматривать, как гауссовское распределение на X. Пусть характеристическая функция $\widehat{\gamma}(y)$ имеет вид

$$\widehat{\gamma}(y) = \exp\{-\varphi(y)\}, \quad y \in Y.$$

Очевидно, что $\varphi(y) = 0$ при $y \in H$. В силу предложения 2.13 из $\sigma(\gamma) = K$ следует, что $\varphi(y) > 0$ при $y \notin H$. Пусть k – натуральное число и γ_k – гауссовское распределение на X с характеристической функцией

$$\widehat{\gamma}_k(y) = \exp\{-k\varphi(y)\} \quad y \in Y.$$

Очевидно, что $\widehat{\gamma}_k(y) = 1$ при $y \in H$ и $\lim\limits_{k\to\infty} \gamma_k(y) = 0$ при $y \notin H$. Принимая во внимание 2.14(i), мы видим, что последовательность $\widehat{\gamma}_k(y)$ сходится к $\widehat{m}_K(y)$ поточечно. Так как по теореме 1.9.4 подгруппа H открыта, то последовательность $\widehat{\gamma}_k(y)$ сходится к $\widehat{m}_K(y)$ равномерно на каждом компактном подмножестве в Y. Из 2.7(h) получаем, что $\gamma_k \Rightarrow m_K$, т.е. $m_K \in \overline{\Gamma(X)}$. Отсюда вытекает, что для любого $\mu \in \Gamma(X)$ имеет место сходимость

$$\mu * \gamma_k \Rightarrow \mu * m_K,$$

т.е. выполнено (3.26).

Докажем обратное включение. Пусть $\mu_k \in \Gamma(X)$, $\mu \in \mathrm{M}^1(X)$ и $\mu_k \Rightarrow \mu$. Из 2.7(h) следует, что $\widehat{\mu}_k(y) \to \widehat{\mu}(y)$ равномерно на каждом компактном подмножестве в Y. В силу 2.15(c) μ – безгранично делимое распределение. Следовательно, по 2.15(b) множество $N = \{y \in Y : \widehat{\mu}(y) \neq 0\}$ – открытая подгруппа в Y. Тогда по теореме 1.9.4 $K = A(X, N)$ – компактная подгруппа в X. Пусть $\widehat{\mu}_k(y) = (x_k, y)\exp\{-\varphi_k(y)\}$, где $x_k \in X$, а $\varphi_k(y)$ – непрерывная неотрицательная функция на Y, удовлетворяющая уравнению 2.16(ii). Очевидно, что при $y \in N$ существует предел

$$\lim_{k\to\infty} \varphi_k(y) = \varphi_0(y),$$

где функция $\varphi_0(y)$ – непрерывна неотрицательна и удовлетворяет уравнению 2.16(ii). Так как $(x_k, y) = \widehat{\mu}_k(y)/|\widehat{\mu}_k(y)|$, то при $y \in N$ существует $\lim\limits_{k\to\infty}(x_k, y)$. Этот предел, очевидно, является характером группы N, а значит по теореме 1.9.2 может быть записан в виде (x, y), где $x \in X$. По лемме 3.18 существует функция $\varphi(y)$, продолжающая функцию $\varphi_0(y)$ сохранением ее свойств с подгруппы N на Y. Пусть функция $f(y)$ на группе Y имеет вид $f(y) = (x, y)\exp\{-\varphi(y)\}$. По замечанию 3.4 $f(y)$ – характеристическая функция некоторого гауссовского распределения γ на X. В силу 2.14(i) и 2.7(b) $\mu = \gamma * m_K$. Проверим, что группа K связна. В силу 1.6.2 достаточно убедиться, что K^* – группа без кручения. По теоремам 1.9.1 и 1.9.2 $K^* \cong Y/N$. Очевидно, что Y/N группа без кручения тогда и только тогда, когда при любом натуральном m из того, что $my \in N$ следует $y \in N$. Мы имеем

$$|\widehat{\mu}(y)| = \lim_{k\to\infty} |\widehat{\mu}_k(y)| = \lim_{k\to\infty} \exp\{-\varphi_k(y)\}.$$

Отсюда следует, что $y \in N$ тогда и только тогда, когда последовательность $\{\varphi_k(y)\}$ ограничена. Поскольку $\varphi_k(my) = m^2\varphi_k(y)$, то из ограниченности последовательности $\{\varphi_k(my)\}$ следует ограниченность последовательности $\{\varphi_k(y)\}$. А значит, если $my \in N$ то $y \in N$. Тем самым доказано, что

$$\overline{\Gamma(X)} \subset \Gamma(X) * I_C(X),$$

а, следовательно, доказано и (3.25).

§4. Теорема Крамера на локально компактных абелевых группах

Пусть X – локально компактная абелева группа, удовлетворяющая второй аксиоме счетности, Y – ее группа характеров. Согласно классической теореме Крамера гауссовское распределение на вещественной прямой имеет только гауссовские делители. С другой стороны, любое невырожденное гауссовское распределение на группе $\mathbb{T}$ имеет негауссовские делители. В этом параграфе мы изучаем вопросы разложения гауссовского распределения на группе X. Мы описываем, в частности, опишем те группы X, на которых гауссовское распределение имеет только гауссовские делители.

4.1. Разложение гауссовского распределения на группе $\mathbb{T}$. Пусть X – компактная группа, $\gamma \in \mathrm{M}^1(X)$ и $0 < a < 1$. Предположим, что распределение γ удовлетворяет условию:

$$(i) \qquad \gamma(E) \geq a m_X(E)$$

для любого борелевского множества $E \in \mathfrak{B}(X)$. Тогда имеет место разложение

$$(ii) \qquad \gamma = \frac{\gamma - a m_X}{1-a} * [(1-a)E_0 + a m_X].$$

Для доказательства достаточно в правой части (ii) раскрыть скобки и заметить, что для любого $\nu \in \mathrm{M}^1(X)$ выполнено $\nu * m_X = m_X$.

Пусть $X = \mathbb{T}$. Если $\gamma \in \Gamma(X)$ и γ – невырожденное распределение, то из (3.2) следует, что γ удовлетворяет условию (i). Поэтому справедливо разложение (ii). Очевидно, что оба сомножителя в (ii) негауссовские. Таким образом, любое невырожденное гауссовское распределение на группе $\mathbb{T}$ всегда имеет негауссовские делители. Следовательно, отсутствие в локально компактной абелевой группе X подгруппы, топологически изоморфной $\mathbb{T}$, является необходимым условием для того чтобы любое гауссовское распределение на X имело только гауссовские делители. Оказывается, что это условие является и достаточным. Для доказательства нам понадобятся следующие леммы.

4.2. Лемма. *Пусть X – связная группа,* $\dim X = \aleph_0$*, X не содержит подгруппы, топологически изоморфной $\mathbb{T}$, $\pi : Y \mapsto \mathbb{R}^{\aleph_0 *}$ – мономорфизм, определяемый формулой* (3.23)*. Тогда образ $\pi(Y)$ плотен в $\mathbb{R}^{\aleph_0 *}$.*

Доказательство. По теореме 1.11.2 группа X топологически изоморфна группе $\mathbb{R}^m \times K$, где $m \geq 0$, а K – связная компактная группа, $\dim K = \aleph_0$. По теореме 1.7.1 $Y \cong \mathbb{R}^m \times D$, где $D = K^*$. По теоремам 1.6.1 и 1.6.2 D – дискретная группа без кручения. По теореме 1.6.3 $r(D) = \aleph_0$. Чтобы не вводить дополнительных обозначений, будем считать, что $Y = \mathbb{R}^m \times D$. Поскольку ограничение π на $\mathbb{R}^m$ совпадает с тождественным отображением, то достаточно доказать лемму в случае, когда $X = K$, $Y = D$. Будем считать, что при любом n группа $\mathbb{Z}^n$ естественным образом вложена в $\mathbb{R}^n$, а также имеют место естественные вложения

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2 \subset \cdots \subset \mathbb{R}^n \subset \cdots \subset \mathbb{R}^{\aleph_0 *}.$$

Положим $H_n = \overline{\pi(D)} \cap \mathbb{R}^n$. Тогда H_n – замкнутая подгруппа в $\mathbb{R}^n$ и по теореме 1.16 $H_n \cong \mathbb{R}^{l_n} \times \mathbb{Z}^{k_n}$. Поскольку $\mathbb{Z}^n \subset H_n \subset \mathbb{R}^n$, то $l_n + k_n = n$. Проверим, что $k_n = 0$ для любого n. Тем самым, лемма будет доказана.

Предположим противное, т.е. $k_n > 0$ при некотором n. Воспользуемся следующим свойством замкнутых подгрупп в группе $\mathbb{R}^m$: замкнутая подгруппа G в группе $\mathbb{R}^m$ является прямым произведением своей замкнутой подгруппы G_1 и некоторой другой замкнутой подгруппы G_2 тогда и только тогда, когда G_1 есть пересечение G с некоторым подпространством в $\mathbb{R}^m$ ([52, глава VII, §1]). Так как $H_n = H_{n+1} \cap \mathbb{R}^n$, то H_n – топологический прямой сомножитель в H_{n+1}. Следовательно, группа $\overline{\pi(D)}$ содержит подгруппу F, топологически изоморфную $\mathbb{Z}$, в качестве прямого сомножителя, т.е. $\overline{\pi(D)} = F \times G$. Пусть e – образующая группы F. Рассмотрим произвольный элемент $a_0 = e + g_0 \in (e + G) \cap \pi(D)$. Обозначим через M подгруппу в $\pi(D)$, порожденную элементом a_0. Тогда, очевидно, $M \cong \mathbb{Z}$ и $\pi(D) = M \times (\pi(D) \cap G)$. Таким образом, группа $\pi(D)$ содержит подгруппу, изоморфную $\mathbb{Z}$, в качестве прямого сомножителя. Следовательно, и группа D также содержит подгруппу, изоморфную $\mathbb{Z}$, в качестве прямого сомножителя. Отсюда следует, что группа K содержит подгруппу, топологически изоморфную $\mathbb{T}$, что противоречит условию леммы. $\square$

4.3. Лемма. *Пусть X – связная группа конечной размерности l, не содержащая подгруппы, топологически изоморфной $\mathbb{T}$. Пусть $\pi : Y \mapsto \mathbb{R}^l$ – мономорфизм, определяемый формулой* (3.13)*. Тогда образ $\pi(Y)$ плотен в $\mathbb{R}^l$.*

Доказательство леммы 4.3 аналогично доказательству леммы 4.2 и мы его опускаем.

4.4. Лемма. *Пусть симметричное гауссовское распределение γ на группе X является непрерывном мономорфным образом гауссовского распределения либо в пространстве $\mathbb{R}^l$, где l – натуральное число, либо в пространстве $\mathbb{R}^{\aleph_0}$. Тогда γ имеет только гауссовские делители.*

Доказательство. Учитывая предложение 3.6, не ограничивая общности, группу X можно предполагать связной. Предположим вначале, что $\gamma = p(\mu)$, где $p : \mathbb{R}^l \mapsto X$ – непрерывный мономорфизм, $\mu \in \Gamma(\mathbb{R}^l)$. Распределение γ сосредоточено на подгруппе $p(\mathbb{R}^l)$. Пусть $\gamma = \gamma_1 * \gamma_2$. По предложению 2.2 распределения γ_j можно так заменить их сдвигами γ_j', что

$$\gamma = \gamma_1' * \gamma_2', \tag{4.1}$$

и распределения γ_j' также сосредоточены на $p(\mathbb{R}^l)$. Из следствия 2.5 и (4.1) вытекает, что $\mu = p^{-1}(\gamma) = p^{-1}(\gamma_1') * p^{-1}(\gamma_2')$. По теореме Крамера $p^{-1}(\gamma_j') \in \Gamma(\mathbb{R}^l)$. Но тогда $\gamma_j' = p(p^{-1}(\gamma_j')) \in \Gamma(X)$. Таким образом, в случае, когда γ – непрерывный мономорфный образ гауссовского распределения в конечномерном линейном пространстве, лемма доказана.

Пусть $\gamma = p(\mu)$, где $p : \mathbb{R}^{\aleph_0} \mapsto X$ – непрерывный мономорфизм, $\mu \in \Gamma(\mathbb{R}^{\aleph_0})$. Чтобы доказать лемму в этом случае, заметим, что из теоремы Крамера непосредственно вытекает ее справедливость для группы $\mathbb{R}^{\aleph_0}$. В остальном доказательство не отличается от проведенного. □

Мы дополним лемму 4.4 следующим утверждением.

4.5. Предложение. *Пусть X – связная группа конечной размерности l. Пусть γ – симметричное гауссовское распределение на X и γ имеет только гауссовские делители. Тогда существуют конечномерное линейное пространство G, гауссовское распределение $\mu \in \Gamma^s(G)$ и такой непрерывный мономорфизм $p : G \mapsto X$, что $\gamma = p(\mu)$.*

Доказательство. Пусть гомоморфизмы $\pi : Y \mapsto \mathbb{R}^l$ и $p : X \mapsto \mathbb{R}^l$ такие, как в предложении 3.8. Тогда по предложению 3.8 $\gamma = p(\mu)$, где $\mu \in \Gamma^s(\mathbb{R}^l)$, а характеристические функции распределений μ и γ имеют вид

$$\widehat{\mu}(s) = \exp\{-\langle As, s\rangle\}, \quad s \in \mathbb{R}^l, \tag{4.2}$$

$$\widehat{\gamma}(y) = \exp\{-\langle A\pi y, \pi y\rangle\}, \quad y \in Y,$$

где $A = (\alpha_{ij})_{i,j=1}^l$ – симметричная неотрицательно определенная матрица. Матрица A определяет линейный оператор $A : \mathbb{R}^l \mapsto \mathbb{R}^l$, т.е. непрерывный гомоморфизм группы $\mathbb{R}^l$ в себя. Обозначим $G = \sigma(\mu)$. Тогда G совпадает с аннулятором $G = A(\mathbb{R}^l, \mathrm{Ker}\ A)$. Проверим, что $G \cap \mathrm{Ker}\ p = \{0\}$. Тем самым, требуемое утверждение будет доказано.

Ядро $\mathrm{Ker}\ p$ – замкнутая подгруппа в $\mathbb{R}^l$. По теореме 1.16 $\mathrm{Ker}\ p = F \times S$, где $F \cong \mathbb{R}^n$, $S \cong \mathbb{Z}^m$. Заметим, что на самом деле $\mathrm{Ker}\ p = S$. Действительно, если для некоторого $t_0 \in \mathrm{Ker}\ p$ выполнено $\lambda t_0 \in \mathrm{Ker}\ p$ при всех $\lambda \in \mathbb{R}$, то

$$(\lambda t_0, \pi y) = (p(\lambda t_0), y) = 1$$

при всех $y \in Y$, что невозможно, так как подпространство, порожденное образом $\pi(Y)$ по построению совпадает с $\mathbb{R}^l$. Итак, $\mathrm{Ker}\ p = S \cong \mathbb{Z}^m$. Предположим, что существует элемент $a \in G \cap \mathrm{Ker}\ p$, $a \neq 0$. Так как $\mathrm{Ker}\ p \cong \mathbb{Z}^m$, то можно считать, что элемент a выбран так, что $\lambda a \notin G \cap \mathrm{Ker}\ p$ при $\lambda \in (0, 1)$. Заметим теперь, что билинейная форма $\langle A\cdot, \cdot\rangle$ задает скалярное произведение на фактор-пространстве $\mathbb{R}^l/\mathrm{Ker}\ A$, а $\langle \cdot, a\rangle$ – линейный функционал на $\mathbb{R}^l/\mathrm{Ker}\ A$. Поэтому при некотором $\varepsilon > 0$ выполнено неравенство

$$\langle As, s\rangle \geq \varepsilon \langle s, a\rangle^2, \quad s \in \mathbb{R}^l. \tag{4.3}$$

Рассмотрим гауссовское распределение $\mu_1 \in \Gamma(\mathbb{R}^l)$ с характеристической функцией

$$\widehat{\mu}_1(s) = \exp\{-\varepsilon\langle s, a\rangle^2\}, \quad s \in \mathbb{R}^l. \tag{4.4}$$

Из (4.2) и (4.3) следует, что μ_1 является делителем распределения μ. Следовательно, распределение $\gamma_1 = p(\mu_1)$ – делитель γ. Из (4.4) получаем $H = \sigma(\mu_1) = \{t \in \mathbb{R}^l : t = \lambda a,\ \lambda \in \mathbb{R}\}$, т.е. $H \cong \mathbb{R}$. Так как $p(a) = 0$ и $p(\lambda a) \neq 0$ при $\lambda \in (0, 1)$, то $p(H) \cong \mathbb{T}$. Из 4.1 следует, что гауссовское распределение γ_1 имеет негауссовские делители, а следовательно и распределение γ имеет негауссовские делители. Полученное противоречие доказывает, что $G \cap \mathrm{Ker}\ p = \{0\}$, и тем самым, предложение 4.5 доказано. $\square$.

Докажем теперь основную теорему этого параграфа.

4.6. Теорема. *Для того чтобы любое гауссовское распределение на группе X имело только гауссовские делители, необходимо и достаточно, чтобы группа X не содержала подгруппы, топологически изоморфной $\mathbb{T}$.*

Доказательство. Если группа X содержит подгруппу K, топологически изоморфную $\mathbb{T}$, то гауссовское распределение на K является гауссовским распределением на X. Поэтому необходимость непосредственно вытекает из 4.1.

Докажем достаточность. Пусть группа X не содержит подгруппы, топологически изоморфной $\mathbb{T}$, и $\gamma \in \Gamma(X)$. Не ограничивая общности можно предполагать, что $\gamma \in \Gamma^s(X)$. Тогда, как следует из предложения 3.6, $\sigma(\gamma) = G$, где G – связная подгруппа в X, т.е. $\gamma \in \Gamma^s(G)$ и группа G также не содержит подгруппы, топологически изоморфной $\mathbb{T}$. Сказанное позволяет считать группу X с самого начала связной.

Если $\dim\ X = l < \infty$, то пусть гомоморфизм $\pi : Y \mapsto \mathbb{R}^l$ определяется по формуле (3.13) и $p = \widetilde{\pi}$. Тогда по предложению 3.8 $\gamma = p(\mu)$, где $\mu \in \Gamma(\mathbb{R}^l)$. Так как группа X не содержит подгруппы, топологически изоморфной $\mathbb{T}$, то по лемме 4.3 подгруппа $\pi(Y)$ плотна в $\mathbb{R}^l$. Отсюда по 1.13(b) следует, что p – мономорфизм. По лемме 4.4 распределение $\gamma = p(\mu)$ имеет только гауссовские делители.

Если $\dim\ X = \aleph_0$, то пусть гомоморфизм $\pi : Y \mapsto \mathbb{R}^{\aleph_0 *}$ определяется по формуле (3.23), а $p : \mathbb{R}^{\aleph_0} \mapsto X$ определяется из равенства $(pt, y) = (t, \pi y)$ для любых $t \in \mathbb{R}^{\aleph_0},\ y \in Y$. Дальнейшее рассуждение аналогично проведенному выше. Вместо предложения 3.8 используем предложение 3.11. По лемме 4.2 подгруппа $\pi(Y)$ плотна в $\mathbb{R}^{\aleph_0 *}$. В отличие от случая, когда $\dim\ X < \infty$, мы не можем применить 1.13(b) и заключить, что p мономорфизм, так как группы $\mathbb{R}^{\aleph_0}$ и $\mathbb{R}^{\aleph_0 *}$ не локально компактны. Этот факт доказывается непосредственно. Применяя лемму 4.4, мы получаем, что распределение $\gamma = p(\mu)$ имеет только гауссовские делители. $\square$

Из доказательства теоремы 4.6 вытекает следующее утверждение.

4.7. Следствие. *Пусть группа X не содержит подгруппы, топологически изоморфной $\mathbb{T}$. Пусть либо $E = \mathbb{R}^l$, где l – натуральное число, либо $E = \mathbb{R}^{\aleph_0}$. Пусть γ – симметричное гауссовское распределение на X. Тогда существуют симметричное гауссовское распределение μ на E и непрерывный мономорфизм $p : E \mapsto X$ такой, что $\gamma = p(\mu)$.*

4.8. Следствие. *Пусть группа Y не содержит такой замкнутой подгруппы H, что $Y/H \cong \mathbb{Z}$. Пусть $\varphi(y)$ – непрерывная неотрицательная функция на Y, удовлетворяющая уравнению 2.16(ii). Пусть $f_j(y)$ – непрерывные нормированные положительно определенные функции на группе Y такие, что*

$$\exp\{-\varphi(y)\} = f_1(y)f_2(y), \quad y \in Y.$$

Тогда

$$f_j(y) = (x_j, y)\exp\{-\varphi_j(y)\}, \quad y \in Y,$$

где $x_j \in X$, а $\varphi_j(y)$ – непрерывные неотрицательные функции на Y, удовлетворяющие уравнению 2.16(ii).

Доказательство. Искомое утверждение вытекает из 2.7(c) и теоремы 4.6, поскольку в силу теоремы 1.9.2 следующие условия равносильны:

(i) группа X не содержит подгруппы, топологически изоморфной $\mathbb{T}$;

(ii) группа Y не содержит такой замкнутой подгруппы H, что $Y/H \cong \mathbb{Z}$.

□

4.9. Замечание. Отметим, что в классе безгранично делимых распределений гауссовское распределение на произвольной группе X имеет только гауссовские делители. Действительно, пусть

$$\gamma_0 = \gamma_1 * \gamma_2, \tag{4.5}$$

где $\gamma_0 \in \Gamma(X)$, а γ_j – безгранично делимые распределения. Пусть распределение γ_0 имеет представление $(x_0, 0, \varphi_0)$, а распределения γ_j – представления (x_j, F_j, φ_j) (см. 2.16). Из (4.5) следует, что распределение γ_0 имеет два представления $(x_0, 0, \varphi_0)$ и $(x_1 + x_2, F_1 + F_2, \varphi_1 + \varphi_2)$. Из единственности функции φ в формуле Леви–Хинчина следует, что $\varphi_0 = \varphi_1 + \varphi_2$, а значит, безгранично делимые распределения, имеющие представления $(x_1, F_1, 0)$ и $(x_2, F_2, 0)$ – делители вырожденного распределения E_{x_0}. Поэтому меры F_j – вырождены в нуле, т.е. $\gamma_j \in \Gamma(X)$.

Опишем теперь группы X, на которых любое гауссовское распределение имеет негауссовские делители. Принимая во внимание предложение 3.6, мы можем считать, что группа X связна.

4.10. Предложение. *Пусть X – связная группа. Для того чтобы любое гауссовское распределение γ на X, обладающее тем свойством, что $\sigma(\gamma) = X$, имело негауссовские делители, необходимо и достаточно, чтобы группа X была топологически изоморфна группе*

$$(i) \qquad \mathbb{R}^m \times \mathbb{T}$$

при некотором $m \geq 0$.

Доказательство. По теореме 1.11.2 группа X топологически изоморфна группе $\mathbb{R}^m \times K$, где $m \geq 0$, а K – связная компактная группа. Пусть группа X топологически не изоморфна группе вида (i). Тогда K топологически не изоморфна $\mathbb{T}$. По теореме 1.7.1, $Y \cong \mathbb{R}^m \times D$, где $D = K^*$. По теоремам 1.6.1 и 1.6.2, D – дискретная группа без кручения. Кроме того, по теореме 1.6.3, если $\dim K = l$, то $r(D) = l$, и если $\dim K = \aleph_0$, то $r(D) = \aleph_0$. Обозначим через π либо гомоморфизм $\pi : D \mapsto \mathbb{R}^l$, определенный формулой (3.8), если $\dim K = l$, либо гомоморфизм $\pi : D \mapsto \mathbb{R}^{\aleph_0 *}$ определенный формулой (3.17), если $\dim K = \aleph_0$. В случае, когда $\dim K = l$, обозначим через

$A = \{a_1, \dots, a_l\}$ – конечное независимое множество вещественных чисел. Если $\dim K = \aleph_0$, то обозначим через $A = \{a_1, \dots, a_n, \dots\}$ бесконечное независимое множество вещественных чисел. Пусть либо $a = (a_1, \dots, a_l)$, если $\dim K = l$, либо $a = (a_1, \dots, a_n, \dots)$, если $\dim K = \aleph_0$. Поскольку $K \not\cong \mathbb{T}$, то $D \not\cong \mathbb{Z}$. Отсюда следует, что множество $B = \{t \in \mathbb{R} : t = \langle \pi d, a\rangle,\ d \in D\}$ плотно в $\mathbb{R}$.

Элементы группы Y обозначим через $y = (s, d),\ s = (s_1, \dots, s_m) \in \mathbb{R}^m,\ d \in D$. Рассмотрим непрерывный гомоморфизм $\pi_1 : Y \mapsto \mathbb{R}^{m+1}$, определенный формулой

$$\pi_1(s, d) = (s, \langle \pi d, a\rangle).$$

Положим $p_1 = \widetilde{\pi}_1,\ p_1 : \mathbb{R}^{m+1} \mapsto X$. Из независимости множества A следует, что π_1 – мономорфизм. Следовательно, по 1.13(b) образ $p_1(\mathbb{R}^{m+1})$ плотен в X. С другой стороны, поскольку множество B плотно в $\mathbb{R}$, то множество $\pi_1(Y)$ плотно в $\mathbb{R}^{m+1}$. Тогда по 1.13(b), p_1 – мономорфизм. Пусть μ – гауссовское распределение на группе $\mathbb{R}^{m+1}$ с характеристической функцией

$$\widehat{\mu}(s_1, \dots, s_m, s_{m+1}) = \exp\{-(s_1^2 + \dots + s_m^2 + s_{m+1}^2)\}.$$

По предложению 2.10 характеристическая функция распределения $\gamma = p_1(\mu)$ имеет вид

$$\widehat{\gamma}(y) = \widehat{\gamma}(s_1, \dots, s_m, d) = \exp\{-(s_1^2 + \dots + s_m^2 + \langle \pi d, a\rangle^2)\}.$$

Положим $\gamma = p_1(\mu)$. Так как $\overline{p_1(\mathbb{R}^{m+1})} = X$, то $\sigma(\gamma) = X$. Поскольку p_1 – мономорфизм, то по лемме 4.4 распределение γ имеет только гауссовские делители. Необходимость доказана.

Докажем достаточность. Пусть $X = \mathbb{R}^m \times \mathbb{T}$. Тогда $Y \cong \mathbb{R}^m \times \mathbb{Z}$. Элементы группы Y будем обозначать через $y = (s, k),\ s \in \mathbb{R}^m, k \in \mathbb{Z}$. Не ограничивая общности, распределение γ можно считать симметричным, т.е. считать, что характеристическая функция $\widehat{\gamma}(y)$ имеет вид $\widehat{\gamma}(y) = \exp\{-\varphi(y)\}$, где функция $\varphi(y)$ такая, как в 3.1. Как следует из доказательства предложения 3.8, функция $\varphi(y) = \varphi(s_1, \dots, s_m, k)$ представима в виде

$$\varphi(s_1, \dots, s_m, k) = \langle As, s\rangle + 2k\langle \beta, s\rangle + bk^2,$$

где $s = (s_1, \dots, s_m) \in \mathbb{R}^m,\ A = (\alpha_{ij})_{i,j=1}^m$ – симметричная неотрицательно определенная матрица, $\beta \in \mathbb{R}^m,\ b \geq 0$. Поскольку $\sigma(\gamma) = X$, то как следует из 2.13, $\varphi(y) = 0$ лишь при $y = 0$. Отсюда следует, что при любых $(s, s_{n+1}) \in \mathbb{R}^{m+1},\ (s, s_{n+1}) \neq 0$ выполнено неравенство

$$\langle As, s\rangle + 2s_{n+1}\langle \beta, s\rangle + bs_{n+1}^2 > 0.$$

Из этого неравенства вытекает, что существует такое $a > 0$, что при любых $(s, s_{n+1}) \in \mathbb{R}^{m+1}$ справедливо неравенство

$$\langle As, s\rangle + 2s_{n+1}\langle \beta, s\rangle + bs_{n+1}^2 \geq a(s_1^2 + \dots + s_m^2 + s_{m+1}^2).$$

Поэтому у распределения γ существует делитель γ_1 с характеристической функцией

$$\widehat{\gamma}_1(y) = \widehat{\gamma}_1(s_1, \dots, s_m, k) = \exp\{-ak^2\}.$$

Так как $\sigma(\gamma_1) = \mathbb{T}$ и $\gamma_1 \in \Gamma(\mathbb{T})$, то, как отмечено в 4.1, у распределения γ_1 существуют негауссовские делители. Следовательно, негауссовские делители существуют и у распределения γ. $\square$

Из предложения 4.10 непосредственно вытекает следующее утверждение.

4.11. Следствие. *Для того чтобы на группе X любое невырожденное гауссовское распределение имело негауссовские делители, необходимо и достаточно, чтобы группа X была топологически изоморфна $\mathbb{T}$.*

4.12. Замечание. Рассуждения, проведенные при доказательстве необходимости в предложении 4.10, дают отличное от проведенного в замечании 3.12, построение для заданной связной группы X симметричного гауссовского распределения γ такого, что $\sigma(\gamma) = X$.

§5. Многочлены на локально компактных абелевых группах и теорема Марцинкевича

Пусть X – локально компактная абелева группа, удовлетворяющая второй аксиоме счетности, Y – ее группа характеров. Согласно классической теореме Марцинкевича, если γ – распределение на вещественной прямой и характеристическая функция $\widehat{\gamma}(s)$ представима в виде $\widehat{\gamma}(s) = \exp\{P(s)\}$, где $P(s)$ – многочлен, то γ – гауссовское распределение. Первая часть параграфа посвящена получению канонического представления для алгебраического многочлена на произвольной абелевой группе, без предположения о ее локальной компактности. Затем мы изучаем свойства непрерывных многочленов на локально компактной абелевой группе и описываем те группы X, для которых справедлива теорема Марцинкевича.

5.1. Лемма. *Пусть R – коммутативное кольцо с единицей 1 и $R[x_1, \ldots, x_n]$ – кольцо многочленов над R. Тогда существует такое неотрицательное целое число p, что многочлен*

$$(n!)^{2^p} \prod_{i=1}^{n} (x_i - 1)$$

принадлежит идеалу J, порожденному многочленами

$$(x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k} - 1)^n, \qquad 1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n.$$

Другими словами, существуют многочлены $P_{i_1,\ldots,i_k}(x_1, \ldots, x_n) \in R[x_1, \ldots, x_n]$ такие, что

$$(i) \qquad (n!)^{2^p} \prod_{i=1}^{n} (x_i - 1) = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n} P_{i_1,\ldots,i_k}(x_1, \ldots, x_n)(x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k} - 1)^n.$$

Доказательство. Заметим вначале, что справедливо равенство

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n} (x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k} - 1)^n = \sum_{m=1}^{n} (-1)^m C_n^m \prod_{i=1}^{n} (x_i^m - 1). \tag{5.1}$$

Действительно, раскроем скобки в обеих частях (5.1). Каждое из полученных выражений содержит только мономы вида

$$(x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k})^m, \tag{5.2}$$

где $1 \le i_1 < i_2 < \ldots i_k \le n$ и $0 \le m \le n$. Если $m > 0$, то коэффициенты монома (5.2) в обеих частях (5.1) равны

$$(-1)^k (-1)^{n-m} C_n^m.$$

Таким образом, осталось проверить равенство свободных членов в обеих частях (5.1). Мы знаем, что разность между левой и правой частями в (5.1) – константа. Чтобы проверить, что эта константа равна нулю подставим в (5.1) $x_1 = x_2 = \ldots x_n = 1$. Тогда обе части (5.1) обращаются в нуль. Таким образом, равенство (5.1) доказано.

Пусть P – многочлен, который равен обеим частям в (5.1). Из (5.1) следует, что $P \in J$ и что P делится на $(x_1 - 1)(x_2 - 1) \cdots (x_n - 1)$. Мы имеем

$$P = Q \prod_{i=1}^{n} (x_i - 1), \tag{5.3}$$

где

$$Q = \sum_{m=1}^{n} (-1)^m C_n^m \prod_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=0}^{m-1} x_i^k \right).$$

Из этой формулы следует, что

$$Q(1, \ldots, 1) = \sum_{m=1}^{n} (-1)^m C_n^m m^n = (-1)^n n! \tag{5.4}$$

(мы использовали здесь хорошо известное комбинаторное тождество, см. напр. [77, §12, упр. 16]). Введем новые переменные $y_i = x_i - 1,\ i = 1, 2, \ldots, n$. Из (5.3) и (5.4) находим

$$P = (-1)^n y_1 y_2 \cdots y_n (n! - \widetilde{Q}), \tag{5.5}$$

где $\widetilde{Q}$ – многочлен от переменных y_i с нулевым свободным членом. Умножая обе части (5.5) на

$$S = \prod_{k=0}^{p-1} \left[(n!)^{2^k} + (\widetilde{Q})^{2^k} \right],$$

находим

$$(-1)^n SP = y_1 y_2 \cdots y_n \left[(n!)^{2^p} - (\widetilde{Q})^{2^p} \right].$$

Отсюда следует равенство

$$(n!)^{2^p} y_1 y_2 \cdots y_n = (-1)^n SP + y_1 y_2 \cdots y_n (\widetilde{Q})^{2^p}. \tag{5.6}$$

Поскольку многочлен $\widetilde{Q}$ имеет нулевой свободный член, мы можем выбрать p столь большим, чтобы каждый член в разложении $(\widetilde{Q})^{2^p}$ делился по крайней мере на один из многочленов $y_i^{n-1},\ i = 1, 2, \ldots, n$. Поскольку $P \in J$ и, очевидно, $y_i^n \in J$ при всех $i = 1, 2, \ldots, n$, из формулы (5.6) вытекает включение $(n!)^{2^p} y_1 y_2 \cdots y_n \in J$, что эквивалентно (i). □

5.2. Применение леммы 5.1 к конечно-разностным операторам. Пусть Y – абелева группа, $f(y)$ — функция на Y, h — произвольный элемент группы Y. Обозначим через E_h оператор сдвига

$$\mathrm{E}_h f(y) = f(y + h).$$

Тогда

$$\Delta_h = \mathrm{E}_h - \mathrm{E}_0.$$

Обозначим через $\mathcal{E}$ множество конечных сумм вида

$$\mathcal{E} = \left\{ \sum m_i \mathrm{E}_{u_i} : m_i \in \mathbb{Z},\ u_i \in Y \right\}.$$

Очевидно, что $\mathcal{E}$ – коммутативное кольцо с единицей. Пусть $t_1, \dots, t_n \in Y$ - фиксированные элементы и $P(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$. Отображение

$$P(x_1, \dots, x_n) \mapsto P(\mathrm{E}_{t_1}, \dots, \mathrm{E}_{t_n})$$

является гомоморфизмом из $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ в $\mathcal{E}$. Подставляя E_{t_i} вместо x_i в формулу 5.1(i), получаем

$$(n!)^{2^p} \Delta_{t_1} \Delta_{t_2} \dots \Delta_{t_n} = \sum_k m_k \mathrm{E}_{u_k} \Delta^n_{v_k}, \tag{5.7}$$

где $m_k \in \mathbb{Z}$, $u_k, v_k \in Y$ и зависят от $t_1, \dots, t_n$. Из (5.7) непосредственно вытекает

5.3. Предложение. *Пусть Y – абелева группа, $f(y)$ — функция на Y. Если функция $f(y)$ удовлетворяет уравнению*

$$\Delta^n_h f(y) = 0, \quad y, h \in Y,$$

то $f(y)$ удовлетворяет уравнению

(i) $$\Delta_{h_1} \Delta_{h_2} \dots \Delta_{h_n} f(y) = 0, \quad y, h_1, h_2, \dots, h_n \in Y.$$

5.4. n-аддитивные функции. Пусть Y – абелева группа. Функция $g(y_1, y_2, \dots, y_n)$, определенная на Y^n, называется *n-аддитивной*, если для любого $k = 1, 2 \dots, n$ выполнено

$$g(y_1, y_2, \dots, y'_k + y''_k, \dots, y_n) = g(y_1, y_2, \dots, y'_k, \dots, y_n) + g(y_1, y_2, \dots, y''_k, \dots, y_n).$$

Для дальнейшего нам удобно константы называть 0-аддитивными функциями.

Функция $g(y_1, y_2, \dots, y_n)$ называется *симметричной*, если

$$g(y_1, y_2, \dots, y_n) = g(y_{i_1}, y_{i_2}, \dots, y_{i_n})$$

для любой перестановки $i_1, i_2, \dots, i_n$ последовательности $1, 2, \dots, n$. Для заданной функции $g(y_1, y_2, \dots, y_n)$ определим функцию $g^*(y)$ по формуле

$$g^*(y) = g(y, y, \dots, y).$$

Проверим, что если функция $g(y_1, y_2, \dots, y_n)$ симметрична и n-аддитивна, то выполнено равенство

$$\Delta_{u_1} \Delta_{u_2} \dots \Delta_{u_p} g^*(y) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad p > n, \\ n! g(u_1, u_2, \dots, u_n), & \text{если} \quad p = n. \end{cases} \tag{5.8}$$

1. Рассмотрим вначале случай, когда $p > n$. Если $n = 1$, то $g^* = g$, и в силу аддитивности функции $g(y)$ мы имеем

$$\Delta_{u_1} \Delta_{u_2} g^*(y) = \Delta_{u_1} \Delta_{u_2} g(y) = 0.$$

Далее рассуждаем по индукции. По функции $g(y_1, y_2, \dots, y_n)$ определим функцию $g_{k,u}(y_1, y_2, \dots, y_k)$ по формуле $g_{k,u}(y_1, y_2, \dots, y_k) = g(y_1, y_2, \dots, y_k, u, \dots, u)$. Учитывая симметрию и n-аддитивность функции $g(y_1, y_2, \dots, y_n)$, мы находим

$$\Delta_{u_p} g^*(y) = g^*(y + u_p) - g^*(y) = g(y + u_p, \dots, y + u_p) - g(y, \dots, y)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k g(\underbrace{y, \ldots, y}_{k}, \underbrace{u_p, \ldots, u_p}_{n-k}) = \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k g^*_{k,u_p}(y),$$

т.е.

$$\Delta_{u_p} g^*(y) = \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k g^*_{k,u_p}(y). \tag{5.9}$$

По предположению индукции при любом $k = 0, 1, \ldots, n-1$ можно считать выполненным равенство

$$\Delta_{u_1}\Delta_{u_2} \ldots \Delta_{u_{p-1}} g^*_{k,u_p}(y) = 0. \tag{5.10}$$

Применяя оператор $\Delta_{u_1}\Delta_{u_2} \ldots \Delta_{u_{p-1}}$ к обеим частям равенства (5.9), и используя (5.10), получаем

$$\Delta_{u_1}\Delta_{u_2} \ldots \Delta_{u_p} g^*(y) = 0.$$

Таким образом, 1-я часть (5.8) доказана.

2. Пусть теперь $p = n$. При $n = 1$ выполнено $g^* = g$, и мы имеем

$$\Delta_{u_1} g^*(y) = \Delta_{u_1} g(y) = g(y + u_1) - g(y) = g(u_1).$$

Снова рассуждаем по индукции. Формула (5.9) справедлива и при $p = n$

$$\Delta_{u_n} g^*(y) = \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k g^*_{k,u_n}(y). \tag{5.11}$$

Применяя оператор $\Delta_{u_1}\Delta_{u_2} \ldots \Delta_{u_{n-1}}$ к обеим частям равенства (5.11), и используя доказанное утверждение **1**, получаем

$$\Delta_{u_1}\Delta_{u_2} \ldots \Delta_{u_n} g^*(y) = n\Delta_{u_1}\Delta_{u_2} \ldots \Delta_{u_{n-1}} g^*_{n-1,u_n}(y). \tag{5.12}$$

По предположению индукции имеем

$$\Delta_{u_1}\Delta_{u_2} \ldots \Delta_{u_{n-1}} g^*_{n-1,u_n}(y) = (n-1)! g_{n-1,u_n}(u_1, \ldots, u_{n-1}) = (n-1)! g(u_1, \ldots, u_n). \tag{5.13}$$

Подставляя (5.13) в (5.12), доказываем 2-ю часть (5.8).

Теперь мы можем получить каноническое представление для многочлена на абелевой группе Y. Напомним, что многочленом на Y называется такая вещественная или комплексная функция $f(y)$, которая при некотором n удовлетворяют уравнению

$$\Delta_h^{n+1} f(y) = 0, \quad y, h \in Y. \tag{5.14}$$

5.5. Теорема. *Пусть Y – абелева группа, $f(y)$ – функция на Y, удовлетворяющая уравнению* (5.14). *Тогда существуют симметричные k-аддитивные функции $g_k(y_1, y_2, \ldots, y_k)$, $k = 0, 1, \ldots, n$ такие, что*

(i)
$$f(y) = \sum_{k=0}^{n} g_k^*(y), \quad y \in Y,$$

где $g_k^*(y) = g_k(y, \ldots, y)$.

Доказательство. Пусть функция $f(y)$ удовлетворяет уравнению (5.14). По предложению 5.3 $f(y)$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta_{u_1}\Delta_{u_2}\dots\Delta_{u_{n+1}}f(y)=0, \quad y,u_1,u_2,\dots,u_{n+1}\in Y. \tag{5.15}$$

Это означает, что функция $\Delta_{u_1}\Delta_{u_2}\dots\Delta_{u_n}f(y)$ не зависит от y, т.е. константа. Определим функцию $g_n(u_1,u_2,\dots,u_n)$ по формуле

$$g_n(u_1,u_2,\dots,u_n)=\frac{1}{n!}\Delta_{u_1}\Delta_{u_2}\dots\Delta_{u_n}f(y). \tag{5.16}$$

Очевидно, что функция $g_n(u_1,u_2,\dots,u_n)$ симметрична. Проверим, что она n-аддитивна. Учитывая (5.15), получаем

$$n![g_n(u_1'+u_1'',u_2,\dots,u_n)-g_n(u_1',u_2,\dots,u_n)-g_n(u_1'',u_2,\dots,u_n)]=\Delta_{u_1'+u_1''}\Delta_{u_2}\dots\Delta_{u_n}f(y)$$

$$-\Delta_{u_1'}\Delta_{u_2}\dots\Delta_{u_n}f(y)-\Delta_{u_1''}\Delta_{u_2}\dots\Delta_{u_n}f(y)=(\Delta_{u_1'+u_1''}-\Delta_{u_1'}-\Delta_{u_1''})\Delta_{u_2}\dots\Delta_{u_n}f(y)$$

$$=\Delta_{u_1'}\Delta_{u_1''}\Delta_{u_2}\dots\Delta_{u_n}f(y)=0.$$

Таким образом, функция $g_n(u_1,u_2,\dots,u_n)$ аддитивна по переменной u_1, а в силу симметрии – n-аддитивна.

Теорема, очевидно, верна при $n=0$. Пусть $n\geq 1$. Проведем доказательство по индукции. Обозначим $h(y)=f(y)-g_n^*(y)$. Мы имеем

$$\Delta_u^n h(y)=\Delta_u^n f(y)-\Delta_u^n g_n^*(y).$$

Заметим, что в силу (5.8)

$$\Delta_u^n g_n^*(y)=n!g_n^*(u).$$

С другой стороны, из (5.16) получаем

$$n!g_n^*(u)=\Delta_u^n f(y).$$

Следовательно,

$$\Delta_u^n h(y)=0$$

для всех $y,u\in Y$. Тогда по предположению индукции

$$h(y)=\sum_{k=0}^{n-1}g_k^*(y), \quad y\in Y,$$

где функции $g_k(y_1,\dots,y_k)$ – симметричны и k-аддитивны. Следовательно,

$$f(y)=h(y)+g_n^*(y)=\sum_{k=0}^{n}g_k^*(y), \quad y\in Y.$$

□.

5.6. Замечание. Пусть Y – локально компактная абелева группа и $f(y)$ – непрерывный многочлен на Y. Примерами непрерывных многочленов могут служить *непрерывные вещественные характеры* группы Y, т.е. непрерывные гомоморфизмы $l : Y \mapsto \mathbb{R}$. Если $l(y) \not\equiv 0$, то $l(y)$ – непрерывный многочлен первой степени. Не равная тождественно нулю непрерывная функция $\varphi(y)$ на группе Y, удовлетворяющая уравнению 2.16(ii), является непрерывным многочленом второй степени.

Несложно проверить, что для группы $Y = \mathbb{R}^m$ множество непрерывных многочленов, т.е. непрерывных функций, удовлетворяющих уравнению (5.14), совпадает с множеством обычных многочленов.

Мы используем представление 5.5(i), чтобы доказать следующее свойство непрерывных многочленов на локально компактной абелевой группе.

5.7. Предложение. *Пусть Y – локально компактная абелева группа и $f(y)$ – непрерывный многочлен на Y. Тогда*

$$(i) \qquad f(y + h) = f(y)$$

для любых $y \in Y,\ h \in b_Y$. В частности, $f(y) = const$ при $y \in b_Y$.

Доказательство. Заметим вначале, что если H – компактная абелева группа и $l(h)$ – непрерывная аддитивная функция на H, то $l(h) \equiv 0$. Действительно, в таком случае $l(H)$ – компактная подгруппа, а $\{0\}$ – единственная компактная подгруппа групп $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$. Отсюда следует, что если функция $A(y_1, y_2, \dots, y_n)$, определенная на Y^n n-аддитивна, то $A(y_1, y_2, \dots, y_n) = 0$, как только $y_k \in b_Y$ при каком-то k.

Пусть $f(y)$ – непрерывный многочлен на Y. Воспользуемся представлением 5.5(i). Из него следует, что (i) достаточно доказать для функций $g_k^*(y),\ k = 1, 2, \dots, n$. Имеем,

$$g_k^*(y + h) - g_k^*(y) = g_k(y + h, \dots, y + h) - g_k(y, \dots, y) = \sum_{l=1}^{k} C_k^l g_k(\underbrace{h, \dots, h}_{l}, \underbrace{y, \dots, y}_{k-l}) = 0$$

в силу сказанного выше. □

5.8. Следствие. *Пусть X – локально компактная абелева группа, $\mu \in \mathrm{M}^1(X)$ и характеристическая функция $\widehat{\mu}(y)$ имеет вид*

$$\widehat{\mu}(y) = \exp\{\psi(y)\}, \quad y \in Y,$$

где $\psi(y)$ – непрерывный многочлен такой, что $\psi(0) = 0$. Тогда $\sigma(\mu) \subset c_X$.

Доказательство. Из 5.7(i) следует, что $\psi(y) = \psi(0) = 0$ при $y \in b_Y$. Поэтому $\widehat{\mu}(y) = 1$ при $y \in b_Y$. Из предложения 2.13 следует, что $\sigma(\mu) \subset A(X, b_Y)$. По теореме 1.9.3 $A(X, b_Y) = c_X$. Таким образом, $\sigma(\mu) \subset c_X$. □

5.9. Замечание. Пусть $f(y)$ – непрерывный многочлен на локально компактной абелевой группе Y. По предложению 5.7 функция $f(y)$ инвариантна относительно подгруппы b_Y. Следовательно, функция $f(y)$ определяет непрерывный многочлен $\widetilde{f}([y])$ на фактор-группе Y/b_Y по формуле $\widetilde{f}([y]) = f(y)$.

Для доказательства основной теоремы этого параграфа нам понадобится

5.10. Лемма. *Пусть K – связная компактная абелева группа,* $\dim K = \aleph_0$ *и K не содержит подгруппы, топологически изоморфной $\mathbb{T}$. Пусть $D = K^*$ и $\pi : D \mapsto \mathbb{R}^{\aleph_0 *}$ – мономорфизм, определяемый формулой* (3.17)*. Тогда для любых $a_1, a_2 \in D$ существует такая подгруппа $B \subset D$ конечного ранга, что $a_1, a_2 \in B$ и $\overline{\pi(B)} \cong \mathbb{R}^l$, где l – ранг B.*

Доказательство. Проверим вначале, что для любого натурального n существует такое число p, что $\mathbb{R}^n \subset \overline{\pi(D) \cap \mathbb{R}^p}$. Действительно, пусть множество $E = \{x_1, \dots, x_k\} \subset \mathbb{R}^n$ таково, что множество $M(E) = \{x \in \mathbb{R}^n : x = \sum\limits_{j=1}^{k} m_j x_j,\ m_j \in \mathbb{Z}\}$ плотно в $\mathbb{R}^n$. По лемме 4.2 $\overline{\pi(D)} = \mathbb{R}^{\aleph_0 *}$. Поэтому для каждого элемента $x_j,\ j = 1, 2, \dots, k$ существует такая последовательность $\{u_i^{(j)}\}_{i=1}^{\infty} \subset \pi(D)$, что $u_i^{(j)} \to x_j$. По определению топологии в $\mathbb{R}^{\aleph_0 *}$ все $\{u_i^{(j)}\}_{i=1}^{\infty},\ j = 1, 2, \dots, k$ лежат в некотором $\mathbb{R}^p$ и там сходятся. Поэтому $x_j \in \overline{\pi(D) \cap \mathbb{R}^p},\ j = 1, 2, \dots, k$, а следовательно $\mathbb{R}^n \subset \overline{\pi(D) \cap \mathbb{R}^p}$.

По теореме 1.16 мы имеем $\overline{\pi(D) \cap \mathbb{R}^p} = G \times F$, где $G \cong \mathbb{R}^{t_p},\ F \cong \mathbb{Z}^{s_p},\ t_p + s_p = p$. Поэтому $\mathbb{R}^n \subset G$. Пусть $\pi a_1, \pi a_2 \in \pi(D) \cap \mathbb{R}^n$. Положим $A = \pi(D) \cap G$ и $B = \pi^{-1}(A)$. Тогда $\overline{A} = G$. Поскольку $r(B) = r(A) = t_p$, то B – искомая подгруппа. $\square$

Докажем теперь основную теорему этого параграфа.

5.11. Теорема. *Пусть X – локально компактная абелева группа, удовлетворяющая второй аксиоме счетности и не содержащая подгруппы, топологически изоморфной $\mathbb{T}$. Пусть $\mu \in \mathrm{M}^1(X)$ и характеристическая функция $\widehat{\mu}(y)$ имеет вид*

$$(i) \qquad \widehat{\mu}(y) = \exp\{\psi(y)\}, \quad y \in Y,$$

где $\psi(y)$ – непрерывный многочлен такой, что $\psi(0) = 0$. Тогда $\mu \in \Gamma(X)$.

Доказательство. По следствию 5.8 группу X, не ограничивая общности, можно считать связной. Тогда по теореме 1.11.2 $X \cong \mathbb{R}^m \times K$, где $m \ge 0$, а K – связная компактная группа. Мы ограничимся проведением доказательства для случая, когда $X = K$. Общий случай рассматривается аналогично. Кроме того, мы будем предполагать, что $\dim K = \aleph_0$. Случай, когда $\dim K < \infty$ проще и рассматривается аналогично. Обозначим $D = K^*$. По теоремам 1.6.1 и 1.6.2 D – дискретная группа без кручения. По теореме 1.6.3 $r(D) = \aleph_0$.

Обозначим $\varphi(y) = -\mathrm{Re}\ \psi(y),\ l(y) = \mathrm{Im}\ \psi(y)$. Функции $\varphi(y)$ и $l(y)$, очевидно, также многочлены на Y. Мы докажем, что функция $\varphi(y)$ удовлетворяет уравнению 2.16(ii), а функция $l(y)$ удовлетворяет уравнению

$$l(u + v) = l(u) + l(v), \quad u, v \in Y. \tag{5.17}$$

Тем самым, будет доказано, что $\mu \in \Gamma(X)$.

Пусть $a_1, a_2 \in D$ – два фиксированных элемента, $\pi : D \mapsto \mathbb{R}^{\aleph_0 *}$ – мономорфизм, определяемый формулой (3.17). Поскольку группа K не содержит подгруппы, топологически изоморфной $\mathbb{T}$, то по лемме 5.10 существует такая подгруппа $B \subset D$ конечного ранга l, что $a_1, a_2 \in B$ и $\overline{\pi(B)} \cong \mathbb{R}^l$. Обозначим $G = \overline{\pi(B)}$.

Пусть $\{b_j\}_{j=1}^{l}$ – максимальная независимая система элементов в $\pi(B)$ и $\{e_j\}_{j=1}^{l}$– стандартный базис в $\mathbb{R}^l$. Обозначим через $\tau : \pi(B) \mapsto \mathbb{R}^l$ мономорфизм, построенный таким же образом, как в 3.8 был построен мономорфизм π. Мы имеем $\tau(b_j) = e_j,\ j = 1, 2, \dots, l$. Обозначим $h = \tau\pi,\ A = h(B)$. Поскольку $\overline{\pi(B)} = G$, то $\overline{A} = \mathbb{R}^l$.

Рассмотрим на группе A функцию $\zeta(a) = \psi(h^{-1}(a))$. Очевидно, что $\zeta(a)$ – многочлен. Рассмотрим группу A в дискретной топологии. По теореме Бохнера $\exp\{\zeta(a)\}$ – характеристическая функция. Очевидно, что теорема будет доказана, если будет доказано следующее утверждение.

Пусть группа A такова, что $\mathbb{Z}^l \subset A \subset \mathbb{Q}^l \subset \mathbb{R}^l$, $\overline{A} = \mathbb{R}^l$, $\zeta(a)$ – такой многочлен на группе A, что $\exp\{\zeta(a)\}$ – характеристическая функция. Тогда функции $\zeta_1(a) = \mathrm{Re}\ \zeta(a)$ и $\zeta_2(a) = \mathrm{Im}\ \zeta(a)$ удовлетворяют уравнениям $2.16(ii)$ и (5.17) соответственно.

Пусть $\eta(a)$ – произвольный многочлен степени m на группе A. Тогда, в частности, мы имеем

$$\Delta_b^{m+1}\eta(a) = 0$$

для любых $a, b \in \mathbb{Z}^l$. Как нетрудно проверить, отсюда следует представление

$$\eta(a) = \sum_{p=0}^{m} \sum_{||k||=p} c_k a^k, \tag{5.18}$$

где $k = (k_1, \dots, k_l)$, $||k|| = k_1 + \cdots + k_l$, $a = (n_1, \dots, n_l) \in \mathbb{Z}^l, a^k = n_1^{k_1} \cdots n_l^{k_l}$. Из этого представления вытекает, что если F такая подгруппа в $\mathbb{Q}^l$, что $F \cong \mathbb{Z}^l$, $\mathbb{Z}^l \subset F \subset A$ и $\eta(a) = 0$ при $a \in \mathbb{Z}^l$, то $\eta(a) = 0$ для всех $a \in F$.

Представим группу A в виде объединения возрастающей последовательности подгрупп A_j:

$$A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j, \quad A_1 = \mathbb{Z}^l, \quad A_j \subset A_{j+1}, \quad A_j \cong \mathbb{Z}^l, \quad j = 1, 2, \dots.$$

Обозначим через $\eta(a)$ ограничение многочлена $\zeta(a)$ на подгруппу $\mathbb{Z}^l$. Заметим, что многочлен $\eta(a)$ на $\mathbb{Z}^l$ может быть представлен в виде (5.18). По формуле (5.18) многочлен $\eta(a)$ может быть продолжен до многочлена на группе $\mathbb{R}^l$, в частности, на группе A. Обозначим это продолжение через $\widetilde{\eta}(a)$. Рассмотрим на группе A многочлен $\delta(a) = \zeta(a) - \widetilde{\eta}(a)$, $a \in A$. Очевидно, что $\delta(a) = 0$, $a \in \mathbb{Z}^l$. Поэтому, как отмечено выше, $\delta(a) = 0$ при $a \in A_j$, $j = 1, 2, \dots,$. Следовательно, $\delta(a) \equiv 0$ на группе A. Из сказанного вытекает, что многочлен $\zeta(a)$ на группе A может быть представлен в виде

$$\zeta(a) = \sum_{p=0}^{m} \sum_{||k||=p} c_k a^k, \tag{5.19}$$

где $k = (k_1, \dots, k_l)$, $a = (r_1, \dots, r_l) \in A, a^k = r_1^{k_1} \cdots r_l^{k_l}$.

Многочлен $\zeta(a)$ продолжается по формуле (5.19) с A на $\mathbb{R}^l$. Обозначим это продолжение через $\widetilde{\zeta}(s)$. Поскольку $\exp\{\zeta(a)\}$ – положительно определенная функция на группе A, а группа A плотна в $\mathbb{R}^l$, то продолженная функция $\exp\{\widetilde{\zeta}(s)\}$, $s \in \mathbb{R}^l$ является положительно определенной функцией на группе $\mathbb{R}^l$. По теореме Бохнера $\exp\{\widetilde{\zeta}(s)\}$ – характеристическая функция.

Зафиксируем $s_0 \in \mathbb{R}^l$. Тогда функция $\widetilde{\zeta}(ts_0)$, $t \in \mathbb{R}$ – многочлен на $\mathbb{R}$, а $\exp\{\widetilde{\zeta}(ts_0)\}$ – характеристическая функция на $\mathbb{R}$. По классической теореме Марцинкевича (см. напр. [12, гл. II, §5]) $\exp\{\widetilde{\zeta}(ts_0)\}$ – характеристическая функция некоторого гауссовского распределения на $\mathbb{R}$. Отсюда легко следует, что в таком случае $\exp\{\widetilde{\zeta}(s)\}$ – характеристическая функция гауссовского распределения на группе $\mathbb{R}^l$.

Следовательно, функции $\widetilde{\zeta}_1(s) = \mathrm{Re}\ \widetilde{\zeta}(s)$ и $\widetilde{\zeta}_2(s) = \mathrm{Im}\ \widetilde{\zeta}(s)$ удовлетворяют соответственно уравнениям $2.16(ii)$ и (5.17) на группе $\mathbb{R}^l$. Отсюда вытекает, что и функции $\zeta_1(a)$ и $\zeta_2(a)$ удовлетворяют соответственно уравнениям $2.16(ii)$ и (5.17) на группе A. $\square$

5.12. Замечание. Отметим, что из доказательства теоремы 5.11 вытекает следующее утверждение. Пусть $Y = \mathbb{R}^p \times \mathbb{Z}^q$, $\zeta(y)$ – непрерывный многочлен на Y степени m. Тогда многочлен $\zeta(y)$ представим в виде

$$\zeta(y) = \sum_{i=0}^{m} \sum_{||k||=i} c_k y^k,$$

где $k = (k_1, \ldots, k_p, k_{p+1}, \ldots, k_{p+q})$, $y = (s_1, \ldots, s_p, n_1, \ldots, n_q) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{Z}^q$, $y^k = s_1^{k_1} \cdots s_p^{k_p} n_1^{k_{p+1}} \cdots n_q^{k_{p+q}}$. Для доказательства достаточно заметить, что в силу непрерывности многочлен $\zeta(y)$ определяется своим сужением на подгруппу $A = \mathbb{Q}^p \times \mathbb{Z}^q \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{Z}^q$ и воспользоваться представлением (5.19).

Теорема 5.11 точна. А именно, справедливо следующее утверждение.

5.13. Предложение. *Пусть X – локально компактная абелева группа, удовлетворяющая второй аксиоме счетности и содержащая подгруппу, топологически изоморфную $\mathbb{T}$. Тогда для любого $m > 2$ существует распределение $\mu_m \in \mathrm{M}^1(X)$ такое, что $\mu_m \notin \Gamma(X)$, а характеристическая функция $\widehat{\mu}_m(y)$ имеет вид*

$$\widehat{\mu}_m(y) = \exp\{\psi_m(y)\}, \quad y \in Y,$$

где $\psi_m(y)$ – непрерывный многочлен степени m такой, что $\psi_m(0) = 0$.

Доказательство. Очевидно, что предложение достаточно доказать для группы $X = \mathbb{T}$. Тогда $Y \cong \mathbb{Z}$. Элементы группы Y будем обозначать через $n \in \mathbb{Z}$.

Рассмотрим на группе Y функцию

$$\psi_m(n) = \begin{cases} -n^2 + in^m, & n \in \mathbb{Z}, \quad \text{если } m \text{ нечетно}, \\ -n^m, & n \in \mathbb{Z}, \quad \text{если } m \text{ четно}. \end{cases}$$

Очевидно, что $\psi_m(n)$ – многочлен степени m на группе $\mathbb{Z}$. Положим

$$g_m(n) = \exp\{\psi_m(n)\}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Легко проверить, что

$$\sum_{n \in \mathbb{Z},\ n \neq 0} g_m(n) < 1.$$

Отсюда следует, что

$$\rho_m(t) = 1 + \sum_{n \in \mathbb{Z},\ n \neq 0} g_m(n) \exp\{-int\} > 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Очевидно также, что

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \rho_m(t) dt = 1.$$

Пусть μ_m – распределение на группе $X = \mathbb{T}$ с плотностью $r_m(e^{it}) = \rho_m(t)$ относительно m_X. Очевидно, что $\mu_m \notin \Gamma(X)$, а характеристическая функция $\widehat{\mu}_m(n) = g_m(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, имеет требуемый вид. $\square$

5.14. Замечание. Легко проверить, что предложение 5.13 неверно для группы $X = \mathbb{T}$ при $m = 2$. Поэтому в предложении 5.13 условие $m > 2$ нельзя усилить, заменив его на $m \geq 2$. Однако, утверждение предложения 5.13 остается в силе и при $m = 2$, если потребовать, чтобы группа X содержала подгруппу, топологически изоморфную двумерному тору $\mathbb{T}^2$. Очевидно, что в силу теоремы 1.17.1 утверждение достаточно доказать для группы $X = \mathbb{T}^2$. Тогда $Y \cong \mathbb{Z}^2$. Элементы группы Y будем обозначать через $(m, n),\ m, n \in \mathbb{Z}$.

Рассмотрим на группе Y функцию

$$\psi(m, n) = -a(m^2 + n^2) + i\pi mn, \quad m, n \in \mathbb{Z}.$$

Очевидно, что $\psi(m, n)$ – многочлен степени 2. Выберем $a > 0$ таким образом, чтобы выполнялось неравенство

$$\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2,\ (m,n)\neq(0,0)} \exp\{-a(m^2 + n^2)\} < 1.$$

Отсюда следует, что выполнено неравенство

$$\rho(t, s) = 1 + \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2,\ (m,n)\neq(0,0)} \exp\{\psi(m, n) - i(mt + ns)\} > 0, \quad (t, s) \in \mathbb{R}^2.$$

Очевидно также, что

$$\frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \rho(t, s) dt ds = 1.$$

Пусть μ_0 – распределение на группе $X = \mathbb{T}^2$ с плотностью $r(e^{it}, e^{is}) = \rho(t, s)$ относительно m_X. Очевидно, что $\mu_0 \notin \Gamma(X)$, а характеристическая функция

$$\widehat{\mu}_0(m, n) = \exp\{\psi(m, n)\}, \quad m, n \in \mathbb{Z},$$

имеет требуемый вид.

Мы докажем ниже (см. предложение 9.8), что если локально компактная абелева группа X удовлетворяет второй аксиоме счетности и не содержит подгруппы, топологически изоморфной двумерному тору $\mathbb{T}^2$, то из того, что $\mu \in \mathrm{M}^1(X)$ и характеристическая функция $\widehat{\mu}(y)$ представима в виде 5.11(i), где $\psi(y)$ – непрерывный многочлен степени 2, вытекает, что $\mu \in \Gamma(X)$.

§6. Гауссовские распределения в смысле Урбаника

Пусть X – локально компактная абелева группа, удовлетворяющая второй аксиоме счетности, Y – ее группа характеров. Урбаник определил гауссовские распределения на группе X, как такие безгранично делимые распределения, которые каждым характером переводятся в гауссовские распределения на группе $\mathbb{T}$ ([112]). Как доказано в предложении 3.17, класс таких распределений совпадает с классом гауссовских распределений в смысле определения 3.1. В этом параграфе мы полностью описываем группы X, которые обладают следующим свойством: если распределение μ на X удовлетворяет условию 3.17(ii), то μ удовлетворяет условию 3.17(i), а значит μ – гауссовское.

6.1. Определение гауссовского распределения в смысле Урбаника. Распределение γ на группе X называется *гауссовским распределением в смысле Урбаника*, если для любого $y \in Y$ выполнено $y(\gamma) \in \Gamma(\mathbb{T})$.

Множество гауссовских распределений в смысле Урбаника на группе X обозначим через $\Gamma_U(X)$. Заметим, что для любого распределения $\mu \in \mathrm{M}^1(X)$ и любого $y \in Y$ характеристическая функция распределения $y(\mu)$ имеет вид $\widehat{y(\mu)}(n) = \widehat{\mu}(ny),\ n \in \mathbb{Z}$. Отсюда непосредственно следует, что

$$\Gamma(X) \subset \Gamma_U(X). \tag{6.1}$$

6.2. Неограниченно делимые элементы. Пусть $n \in \mathbb{Z},\ n \neq 0$. Мы будем говорить, что элемент $x_0 \in X$ *делится на* n, если $x_0 \in X^{(n)}$. Другими словами элемент $x_0 \in X$ делится на n, если существует элемент $x \in X$, такой что $x_0 = nx$. Элемент $x_0 \in X$, отличный нуля, называется *неограниченно делимым*, если он делится на бесконечно много целых чисел.

Для доказательства основной теоремы нам понадобятся следующие леммы.

6.3. Лемма. *Если группа X не содержит неограниченно делимых элементов, то X – дискретная группа без кручения.*

Доказательство. Пусть X – произвольная локально компактная абелева группа. По теореме 1.11.1, $X \cong \mathbb{R}^m \times G$, где $m \geq 0$, а группа G содержит компактную открытую подгруппу K. Если X не содержит неограниченно делимых элементов, то $m = 0$, а G – группа без кручения. В частности, K – группа без кручения. По теореме 1.11.4 K топологически изоморфна группе вида

$$(\Sigma_{\mathbf{a}})^{\mathfrak{n}} \times \mathop{\mathbf{P}}_{p \in \mathcal{P}} \Delta_p^{\mathfrak{n}_p},$$

где $\mathbf{a} = (2, 3, 4, \dots)$, $\mathfrak{n}$ и $\mathfrak{n}_p$ – кардинальные числа. Заметим, что все ненулевые элементы групп $\Sigma_{\mathbf{a}}$ и Δ_p неограниченно делимы. Следовательно, $K = \{0\}$, т.е. X – дискретная группа без кручения. $\square$

6.4. Лемма. *Пусть $X = \mathbb{R} \times \mathbb{T}$. Тогда существует распределение $\mu_0 \in \Gamma_U(X)$ такое, что $\mu_0 \notin \Gamma(X)$ и $\widehat{\mu}_0(y) > 0$ при всех $y \in Y$.*

Доказательство. Поскольку $Y \cong \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$, элементы группы Y будем обозначать через $y = (s, n),\ s \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{Z}$. Нам удобно считать также, что вещественная прямая $\mathbb{R}$ и группа вращений окружности $\mathbb{T}$ естественным образом вложены в группу X.

Пусть $a > 0,\ b > 0,\ c > 0$. Рассмотрим на группе Y функцию

$$\varphi_0(s, n) = \begin{cases} as^2, & \text{если} \quad n = 0, \\ bs^2 + cn^2, & \text{если} \quad n \neq 0. \end{cases} \tag{6.2}$$

Пусть α_a – гауссовское распределение на группе X с характеристической функцией $\widehat{\alpha}_a(s, n) = \exp\{-as^2\}$, а β_c – гауссовское распределение на группе X с характеристической функцией $\widehat{\beta}_c(s, n) = \exp\{-cn^2\}$. Очевидно, что $\sigma(\alpha_a) = \mathbb{R},\ \sigma(\beta_c) = \mathbb{T}$, т.е. α_a можно рассматривать, как гауссовское распределение на $\mathbb{R}$, а β_c – как гауссовское распределение на $\mathbb{T}$. Выберем $a,\ b$ и c так, чтобы $2\alpha_a \geq \alpha_b,\ 2\beta_c \geq m_{\mathbb{T}}$. Положим

$$\mu_0 = \alpha_a * m_{\mathbb{T}} - \alpha_b * m_{\mathbb{T}} + \beta_c * \alpha_b. \tag{6.3}$$

Легко видеть, что мы можем преобразовать (6.3) к виду

$$\mu_0 = (\alpha_a - \frac{1}{2}\alpha_b) * m_{\mathbb{T}} + (\beta_c - \frac{1}{2}m_{\mathbb{T}}) * \alpha_b.$$

Следовательно, $\mu_0 \in \mathrm{M}^1(X)$. Из (6.2) и (6.3) следует, что

$$\widehat{\mu}_0(y) = \exp\{-\varphi_0(y)\}, \quad y \in Y. \tag{6.4}$$

Заметим, что равенство

$$\varphi_0(ky) = k^2\varphi_0(y), \quad y \in Y. \tag{6.5}$$

выполнено при любом $k \in \mathbb{Z}$. Из (6.4) и (6.5) вытекает, что $\mu_0 \in \Gamma_U(X)$. Выбирая $a \neq b$, получаем $\mu_0 \notin \Gamma(X)$. $\square$

6.5. Пусть X – дискретная группа без кручения. Будем называть элемент $x \in X$ *зависящим от элементов* $x_1, \dots, x_l \in X$, если существуют $n, n_1, \dots, n_l \in \mathbb{Z}$ такие, что $nx = n_1x_1 + \dots + n_lx_l$. Обозначим через L_x множество элементов, зависящих от x. Очевидно, что L_x подгруппа и L_x изоморфна некоторой подгруппе $\mathbb{Q}$.

Теперь мы можем сформулировать основную теорему этого параграфа.

6.6. Теорема. *Для того чтобы на группе X имело место равенство*

$$\Gamma(X) = \Gamma_U(X),$$

необходимо и достаточно, чтобы группа Y удовлетворяла одному из условий:

(i) для любой замкнутой подгруппы $B \subset Y,\ B \neq Y$, фактор-группа Y/B содержит неограниченно делимый элемент;

(ii) фактор-группа группы Y по подгруппе всех компактных элементов b_Y топологически изоморфна $\mathbb{Z}$.

Доказательство. Необходимость. Предположим, что существует такая замкнутая подгруппа $B \subset Y$, что фактор-группа $Y/B = H$ не содержит неограниченно делимых элементов. По лемме 6.3 в таком случае H – дискретная группа без кручения. Возможны два случая.

1. Группа H не изоморфна $\mathbb{Z}$. Тогда ранг $r(H) > 1$. Действительно, если $r(H) = 1$, то группа H изоморфна некоторой подгруппе A группы $\mathbb{Q}$. Поскольку A не изоморфна $\mathbb{Z}$, то все отличные от нуля элементы группы A, а значит и H, неограниченно делимы, что противоречит условию.

Сопоставим каждому элементу $h \in H,\ h \neq 0$ подгруппу L_h в группе H, состоящую из всех элементов, зависящих от h. Так как по условию подгруппа L_h не содержит неограниченно делимых элементов и $r(L_h) = 1$, то $L_h \cong \mathbb{Z}$ при всех $h \in H,\ h \neq 0$. Поскольку группа X удовлетворяет второй аксиоме счетности, то группа H счетна. Очевидно, что тогда группу H можно представить в виде не более, чем счетного объединения набора попарно пересекающихся лишь в нуле различных подгрупп L_{h_k}. Обозначим через h'_k образующую группы L_{h_k}. Имеем, $H = \bigcup\limits_k L_{h_k}$ и любой элемент $h \in H,\ h \neq 0$ единственным образом представим в виде $h = mh'_k,\ m \in \mathbb{Z},\ h'_k \in L_{h_k}$. Определим на группе H функцию

$$\varphi_0(h) = \begin{cases} a_k m^2, & \text{если} \ \ h = mh'_k,\ h \neq 0, \\ 0, & \text{если} \ \ h = 0. \end{cases}$$

где числа a_k выбраны так, чтобы

$$\sum_k \sum_{m\in\mathbb{Z},\ m\neq 0} \exp\{-a_k m^2\} < 1. \tag{6.6}$$

Обозначим $G = H^*$. Из (6.6) следует, что мы можем определить непрерывную функцию $\rho_0(g)$ на группе G по формуле

$$\rho_0(g) = 1 + \sum_{h\in H,\ h\neq 0} \exp\{-\varphi_0(h)\}\overline{(g,h)}.$$

Очевидно, что $\rho_0(g) > 0$ и $\int\limits_G \rho_0(g) dm_G(g) = 1$. Пусть распределение $\mu_0 \in \mathrm{M}^1(G)$ имеет плотность $\rho_0(g)$ относительно m_G. Тогда характеристическая функция $\widehat{\mu}_0(h)$ имеет вид

$$\widehat{\mu}_0(h) = \exp\{-\varphi_0(h)\},\ h \in H.$$

Так как $r(H) > 1$, то числа a_k всегда можно выбрать так, чтобы $\mu_0 \notin \Gamma(G)$. С другой стороны, поскольку $\varphi(nh) = n^2\varphi(h)$ для любых $n \in \mathbb{Z},\ h \in H$, то $\mu_0 \in \Gamma_U(G)$. По теореме 1.9.2 $G \cong A(X, B)$. Поэтому μ_0 можно рассматривать, как распределение на $A(X, B)$, а значит и на X. В случае **1** необходимость доказана.

2. Группа H изоморфна $\mathbb{Z}$. В этом случае из теоремы 1.17.2 вытекает, что $Y = B \times L$, где $L \cong \mathbb{Z}$. Заметим теперь, что подгруппа B содержит некомпактный элемент, так как в противном случае было бы выполнено условие (ii). Обозначим $G = c_{B^*}$. По теореме 1.9.3 $G \neq \{0\}$. Учитывая теорему 1.7.1, получаем, что группа X содержит подгруппу F, такую, что $F \cong G \times \mathbb{T}$. Так как группа G связна, то по теореме 1.11.2 $G \cong \mathbb{R}^m \times K$, где $m \geq 0$, а K — связная компактная группа. Если $m > 0$, то группа X содержит подгруппу $M \cong \mathbb{R} \times \mathbb{T}$. С помощью леммы 6.4 мы строим распределение $\mu_0 \in \mathrm{M}^1(X)$ такое, что $\mu_0 \in \Gamma_U(X),\ \mu_0 \notin \Gamma(X)$. Если $m = 0$, то $F \cong K \times \mathbb{T}$. Предположим для определенности, что размерность группы K бесконечна. Тогда $\dim K = \aleph_0$. Обозначим $D = K^*$ и пусть $\pi : D \mapsto \mathbb{R}^{\aleph_0 *}$ – гомоморфизм, определяемый формулой (3.17), т.е. $\pi d = (k_1/k, \ldots, k_l/k, 0, \ldots)$. Обозначим элементы группы $F^* \cong D \times \mathbb{Z}$ через $(d, n),\ d \in D,\ n \in \mathbb{Z}$. Определим гомоморфизм $\tau : F^* \mapsto \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$ по формуле $\tau(d, n) = (k_1/k, n)$. Обозначим $q = \widetilde{\tau},\ q : \mathbb{R} \times \mathbb{T} \mapsto F$ и положим $\mu = q(\mu_0)$, где μ_0 – распределение, построенное в лемме 6.4. По предложению 2.10 $\widehat{\mu}(d, n) = \widehat{q(\mu_0)}(d, n) = \widehat{\mu}_0(\tau(d, n)) = \exp\{-\varphi_0(\tau(d, n))\}$. Из леммы 6.4 вытекает, что $\mu \in \Gamma_U(F),\ \mu \notin \Gamma(F)$. Следовательно, $\mu \in \Gamma_U(X),\ \mu \notin \Gamma(X)$. Необходимость полностью доказана.

Достаточность. Пусть $\gamma \in \Gamma_U(X)$. Проверим, что $\gamma \in \Gamma(X)$. Предположим вначале, что выполнено условие (i). Из него следует, в частности, что группа, топологически изоморфная $\mathbb{Z}$ не может быть фактор-группой группы Y. Тогда по теореме 1.9.2 группа X не содержит подгруппы, топологически изоморфной $\mathbb{T}$. Учитывая теорему 4.6, в таком случае достаточно проверить, что распределение $\nu = \gamma * \bar{\gamma} \in \Gamma(X)$.

Заметим вначале, что из $\gamma \in \Gamma_U(X)$ вытекает, что $\widehat{\gamma}(y) \neq 0$ при всех $y \in Y$. Из 2.7(c) и 2.7(d) тогда следует, что $\widehat{\nu}(y) = |\widehat{\gamma}(y)|^2 > 0$. Значит, функция $\widehat{\nu}(y)$ допускает представление

$$\widehat{\nu}(y) = \exp\{-\varphi(y)\}, \quad y \in Y,$$

где $\varphi(y)$ - непрерывная неотрицательная функция на Y, удовлетворяющая уравнению

$$\varphi(ky) = k^2\varphi(y) \tag{6.7}$$

для любых $y \in Y,\ k \in \mathbb{Z}$.

Проверим, что при выполнении условия (i) функция $\varphi(y)$ удовлетворяет уравнению 2.16(ii). Обозначим через A множество всех элементов $y \in Y$, для которых существует такая последовательность $\{y_n\}$ элементов в Y, что элемент $y_n \in Y^{(n)}$ и $\varphi(y - y_n) \to 0$.

Проверим, что A – подгруппа в Y. Пусть $u, v \in A$ и пусть $\{u_n\}$ и $\{v_n\}$ – последовательности элементов в Y такие, что $u_n, v_n \in Y^{(n)}$ и

$$\varphi(u - u_n) \to 0, \quad \varphi(v - v_n) \to 0.$$

Применяя неравенство 2.7(g), получаем

$$|1 - \widehat{\nu}(u - v - u_n + v_n)| \le |\widehat{\nu}(u - v - u_n + v_n) - \widehat{\nu}(v - v_n)| + |1 - \widehat{\nu}(v - v_n)|$$

$$\le \sqrt{2}|1 - \widehat{\nu}(u - u_n)|^{1/2} + |1 - \widehat{\nu}(v - v_n)|.$$

Пусть $\{y_n\} \subset Y$ – произвольная последовательность. Очевидно, что $\varphi(y_n) \to 0$ тогда и только тогда, когда $\widehat{\nu}(y_n) \to 1$. Поэтому из приведенного выше неравенства следует, что $\varphi(u - v - u_n + v_n) \to 0$. Ясно, что $u_n - v_n \in Y^{(n)}$. Итак, $u - v \in A$. Мы доказали, таким образом, что A алгебраическая подгруппа в Y.

Проверим теперь, что подгруппа A замкнута. Действительно, пусть $\{u^{(j)}\} \subset A,\ u^{(j)} \to u$ и $\{u_n^{(j)}\}$ – последовательность, отвечающая элементу $u^{(j)}$. Применяя неравенство 2.7(g), получаем

$$|1 - \widehat{\nu}(u - u_n^{(j)})| \le |\widehat{\nu}(u - u_n^{(j)}) - \widehat{\nu}(u^{(j)} - u_n^{(j)})| + |1 - \widehat{\nu}(u^{(j)} - u_n^{(j)})|$$

$$\le \sqrt{2}|1 - \widehat{\nu}(u - u^{(j)})|^{1/2} + |1 - \widehat{\nu}(u^{(j)} - u_n^{(j)})|. \tag{6.8}$$

Как было отмечено выше, $\varphi(y_n) \to 0$ тогда и только тогда, когда $\widehat{\nu}(y_n) \to 1$. Поэтому из (6.8) вытекает замкнутость A.

Докажем теперь, что фактор-группа Y/A не содержит неограниченно делимых элементов. Допустим противное. Тогда существует элемент $u_0 \notin A$, неограниченная последовательность чисел $\{p_n\} \subset \mathbb{Z}$ и последовательность $\{y_n\} \subset Y$ такие, что

$$u_0 - p_n y_n \in A \tag{6.9}$$

для всех натуральных n. Не ограничивая общности, мы можем считать выполненным неравенство $p_n \ge n^2$. Поэтому существует такая последовательность целых чисел $\{q_n\}$, что

$$\frac{nq_n}{p_n} \to 1. \tag{6.10}$$

Из (6.9) и определения множества A следует, что существует такой элемент $v_n \in Y$, что $v_n \in Y^{(p_n)}$ и $\varphi(u_0 - p_n y_n - v_n)$ сколь угодно близко к нулю. Значит, существует такая последовательность $\{w_n\} \subset Y$, что $w_n \in Y^{(p_n)}$ и $\varphi(u_0 - w_n) \to 0$. Положим

$$u_n = \frac{nq_n w_n}{p_n},\ n = 1, 2, \ldots.$$

Применяя неравенство 2.7(g), получаем

$$|1 - \widehat{\nu}(u_0 - u_n)| \le |\widehat{\nu}(u_0 - u_n) - \widehat{\nu}(u_0 - w_n)| + |1 - \widehat{\nu}(u_0 - w_n)|$$

$$\leq \sqrt{2}|1-\widehat{\nu}(u_n-w_n)|^{1/2}+|1-\widehat{\nu}(u_0-w_n)|. \tag{6.11}$$

Так как $\varphi(u_0-w_n)\to 0$, то $\widehat{\nu}(u_0-w_n)\to 1$. Отсюда с учетом неравенства 2.7(g) следует, что $\widehat{\nu}(w_n)\to\widehat{\nu}(u_0)$, а значит

$$\varphi(w_n)\to\varphi(u_0). \tag{6.12}$$

Из (6.10) и (6.12), учитывая (6.7), получаем

$$\varphi(u_n-w_n)=\varphi\left(\frac{(nq_n-p_n)w_n}{p_n}\right)=\left(\frac{nq_n}{p_n}-1\right)^2\varphi(w_n)\to 0.$$

Значит, $\widehat{\nu}(u_n-w_n)\to 1$, и следовательно, из (6.11) находим $\widehat{\nu}(u_0-u_n)\to 1$, т.е. $\varphi(u_0-u_n)\to 0$. Так как $u_n\in Y^{(n)}$, то мы получили противоречие с предположением $u_0\notin A$.

Итак, мы доказали, что из условия (i) вытекает, что $Y=A$. Пусть $u,v\in Y$. Тогда можно найти последовательности $\{u_n\}$ и $\{v_n\}$ такие, что $u_n,v_n\in Y^{(n)}$ и $\varphi(u-u_n)\to 0,\ \varphi(v-v_n)\to 0$. Из неравенства 2.7($g$) легко следует, что в таком случае выполнено:

$$\varphi(u_n)\to\varphi(u),\quad \varphi(v_n)\to\varphi(v),\quad \varphi(u_n+v_n)\to\varphi(u+v),\quad \varphi(u_n-v_n)\to\varphi(u-v). \tag{6.13}$$

По теореме Бохнера функция $\exp\{-\varphi(y)\}$ положительно определена. Поэтому для любых $y_1,y_2,\ldots,y_m\in Y,\ z_1,z_2,\ldots,z_m\in\mathbb{C}$ выполнено неравенство 2.8 (i), которое принимает вид

$$\sum_{i,j=1}^{m}\exp\{-\varphi(y_i-y_j)\}z_i\bar{z}_j\geq 0.$$

Полагая здесь $m=4,\ y_1=-y_2=u_n/n,\ y_3=-y_4=v_n/n,\ z_1=z_2=-z_3=-z_4=n$, получаем

$$[2\exp\{-(4/n^2)\varphi(u_n)\}+2\exp\{-(4/n^2)\varphi(v_n)\}-4\exp\{-(1/n^2)\varphi(u_n-v_n)\}$$

$$-4\exp\{-(1/n^2)\varphi(u_n+v_n)\}+4]n^2\geq 0.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу, когда $n\to\infty$, и учитывая (6.11) находим

$$4\varphi(u+v)+4\varphi(u-v)-8\varphi(u)-8\varphi(v)\geq 0,$$

или

$$2[\varphi(u)+\varphi(v)]\leq\varphi(u+v)+\varphi(u-v). \tag{6.14}$$

Заменяя здесь u на $u+v$ и v на $u-v$ и учитывая (6.7) , получаем

$$\varphi(u+v)+\varphi(u-v)\leq 2[\varphi(u)+\varphi(v)]. \tag{6.15}$$

Из (6.14) и (6.15) вытекает, что функция $\varphi(y)$ удовлетворяет уравнению 2.16(ii), т.е. $\nu\in\Gamma(X)$. Итак, $\Gamma_U(X)\subset\Gamma(X)$, а следовательно, с учетом включения (6.1), достаточность условия (i) доказана.

Для доказательства достаточности условия (ii) заметим, что носитель произвольного распределения $\gamma\in\Gamma_U(X)$ содержится в классе смежности компоненты связности нуля c_X группы X. Действительно, пусть $\nu=\gamma*\bar{\gamma}$. Учитывая предложение 2.2, достаточно проверить, что $\sigma(\nu)\subset c_X$. Пусть $y_0\in b_Y$. Поскольку y_0 – компактный элемент, то $n_l y_0\to\widetilde{y}\in Y$ для некоторой последовательности $n_l\to\infty$ целых чисел. Учитывая (6.7), получаем

$$\varphi(y_0)=\lim_{n_l\to\infty}\frac{\varphi(\widetilde{y})}{n_l^2}=0.$$

Значит, $\varphi(y) = 0$ при $y \in b_Y$. Из предложения 2.13 тогда вытекает, что $\sigma(\nu) \subset A(X, b_Y)$. По теореме 1.9.3 $A(X, b_Y) = c_X$. Следовательно, $\sigma(\nu) \subset c_X$.

Теперь легко проверить достаточность условия (ii). Заменим распределение γ его сдвигом $\gamma' = \gamma * E_x$ так, чтобы $\sigma(\gamma') \subset c_X$. Но если группа X удовлетворяет условию (ii), то, как следует из теорем 1.9.2 и 1.9.3 $c_X \cong \mathbb{T}$. Поскольку $\Gamma_U(\mathbb{T}) = \Gamma(\mathbb{T})$ и $\gamma' \in \Gamma_U(c_X)$, то $\gamma' \in \Gamma(c_X)$. Следовательно, $\gamma \in \Gamma(X)$. Значит $\Gamma_U(X) \subset \Gamma(X)$. Учитывая включение (6.1), достаточность условия (ii) также доказана. $\square$

Глава III

Теорема Каца–Бернштейна на локально компактных абелевых группах

Согласно классической теореме Каца–Бернштейна, если ξ_1 и ξ_2 – независимые случайные величины такие, что их сумма и разность независимы, то ξ_j – гауссовские. Пусть X – локально компактная абелева группа, удовлетворяющая второй аксиоме счетности. В этой главе мы изучаем распределения независимых случайных величин ξ_1 и ξ_2 со значениями в группе X и имеющие независимые сумму и разность. Вначале мы даем полное описание групп X, на которых такие распределения инвариантны относительно некоторой компактной подгруппы K группы X и при естественном гомоморфизме $X \mapsto X/K$ индуцируют на фактор-группе X/K гауссовские распределения. Для этого необходимо и достаточно, чтобы связная компонента нуля группы X не содержала элементов порядка 2. Поэтому, если связная компонента нуля группы X содержит элементы порядка 2, то для таких групп возникает естественная задача описания распределений независимых случайных величин ξ_j, принимающих значения в X и имеющих независимую сумму и разность. Эта задача решается для групп $\mathbb{R} \times \mathbb{T}$ и для $\mathbf{a}$-адических соленоидов $\Sigma_{\mathbf{a}}$. Мы изучаем также распределения независимых одинаково распределенных случайных величин ξ_1 и ξ_2 со значениями в группе X и имеющие независимые сумму и разность (гауссовские распределения в смысле Бернштейна).

§7. Локально компактные абелевы группы, на которых верна теорема Каца–Бернштейна

Пусть X – локально компактная абелева группа, удовлетворяющая второй аксиоме счетности, Y – ее группа характеров. В этом параграфе мы опишем группы X, обладающие тем свойством, что если ξ_1 и ξ_2 – независимые случайные величины со значениями в группе X и с распределениями μ_1 и μ_2 такие, что $\xi_1 + \xi_2$ и $\xi_1 - \xi_2$ независимы, то μ_j инвариантны относительно некоторой компактной подгруппы K группы X и при естественном гомоморфизме $X \mapsto X/K$ индуцируют на фактор-группе X/K гауссовские распределения.

7.1. Лемма. *Пусть ξ_1 и ξ_2 – независимые случайные величины со значениями в группе X и с распределениями μ_1 и μ_2. Для того чтобы $\xi_1 + \xi_2$ и $\xi_1 - \xi_2$ были независимы, необходимо и достаточно, чтобы характеристические функции $\widehat{\mu}_j(y)$ удовлетворяли уравнению*

$$(i) \qquad \widehat{\mu}_1(u+v)\widehat{\mu}_2(u-v) = \widehat{\mu}_1(u)\widehat{\mu}_2(u)\widehat{\mu}_1(v)\widehat{\mu}_2(-v), \quad u, v \in Y.$$

Доказательство. Напомним, что если ξ — случайная величина со значениями в группе X и с распределением μ, то характеристической функцией распределения μ является математическое ожидание $\widehat{\mu}(y) = \mathbf{E}[(\xi, y)]$. Заметим, что $\xi_1 + \xi_2$ и $\xi_1 - \xi_2$ независимы тогда и только тогда, когда для любых $u, v \in Y$ выполнено равенство

$$\mathbf{E}[(\xi_1 + \xi_2, u)(\xi_1 - \xi_2, v)] = \mathbf{E}[(\xi_1 + \xi_2, u)] \; \mathbf{E}[(\xi_1 - \xi_2, v)]. \tag{7.1}$$

Учитывая, что случайные величины ξ_1 и ξ_2 независимы, преобразуем левую часть равенства (7.1) следующим образом

$$\mathbf{E}[(\xi_1+\xi_2,u)(\xi_1-\xi_2,v)] = \ \mathbf{E}[(\xi_1,u+v)(\xi_2,u-v)]$$

$$= \ \mathbf{E}[(\xi_1,u+v)]\ \mathbf{E}[(\xi_2,u-v)] = \widehat{\mu}_1(u+v)\widehat{\mu}_2(u-v), \quad u,v\in Y.$$

Аналогично преобразуем правую часть равенства (7.1)

$$\mathbf{E}[(\xi_1+\xi_2,u)]\ \mathbf{E}[(\xi_1-\xi_2,v)] = \ \mathbf{E}[(\xi_1,u)(\xi_2,u)]\ \mathbf{E}[(\xi_1,v)(\xi_2,-v)]$$

$$= \ \mathbf{E}[(\xi_1,u)]\ \mathbf{E}[(\xi_2,u)]\ \mathbf{E}[(\xi_1,v)]\ \mathbf{E}[(\xi_2,-v)] = \widehat{\mu}_1(u)\widehat{\mu}_2(u)\widehat{\mu}_1(v)\widehat{\mu}_2(-v), \quad u,v\in Y.$$

□

Уравнение (i) называется *функциональным уравнением Каца–Бернштейна*. Из (i) вытекает, в частности, что гауссовское распределение $\gamma\in\Gamma(X)$ обладает тем свойством, что если ξ_1 и ξ_2 – независимые одинаково распределенные с распределением γ случайные величины со значениями в X, то $\xi_1+\xi_2$ и $\xi_1-\xi_2$ независимы. Таким же свойством обладают и некоторые идемпотентные распределения на X. Обозначим множество таких идемпотентных распределений через $I_B(X)$. Другими словами, $m_K\in I_B(X)$, если из того, что ξ_1 и ξ_2 независимые одинаково распределенные случайные величины со значениями в группе X и с распределением m_K следует, что их сумма и разность независимы.

Для описания множества $I_B(X)$ нам понадобится

7.2. Лемма. *Пусть n – натуральное число, а G – замкнутая подгруппа группы X. Тогда следующие утверждения эквивалентны*:

(i) $\overline{G^{(n)}}=G$;

(ii) если $ny\in A(Y,G)$, то $y\in A(Y,G)$.

Доказательство. $(i)\Rightarrow(ii)$. По теореме 1.9.2 $G^*\cong Y/A(Y,G)$. Очевидно, что (ii) равносильно тому, что $(Y/A(Y,G))_{(n)}=\{0\}$. Поэтому равносильность (i) и (ii) вытекает из теоремы 1.9.5.

□

7.3. Группы Корвина. Группа называется *группой Корвина*, если $X^{(2)}=X$. Приведем некоторые примеры.

Группы $\mathbb{R},\ \mathbb{T},\ \mathbb{Q},\ \mathbb{Z}(2k-1),\ \mathbb{Z}(p^\infty),\ \Sigma_{\mathbf{a}},\ \Delta_p$, при $p\neq 2$ – группы Корвина.

Группы $\mathbb{Z},\ \mathbb{Z}(2k),\ \Delta_2$ – не группы Корвина.

7.4. Предложение. *Пусть K – компактная подгруппа группы X. Тогда следующие утверждения эквивалентны*:

(i) K – группа Корвина;

(ii) если $2y\in A(Y,K)$, то $y\in A(Y,K)$;

(iii) $m_K\in I_B(X)$.

Доказательство. Эквивалентность (i) и (ii) вытекает из леммы 7.2 так как $\overline{K^{(2)}}=K^{(2)}$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Как отмечено в лемме 7.1, мы должны проверить, что характеристическая функция $\widehat{m}_K(y)$ удовлетворяет уравнению 7.1(i), которое принимает вид

$$\widehat{m}_K(u+v)\widehat{m}_K(u-v) = \widehat{m}_K^2(u)\widehat{m}_K^2(v), \quad u, v \in Y. \tag{7.2}$$

Воспользуемся представлением 2.14 (i) характеристической функции $\widehat{m}_K(y)$. Если $u, v \in A(Y, K)$, то $u \pm v \in A(Y, K)$ и обе части уравнения (7.2) равны 1. Если либо $u \in A(Y, K)$, $v \notin A(Y, K)$, либо $v \in A(Y, K)$, $u \notin A(Y, K)$, то $u + v \notin A(Y, K)$ и обе части уравнения (7.2) равны нулю. Если $u, v \notin A(Y, K)$, то правая часть уравнения (7.2) равна нулю. Если при этом левая часть уравнения (7.2) отлична от нуля, то мы имеем $u \pm v \in A(Y, K)$. Но тогда $2u \in A(Y, K)$, и по (ii) $u \in A(Y, K)$, что противоречит условию. Следовательно, и левая часть уравнения (7.2) равна нулю.

$(iii) \Rightarrow (ii)$. Как отмечено в 7.1, из (iii) вытекает, что характеристическая функция $\widehat{m}_K(y)$ удовлетворяет уравнению (7.2). Пусть $2y \in A(Y, K)$. Положим в (7.2) $u = v = y$. Тогда левая часть уравнения (7.2) равна 1. Следовательно, и правая часть уравнения (7.2) равна 1. Учитывая 2.14(i), это означает, что $y \in A(Y, K)$. $\square$

Наша цель состоит в описании групп X, которые обладают следующим свойством. Если ξ_1 и ξ_2 – независимые случайные величины со значениями в группе X и с распределениями μ_1 и μ_2, то из независимости $\xi_1 + \xi_2$ и $\xi_1 - \xi_2$ вытекает, что $\mu_j \in \Gamma(X) * I(X)$. Это включение означает, что распределения μ_j инвариантны относительно некоторой компактной подгруппы K группы X и при естественном гомоморфизме $X \mapsto X/K$ индуцируют на фактор-группе X/K гауссовские распределения.

Для доказательства основной теоремы этого параграфа нам понадобится ряд лемм.

7.5. Лемма. *Пусть ξ_1 и ξ_2 – независимые случайные величины со значениями в группе X и с распределениями μ_1 и μ_2. Если $\xi_1 + \xi_2$ и $\xi_1 - \xi_2$ независимы, то распределения μ_j можно так заменить их сдвигами μ'_j, что $\sigma(\mu'_j) \subset M$, $j = 1, 2$, где M – подгруппа в X, топологически изоморфная группе вида $\mathbb{R}^m \times K$, $m \geq 0$, а K – компактная группа Корвина.*

Доказательство. Учитывая структурную теорему 1.11.1 для локально компактных абелевых групп, мы можем предполагать, не ограничивая общности, что $X = \mathbb{R}^m \times G$, $Y = \mathbb{R}^m \times H$, где $m \geq 0$, $H \cong G^*$ и каждая из групп G и H содержит компактную открытую подгруппу. Обозначим через L компактную открытую подгруппу в H. Положим

$$N_1 = \{y \in Y : \widehat{\mu}_1(y) \neq 0\}, \quad N_2 = \{y \in Y : \widehat{\mu}_2(y) \neq 0\}, \quad N = N_1 \cap N_2.$$

Из леммы 7.1 следует, что характеристические функции $\widehat{\mu}_j(y)$ удовлетворяют уравнению 7.1(i). Из 7.1(i) вытекает, что N – подгруппа в Y, очевидно, открытая.

Рассмотрим пересечение $B = N \cap L$. Поскольку каждая открытая подгруппа замкнута, B – компактная открытая подгруппа в H. Полагая в уравнении 7.1(i) $u = v = y$ и $u = -v = y$, мы получаем

$$\widehat{\mu}_1(2y) = \widehat{\mu}_1^2(y)|\widehat{\mu}_2(y)|^2, \qquad \widehat{\mu}_2(2y) = |\widehat{\mu}_1(y)|^2\widehat{\mu}_2^2(y), \quad y \in Y. \tag{7.3}$$

Из (7.3) следует, что при любом натуральном n выполнено

$$|\widehat{\mu}_j(2^n y)| = |\widehat{\mu}_1(y)\widehat{\mu}_2(y)|^{2^{2n-1}}, \quad j = 1, 2, \quad y \in Y. \tag{7.4}$$

Отсюда при $n = 1$ вытекает, что

$$|\widehat{\mu}_1(y)| = |\widehat{\mu}_2(y)|, \quad y \in \overline{Y^{(2)}}. \tag{7.5}$$

Пусть $y \in B$. Поскольку B – компакт, существует сходящаяся подпоследовательность $2^{m_k}y \to y_0 \in B$. Из (7.4) мы получаем

$$|\widehat{\mu}_j(y_0)| = \lim_{k\to\infty} |\widehat{\mu}_j(2^{m_k}y)| = \lim_{k\to\infty} |\widehat{\mu}_1(y)\widehat{\mu}_2(y)|^{2^{2m_k-1}}, \quad j = 1, 2, \quad y \in Y. \tag{7.6}$$

Если $|\widehat{\mu}_1(y)\widehat{\mu}_2(y)| < 1$, то предел в правой части (7.6) равен нулю, что невозможно, ввиду $y_0 \in B \subset N$. Следовательно, $|\widehat{\mu}_1(y)| = |\widehat{\mu}_2(y)| = 1$ при $y \in B$. Как следует из 2.7(e), мы можем заменить распределения μ_j их сдвигами μ'_j так, чтобы было выполнено $\widehat{\mu}'_j(y) = 1$ при $y \in B$. Очевидно, что характеристические функции $\widehat{\mu}'_j(y)$ также удовлетворяют уравнению 7.1(i). Применяя предложение 2.13, получаем $\sigma(\mu'_j) \subset A(X, B)$. Из теорем 1.7.1 и 1.9.2 получаем $A(X, B) \cong (Y/B)^* = ((\mathbb{R}^m \times H)/B)^* \cong \mathbb{R}^m \times (H/B)^*$. Обозначим $F = (H/B)^*$. Поскольку подгруппа B открыта в H, фактор-группа H/B дискретна, а следовательно, по теореме 1.6.1 группа F компактна.

Мы редуцировали доказательство леммы к случаю, когда $X = \mathbb{R}^m \times F$, $Y = \mathbb{R}^m \times D$, где F – компактная группа, $D \cong F^*$, а μ_j – распределения на X, характеристические функции которых удовлетворяют уравнению 7.1(i). По теореме 1.6.1 группа D дискретна. Пусть D_2 – подгруппа в D, состоящая из элементов, порядки которых – степени числа 2. Пусть $y \in D_2$. Тогда $2^n y = 0$ при некотором натуральном n. Из (7.4) следует тогда, что $|\widehat{\mu}_1(y)| = |\widehat{\mu}_2(y)| = 1$ при $y \in D_2$. Как следует из 2.7(e), мы можем заменить распределения μ_j их сдвигами μ'_j так, чтобы было выполнено $\widehat{\mu}'_j(y) = 1$ при $y \in D_2$. Применяя предложение 2.13, получаем $\sigma(\mu'_j) \subset A(X, D_2)$. Обозначим $M = A(X, D_2)$. Очевидно, что $M = \mathbb{R}^m \times K$, где K – компактная группа. Из теорем 1.9.1 и 1.9.2 получаем $M^* \cong Y/D_2$. Ясно, что фактор-группа Y/D_2 не содержит элементов порядка 2. Из теоремы 1.9.5 получаем $\overline{M^{(2)}} = M$. Поскольку $\overline{M^{(2)}} = M^{(2)}$, то M – группа Корвина, а значит, K – также группа Корвина. Возвращаясь к исходным распределениям μ_j, получаем требуемое утверждение. □

7.6. Лемма. *Пусть n – натуральное число. Следующие утверждения эквивалентны:*

(i) *для любой компактной подгруппы G группы X такой, что $G^{(n)} = G$, выполнено $(G^*)^{(n)} = G^*$;*

(ii) *связная компонента нуля c_X группы X удовлетворяет условию: $\{x \in c_X : nx = 0\} = \{0\}$.*

Доказательство. (i) $\Rightarrow$ (ii). По теореме 1.11.2 $c_X \cong \mathbb{R}^m \times K$, где $m \geq 0$, а K – связная компактная группа. Из теоремы 1.9.6 следует, что для любого натурального l выполнено $K^{(l)} = K$. Тогда из (i) получаем $(K^*)^{(n)} = K^*$, а значит $(c_X^*)^{(n)} = c_X^*$. По теореме 1.9.5 из последнего равенства вытекает (ii).

(ii) $\Rightarrow$ (i). Пусть G – такая компактная подгруппа в X, что $G^{(n)} = G$. Положим $H = G^*$. По теореме 1.6.1 группа H дискретна. Проверим, что $H^{(n)} = H$. Рассмотрим в H подгруппу $\widetilde{H}$, состоящую из всех элементов, неограниченно делимых на n, т.е.

$$\widetilde{H} = \bigcap_{l=1}^{\infty} H^{(n^l)}.$$

Проверим вначале, что фактор-группа $L = H/\widetilde{H}$ не содержит отличных от нуля неограниченно делимых на n элементов и не содержит элементов конечного порядка. Пусть $[h_0] \in L$ – неограниченно делимый на n элемент. Тогда уравнение

$$n^l[t] = [h_0] \tag{7.7}$$

имеет решение в L для любого натурального l. Равенство (7.7) равносильно тому, что $n^l t - h_0 \in \widetilde{H}$, т.е. $n^l t - h_0 = n^l y$ при некотором $y \in H$. Отсюда $h_0 = n^l(t-y)$, т.е. $h_0 \in \widetilde{H}$, или $[h_0] = 0$. Поэтому в L нет отличных от нуля неограниченно делимых на n элементов. Пусть теперь $[h_0] \in L$ – элемент конечного порядка p. Можно считать, не ограничивая общности, что p – простое число. Если n не делится на p, то $[h_0]$ – неограниченно делимый на n элемент, и по доказанному $[h_0] = 0$. Поэтому считаем, что p – делитель n. Имеем, $p[h_0] = 0$, т.е. $ph_0 \in \widetilde{H}$. Значит, для любого натурального l существует такой элемент $z \in H$, что выполнено $ph_0 = n^{l+1}z$. Тогда

$$p\left(h_0 - \frac{n^{l+1}}{p}z\right) = 0. \tag{7.8}$$

Так как $G^{(n)} = G$, то по теореме 1.9.5 $\{h \in H : nh = 0\} = \{0\}$. Поскольку p – делитель n, то

$$\{h \in H : ph = 0\} = \{0\}. \tag{7.9}$$

Из (7.8) и (7.9) тогда получаем $h_0 = n^l\left(\frac{nz}{p}\right)$, т.е. $h_0 \in \widetilde{H}$ и $[h_0] = 0$.

Итак, L – дискретная группа без кручения. По теоремам 1.6.1 и 1.6.2 группа L^* компактна и связна. По теореме 1.9.2 $L^* \cong A(G, \widetilde{H})$. Поэтому $A(G, \widetilde{H}) \subset c_X$ и из (ii) следует, что

$$\{x \in A(G, \widetilde{H}) : nx = 0\} = \{0\}.$$

По теореме 1.9.5 отсюда вытекает, что $L^{(n)} = L$, т.е. группа L состоит из неограниченно делимых на n элементов. Значит, $L = \{0\}$. Таким образом, $H = \widetilde{H}$, а значит, $H^{(n)} = H$. $\square$

7.7. Лемма. *Следующие утверждения эквивалентны:*

(i) *для любой компактной подгруппы Корвина K группы X, фактор-группа X/K не содержит подгруппы, топологически изоморфной $\mathbb{T}$;*

(ii) *если K – компактная подгруппа Корвина в X, то K^* – группа Корвина.*

Доказательство. $(i) \Rightarrow (ii)$. Пусть K компактная подгруппа Корвина в X. Обозначим $L = K^*$ и проверим, что $L^{(2)} = L$. Из теоремы 1.9.5 вытекает, что в L нет элементов порядка 2. Значит, все элементы конечного порядка, принадлежащие L, имеют нечетный порядок, и поэтому лежат в $L^{(2)}$. Проверим, что любой элемент бесконечного порядка, принадлежащий L, лежит в $L^{(2)}$. Пусть $h_0 \notin L^{(2)}$, а M – подгруппа в L, порожденная элементом h_0. Пусть $h \in L$ и $2h \in M$. Если $2h = (2m-1)h_0$, то $h_0 = 2(mh_0 - h) \in L^{(2)}$, что противоречит выбору h_0. Значит, если $2h \in M$, то $2h = 2mh_0$. Поскольку в L нет элементов порядка 2, то $h = mh_0$. Таким образом, подгруппа M обладает свойством, что если $2h \in M$, то $h \in M$. Учитывая теорему 1.9.1 из леммы 7.2 получаем, что аннулятор $A(K, M)$ – группа Корвина, очевидно компактная. Применяя теоремы 1.9.1 и 1.9.2, получаем $(K/A(K, M))^* \cong M \cong \mathbb{Z}$. Отсюда $K/A(K, M) \cong \mathbb{T}$. Но это противоречит (i), так как если группа X удовлетворяет условию (i), то этому условию удовлетворяет и любая замкнутая подгруппа группы X. Таким образом, (ii) доказано.

$(ii) \Rightarrow (i)$. Проверим вначале, что если G – компактная подгруппа Корвина в X, то фактор-группа X/G также удовлетворяет условию (ii). Пусть $p : X \mapsto X/G$ – естественный гомоморфизм, K – компактная подгруппа Корвина в X/G. Положим $\widetilde{K} = p^{-1}(K)$. Тогда $K \cong \widetilde{K}/G$ и в силу компактности групп K и G, группа $\widetilde{K}$ также компактна. Очевидно, что $\widetilde{K}$ – группа Корвина. Из (ii) следует, что $\widetilde{K}^*$ – группа Корвина. По теореме 1.9.2 $K^* \cong A(\widetilde{K}^*, G)$. Пусть $y \in A(\widetilde{K}^*, G)$. Тогда $y = 2y'$, $y' \in \widetilde{K}^*$. Так как G – группа Корвина, то по лемме 7.2 $y' \in A(\widetilde{K}^*, G)$, т.е. K^* – группа Корвина.

Если условие (i) не выполнено, то существует такая компактная подгруппа Корвина K_0 группы X, что фактор-группа X/K_0 содержит подгруппу F, топологически изоморфную $\mathbb{T}$. Так как $\mathbb{T}$ – компактная группа Корвина, то из сказанного выше вытекает, что группа F^* – также должна быть группой Корвина, что, очевидно, неверно. Следовательно, выполнено условие (i). $\square$

7.8. Лемма. *Пусть $X = \mathbb{T}$. Тогда существуют независимые случайные величины ξ_1 и ξ_2 со значениями в группе X и с распределениями μ_1 и μ_2 с необращающимися в нуль характеристическими функциями такие, что $\xi_1 + \xi_2$ и $\xi_1 - \xi_2$ независимы, а $\mu_1, \mu_2 \notin \Gamma(X)$.*

Доказательство. Поскольку $Y \cong \mathbb{Z}$, элементы группы Y будем обозначать через $n \in \mathbb{Z}$. Пусть $a > 0$ и $b > 0$. Рассмотрим на группе Y функции

$$g_1(n) = \begin{cases} \exp\{-an^2\}, & \text{если} \quad n \in \mathbb{Z}^{(2)}, \\ b\exp\{-an^2\}, & \text{если} \quad n \notin \mathbb{Z}^{(2)}, \end{cases} \tag{7.10}$$

$$g_2(n) = \begin{cases} \exp\{-an^2\}, & \text{если} \quad n \in \mathbb{Z}^{(2)}, \\ b^{-1}\exp\{-an^2\}, & \text{если} \quad n \notin \mathbb{Z}^{(2)}. \end{cases} \tag{7.11}$$

Выберем числа a и b таким образом, чтобы были выполнены неравенства

$$\sum_{n\in\mathbb{Z},\ n\neq 0} g_j(n) < 1, \quad j = 1, 2.$$

Отсюда следует, что

$$\rho_j(t) = 1 + \sum_{n\in\mathbb{Z},\ n\neq 0} g_j(n)\exp\{-int\} > 0, \quad t \in \mathbb{R},\ j = 1, 2.$$

Очевидно также, что

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \rho_j(t)dt = 1, \quad j = 1, 2.$$

Пусть μ_j – распределение на группе X с плотностью $r_j(e^{it}) = \rho_j(t)$ относительно m_X. Тогда $\widehat{\mu}_j(n) = g_j(n)$. Пусть ξ_1 и ξ_2 – независимые случайные величины со значениями в группе X и с распределениями μ_1 и μ_2. Очевидно, что $\widehat{\mu}_j(n) \neq 0$, $n \in \mathbb{Z}$, и $\mu_j \notin \Gamma(X)$. Проверим, что $\xi_1 + \xi_2$ и $\xi_1 - \xi_2$ независимы, и тем самым, лемма будет доказана. В силу леммы 7.1, для этого достаточно убедиться, что характеристические функции $\widehat{\mu}_j(n)$ удовлетворяют уравнению 7.1(i). Рассматривая последовательно случаи $m, n \in \mathbb{Z}^{(2)}$; $m \in \mathbb{Z}^{(2)}, n \notin \mathbb{Z}^{(2)}$; $n \in \mathbb{Z}^{(2)}, m \notin \mathbb{Z}^{(2)}$; $m, n \notin \mathbb{Z}^{(2)}$, убеждаемся в этом. $\square$

Как будет доказано в §8 (см. следствие 8.6), если ξ_1 и ξ_2 – независимые случайные величины со значениями в группе $X = \mathbb{T}$ и с распределениями μ_1 и μ_2, имеющими необращающиеся а нуль характеристические функции, то из независимости $\xi_1+\xi_2$ и $\xi_1-\xi_2$ вытекает, что распределения μ_j можно так заменить их сдвигами μ_j', что характеристические функции распределений μ_j' определяются формулами (7.10) и (7.11).

7.9. Лемма. *Пусть группа X не содержит подгруппы, топологически изоморфной $\mathbb{T}$. Пусть ξ_1 и ξ_2 – независимые случайные величины со значениями в группе X, имеющие распределения μ_1 и μ_2 с необращающимися в нуль характеристическими функциями. Если $\xi_1+\xi_2$ и $\xi_1-\xi_2$ независимы, то $\mu_1,\mu_2\in\Gamma(X)$ и $\mu_1=\mu_2*E_x,\ x\in X$.*

Доказательство. В силу леммы 7.1 характеристические функции $\widehat{\mu}_j(y)$ удовлетворяют уравнению 7.1(i). Заменяя в уравнении 7.1(i) v на $-v$, получаем

$$\widehat{\mu}_1(u-v)\widehat{\mu}_2(u+v)=\widehat{\mu}_1(u)\widehat{\mu}_2(u)\widehat{\mu}_1(-v)\widehat{\mu}_2(v),\quad u,v\in Y. \tag{7.12}$$

Пусть $\lambda=\mu_1*\mu_2$. Тогда из 2.7(c) следует, что $\widehat{\lambda}(y)=\widehat{\mu}_1(y)\widehat{\mu}_2(y)$. Перемножая уравнения 7.1(i) и (7.12), получаем

$$\widehat{\lambda}(u+v)\widehat{\lambda}(u-v)=\widehat{\lambda}^2(u)|\widehat{\lambda}(v)|^2,\quad u,v\in Y. \tag{7.13}$$

Пусть $\nu=\lambda*\bar{\lambda}$. Тогда из 2.7$(c)$ и 2.7(d) получаем $\widehat{\nu}(y)=|\lambda(y)|^2>0$. Из (7.13) находим

$$\widehat{\nu}(u+v)\widehat{\nu}(u-v)=\widehat{\nu}^2(u)\widehat{\nu}^2(v),\quad u,v\in Y. \tag{7.14}$$

Положим $\varphi(y)=-\log\widehat{\nu}(y)$. Из (7.14) следует, что характеристическая функция $\widehat{\nu}(y)$ представима в виде

$$\widehat{\nu}(y)=\exp\{-\varphi(y)\},\quad y\in Y,$$

где $\varphi(y)$ – непрерывная неотрицательная функция на Y, удовлетворяющая уравнению 2.16(ii). Значит, $\nu\in\Gamma(X)$. Распределения μ_j – делители ν. Поскольку группа X не содержит подгруппы, топологически изоморфной $\mathbb{T}$, то по теореме 4.6 $\mu_j\in\Gamma(X)$.

Мы имеем

$$\widehat{\mu}_j(y)=(x_j,y)\exp\{-\varphi_j(y)\},$$

где $x_j\in X$, а $\varphi_j(y)$ – непрерывная неотрицательная функция на Y, удовлетворяющая уравнению 2.16(ii). Подставляя выражения для $\widehat{\mu}_j(y)$ в уравнение 7.1(i), получаем

$$\varphi_1(u+v)+\varphi_2(u-v)=\varphi_1(u)+\varphi_2(u)+\varphi_1(v)+\varphi_2(-v),\quad u,v\in Y. \tag{7.15}$$

Воспользуемся замечанием 3.3 и перейдем в (7.15) к соответствующим функциям $\psi_j(u,v)$. Имеем,

$$\psi_1(u,v)=\psi_2(u,v),\ u,v\in Y,$$

а значит $\varphi_1(y)=\varphi_2(y),\ y\in Y$. Следовательно, $\mu_1=\mu_2*E_x,\ x\in X$. $\square$

Отметим, что как вытекает из леммы 7.8, утверждение леммы 7.9 неверно, если группа X содержит подгруппу, топологически изоморфную $\mathbb{T}$.

Докажем теперь основную теорему этого параграфа.

7.10. Теорема. *Справедливы следующие утверждения.*

(I) *Предположим, что связная компонента нуля группы X не содержит элементов порядка 2. Пусть ξ_1 и ξ_2 – независимые случайные величины со значениями в группе X и с распределениями μ_1 и μ_2 такие, что $\xi_1+\xi_2$ и $\xi_1-\xi_2$ независимы. Тогда $\mu_1, \mu_2 \in \Gamma(X) * I_B(X)$ и $\mu_1 = \mu_2 * E_x,\ x \in X$.*

(II) *Если связная компонента нуля группы X содержит элементы порядка 2, то существует независимые случайные величины ξ_1 и ξ_2 со значениями в группе X и с распределениями λ_1 и λ_2 такие, что $\xi_1+\xi_2$ и $\xi_1-\xi_2$ независимы, а $\lambda_1, \lambda_2 \notin \Gamma(X) * I(X)$.*

Доказательство. (I). По лемме 7.5 можно считать, что $X = \mathbb{R}^m \times K$, где $m \geq 0$, а K – компактная группа Корвина. Из леммы 7.6, примененной при $n=2$, получаем, что $(K^*)^{(2)} = K^*$, а следовательно $Y^{(2)} = Y$. Очевидно также, что $X^{(2)} = X$. Поскольку $\overline{X^{(2)}} = X^{(2)}$, то из 1.13 (b) и 1.13(d) вытекает, что f_2 – автоморфизм групп X и Y, т.е. X и Y – *группы с однозначным делением на два.*

В силу леммы 7.1 характеристические функции $\widehat{\mu}_j(y)$ удовлетворяют уравнению 7.1(i), а значит, и уравнениям (7.4) и (7.5). Поскольку $Y^{(2)} = Y$, то из (7.5) получаем, что $|\widehat{\mu}_1(y)| = |\widehat{\mu}_2(y)|$, $y \in Y$. Значит,

$$\{y \in Y : \widehat{\mu}_1(y) \neq 0\} = \{y \in Y : \widehat{\mu}_2(y) \neq 0\} = N.$$

Из уравнения 7.1(i) вытекает тогда, что N – подгруппа в Y. Очевидно, что подгруппа N открыта. Из уравнения (7.4) при $n=1$ следует, что если $2y \in N$, то $y \in N$. По лемме 7.2, примененной при $n=2$, получаем, что $F = A(X,N)$ – подгруппа Корвина. Так как N открытая подгруппа, то по теореме 1.9.4 F компактна. Из теорем 1.9.1 и 1.9.2 следует, что $(X/F)^* \cong N$. Легко видеть также, что X/F и N – группы с однозначным делением на два.

Рассмотрим сужения характеристических функций $\widehat{\mu}_1(y)$ и $\widehat{\mu}_2(y)$ на подгруппу N. В силу следствия 2.11 и леммы 7.1, эти сужения являются характеристическими функциями некоторых независимых случайных величин ζ_1 и ζ_2 со значениями в фактор-группе X/F, которые обладают тем свойством, что $\zeta_1+\zeta_2$ и $\zeta_1-\zeta_2$ независимы. Так как X/F – группа с однозначным делением на два, то X/F не содержит подгруппы, топологически изоморфной $\mathbb{T}$. По лемме 7.9, примененной к группе X/F, получаем, что сужения характеристических функций $\widehat{\mu}_j(y)$ на подгруппу N имеют представление

$$\widehat{\mu}_j(y) = (x_j, y)\exp\{-\varphi(y)\}, \quad y \in N, \tag{7.16}$$

где $x_j \in X$, а $\varphi(y)$ – непрерывная неотрицательная функция на N, удовлетворяющая уравнению 2.16(ii). По лемме 3.18 функцию $\varphi(y)$ можно продолжить с сохранением ее свойств с подгруппы N на Y. Обозначим продолженную функцию через $\widetilde{\varphi}(y)$. Пусть γ_j – гауссовское распределение на X с характеристической функцией

$$\widehat{\gamma}_j(y) = (x_j, y)\exp\{-\widetilde{\varphi}(y)\}, \quad y \in Y. \tag{7.17}$$

По теореме 1.9.1 $N = A(Y,F)$. Тогда из 2.14(i) следует, что характеристическая функция распределения Хаара m_F имеет вид

$$\widehat{m}_F(y) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad y \in N, \\ 0, & \text{если} \quad y \notin N. \end{cases} \tag{7.18}$$

Из (7.16)–(7.18) вытекает, что $\widehat{\mu}_j(y) = \widehat{\gamma}_j(y)\widehat{m}_F(y)$. Следовательно, применяя 2.7(b) и 2.7(c), получаем $\mu_j = \gamma_j * m_F$. Поскольку $\gamma_1 = \gamma_2 * E_x$, то и $\mu_1 = \mu_2 * E_x$. Утверждение (I) доказано.

Докажем теперь (II). Предположим, что связная компонента нуля группы X содержит элементы порядка 2. Из леммы 7.6 при $n = 2$ следует, что существует такая компактная подгруппа Корвина G группы X, что G^* – не группа Корвина. Тогда по лемме 7.7 существует такая компактная подгруппа Корвина K группы X, что фактор-группа X/K содержит подгруппу F, топологически изоморфную $\mathbb{T}$. Поэтому построенные при доказательстве леммы 7.8 распределения μ_j на группе $\mathbb{T}$ можно рассматривать, как некоторые распределения на фактор-группе X/K. Сохраним для них обозначения μ_j. Так как в силу теоремы 1.9.2 $(X/K)^* \cong A(Y, K)$, то можно считать, что характеристические функции $\widehat{\mu}_j(y)$ определены на $A(Y, K)$. Рассмотрим на группе Y функции

$$h_j(y) = \begin{cases} \widehat{\mu}_j(y), & \text{если} \quad y \in A(Y, K), \\ 0, & \text{если} \quad y \notin A(Y, K). \end{cases}$$

Так как $A(Y, K)$ – подгруппа, а $\widehat{\mu}_j(y)$ – положительно определенные функции, то по предложению 2.12 $h_j(y)$ – также положительно определенные функции. Поскольку K – компактная группа, то по теореме 1.9.4 аннулятор $A(Y, K)$ – открытая подгруппа, а следовательно, функции $h_j(y)$ непрерывны. По теореме Бохнера существуют распределения $\lambda_j \in \mathrm{M}^1(X)$ такие, что $\widehat{\lambda}_j(y) = h_j(y)$. Пусть ξ_j – независимые случайные величины со значениями в группе X и с распределениями λ_j. Проверим, что $\xi_1+\xi_2$ и $\xi_1-\xi_2$ независимы. В силу леммы 7.1 достаточно убедиться, что характеристические функции $\widehat{\lambda}_j(y)$ удовлетворяют уравнению 7.1(i). Пусть $u, v \in A(Y, K)$. Тогда, очевидно, 7.1(i) выполнено, поскольку функции $\widehat{\mu}_j(y)$ удовлетворяют уравнению 7.1(i). Если либо $u \in A(Y, K), v \notin A(Y, K)$, либо $v \in A(Y, K), u \notin A(Y, K)$, то обе части уравнения 7.1(i) обращаются в нуль. Если $u, v \notin A(Y, K)$, то правая часть в 7.1(i) равна нулю. Если при этом левая часть в 7.1(i) отлична от нуля, то выполнено $u \pm v \in A(Y, K)$. А тогда $2u \in A(Y, K)$. Поскольку K – компактная группа Корвина, то в силу леммы 7.2, примененной при $n = 2$, получаем, что $u \in A(Y, K)$, что противоречит предположению. Следовательно, и левая часть 7.1(i) равна нулю. Таким образом, характеристические функции $\widehat{\lambda}_j(y)$ удовлетворяют уравнению 7.1(i). Поскольку $\mu_j \notin \Gamma(X/K)$, то очевидно, что $\lambda_j \notin \Gamma(X) * I(X)$. Утверждение ($II$) также доказано. □

7.11. Замечание. Отметим, что при доказательстве утверждения (I) в теореме 7.10 мы не использовали теоремы Каца–Бернштейна. Поэтому эта теорема вытекает из теоремы 7.10, поскольку единственной компактной подгруппой Корвина K в группе $\mathbb{R}$ является $K = \{0\}$.

7.12. Замечание. Доказательство утверждения (I) в теореме 7.10 опиралось на лемму 7.9, при доказательстве которой была использована теорема 4.6 (групповой аналог теоремы Крамера). Доказательство теоремы 4.6, в свою очередь, опиралось на справедливость теоремы Крамера. Все известные доказательства теоремы Крамера используют теорию целых функций. Легко видеть, что вместо леммы 7.9, для доказательства утверждения (I) в теореме 7.10 достаточно, чтобы было справедливо следующее утверждение, более слабое, чем лемма 7.9.

Пусть X – группа с однозначным делением на два. Пусть ξ_1 и ξ_2 – независимые случайные величины со значениями в группе X, имеющие распределения μ_1 и μ_2 с необращающимися в *нуль характеристическими функциями. Если $\xi_1+\xi_2$ и $\xi_1-\xi_2$ независимы, то $\mu_1, \mu_2 \in \Gamma(X)$ и $\mu_1 = \mu_2 * E_x,\ x \in X$.*

Мы приведем ниже два доказательства этого утверждения, не использующие теоремы 4.6, а значит, не использующие и теории функций комплексного переменного. Нам понадобится следующая лемма.

7.13. Лемма. *Пусть ξ_1 и ξ_2 – независимые случайные величины со значениями в группе X, имеющие распределения μ_1 и μ_2 с необращающимися в нуль характеристическими функциями. Пусть $p : X \mapsto X/X_{(2)}$ – естественный гомоморфизм. Если $\xi_1+\xi_2$ и $\xi_1-\xi_2$ независимы, то $p(\mu_1), p(\mu_2) \in \Gamma\left(X/X_{(2)}\right)$ и $p(\mu_1) = p(\mu_2) * E_{[x]},\ [x] \in X/X_{(2)}$.*

Доказательство. В силу леммы 7.1 характеристические функции $\widehat{\mu}_j(y)$ удовлетворяют уравнению 7.1(i), а значит и уравнению (7.5). В силу 2.7(d) мы имеем

$$|\widehat{\mu}_2(-v)| = |\widehat{\mu}_2(v)|, \quad v \in Y. \tag{7.19}$$

Из уравнения 7.1(i) и (7.21) получаем, что функции $|\widehat{\mu}_j(y)|$ удовлетворяют уравнению

$$|\widehat{\mu}_1(u+v)||\widehat{\mu}_2(u-v)| = |\widehat{\mu}_1(u)||\widehat{\mu}_1(v)||\widehat{\mu}_2(u)||\widehat{\mu}_2(v)|, \quad u, v \in Y. \tag{7.20}$$

Из (7.5) и (7.20) находим

$$|\widehat{\mu}_j(u+v)||\widehat{\mu}_j(u-v)| = |\widehat{\mu}_j(u)|^2|\widehat{\mu}_j(v)|^2, \quad u, v \in \overline{Y^{(2)}}, \quad j = 1, 2.$$

Отсюда следует, что $\varphi(y) = -\log|\widehat{\mu}_j(y)|$ – непрерывная неотрицательная функция на $\overline{Y^{(2)}}$, удовлетворяющая уравнению 2.16(ii).

Проверим, что функции

$$l_j(y) = \widehat{\mu}_j(y)/|\widehat{\mu}_j(y)|$$

являются характерами группы $\overline{Y^{(2)}}$. Заметим, что

$$|l_j(y)| = 1, \quad l_j(-y) = \overline{l_j(y)}, \quad l_j(0) = 1,\ j = 1, 2, \quad y \in Y. \tag{7.21}$$

Очевидно, что функции $l_j(y)$ удовлетворяют уравнению 7.1(i), которое принимает вид

$$l_1(u+v)l_2(u-v) = l_1(u)l_1(v)l_2(u)l_2(-v), \quad u, v \in Y. \tag{7.22}$$

Полагая в (7.22) сначала $u = v = y$, а затем $u = -v = y$, получаем

$$l_1(2y) = l_1^2(y), \qquad l_2(2y) = l_2^2(y), \quad y \in Y. \tag{7.23}$$

Меняя в (7.22) переменные u и v местами, получим

$$l_1(u+v)l_2(-(u-v)) = l_1(u)l_1(v)l_2(-u)l_2(v), \quad u, v \in Y.$$

Перемножая это уравнение и уравнение (7.22) и учитывая (7.21), получаем

$$l_1^2(u+v) = l_1^2(u)l_1^2(v), \quad u, v \in Y.$$

Учитывая равенство (7.23), отсюда следует, что

$$l_1(u+v) = l_1(u)l_1(v), \quad u, v \in \overline{Y^{(2)}}.$$

Аналогичное рассуждение доказывает, что функция $l_2(y)$ – также характер группы $\overline{Y^{(2)}}$. По теореме 1.9.2 характеры $l_j(y)$ представимы в виде $l_j(y) = (x_j, y),\ x_j \in X,\ y \in \overline{Y^{(2)}}$. Таким образом, мы доказали, что характеристические функции $\widehat{\mu}_j(y)$ на подгруппе $\overline{Y^{(2)}}$ имеют представление

$$\widehat{\mu}_j(y) = (x_j, y)\exp\{-\varphi(y)\}, \quad y \in \overline{Y^{(2)}}. \tag{7.24}$$

Заметим теперь, что по теореме 1.9.5 $\overline{Y^{(2)}} = A(Y, X_{(2)})$. Пусть $p : X \mapsto X/X_{(2)}$ – естественный гомоморфизм. Поскольку по следствию 2.11 ограничение характеристической функции $\widehat{\mu}_j(y)$ на подгруппу $\overline{Y^{(2)}}$ является характеристической функцией распределения $p(\mu_j) \in X/X_{(2)}$, то лемма доказана. □

7.14. Следствие. *Пусть группа X удовлетворяет условию $X_{(2)} = \{0\}$. Пусть ξ_1 и ξ_2 – независимые случайные величины со значениями в группе X, имеющие распределения μ_1 и μ_2 с необращающимися в нуль характеристическими функциями. Если $\xi_1 + \xi_2$ и $\xi_1 - \xi_2$ независимы, то $\mu_1, \mu_2 \in \Gamma(X)$ и $\mu_1 = \mu_2 * E_x,\ x \in X$.*

Очевидно, что утверждение, сформулированное в замечании 7.12, непосредственно вытекает из следствия 7.14.

7.15. Замечание. Легко видеть, что из доказательства леммы 7.13 вытекает, что справедливо следующее утверждение. Пусть Y – произвольная абелева группа. Пусть $f_j(y)$ – функции на группе Y удовлетворяющие уравнению

$$f_1(u+v)f_2(u-v) = f_1(u)f_2(u)f_1(v)f_2(-v), \quad u, v \in Y, \tag{7.25}$$

и условиям $f_j(-y) = \overline{f_j(y)},\ f_j(0) = 1,\ j = 1, 2$. Тогда на подгруппе $Y^{(2)}$ имеют место представления

$$f_j(y) = l_j(y)\exp\{\varphi(y)\}, \quad y \in Y^{(2)}, \tag{7.26}$$

где $l_j(y)$ – функции на подгруппе $Y^{(2)}$, удовлетворяющие уравнению

$$l_j(u+v) = l_j(u)l_j(v), \quad u, v \in Y^{(2)}, \tag{7.27}$$

а $\varphi(y)$ – функция на подгруппе $Y^{(2)}$, удовлетворяющая уравнению 2.14(ii).

Если мы дополнительно предположим, что группа Y локально компактна, а функции $f_j(y)$ непрерывны, то можно утверждать, что на подгруппе $\overline{Y^{(2)}}$ имеет место представление

$$f_j(y) = (x_j, y)\exp\{\varphi(y)\}, \quad y \in \overline{Y^{(2)}}, \tag{7.28}$$

где $x_j \in X = Y^*$, а функция $\varphi(y)$ непрерывна и удовлетворяет уравнению 2.14(ii).

Ниже мы изложим основанное на принципиально других соображениях и представляющее самостоятельный интерес еще одно доказательство утверждения, сформулированного в замечании 7.12.

7.16. Если X – группа с однозначным делением на два, то, в частности, $Y = Y^{(2)}$. Поэтому, как установлено при доказательстве леммы 7.13,

$$|\widehat{\mu}_j(y)| = \exp\{-\varphi(y)\},\ y \in Y,$$

где $\varphi(y)$ – непрерывная неотрицательная функция на Y, удовлетворяющая уравнению 2.16(ii).

Покажем, что функции $l_j(y) = \widehat{\mu}_j(y)/|\widehat{\mu}_j(y)|$ являются характерами группы Y. Учитывая (7.5), из (7.3) находим

$$\widehat{\mu}_j(y) = (\widehat{\mu}_j(y/2^n))^{2^n} |\widehat{\mu}_j(y/2^n)|^{2^{2n}-2^n}, \quad y \in Y, \quad j = 1, 2. \tag{7.29}$$

Заметим теперь, что из равенства $\varphi(y/2^n) = (1/2^{2n})\varphi(y)$ следует, что

$$\lim_{n\to\infty} |\widehat{\mu}_j(y/2^n)|^{2^{2n}-2^n} = |\widehat{\mu}_j(y)|, \quad y \in Y, \quad j = 1, 2. \tag{7.30}$$

Перепишем (7.29) в виде

$$\frac{\widehat{\mu}_j(y)}{|\widehat{\mu}_j(y/2^n)|^{2^{2n}-2^n}} = (\widehat{\mu}_j(y/2^n)^{2^n}, \quad y \in Y, \quad j = 1, 2.$$

Переходя здесь к пределу при $n \to \infty$ и учитывая (7.30), получаем

$$l_j(y) = \frac{\widehat{\mu}_j(y)}{|\widehat{\mu}_j(y)|} = \lim_{n\to\infty} (\widehat{\mu}_j(y/2^n))^{2^n}, \quad y \in Y, \quad j = 1, 2.$$

Функции $l_j(y)$, очевидно, непрерывны. Так как функции $l_j(y)$ являются пределами последовательности положительно определенных функций, то функции $l_j(y)$ также положительно определены. По теореме Бохнера функции $l_j(y)$ характеристические. Так как $|l_j(y)| = 1,\ y \in Y$, то по 2.7(e) $l_j(y) = (x_j, y),\ x_j \in X$. А значит, $\widehat{\mu}_j(y) = (x_j, y)\exp\{-\varphi(y)\},\ y \in Y$, Отсюда, $\mu_j \in \Gamma(X),\ j = 1, 2$, и $\mu_1 = \mu_2 * E_x,\ x \in X$. Утверждение доказано.

7.17. Замечание. Пусть ξ_1 и ξ_2 – независимые случайные величины со значениями в группе X и с безгранично делимыми распределениями μ_1 и μ_2. Если $\xi_1 + \xi_2$ и $\xi_1 - \xi_2$ независимы, то $\mu_j \in \Gamma(X) * I_B(X)$ и $\mu_1 = \mu_2 * E_x,\ x \in X$. Действительно, в силу леммы 7.1 характеристические функции $\widehat{\mu}_j(y)$ удовлетворяют уравнению 7.1(i), а значит, и уравнению (7.3). Из 2.15(b) следует, что множества $N_j = \{y \in Y : \widehat{\mu}_j(y) \neq 0\},\ j = 1, 2,$ – подгруппы в Y, а из (7.3) вытекает, что $N_1 = N_2$. Дальнейшее рассуждение проводится так же, как и при доказательстве теоремы 7.10. Только вместо леммы 7.9 нужно использовать следующее утверждение.

Пусть ξ_1 и ξ_2 – независимые случайные величины со значениями в группе X, имеющие безгранично делимые распределениями μ_1 и μ_2 с необращающимися в нуль характеристическими функциями. Если $\xi_1 + \xi_2$ и $\xi_1 - \xi_2$ независимы, то $\mu_1, \mu_2 \in \Gamma(X)$ и $\mu_1 = \mu_2 * E_x,\ x \in X$.

Доказательство этого утверждения проводится точно так же, как и доказательство леммы 7.9, только вместо теоремы 4.6 нужно использовать замечание 4.9.

§8. Независимые случайные величины на группе $\mathbb{R} \times \mathbb{T}$ и a-адических соленоидах $\Sigma_{\mathbf{a}}$ с независимой суммой и разностью

Пусть X – локально компактная абелева группа, удовлетворяющая второй аксиоме счетности, Y – ее группа характеров. Согласно теореме 7.10, если связная компонента нуля группы X не содержит элементов порядка 2, а ξ_1 и ξ_2 – независимые случайные величины со значениями в группе X и с распределениями μ_1 и μ_2 такие, что их сумма и разность независимы, то μ_j инвариантны относительно некоторой компактной подгруппы K группы X и при естественном гомоморфизме $X \mapsto X/K$ индуцируют на фактор-группе X/K гауссовские распределения. Это утверждение неверно, если связная компонента нуля группы X содержит элементы порядка 2. Для таких групп возникает естественный вопрос: какими могут быть возможные распределения независимых случайных величин ξ_1 и ξ_2 со значениями в группе X, если $\xi_1+\xi_2$ и $\xi_1-\xi_2$ независимы. В этом параграфе мы решаем эту задачу для цилиндра $X = \mathbb{R}\times\mathbb{T}$ и $\mathbf{a}$-адических соленоидов $X = \Sigma_{\mathbf{a}}$.

8.1. Пусть $X = \mathbb{R} \times \mathbb{T}$. Нам удобно считать, что вещественная прямая $\mathbb{R}$, группа вращений окружности $\mathbb{T}$ и мультипликативная группа корней степени m из единицы $\mathbb{Z}(m)$ естественным образом вложены в группу X. Мы имеем $Y \cong \mathbb{R}\times\mathbb{Z}$. Чтобы не вводить дополнительных обозначений, будем считать, что $Y = \mathbb{R}\times\mathbb{Z}$, а вещественная прямая $\mathbb{R}$ и группа целых чисел $\mathbb{Z}$ также естественным образом вложены в Y. Элементы группы X будем обозначать через $x = (t, z),\ t \in \mathbb{R},\ z \in \mathbb{T}$, а элементы группы Y через $y = (s, n),\ s \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{Z}$.

Для доказательства основных теорем этого параграфа нам понадобятся следующие леммы.

8.2. Лемма. *Пусть комплекснозначные функции $h_j(n)$ на группе $\mathbb{Z}$ удовлетворяют уравнению*

$$(i) \qquad h_1(m+n)h_2(m-n) = h_1(m)h_1(n)h_2(m)h_2(-n), \quad m, n \in \mathbb{Z},$$

и условиям $h_1(n)h_2(n) \neq 0,\ h_j(-n) = \overline{h_j(n)},\ h_j(0) = 1,\ j = 1, 2,\ n \in \mathbb{Z}$. Тогда функции $h_j(n)$ представимы в виде

$$h_1(n) = \exp\{-\lambda n^2 + in\theta_1 + \kappa(1 - (-1)^n)\},\ n \in \mathbb{Z},$$

$$h_2(n) = \exp\{-\lambda n^2 + in\theta_2 - \kappa(1 - (-1)^n)\},\ n \in \mathbb{Z},$$

где $\lambda,\ \kappa \in \mathbb{R},\ 0 \le \theta_j < 2\pi,\ j = 1, 2.$

Доказательство. Из уравнения (i) и условия $h_j(-n) = \overline{h_j(n)}$ вытекает, что функции $|h_j(n)|$ удовлетворяют уравнению

$$|h_1(m+n)||h_2(m-n)| = |h_1(m)||h_1(n)||h_2(m)||h_2(n)|, \quad m, n \in \mathbb{Z}. \tag{8.1}$$

Положим $f(n) = -\log|h_1(n)|,\ g(n) = -\log|h_2(n)|$. Тогда из (8.1) следует, что

$$f(m+n) + g(m-n) = P(m) + P(n), \quad m, n \in \mathbb{Z}, \tag{8.2}$$

где $P(m) = f(m) + g(m)$.

Для решения уравнения (8.2) применим метод конечных разностей. Придадим в (8.2) переменным m и n приращение k, где k — произвольный элемент группы $\mathbb{Z}$. Вычитая из полученного уравнения уравнение (8.2), находим

$$\Delta_{2k} f(m+n) = \Delta_k P(m) + \Delta_k P(n), \quad m, n, k \in \mathbb{Z}. \tag{8.3}$$

Полагая в (8.3) $m = 0$ и вычитая полученное уравнение из (8.3), получаем

$$\Delta_{2k}\Delta_m f(n) = \Delta_k P(m) - \Delta_k P(0), \quad m, n, k \in \mathbb{Z}. \tag{8.4}$$

Придадим в (8.4) переменной n приращение l, где l — произвольный элемент группы $\mathbb{Z}$, и вычитая из полученного уравнения уравнение (8.4), находим

$$\Delta_{2k}\Delta_m\Delta_l f(n) = 0, \quad m, n, k, l \in \mathbb{Z}.$$

Полагая здесь $m = l$, получаем

$$\Delta_{2k}\Delta_l^2 f(n) = 0, \quad n, k, l \in \mathbb{Z}. \tag{8.5}$$

Положим в (8.5) $l = k$ и перепишем полученное уравнение в виде

$$f(n+4k) - 2f(n+3k) + 2f(n+k) - f(n) = 0, \quad k, n \in \mathbb{Z}.$$

Полагая здесь $k = 1$, получаем

$$f(n+4) - 2f(n+3) + 2f(n+1) - f(n) = 0, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{8.6}$$

Мы получили конечно-разностное уравнение на группе $\mathbb{Z}$, характеристическим уравнение которого имеет вид

$$q^4 - 2q^3 + 2q - 1 = 0.$$

Отсюда следует, что общее решение уравнения (8.6) имеет вид

$$f(n) = a_1 + b_1 n + c_1 n^2 + d_1(-1)^n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

где a_1, b_1, c_1, d_1 — произвольные вещественные константы (см., например, [5, гл. V, §4]). Так как $f(0) = 0$ и $f(n) = f(-n)$, то $b_1 = 0$ и $d_1 = -a_1$. Таким образом, $f(n) = c_1 n^2 + a_1(1-(-1)^n)$. Проводя аналогичные рассуждения, получаем, что $g(n) = c_2 n^2 + a_2(1-(-1)^n)$. Подставляя найденные представления для функций $f(n)$ и $g(n)$ в уравнение (8.2), получаем, что $c_1 = c_2, a_2 = -a_1$. Обозначим $c_1 = \lambda, a_1 = -\kappa$. Итак,

$$f(n) = \lambda n^2 - \kappa(1-(-1)^n), \quad g(n) = \lambda n^2 + \kappa(1-(-1)^n),$$

т.е.

$$|h_1(n)| = \exp\{-\lambda n^2 + \kappa(1-(-1)^n)\}, \quad |h_2(n)| = \exp\{-\lambda n^2 - \kappa(1-(-1)^n)\}, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{8.7}$$

Положим

$$l_j(n) = h_j(n)/|h_j(n)|, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{8.8}$$

Тогда $|l_j(n)| = 1,\ l_j(-n) = \overline{l_j(n)},\ l_j(0) = 1,\ j = 1, 2,\ n \in \mathbb{Z}$. Из (i) следует, что функции $l_j(n)$ удовлетворяют уравнению

$$l_1(m+n)l_2(m-n) = l_1(m)l_1(n)l_2(m)l_2(-n), \quad m, n \in \mathbb{Z}. \tag{8.9}$$

Так как $|l_j(1)| = 1$, то $l_j(1) = e^{i\theta_j}$ при некоторых $0 \le \theta_j < 2\pi,\ j = 1, 2$. Из уравнения (8.9) по индукции легко находим, что

$$l_j(n) = e^{in\theta_j}, \quad j = 1, 2, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{8.10}$$

Утверждение леммы вытекает из (8.7), (8.8) и (8.10). □

8.3. Лемма. *Пусть $\kappa \in \mathbb{R}$. Функции*

$$a_1(s,n) = \exp\{\kappa(1-(-1)^n)\}, \quad a_2(s,n) = \exp\{-\kappa(1-(-1)^n)\}$$

на группе $\mathbb{R}\times\mathbb{Z}$ является характеристическими функциями зарядов

(*i*)
$$\pi_1 = \frac{1}{2}(1+e^{2\kappa})E_{(0,1)} + \frac{1}{2}(1-e^{2\kappa})E_{(0,-1)},$$

и

(*ii*)
$$\pi_2 = \frac{1}{2}(1+e^{-2\kappa})E_{(0,1)} + \frac{1}{2}(1-e^{-2\kappa})E_{(0,-1)},$$

сосредоточенных на подгруппе $\mathbb{Z}(2) \subset \mathbb{R}\times\mathbb{T}$. При этом $\pi_1 * \pi_2 = E_{(0,1)}$.

Доказательство. Непосредственная проверка. Отметим, что если $\kappa \neq 0$, то один из зарядов π_j на самом деле является распределением. □

8.4. Пусть $X = \mathbb{R}\times\mathbb{T}$. Обозначим через $\tau : X \mapsto X$ гомоморфизм, определяемый формулой

$$\tau(t,z) = (t, z^2), \quad (t,z) \in X. \tag{8.11}$$

Тогда сопряженный гомоморфизм $\widetilde{\tau} : Y \mapsto Y$ имеет вид $\widetilde{\tau}(s,n) = (s,2n)$, $(s,n) \in Y$. Пусть $\mu \in \mathrm{M}^1(X)$. Из предложения 2.10 вытекает, что характеристическая функция распределения $\tau(\mu)$ имеет вид

$$\widehat{\tau(\mu)}(s,n) = \widehat{\mu}(s,2n), \quad s\in\mathbb{R},\ n\in\mathbb{Z}.$$

Теперь мы можем доказать основную теорему этого параграфа.

8.5. Теорема. *Пусть $X = \mathbb{R}\times\mathbb{T}$. Пусть ξ_1 и ξ_2 — независимые случайные величины со значениями в группе X и с распределениями μ_1 и μ_2. Если $\xi_1+\xi_2$ и $\xi_1-\xi_2$ независимы, то справедливо одно из следующих утверждений:*

(*i*) *$\mu_j = \gamma * \pi_j * E_{x_j}$, где $\gamma \in \Gamma(X)$, $x_j \in X$, а π_j — заряды, сосредоточенные на подгруппе $\mathbb{Z}(2)$ такие, что $\pi_1 * \pi_2 = E_{(0,1)}$;*

(*ii*) *$\mu_j = \gamma * m_{\mathbb{Z}(p)} * \pi_j * E_{x_j}$, где $\gamma \in \Gamma(X)$, $x_j \in X$, p — нечетное число, а π_j — заряды, сосредоточенные на подгруппе $\mathbb{Z}(2)$ такие, что $\pi_1 * \pi_2 = E_{(0,1)}$;*

(*iii*) *либо $\tau(\mu_1) = \gamma * m_{\mathbb{T}} * E_{x_1}$ и $\mu_2 = \gamma * m_{\mathbb{T}} * E_{x_2}$, либо $\mu_1 = \gamma * m_{\mathbb{T}} * E_{x_1}$ и $\tau(\mu_2) = \gamma * m_{\mathbb{T}} * E_{x_2}$, где гомоморфизм $\tau : X \mapsto X$ определяется формулой (8.11), $\gamma \in \Gamma(\mathbb{R})$, $x_j \in \mathbb{R}$.*

Доказательство. По лемме 7.1 характеристические функции $\widehat{\mu}_j(y)$ удовлетворяют уравнению 7.1(*i*), а значит, и уравнениям (7.3), (7.5) и (7.20). Положим

$$N_1 = \{y \in Y : \widehat{\mu}_1(y) \neq 0\}, \quad N_2 = \{y \in Y : \widehat{\mu}_2(y) \neq 0\}, \quad N = N_1 \cap N_2.$$

Из уравнения 7.1(*i*) следует, что N — открытая подгруппа в $Y = \mathbb{R}\times\mathbb{Z}$. Поэтому, как легко проверить, для N возможны три случая: $N = \mathbb{R}\times\mathbb{Z}$, $N = \mathbb{R}\times\mathbb{Z}^{(p)}$, где $p \neq 1$ и $N = \mathbb{R}$.

1. $N = \mathbb{R}\times\mathbb{Z}$. Найдем сначала представления для модулей характеристических функций $|\widehat{\mu}_j(y)|$, $j = 1,2$. Положим $f(y) = -\log|\widehat{\mu}_1(y)|$, $g(y) = -\log|\widehat{\mu}_2(y)|$. Из уравнения (7.20) вытекает, что функции $f(y)$ и $g(y)$ удовлетворяют уравнению

$$f(u+v) + g(u-v) = P(u) + P(v), \quad u,v \in Y, \tag{8.12}$$

где $P(y) = f(y) + g(y)$. Применим для решения уравнения (8.12) метод конечных разностей. Рассуждая так же, как и при доказательстве леммы 8.2, получим, что функция $f(y)$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta_{2v}\Delta_w^2 f(u) = 0, \quad v, w, u \in Y. \tag{8.13}$$

Заметим теперь, что поскольку по теореме 1.9.5 $\overline{Y^{(2)}} = A\left(Y, X_{(2)}\right)$, то по лемме 7.13 сужения характеристических функций $\widehat{\mu}_j(y)$ на подгруппу $\overline{Y^{(2)}} = \mathbb{R} \times \mathbb{Z}^{(2)}$ имеют вид

$$\mu_1(y) = (x_1, y)\exp\{-\varphi(y)\}, \quad \mu_2(y) = (x_2, y)\exp\{-\varphi(y)\}, \quad y \in \overline{Y^{(2)}},$$

где $x_j \in X$, а $\varphi(y)$ – непрерывная неотрицательная функция на $\overline{Y^{(2)}}$, удовлетворяющая уравнению 2.16(ii). Учитывая замечание 5.12, отсюда получаем

$$f(s, n) = g(s, n) = \sigma s^2 + 2\beta sn + \lambda n^2, \quad s \in \mathbb{R}, \ n \in \mathbb{Z}^{(2)}. \tag{8.14}$$

Полагая в уравнении (8.13) $w = v$, перепишем полученное уравнение в виде

$$f(u + 4v) - 2f(u + 3v) + 2f(u + v) - f(u) = 0, \quad u, v \in Y.$$

Полагая здесь $u = (s, n), v = (0, 1)$, находим

$$f(s, n + 4) - 2f(s, n + 3) + 2f(s, n + 1) - f(s, n) = 0, \quad s \in \mathbb{R}, \ n \in \mathbb{Z}. \tag{8.15}$$

Обозначим $f_s(n) = f(s, n)$, $s \in \mathbb{R}$ и перепишем уравнение (8.15) в виде

$$f_s(n + 4) - 2f_s(n + 3) + 2f_s(n + 1) - f_s(n) = 0, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Решая это уравнение так же, как уравнение (8.6), получаем

$$f_s(n) = a_1(s) + b_1(s)n + c_1(s)n^2 + d_1(s)(-1)^n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

где $a_1(s)$, $b_1(s)$, $c_1(s)$, $d_1(s)$ – некоторые функции от s. Из представления (8.3) для функции $f_s(n) = f(s, n)$ на подгруппе $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}^{(2)}$, получаем, что $a_1(s) + d_1(s) = \sigma s^2$, $b_1(s) = 2\beta s$, $c_1(s) = \lambda$. Следовательно,

$$f(s, n) = \sigma s^2 + 2\beta sn + \lambda n^2 - d_1(s)(1 - (-1)^n), \quad s \in \mathbb{R}, \ n \in \mathbb{Z}. \tag{8.16}$$

Аналогично находим

$$g(s, n) = \sigma s^2 + 2\beta sn + \lambda n^2 - d_2(s)(1 - (-1)^n), \quad s \in \mathbb{R}, \ n \in \mathbb{Z}. \tag{8.17}$$

Применим лемму 7.1. Учитывая (8.16) и (8.17), из теоремы Каца–Бернштейна получаем

$$\widehat{\mu}_j(s, 0) = \exp\{-\sigma s^2 + it_j s\}, \quad s \in \mathbb{R}, \ \sigma \geq 0, \ t_j \in \mathbb{R}, \ j = 1, 2. \tag{8.18}$$

С другой стороны, из (8.16), (8.17) и леммы 8.2 следует, что

$$\widehat{\mu}_1(0, n) = \exp\{-\lambda n^2 + in\theta_1 + \kappa(1 - (-1)^n)\}, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{8.19}$$

$$\widehat{\mu}_2(0, n) = \exp\{-\lambda n^2 + in\theta_2 - \kappa(1 - (-1)^n)\}, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{8.20}$$

где $\lambda \geq 0,\ 0 \leq \theta_j < 2\pi$ и
$$d_1(0) = -d_2(0) = \kappa. \tag{8.21}$$

Докажем теперь, что $d_1(s) = -d_2(s) = \kappa,\ s \in \mathbb{R}$. Полагая $u = (s_1, n_1), v = (s_2, n_2)$ и подставляя (8.16) и (8.17) в уравнение (7.20), находим

$$d_1(s_1 + s_2)(1 - (-1)^{n_1+n_2}) + d_2(s_1 - s_2)(1 - (-1)^{n_1-n_2}) =$$

$$= d_1(s_1)(1 - (-1)^{n_1}) + d_1(s_2)(1 - (-1)^{n_2}) + d_2(s_1)(1 - (-1)^{n_1}) + d_2(-s_2)(1 - (-1)^{n_2}). \tag{8.22}$$

Подставляя теперь в (8.22) последовательно $n_1 = n_2 = 1,\ n_1 = 0,\ n_2 = 1$ и $n_1 = 1,\ n_2 = 0$, получаем
$$d_1(s_1) + d_1(s_2) + d_2(s_1) + d_2(-s_2) = 0, \quad s_1, s_2 \in \mathbb{R}. \tag{8.23}$$

$$d_1(s_1 + s_2) + d_2(s_1 - s_2) = d_1(s_2) + d_2(-s_2), \quad s_1, s_2 \in \mathbb{R}. \tag{8.24}$$

$$d_1(s_1 + s_2) + d_2(s_1 - s_2) = d_1(s_1) + d_2(s_1), \quad s_1, s_2 \in \mathbb{R}. \tag{8.25}$$

Из (8.23)–(8.25) вытекает, что

$$d_1(s_1 + s_2) + d_2(s_1 - s_2) = 0, \quad s_1, s_2 \in \mathbb{R}. \tag{8.26}$$

Отсюда,
$$d_1(s) = -d_2(0) = \kappa, \quad d_2(s) = -d_1(0) = -\kappa, \quad s \in \mathbb{R}. \tag{8.27}$$

В результате из (8.16), (8.17), (8.21) и (8.27) получаем

$$|\widehat{\mu}_1(s, n)| = \exp\{-\sigma s^2 - 2\beta sn - \lambda n^2 + \kappa(1 - (-1)^n)\}, \quad s \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{Z},$$

$$|\widehat{\mu}_2(s, n)| = \exp\{-\sigma s^2 - 2\beta bsn - \lambda n^2 - \kappa(1 - (-1)^n)\}, \quad s \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{Z}.$$

Положим
$$l_1(y) = \widehat{\mu}_1(y)/|\widehat{\mu}_1(y)|, \quad l_2(y) = \widehat{\mu}_2(y)/|\widehat{\mu}_2(y)|, \quad y \in Y,$$

и докажем, что функции $l_j(y)$ – характеры группы Y. Заметим, что

$$|l_j(y)| = 1,\ l_j(-y) = \overline{l_j(y)},\ y \in Y,\ l_j(0) = 1,\ j = 1, 2.$$

Так как характеристические функции $\widehat{\mu}_j(y)$ удовлетворяют уравнению 7.1(i), то функции $l_j(y)$ удовлетворяют уравнению

$$l_1(u + v)l_2(u - v) = l_1(u)l_1(v)l_2(u)l_2(-v), \quad u, v \in Y. \tag{8.28}$$

Положим $a_j(y) = a_j(s, n) = \exp\{it_j s + i\theta_j n\}$ и $m_j(y) = l_j(y)/a_j(y),\ j = 1, 2$. Проверим, что $m_1(y) = m_2(y) = 1,\ y \in Y$. Поскольку функции $a_j(y)$, очевидно, также удовлетворяют уравнению (8.28), то уравнению (8.28) удовлетворяют и функции $m_j(y)$. Имеем,

$$m_1(u + v)m_2(u - v) = m_1(u)m_1(v)m_2(u)m_2(-v), \quad u, v \in Y. \tag{8.29}$$

Из (8.18), (8.19) и (8.20) следует, что

$$m_j(s, 0) = m_j(0, n) = 1, \quad j = 1, 2, \quad s \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{Z}. \tag{8.30}$$

Подставляя в уравнение (8.29) вначале $u = (0, n)$, $v = (s, 0)$, затем $u = (s, 0)$, $v = (0, n)$, и учитывая (8.30), получаем

$$m_1(s,n)m_2(-s,n) = 1, \quad s \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{Z}, \tag{8.31}$$

$$m_1(s,n)m_2(s,-n) = 1, \quad s \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{Z}. \tag{8.32}$$

Перемножая (8.31) и (8.32) и учитывая то, что $m_2(y)m_2(-y) = 1$, находим

$$m_1^2(s,n) = 1, \quad s \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{Z}. \tag{8.33}$$

Подставляя в уравнение (8.29) $u = v = (s/2, n)$ и учитывая (8.33), получаем

$$m_1(s,2n) = 1, \quad s \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{Z}. \tag{8.34}$$

Подставляя в уравнение (8.29) $u = (s, n)$, $v = (0, n)$ и учитывая (8.30) и (8.34), находим

$$m_1(s,n)m_2(s,n) = 1, \quad s \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{Z}. \tag{8.35}$$

Подставляя в уравнение (8.29) $u = (s/2, n)$, $v = (s/2, 0)$ и учитывая (8.30) и (8.35), получаем

$$m_1(s,n) = 1, \quad s \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{Z}. \tag{8.36}$$

Из (8.35) и (8.36) следует, что

$$m_2(s,n) = 1, \quad s \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{Z}.$$

Возвращаясь теперь к характеристическим функциям $\widehat{\mu}_j(s,n)$, мы приходим к следующему представлению

$$\widehat{\mu}_1(s,n) = \exp\{-\sigma s^2 - 2\beta sn - \lambda n^2 + \kappa(1 - (-1)^n)\} + it_1 s + in\theta_1\}, \quad s \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{Z}, \tag{8.37}$$

$$\widehat{\mu}_2(s,n) = \exp\{-\sigma s^2 - 2\beta bsn - \lambda n^2 - \kappa(1 - (-1)^n) + it_2 s + in\theta_2\}, \quad s \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{Z}. \tag{8.38}$$

По лемме 8.3 функция $a_1(s,n) = \exp\{\kappa(1 - (-1)^n)\}$, $s \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$, является характеристической функцией заряда π_1, определяемого формулой 8.3(i). Функция $b(s,n) = \exp\{-\sigma s^2 - 2\beta sn - \lambda n^2\}$, $s \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$, очевидно, является характеристической функцией некоторого гауссовского распределения $\gamma \in \Gamma(X)$. Из (8.37) вытекает, что

$$\widehat{\mu}_1(s,n) = \widehat{\gamma}(s,n)\pi_1(s,n)\exp\{it_1 s + in\theta_1\}, \quad s \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{Z}. \tag{8.39}$$

Учитывая 2.7(b) и 2.7(c), из (8.39) находим $\mu_1 = \gamma * \pi_1 * E_{x_1}$, где $x_1 = (t_1, e^{i\theta_1}) \in X$. Аналогично получаем представление для распределения μ_2.

Итак, мы доказали, что в случае, когда $N = \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$, справедливо утверждение (i) теоремы.

2. $N = \mathbb{R} \times \mathbb{Z}^{(p)}$, где $p \neq 1$. Заметим, что из (7.3) вытекает, что подгруппа N обладает свойством: если $2y \in N$, то и $y \in N$. Поэтому, p — нечетное число.

Проверим, что $N_1 = N_2 = N$. Учитывая, что в силу 2.7(d) $|\widehat{\mu}_1(-y)| = |\widehat{\mu}_1(y)|$, и заменяя в (7.20) v на $-v$, находим

$$|\widehat{\mu}_1(u-v)||\widehat{\mu}_2(u+v)| = |\widehat{\mu}_1(u)||\widehat{\mu}_1(v)|\widehat{\mu}_2(u)|\widehat{\mu}_2(v)|, \quad u, v \in Y. \tag{8.40}$$

Заметим теперь, что из уравнений (7.20) и (8.40) следует равенство

$$|\widehat{\mu}_1(a+b,m+n)||\widehat{\mu}_2(a-b,m-n)| =$$

$$= |\widehat{\mu}_1(a-b,m-n||\widehat{\mu}_2(a+b,m+n)| \quad a,b\in\mathbb{R},\ m,n\in\mathbb{Z},$$

а значит

$$|\widehat{\mu}_1(a,k)||\widehat{\mu}_2(b,l)| = |\widehat{\mu}_1(b,l)||\widehat{\mu}_2(a,k)|, \tag{8.41}$$

где a, b – произвольные вещественные числа, а целые числа k и l имеют одинаковую четность. Предположим, что существует такой элемент $(a,k)\in N_1$, что $(a,k)\notin N_2$. Пусть $(b,l)\in N$, где l — число такой же четности, как k. Тогда из (8.41) следует, что $\widehat{\mu}_2(b,l)=0$, что противоречит предположению. Следовательно, $N_1\subset N_2$. Аналогичное рассуждение показывает, что $N_2\subset N_1$, а значит $N_1=N_2=N$.

Рассмотрим ограничение уравнения 7.1(i) на подгруппу N. Так как $N=\mathbb{R}\times\mathbb{Z}^{(p)}\cong\mathbb{R}\times\mathbb{Z}$, то представление сужений решений уравнения 7.1(i) на N получается из (8.37) и (8.38). Имеем, в результате

$$\widehat{\mu}_1(s,n) = \begin{cases}\exp\{-\sigma s^2-2\beta sn-\lambda n^2+\kappa(1-(-1)^n)+it_1s+in\theta_1\}, & \text{если} \quad n\in\mathbb{Z}^{(p)},\\ 0, & \text{если} \quad n\notin\mathbb{Z}^{(p)},\end{cases}$$

$$\widehat{\mu}_2(s,n) = \begin{cases}\exp\{-\sigma s^2-2\beta sn-\lambda n^2-\kappa(1-(-1)^n)+it_1s+in\theta_1\}, & \text{если} \quad n\in\mathbb{Z}^{(p)},\\ 0, & \text{если} \quad n\notin\mathbb{Z}^{(p)}.\end{cases}$$

Рассмотрим в X подгруппу $\mathbb{Z}(p)$ и заметим, что $A(Y,\mathbb{Z}(p))=\mathbb{R}\times\mathbb{Z}^{(p)}$. Отсюда, в силу 2.14($i$) получаем, что характеристическая функция распределения Хаара $m_{\mathbb{Z}(p)}$ имеет вид

$$\widehat{m}_{\mathbb{Z}(p)}(s,n) = \begin{cases}1, & \text{если} \quad n\in\mathbb{Z}^{(p)},\\ 0, & \text{если} \quad n\notin\mathbb{Z}^{(p)}.\end{cases}$$

Рассуждая далее так же, как в заключительной части доказательства теоремы в случае **1**, получаем, что в случае, когда $N=\mathbb{R}\times\mathbb{Z}^{(p)}$, где $p\neq 1$, справедливо утверждение (ii) теоремы.

3. $N=\mathbb{R}$. Из уравнения (7.5) вытекает, что $|\widehat{\mu}_1(s,2n)|=|\widehat{\mu}_2(s,2n)|$ при всех $s\in\mathbb{R},\ n\in\mathbb{Z}$. Поскольку $N=\mathbb{R}$, то $|\widehat{\mu}_1(s,2n)|=|\widehat{\mu}_2(s,2n)|=0$ при всех $s\in\mathbb{R},\ n\in\mathbb{Z},\ n\neq 0$. Предположим, что существует $a\in\mathbb{R}$ и такое нечетное число $k\in\mathbb{Z}$, что $\widehat{\mu}_1(a,k)\neq 0$. Тогда $\widehat{\mu}_2(a,k)=0$ и из (8.41) следует, что $\widehat{\mu}_2(b,l)=0$ для любого $b\in\mathbb{R}$ и любого нечетного числа l. Учитывая (8.18), из сказанного следует, что

$$\widehat{\mu}_1(s,2n) = \begin{cases}\exp\{-\sigma s^2+it_1s\}, & \text{если} \quad n=0,\\ 0, & \text{если} \quad n\neq 0,\end{cases}$$

$$\widehat{\mu}_2(s,n) = \begin{cases}\exp\{-\sigma s^2+it_2s\}, & \text{если} \quad n=0,\\ 0, & \text{если} \quad n\neq 0,\end{cases}$$

Поскольку $A(Y,\mathbb{T})=\mathbb{R}$, то в силу 2.14($i$) характеристическая функция распределения Хаара $m_{\mathbb{T}}$ имеет вид

$$\widehat{m}_{\mathbb{T}}(s,n) = \begin{cases}1, & \text{если} \quad n=0,\\ 0, & \text{если} \quad n\neq 0,\end{cases}$$

Функция $\lambda(s,n) = \exp\{-\sigma s^2\}$, $s \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$, является характеристической функцией некоторого гауссовского распределения γ, сосредоточенного на $\mathbb{R}$. Следовательно,

$$\widehat{\mu}_1(s,2n) = \widehat{\gamma}(s,n)\widehat{m}_{\mathbb{T}}(s,n)\exp\{it_1 s\}, \quad s \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{Z}, \tag{8.42}$$

$$\widehat{\mu}_2(s,n) = \widehat{\gamma}(s,n)\widehat{m}_{\mathbb{T}}(s,n)\exp\{it_2 s\}, \quad s \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{Z}. \tag{8.43}$$

Учитывая 2.7(b), 2.7(c) и 8.4, из (8.42) и (8.43) вытекает, что $\tau(\mu_1) = \gamma * m_{\mathbb{T}} * E_{(t_1,1)}$, а $\mu_2 = \gamma * m_{\mathbb{T}} * E_{(t_2,1)}$, где τ определяется формулой (8.11). Аналогично, в случае, когда существует такое нечетное число $n_0 \in \mathbb{Z}$, что $\widehat{\mu}_2(s,n_0) \neq 0$, получаем, что $\mu_1 = \gamma * m_{\mathbb{T}} * E_{(t_1,1)}$, а $\tau(\mu_2) = \gamma * m_{\mathbb{T}} * E_{(t_2,1)}$. Тем самым доказано, что в случае, когда $N = \mathbb{R}$, справедливо утверждение (iii) теоремы. □

8.6. Следствие. *Пусть $X = \mathbb{T}$. Пусть ξ_1 и ξ_2 — независимые случайные величины со значениями в группе X и с распределениями μ_1 и μ_2. Если $\xi_1+\xi_2$ и $\xi_1-\xi_2$ независимы, то справедливо одно из следующих утверждений:*

(i) $\mu_j = \gamma * \pi_j * E_{x_j}$, где $\gamma \in \Gamma(X)$, $x_j \in X$, а π_j — заряды, сосредоточенные на подгруппе $\mathbb{Z}(2)$ такие, что $\pi_1 * \pi_2 = E_1$;

(ii) $\mu_j = \gamma * m_{\mathbb{Z}(n)} * \pi_j * E_{x_j}$, где $\gamma \in \Gamma(X)$, n — нечетное число, $x_j \in X$, а π_j — заряды, сосредоточенные на подгруппе $\mathbb{Z}(2)$ такие, что $\pi_1 * \pi_2 = E_1$;

(iii) либо случайные величины $2\xi_1$ и ξ_2 одинаково распределены с распределением m_X, либо случайные величины ξ_1 и $2\xi_2$ одинаково распределены с распределением m_X.

Если мы дополнительно предположим, что характеристические функции распределений μ_j не обращаются в нуль, то возможен лишь случай (i).

8.7. Пусть $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \dots, a_n, \dots)$ — произвольная фиксированная последовательность целых чисел, больших 1, $\Sigma_{\mathbf{a}}$ – $\mathbf{a}$-адический соленоид (см. 1.2(g)). Предположим, что независимые случайные величины ξ_1 и ξ_2 принимают значения в группе $X = \Sigma_{\mathbf{a}}$ и имеют распределения μ_1 и μ_2. Если $X_{(2)} = \{0\}$, то по теореме 7.10 из независимости $\xi_1+\xi_2$ и $\xi_1-\xi_2$ вытекает, $\mu_j = \gamma * m_K * E_{x_j}$, где $\gamma \in \Gamma(X)$, $x_j \in X$, а K — компактная подгруппа Корвина группы X. Предположим, что $X_{(2)} \neq \{0\}$. Справедлива следующая теорема.

8.8. Теорема. *Пусть $X = \Sigma_{\mathbf{a}}$ – $\mathbf{a}$-адический соленоид такой, что $X_{(2)} \neq \{0\}$. Пусть ξ_1 и ξ_2 — независимые случайные величины со значениями в группе X и с распределениями μ_1 и μ_2. Если $\xi_1 + \xi_2$ и $\xi_1 - \xi_2$ независимы, то справедливо одно из следующих утверждений:*

(i) $\mu_j = \gamma * m_K * E_{x_j}$, где $\gamma \in \Gamma(X)$, $x_j \in X$, а K — компактная подгруппа Корвина группы X;

(ii) $\mu_j = \gamma * m_K * \pi_j * E_{x_j}$, где $\gamma \in \Gamma(X)$, $x_j \in X$, K — компактная подгруппа Корвина группы X, а π_j — заряды, сосредоточенные на $X_{(2)}$ такие, что $\pi_1 * \pi_2 = E_0$;

(iii) либо случайные величины $2\xi_1$ и ξ_2 одинаково распределены с распределением m_X, либо случайные величины ξ_1 и $2\xi_2$ одинаково распределены с распределением m_X.

Доказательство. Заметим, что группа характеров $Y = \Sigma_{\mathbf{a}}^*$ изоморфна подгруппе в $\mathbb{Q}$ вида $H_{\mathbf{a}}$, где

$$H_{\mathbf{a}} = \left\{ \frac{m}{a_0 a_1 \cdots a_n} : n = 0, 1, \dots; m \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Чтобы не вводить дополнительных обозначений, будем считать, что $Y = H_{\mathbf{a}}$. В силу теоремы 1.9.5 $X_{(2)} = A(X, Y^{(2)})$. Поэтому условие: $X_{(2)} \neq \{0\}$ выполнено тогда и только тогда, когда $Y \neq Y^{(2)}$. В этом случае, как легко видеть, группа Y может содержать только элементы вида $p/2^k q$, где $p \in \mathbb{Z}$, q — нечетное число, а k не превосходит некоторого положительного целого числа. Заменяя, если это необходимо, группу Y ей изоморфной, можно считать с самого начала, что каждый элемент группы Y имеет вид p/q, где $p \in \mathbb{Z}$, а q — нечетное число. Очевидно также, что можно считать, что наибольший общий делитель всех числителей p элементов p/q группы Y равен 1. Отсюда легко следует, что группа Y обладает свойством: если $p/q \in Y$, то и $1/q \in Y$.

По лемме 7.1 характеристические функции $\widehat{\mu}_j(y)$ удовлетворяют уравнению 7.1(i), а следовательно, и уравнениям (7.3), (7.5) и (7.20). Так же, как и при доказательстве теоремы 8.5, введем в рассмотрение множества

$$N_1 = \{y \in Y : \widehat{\mu}_1(y) \neq 0\}, \qquad N_2 = \{y \in Y : \widehat{\mu}_2(y) \neq 0\}$$

и подгруппу $N = N_1 \cap N_2$. Тогда для N возможны два случая: $N \neq \{0\}$ и $N = \{0\}$.

1. $N \neq \{0\}$. Заметим, что из (7.3) вытекает, что подгруппа N обладает свойством: если $2y \in N$, то и $y \in N$. Отсюда следует, что подгруппа N содержит элементы вида p/q, где p — нечетное число. Заметим также, что из уравнения (7.20) вытекает уравнение (8.40). Проверим, что $N_1 = N_2 = N$. Для этого заметим, что из уравнений (7.20) и (8.40) вытекает, что

$$|\widehat{\mu}_1(u+v)||\widehat{\mu}_2(u-v)| = |\widehat{\mu}_1(u-v)||\widehat{\mu}_2(u+v)|, \quad u, v \in Y.$$

Значит, для любых таких элементов $p/q,\ p'/q' \in Y$ где числа p и p' имеют одинаковую четность, выполнено

$$|\widehat{\mu}_1\left(p/q\right)|\left|\widehat{\mu}_2\left(p'/q'\right)\right| = \left|\widehat{\mu}_1\left(p'/q'\right)\right|\left|\widehat{\mu}_2\left(p/q\right)\right|. \tag{8.44}$$

Предположим, что существует такой элемент $p_0/q_0 \in N_1$, что $p_0/q_0 \notin N_2$. Пусть $p'/q' \in N$, где p' — число такой же четности, как p_0. Тогда из (8.44) следует, что $\widehat{\mu}_2(p'/q') = 0$, что противоречит предположению. Следовательно, $N_1 \subset N_2$. Аналогичное рассуждение показывает, что $N_2 \subset N_1$, а значит $N_1 = N_2 = N$. Поскольку N – подгруппа в Y, а Y – подгруппа в $\mathbb{Q}$, то N – также подгруппа в $\mathbb{Q}$. Возможны 2 случая: $N \ncong \mathbb{Z}$ и $N \cong \mathbb{Z}$.

1.A. Пусть $N \ncong \mathbb{Z}$. Тогда из теоремы двойственности Понтрягина и 1.10(e) следует, что группа характеров N^* топологически изоморфна некоторой группе $\Sigma_{\mathbf{b}}$. Обозначим через $g_j(y)$ ограничение характеристической функции $\widehat{\mu}_j(y)$ на подгруппу N. По теореме Бохнера функции $g_j(y)$ являются характеристическими функциями некоторых распределений $\lambda_j \in \mathrm{M}^1(\Sigma_{\mathbf{b}})$. Характеристические функции $g_j(y)$ также удовлетворяют уравнению 7.1(i) и $g_j(y) \neq 0$ при $y \in Y$. Поскольку группа $\Sigma_{\mathbf{b}}$ не содержит подгруппы, топологически изоморфной $\mathbb{T}$, то из лемм 7.1 и 7.9 следует, что $\lambda_j \in \Gamma(\Sigma_{\mathbf{b}})$, а характеристические функции $g_j(y)$ имеют вид

$$g_1(y) = l_1(y)\exp\{-\varphi(y)\}, \quad g_2(y) = l_2(y)\exp\{-\varphi(y)\}, \quad y \in N,$$

где $l_j(y)$ – характеры группы N, а $\varphi(y)$ – неотрицательная функция на N, удовлетворяющая уравнению 2.16(ii).

Легко видеть, что функция $\varphi(y)$ имеет вид $\varphi(y) = \sigma y^2,\ y \in N$. По теореме 1.9.2 характеры $l_j(y)$ представимы в виде $l_j(y) = (x_j, y),\ x_j \in \Sigma_{\mathbf{a}},\ y \in N$. Имеем поэтому

$$g_1(y) = (x_1, y)\exp\{-\sigma y^2\}, \quad g_2(y) = (x_2, y)\exp\{-\sigma y^2\}, \quad y \in N.$$

Отсюда следует, что характеристические функции $\widehat{\mu}_j(y)$ представимы в виде

$$\widehat{\mu}_1(y) = \begin{cases} (x_1, y)\exp\{-\sigma y^2\}, & \text{если} \quad y \in N, \\ 0, & \text{если} \quad y \notin N, \end{cases} \quad \widehat{\mu}_2(y) = \begin{cases} (x_2, y)\exp\{-\sigma y^2\}, & \text{если} \quad y \in N, \\ 0, & \text{если} \quad y \notin N. \end{cases} \tag{8.45}$$

Обозначим $K = A(X, N)$. Так как подгруппа N обладает свойством: если $2y \in N$, то $y \in N$, то по предложению 7.4 K – группа Корвина. По теореме 1.9.1 $N = A(Y, K)$. Поэтому по 2.14(i) характеристическая функция $\widehat{m}_K(y)$ имеет вид

$$\widehat{m}_K(y) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad y \in N, \\ 0, & \text{если} \quad y \notin N. \end{cases} \tag{8.46}$$

Функция $\exp\{-\sigma y^2\}$, $y \in Y$, является характеристической функцией некоторого гауссовского распределения $\gamma \in \Gamma(X)$. Из (8.45) и (8.46) вытекает, что $\widehat{\mu}_j(y) = \widehat{\gamma}(y)\widehat{m}_K(y)(x_j, y)$. Учитывая 2.7($b$) и 2.7($c$), отсюда следует, что $\mu_j = \gamma * m_K * E_{x_j}$, $j = 1, 2$. Итак, мы доказали, что если подгруппа N не изоморфна $\mathbb{Z}$, то имеет место утверждение (i) теоремы.

1.B. Пусть $N \cong \mathbb{Z}$ и r_0 – образующая группы N. Тогда $N = \{nr_0 : n \in \mathbb{Z}\}$, где $r_0 = p_0/q_0 \in Y$. Подгруппа N обладает свойством: если $2y \in N$, то $y \in N$. Поэтому p_0 — нечетное число. Кроме того, q_0 — нечетное число. Из леммы 8.2 следует, что сужения характеристических функций $\widehat{\mu}_j(y)$ на подгруппу N имеют вид

$$\widehat{\mu}_1(y) = \exp\{-\lambda n^2 + in\theta_1 + \kappa(1 - (-1)^n)\}, \quad \widehat{\mu}_2(y) = \exp\{-\lambda n^2 + in\theta_2 - \kappa(1 - (-1)^n)\}, \tag{8.47}$$

где $y = nr_0$, $n \in \mathbb{Z}$, $\lambda \geq 0$, $0 \leq \theta_j < 2\pi$, $\kappa \in \mathbb{R}$. Так как $r_0 = p_0/q_0$, где p_0, q_0 — нечетные числа, то $(-1)^n = (-1)^{nr_0} = (-1)^y$ и (8.47) можно переписать в виде

$$\widehat{\mu}_1(y) = \exp\{-\lambda' y^2 + iy\theta_1' + \kappa(1 - (-1)^y)\}, \quad \widehat{\mu}_2(y) = \exp\{-\lambda' y^2 + iy\theta_2' - \kappa(1 - (-1)^y)\},$$

где $\lambda' = \lambda/r_0^2, \theta_j' = \theta_j/r_0$. Отсюда вытекает представление

$$\widehat{\mu}_1(y) = \begin{cases} \exp\{-\lambda' y^2 + iy\theta_1' + \kappa(1 - (-1)^y)\}, & \text{если} \quad y \in N, \\ 0, & \text{если} \quad y \notin N. \end{cases} \tag{8.48}$$

$$\widehat{\mu}_2(y) = \begin{cases} \exp\{-\lambda' y^2 + iy\theta_2' - \kappa(1 - (-1)^y)\}, & \text{если} \quad y \in N, \\ 0, & \text{если} \quad y \notin N. \end{cases} \tag{8.49}$$

где $\lambda' \geq 0$, $\kappa \in \mathbb{R}$, $0 \leq \theta_j' < 2\pi/r_0$. По теореме 1.9.5 $A(Y, X_{(2)}) = Y^{(2)}$. Тогда из теоремы 1.9.2 вытекает, что $(X_{(2)})^* \cong Y/A(Y, X_{(2)}) = Y/Y^{(2)} \cong \mathbb{Z}(2)$. Значит, $X_{(2)} = \{0, x_0\}$, где x_0 — элемент порядка 2 в группе X. Напомним, что каждый элемент группы Y имеет вид $y = p/q$, где $p \in \mathbb{Z}$, а q – нечетное число. Поэтому функция $a_1(y) = \exp\{\kappa(1 - (-1)^y\}$, $y \in Y$, является характеристической функцией заряда

$$\pi_1 = \frac{1}{2}(1 + e^{2\kappa})E_0 + \frac{1}{2}(1 - e^{2\kappa})E_{x_0}.$$

Функция $l_1(y) = \exp\{iy\theta_1'\}$ является характером подгруппы N. По теореме 1.9.2 функция $l_1(y)$ представима в виде $l_1(y) = (x_1, y)$, $x_1 \in X$. Функция $b(y) = \exp\{-\lambda y^2\}$, $y \in Y$, является характеристической функцией некоторого гауссовского распределения $\gamma \in \Gamma(X)$. Из (8.48) вытекает, что

$\widehat{\mu}_1(y) = \widehat{\gamma}(y)\widehat{m}_K(y)\widehat{\pi}_1(y)(x_1, y)$. Следовательно, по 2.7($b$) и 2.7($c$) $\mu_1 = \gamma * m_K * \pi_1 * E_{x_1}$. Аналогично из (8.49) получаем представление для распределения μ_2. При этом

$$\pi_2 = \frac{1}{2}(1 + e^{-2\kappa})E_0 + \frac{1}{2}(1 - e^{-2\kappa})E_{x_0}.$$

Легко видеть, что $\pi_1 * \pi_2 = E_0$. Таким образом, мы доказали, что если подгруппа N изоморфная $\mathbb{Z}$, то имеет место утверждение (ii) теоремы.

2. $N = \{0\}$. Так как $N = \{0\}$, то из (7.5) следует, что $\widehat{\mu}_1(2p/q) = \widehat{\mu}_2(2p/q) = 0$ для любого $p/q \in Y,\ p \neq 0$. Предположим, что существует элемент p_0/q_0, где p_0 — такое нечетное число, что $\widehat{\mu}_1(p_0/q_0) \neq 0$. Тогда $\widehat{\mu}_2(p_0/q_0) = 0$ и из (8.44) следует, что $\widehat{\mu}_2(p'/q') = 0$ для любого $p'/q' \in Y$, где p' – нечетное число. Итак, мы получили, что

$$\widehat{\mu}_1(2p/q) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad p = 0, \\ 0, & \text{если} \quad p \neq 0, \end{cases} \qquad \widehat{\mu}_2(p/q) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad p = 0, \\ 0, & \text{если} \quad p \neq 0 \end{cases}$$

при любом $p/q \in Y$. Учитывая (2.2) и 2.7(b), из этих представлений характеристических функций $\widehat{\mu}_j(y)$ следует, что случайные величины $2\xi_1$ и ξ_2 одинаково распределены с распределением m_X. Аналогично рассуждаем в случае, когда существует такой элемент $p_0/q_0 \in Y$, где p_0 — такое нечетное число, что $\widehat{\mu}_2(p_0/q_0) \neq 0$. Тогда получаем, что случайные величины ξ_1 и $2\xi_2$ одинаково распределены с распределением m_X. Таким образом, мы доказали, что если $N = \{0\}$, то справедливо утверждение (iii) теоремы. Теорема полностью доказана. $\square$

8.9. Замечание. Отметим, что если ξ_1 и ξ_2 — независимые случайные величины со значениями в группе $X = \mathbb{R} \times \mathbb{T}$, имеющие такие распределения μ_j, как в утверждениях (i) – (iii) теоремы 8.5, то характеристические функции $\widehat{\mu}_j(y)$ удовлетворяют уравнению 7.1(i), а следовательно, по лемме 7.1 $\xi_1 + \xi_2$ и $\xi_1 - \xi_2$ независимы.

Аналогичное утверждение справедливо и для случайных величин ξ_1 и ξ_2 со значениями в группе $X = \Sigma_{\mathbf{a}}$ и имеющих такие распределения μ_j, как в утверждениях (i) – (iii) теоремы 8.8.

§9. Гауссовские распределения в смысле Бернштейна

Пусть X – локально компактная абелева группа, удовлетворяющая второй аксиоме счетности, Y – ее группа характеров. В этом параграфе мы изучаем распределения независимых одинаково распределенных случайных величин ξ_1 и ξ_2 со значениями в группе X, которые имеют независимые сумму и разность. Такие распределения называются гауссовскими распределениями в смысле Бернштейна. Мы описываем группы X, которые обладают свойством, что на них любое гауссовское распределение в смысле Бернштейна инвариантно относительно некоторой компактной подгруппы K группы X и при естественном гомоморфизме $X \mapsto X/K$ индуцирует на фактор-группе X/K гауссовское распределение.

9.1. Определение. Распределение μ на группе X называется *гауссовским распределением в смысле Бернштейна*, если из того, что ξ_1 и ξ_2 – независимые одинаково распределенные случайные величины со значениями в группе X, имеющие распределение μ, следует, что их сумма и разность независимы.

Множество гауссовских распределений в смысле Бернштейна на группе X обозначим через $\Gamma_B(X)$.

9.2. Лемма. *Распределение $\mu \in \mathrm{M}^1(X)$ принадлежит классу $\Gamma_B(X)$ тогда и только тогда, когда характеристическая функция $\widehat{\mu}(y)$ удовлетворяет уравнению*

$$(i) \qquad \widehat{\mu}(u+v)\widehat{\mu}(u-v) = \widehat{\mu}^2(u)|\widehat{\mu}(v)|^2, \quad u,v \in Y.$$

Доказательство. Утверждение леммы вытекает из 2.7(d) и леммы 7.1, если в лемме 7.1 положить $\mu_1 = \mu_2 = \mu$. □

9.3. Из уравнения 9.2(i) следует включение $\Gamma(X) \subset \Gamma_B(X)$. Очевидно, что класс $I_B(X)$, определенный в 7.1, состоит из идемпотентных распределений, принадлежащих классу $\Gamma_B(X)$, т.е. $I_B(X) = \Gamma_B(X) \cap I(X)$. Как доказано в предложении 7.4, $m_K \in I_B(X)$ тогда и только тогда, когда K – компактная группа Корвина. Из уравнения 9.2(i) вытекает, что множество $\Gamma_B(X)$ является подполугруппой в $\mathrm{M}^1(X)$. Поэтому имеет место включение

$$\Gamma(X) * I_B(X) \subset \Gamma_B(X). \tag{9.1}$$

Основная задача, решаемая в этом параграфе, состоит в полном описании групп X, для которых имеет место равенство

$$\Gamma(X) * I_B(X) = \Gamma_B(X). \tag{9.2}$$

Очевидно, что если $\mu \in \Gamma(X) * I_B(X)$, то μ инвариантно относительно некоторой компактной подгруппы Корвина K группы X и при естественном гомоморфизме $X \mapsto X/K$ индуцирует на фактор-группе X/K гауссовское распределение. Для решения указанной задачи нам понадобится ряд лемм.

9.4. Лемма. *Пусть распределение $\mu \in \Gamma_B(X)$ и характеристическая функция $\widehat{\mu}(y)$ не обращается в нуль. Тогда функция $\widehat{\mu}(y)$ представима в виде*

$$(i) \qquad \widehat{\mu}(y) = l(y)\exp\{-\varphi(y)\}, \quad y \in Y,$$

где $l(y)$ – непрерывная функция, удовлетворяющая уравнению

$$(ii) \qquad l(u+v)l(u-v) = l^2(u), \quad u,v \in Y,$$

и условиям

$$(iii) \qquad l(-y) = \overline{l(y)}, \quad |l(y)| = 1, \quad y \in Y, \quad l(0) = 1.$$

Кроме того, $\varphi(y)$ – непрерывная неотрицательная функция на Y, удовлетворяющая уравнению 2.16(ii).

Доказательство. По лемме 9.2 характеристическая функция $\widehat{\mu}(y)$ удовлетворяет уравнению 9.2(i). Из уравнения 9.2(i) следует, что

$$|\widehat{\mu}(u+v)||\widehat{\mu}(u-v)| = |\widehat{\mu}(u)|^2|\widehat{\mu}(v)|^2, \quad u,v \in Y.$$

Логарифмируя это равенство и полагая $\varphi(y) = -\log|\widehat{\mu}(y)|$, мы получаем, что $\varphi(y)$ – непрерывная неотрицательная функция на Y, удовлетворяющая уравнению 2.16(ii) и $|\widehat{\mu}(y)| = \exp\{-\varphi(y)\}$. Положим $l(y) = \widehat{\mu}(y)/|\widehat{\mu}(y)|$. Очевидно, что функция $l(y)$ непрерывна и удовлетворяет условиям (iii). Функция $l(y)$ также удовлетворяет уравнению 9.2(i), которое переходит в уравнение (ii), если мы учтем (iii). $\square$

9.5. Лемма. *Следующие свойства группы X эквивалентны:*

(i) *для любой компактной подгруппы Корвина K группы X фактор-группа X/K не содержит подгруппы, топологически изоморфной двумерному тору $\mathbb{T}^2$;*

(ii) *связная компонента нуля c_X группы X содержит не более одного элемента порядка 2, т.е. $|(c_X)_{(2)}| \le 2$. Другими словами, либо $(c_X)_{(2)} = \{0\}$, либо $(c_X)_{(2)} \cong \mathbb{Z}(2)$.*

Доказательство. (i) $\Rightarrow$ (ii). Мы проверим, что если K – компактная подгруппа Корвина группы X, то

$$|K_{(2)}| \le 2. \tag{9.3}$$

Утверждение (ii) сразу следует из (9.3). Действительно, по теореме 1.11.2 $c_X \cong \mathbb{R}^m \times B$, где B – связная компактная группа. По теореме 1.9.6 B – группа Корвина. Из (9.3) следует, что $|B_{(2)}| \le 2$, значит $|(c_X)_{(2)}| \le 2$, т.е. (ii) выполнено.

Обозначим $L = K^*$. По теореме 1.6.1 группа L дискретна. Из теоремы 1.9.5 вытекает, что $A(L, K_{(2)}) = L^{(2)}$, а значит, из теоремы 1.9.5 следует, что

$$(K_{(2)})^* \cong L/A(L, K_{(2)}) = L/L^{(2)}. \tag{9.4}$$

Если мы докажем, что

$$|L/L^{(2)}| \le 2, \tag{9.5}$$

то отсюда, в частности, будет следовать, что группа $(K_{(2)})^*$ конечна. Следовательно, конечна и группа $K_{(2)}$ и выполнено $|K_{(2)}| = |(K_{(2)})^*|$. Тем самым требуемое утверждение будет доказано.

Неравенство (9.5) будет доказано, если мы проверим, что для любых $y_1,\ y_2 \in L$ таких, что $y_1,\ y_2 \notin L^{(2)}$, выполнено включение $y_1 - y_2 \in L^{(2)}$. Допустим противное. В таком случае существуют элементы $y_1, y_2 \in L$ такие, что $y_1,\ y_2,\ y_1 - y_2 \notin L^{(2)}$. Обозначим через M подгруппу в L порожденную элементами y_1 и y_2. Поскольку $K^{(2)} = K$, то по теореме 1.9.5 $L_{(2)} = 0$. Следовательно, все ненулевые элементы конечного порядка в L имеют нечетный порядок. Отсюда следует, что если $y \in L, y \notin L^{(2)}$, то y – элемент бесконечного порядка. Так как группа M конечно порождена, то по теореме 1.20.4 $M = M_1 \times M_2$, где подгруппа M_j изоморфна либо $\mathbb{Z}$, либо $\mathbb{Z}(n_j)$. Поэтому "a priori" имеются такие возможности: $M \cong \mathbb{Z},\ M \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}(n),\ M \cong \mathbb{Z}^2$. Рассмотрим отдельно каждый из этих случаев.

1. $M \cong \mathbb{Z}$. Мы имеем $y_1 = n_1 e,\ y_2 = n_2 e$, где e – элемент бесконечного порядка в L, а $n_1,\ n_2$ целые числа. Поскольку $y_1,\ y_2 \notin L^{(2)}$, то n_1 и n_2 нечетные числа. Поэтому $y_1 - y_2 = (n_1 - n_2)e \in L^{(2)}$, вопреки предположению. Таким образом, случай **1** невозможен.

2. $M \cong \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}(n)$. Мы имеем $y_1 = n_1 e + l_1 a\ \ y_2 = n_2 e + l_2 a$, где e – элемент бесконечного порядка, a – элемент конечного порядка n в L, а $n_j,\ l_j$ целые числа. Как было отмечено выше, все ненулевые элементы конечного порядка в L имеют нечетный порядок. Поэтому $a = 2b,\ b \in L$. Поскольку

$y_1,\ y_2, \notin L^{(2)}$, то $n_1,\ n_2$ – нечетные числа. Следовательно, $y_1 - y_2 = (n_1 - n_2)e + 2(l_1 - l_2)b \in L^{(2)}$, вопреки предположению. Таким образом, случай **2** также невозможен.

3. $M \cong \mathbb{Z}^2$. Пусть $y \in L$ такой элемент, что $2y \in M$. Тогда

$$2y = k_1 y_1 + k_2 y_2, \tag{9.6}$$

где $k_1,\ k_2$ – целые числа. Предположим, что для любого $y \in L$ такого, что $2y \in M$ числа $k_1,\ k_2$ в (9.6) четные. Беря во внимание, что $L_{(2)} = \{0\}$, из (9.6) следует, что $y \in M$. В таком случае из теоремы 1.9.1 и леммы 7.2 следует, что аннулятор $A(K, M)$, – компактная подгруппа Корвина. По теоремам 1.9.1 и 1.9.2 $K/A(K, M) \cong M^*$. Поскольку $M^* \cong T^2$, то мы получаем противоречие с (i), поскольку $K/A(K, M)$ – подгруппа $X/A(K, M)$. Следовательно, существует такой элемент $y \in L$, что $2y \in M$, и по крайней мере одно из чисел k_j в (9.6) нечетно.

Предположим, что $k_1 = 2m_1 + 1,\ k_2 = 2m_2$, где m_j – целые числа. Тогда мы имеем $y_1 = 2y - 2m_1 y_1 - 2m_2 y_2 \in L^{(2)}$ вопреки предположению. Рассуждая аналогично, убеждаемся, что случай $k_1 = 2m_1,\ k_2 = 2m_2 + 1$ также невозможен. Пусть $k_1 = 2m_1 + 1,\ k_2 = 2m_2 - 1$. Тогда $y_1 - y_2 = 2y - 2m_1 y_1 - 2m_2 y_2 \in L^{(2)}$ вопреки предположению. Таким образом, случай **3** также невозможен. Мы доказали, что выполнено неравенство (9.5), а следовательно, и (ii).

$(ii) \Rightarrow (i)$. Мы докажем вначале, что если K – компактная подгруппа Корвина в X, и $L = K^*$, то выполнено (9.5). По теоремам 1.9.2 и 1.9.3

$$(c_K)^* \cong L/b_L. \tag{9.7}$$

Из (ii) следует, что $|(c_K)_{(2)}| \leq 2$. Поэтому

$$|((c_K)_{(2)})^*| \leq 2. \tag{9.8}$$

По теореме 1.9.5 $A\left((c_K)^*,\ (c_K)_{(2)}\right) = (c_K)^{*(2)}$. Из (9.7) по теореме 1.9.2 находим

$$((c_K)_{(2)})^* \cong (c_K)^*/A\left((c_K)^*, (c_K)_{(2)}\right) \cong (L/b_L)/(L/b_L)^{(2)}. \tag{9.9}$$

Рассмотрим фактор-группу L/b_L. Из (9.8) и (9.9) следует, что если $[y_1], [y_2] \in L/b_L,\ [y_1], [y_2] \notin (L/b_L)^{(2)}$, то

$$[y_1] - [y_2] \in (L/b_L)^{(2)}. \tag{9.10}$$

Заметим, что если $y \in L$ и $[y] \in (L/b_L)^{(2)}$, то $y \in L^{(2)}$. Действительно, пусть $[y] = 2[y'],\ [y'] \in L/b_L$. Отсюда следует, что $y - 2y' = h,\ h \in b_L$. Поскольку $K^{(2)} = K$, то по теореме 1.9.5 $L_{(2)} = \{0\}$, а значит все ненулевые элементы подгруппы b_L имеют нечетный порядок. Поэтому $h = 2h',\ h' \in b_L$ и $y = 2y' + 2h' \in L^{(2)}$. Предположим, что $y_1,\ y_2 \in L,\ y_1,\ y_2 \notin L^{(2)}$. Тогда $[y_1], [y_2] \in L/b_L$ и $[y_1], [y_2] \notin (L/b_L)^{(2)}$. Следовательно, выполнено (9.10), а значит, $y_1 - y_2 \in L^{(2)}$. Таким образом, мы доказали (9.5).

Проверим теперь, что если G – компактная подгруппа Корвина в X и F – компактная подгруппа Корвина в фактор-группе X/G, то $|F_{(2)}| \leq 2$. Поскольку двумерный тор $\mathbb{T}^2$ – компактная группа Корвина и $|(\mathbb{T}^2)_{(2)}| = 4$, то тем самым, (i) будет доказано. Пусть $p : X \mapsto X/G$ – естественный гомоморфизм. Положим $K = p^{-1}(F)$. Очевидно, мы имеем $F \cong K/G$. Поскольку группы G и F компактны, то группа K также компактна. Очевидно, что K – группа Корвина. Как было показано выше, выполнено (9.5). Поскольку G – группа Корвина, то легко видеть, что $A(L,G)\cap L^{(2)}\subset (A(L,G))^{(2)}$. Пусть $y_1,y_2\in A(L,G),\ y_1,y_2\notin (A(L,G))^{(2)}$. Тогда $y_1,y_2\notin L^{(2)}$ и, как следует из (9.5), $y_1-y_2\in L^{(2)}$. Следовательно, $y_1-y_2\in (A(L,G))^{(2)}$. Поскольку по теореме 1.9.2 $F^*\cong A(L,G)$, то тем самым, мы доказали, что $|F^*/(F^*)^{(2)}|\le 2$. Принимая во внимание, что по теоремам 1.9.2 и 1.9.5 $(F_{(2)})^*\cong F^*/(F^*)^{(2)}$, мы получаем, что $|(F_{(2)})^*|\le 2$. Следовательно, группа $(F_{(2)})^*$ конечна. Значит, конечна и группа $F_{(2)}$ и выполнено $|F_{(2)}|=|(F_{(2)})^*|$. $\square$

9.6. Лемма. *Пусть $X=\mathbb{T}^2$. Тогда существует такое распределение $\mu_0\in\Gamma_B(X)$, характеристическая функция которого не обращается в нуль, и $\mu_0\notin\Gamma(X)$.*

Доказательство. Используя лемму 9.2, легко проверить, что распределение μ_0 на группе $X=\mathbb{T}^2$, построенное в замечании 5.14, обладает нужным свойством. $\square$

9.7. Лемма. *Пусть группа X не содержит подгруппы, топологически изоморфной двумерному тору $\mathbb{T}^2$, распределение $\mu\in\Gamma_B(X)$ и характеристическая функция $\widehat{\mu}(y)$ не обращается в нуль. Тогда $\mu\in\Gamma(X)$.*

Доказательство. По лемме 9.4 характеристическая функция $\widehat{\mu}(y)$ представима в виде 9.4(i). Положим $\nu=\mu*\bar{\mu}$. Тогда из 2.7(c) и 2.7(d) следует, что $\widehat{\nu}(y)=\exp\{-2\varphi(y)\}$, а значит, $\nu\in\Gamma^s(X)$. Из предложения 3.6 следует, что $\sigma(\nu)=\widetilde{X}$, где $\widetilde{X}$ – некоторая связная подгруппа группы X. Поскольку μ – делитель ν, то по предложению 2.2 распределение μ можно так заменить его сдвигом μ', что $\sigma(\mu')\subset\widetilde{X}$. Из леммы 9.2 вытекает, что $\mu'\in\Gamma_B(X)$. Сказанное позволяет с самого начала предполагать, что группа X связна. Возможны 2 случая: либо группа X не содержит подгруппы, топологически изоморфной $\mathbb{T}$, либо X содержит такую подгруппу.

1. Группа X не содержит подгруппы, топологически изоморфной $\mathbb{T}$. Поскольку μ – делитель ν, то по теореме 4.6 из того, что $\nu\in\Gamma(X)$ вытекает, что и $\mu\in\Gamma(X)$. Следовательно, в этом случае лемма доказана.

2. Группа X содержит подгруппу F, топологически изоморфную $\mathbb{T}$. По теореме 1.17.1 подгруппа F является топологическим прямым сомножителем в X, т.е. $X=F\times G$, где G – связная группа. Так как по условию группа X не содержит подгруппы, топологически изоморфной двумерному тору $\mathbb{T}^2$, то группа G не содержит подгруппы, топологически изоморфной $\mathbb{T}$. По теореме 1.11.2 $G\cong\mathbb{R}^m\times K$, где $m\ge 0$, а K — связная компактная группа. Дальнейшее рассуждение мы проведем, предполагая, что $m=0$. Общий случай рассматривается совершенно аналогично. Мы будем предполагать также, для определенности, что $\dim\, K=\aleph_0$. В случае, когда $\dim\, K<\infty$, рассуждения только упрощаются. По теореме 1.7.1 имеем $Y=L\times D$, где $L\cong\mathbb{Z}$, а $D\cong K^*$. По теоремам 1.6.1 и 1.6.2 D – дискретная группа без кручения. По теореме 1.6.3, $r(D)=\aleph_0$.

По лемме 9.4 для характеристической функции $\widehat{\mu}(y)$ имеет место представление 9.4(i). Лемма будет доказана, если мы проверим, что функция $l(y)$ в 9.4(i) – характер группы Y, т.е. для любых $u,v\in Y$ выполнено

$$l(u+v)=l(u)l(v). \tag{9.11}$$

Обозначим через $y=(n,d),\ n\in\mathbb{Z},\ d\in D$, элементы группы Y. Полагая в уравнении 9.4(ii) $u=v=y$ и учитывая, что $l(0)=1$, получаем

$$l(2y)=l^2(y),\quad y\in Y. \tag{9.12}$$

Из (9.12) и 9.4(ii) по индукции находим $l(ny)=l^n(y)$ для всех $y\in Y,\ n\in\mathbb{Z}$. Следовательно, функция $l(n,0),\ n\in\mathbb{Z}$, удовлетворяет уравнению (9.11). По лемме 9.2 характеристическая функция $\widehat{\mu}(y)$ удовлетворяет уравнению 9.2(i). Рассмотрим ограничение этого уравнения на подгруппу D. По теореме Бохнера функция $\widehat{\mu}(0,d),\ d\in D$, является характеристической функцией некоторого распределения $\lambda\in \mathrm{M}^1(K)$. Поскольку функция $\widehat{\mu}(0,d)$ также удовлетворяет уравнению 9.2(i), то по лемме 9.2 $\lambda\in\Gamma_B(K)$. Так как группа K не содержит подгруппы, топологически изоморфной $\mathbb{T}$, то, как доказано при рассмотрении случая **1**, $\lambda\in\Gamma(K)$. Отсюда следует, что функция $l(0,d),\ d\in D$, удовлетворяет уравнению (9.11).

Рассмотрим на группе Y функцию

$$a(n,d)=l(n,0)l(0,d)),\quad (n,d)\in Y.$$

В силу сказанного выше, функция $a(n,d)$ удовлетворяет уравнению (9.11). Положим

$$b(n,d)=l(n,d)/a(n,d),\quad (n,d)\in Y.$$

Очевидно, что функция $b(n,d)$ также удовлетворяет уравнению 9.4(ii). Проверим, что $b(n,d)=1$ при всех $(n,d)\in Y$. Тем самым, лемма будет доказана.

Очевидно, что $b(n,0)=b(0,d)=1$ при всех $(n,d)\in Y$. Полагая в уравнении 9.4(ii) $u=(n,0),\ v=(n,d)$, получаем

$$b(2n,d)b(0,-d)=b^2(n,0).$$

Отсюда следует, что $b(2n,d)=1$ при всех $(n,d)\in Y$. В частности, $b(2n,2d)=1$ при всех $(n,d)\in Y$. Так как функция $b(n,d)$ удовлетворяет уравнению 9.4(ii), то $b(n,d)$ удовлетворяет уравнению (9.12), т.е. $b(2n,2d)=b^2(n,d)$. Поэтому для любого элемента $(n,d)\in Y$ выполнено $b(n,d)=\pm1$. Докажем, что $b(n,d)=1$ при всех $(n,d)\in Y$.

Предположим, что существует такой элемент $(n_0,d_0)\in Y$, что $b(n_0,d_0)=-1$. Выберем в D максимальную независимую систему элементов $d_1,\dots,d_l,\dots$ и рассмотрим гомоморфизм $\pi: D\mapsto\mathbb{R}^{\aleph_0*}$, определенный формулой (3.17). Поскольку группа K не содержит подгруппы, топологически изоморфной $\mathbb{T}$, то по лемме 5.10 существует такая подгруппа B в D конечного ранга m, что $d_0\in B$ и $\overline{\pi(B)}\cong\mathbb{R}^m$. Пусть $\tau:\overline{\pi(B)}\mapsto\mathbb{R}^m$ – топологический изоморфизм. Положим $\theta=\tau\pi$. Тогда $\overline{\theta(B)}=\mathbb{R}^m$.

Обозначим через $||t||$ норму вектора $t\in\mathbb{R}^m$. Пусть задано произвольное $\varepsilon>0$. Рассмотрим точку $s_0=(\theta d_0)/2\in\mathbb{R}^m$ и выберем элемент $\widetilde{d}\in B$ так, чтобы

$$||s_0-\theta\widetilde{d}||<\varepsilon/2.$$

Положим в уравнении 9.4(ii) $u=(n_0,d_0-\widetilde{d}),\ v=(0,\widetilde{d})$. Учитывая, что $b^2(n,d)=1$ при $(n,d)\in B$, получим

$$b(n_0,d_0)b(n_0,d_0-2\widetilde{d})=1.$$

Отсюда следует, что $b(n_0,d_0-2\widetilde{d})=-1$, причем

$$||\theta(d_0-2\widetilde{d})||=||\theta d_0-2\theta\widetilde{d}||=2||s_0-\theta\widetilde{d}||<\varepsilon.$$

Положим $d'=d_0-2\widetilde{d}$. Мы доказали, таким образом, что для любого $\varepsilon>0$ можно указать такой элемент $(n_0,d')\in L\times B$, что $b(n_0,d')=-1$ и $||\theta d'||<\varepsilon$.

Так как функция $a(n,d)$ – характер группы Y, то функция $b(n,d)\exp\{-\varphi(n,d)\} = \widehat{\mu}(y)/a(n,d),\ (n,d)\in Y$, является положительно определенной. Обозначим через $g(n,d)$ ее ограничение на подгруппу $L\times B$. Функция $g(n,d)$ также является положительно определенной. Как следует из доказательства предложения 3.8, функция $\varphi(n,d)$ на подгруппе $L\times B$ представима в виде

$$\varphi(n,d) = an^2 + 2n\langle t,\theta d\rangle + \langle A\theta d,\theta d\rangle, \tag{9.13}$$

где $a\ge 0,\ t\in\mathbb{R}^m$, а $A=(\alpha_{i,j})_{i,j=1}^m$ – симметричная неотрицательно определенная матрица. По теореме Бохнера функция $g(n,d)$ – характеристическая. Применим неравенство 2.7(g) к функции $g(n,d)$, полагая $u=(n_0,d'),\ v=(n_0,0)$. Имеем,

$$|g(n_0,d') - g(n_0,0)|^2 \le 2(1-g(0,d')).$$

Учитывая (9.13), отсюда находим

$$\left|-\exp\{-an_0^2 - 2n_0\langle t,\theta d'\rangle - \langle A\theta d',\theta d'\rangle\} - \exp\{-an_0^2\}\right|^2$$

$$= \exp\{-2an_0^2\}\left|\exp\{-2n_0\langle t,\theta d'\rangle - \langle A\theta d',\theta d'\rangle\} + 1\right|^2 \le 2(1-\exp\{-\langle A\theta d',\theta d'\rangle\}),$$

что невозможно, если норма $||\theta d'||$ достаточно мала. Полученное противоречие доказывает, что $b(n,d)=1$ при всех $(n,d)\in Y$. Отсюда следует, что функция $l(n,d)=a(n,d)$ удовлетворяет уравнению (9.11). □

Отметим, что как вытекает из леммы 9.6, утверждение леммы 9.7 неверно, если группа X содержит подгруппу, топологически изоморфную двумерному тору $\mathbb{T}^2$. Из леммы 9.7 вытекает следующее утверждение, уточняющее групповой аналог теоремы Марцинкевича (см. теорему 5.11 и предложение 5.13).

9.8. Предложение. *Пусть распределение $\mu\in \mathrm{M}^1(X)$ и характеристическая функция $\widehat{\mu}(y)$ имеет вид*

$$\widehat{\mu}(y) = \exp\{\psi(y)\},\quad y\in Y,$$

где $\psi(y)$ – непрерывный многочлен степени 2 такой, что $\psi(0)=0$. Для того чтобы отсюда следовало, что $\mu\in\Gamma(X)$, необходимо и достаточно, чтобы группа X не содержала подгруппы, топологически изоморфной двумерному тору $\mathbb{T}^2$.

Доказательство. Необходимость отмечена в замечании 5.14. Докажем достаточность. По теореме 5.5 многочлен $\psi(y)$ представим в виде 5.5(i). Поскольку $\psi(y)$ – многочлен степени 2, то представление 5.5(i) имеет вид

$$\psi(y) = g_2(y,y) + g_1(y),\quad y\in Y,$$

где $g_2(y_1,y_2)$ – 2-аддитивная функция, а $g_1(y)$ – аддитивная функция. Подставляя выражение

$$\widehat{\mu}(y) = \exp\{g_2(y,y)+g_1(y)\},\quad y\in Y,$$

в уравнение 9.2(i), убеждаемся, что характеристическая функция $\widehat{\mu}(y)$ удовлетворяет этому уравнению. По лемме 9.2 $\mu\in\Gamma_B(X)$. Так как по условию группа X не содержит подгруппы, топологически изоморфной двумерному тору $\mathbb{T}^2$, то по лемме 9.7 $\mu\in\Gamma(X)$. □

Докажем теперь основную теорему этого параграфа.

9.9. Теорема. *Для того чтобы на группе X имело место равенство (9.2) необходимо и достаточно, чтобы связная компонента нуля группы X содержала не более одного элемента порядка 2.*

Доказательство. Необходимость. Доказательство необходимости по существу такое же, как доказательство пункта (II) в теореме 7.10. Предположим, что связная компонента нуля группы X содержит более одного элемента порядка 2. Тогда по лемме 9.5 существует такая компактная подгруппа Корвина K в группе X, что фактор-группа X/K содержит подгруппу F, топологически изоморфную двумерному тору $\mathbb{T}^2$. Согласно лемме 9.6 существует распределение μ_0 на двумерном торе $\mathbb{T}^2$, характеристическая функция которого не обращается в нуль, и такое, что $\mu_0 \in \Gamma_B(\mathbb{T}^2)$, $\mu_0 \notin \Gamma(\mathbb{T}^2)$. Распределение μ_0 можно рассматривать, как распределение на фактор-группе X/K. Сохраним для него обозначение μ_0. Так как в силу теоремы 1.9.2 $(X/K)^* \cong A(Y, K)$, то можно считать, что характеристическая функция $\widehat{\mu}_0(y)$ определена на аннуляторе $A(Y, K)$. Рассмотрим на группе Y функцию

$$f(y) = \begin{cases} \widehat{\mu}_0(y), & \text{если} \quad y \in A(Y, K), \\ 0, & \text{если} \quad y \notin A(Y, K). \end{cases}$$

Так как $A(Y, K)$ – подгруппа, а $\widehat{\mu}_0(y)$ – положительно определенная функция, то по предложению 2.12 $f(y)$ – также положительно определенная функция. Поскольку K – компактная группа, то по теореме 1.9.4 аннулятор $A(Y, K)$ – открытая подгруппа, а следовательно, функция $f(y)$ непрерывна. По теореме Бохнера существует такое распределение $\mu \in \mathrm{M}^1(X)$, что $\widehat{\mu}(y) = f(y)$.

Проверим, что $\mu \in \Gamma_B(X)$. В силу леммы 9.2 достаточно проверить, что характеристическая функция $\widehat{\mu}(y)$ удовлетворяет уравнению 9.2(i). Эта проверка дословно совпадает с соответствующей проверкой при доказательстве утверждения (II) в теореме 7.10.

Поскольку $\widehat{\mu}_0(y) \neq 0$ при $y \in A(Y, K)$ и $\mu_0 \notin \Gamma(X/K)$, то отсюда легко следует, что $\mu \notin \Gamma(X) * I_B(X)$. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть $\mu \in \Gamma_B(X)$. Рассмотрим множество $N = \{y \in Y : \widehat{\mu}(y) \neq 0\}$. По лемме 9.2 характеристическая функция $\widehat{\mu}(y)$ удовлетворяет уравнению 9.2(i). Отсюда следует, что N – подгруппа в Y. Очевидно, что подгруппа N открыта. Положим $K = A(X, N)$. Тогда по теореме 1.9.4 группа K компактна. Полагая в уравнении 9.2(i) $u = v = y$, получаем

$$\widehat{\mu}(2y) = \widehat{\mu}^2(y)|\widehat{\mu}^2(y)|, \quad y \in Y.$$

Отсюда вытекает, что если $2y \in N$, то $y \in N$. Применяя лемму 7.2, получаем, что K – группа Корвина. Отметим также, что по теореме 1.9.1 $N = A(Y, K)$. Так как по теореме 1.9.2 $(X/K)^* \cong A(Y, K)$, то ограничение характеристической функции $\widehat{\mu}(y)$ на N в силу леммы 9.2 и следствия 2.11 является характеристической функцией некоторого распределения $\lambda \in \Gamma_B(X/K)$. Из условия теоремы по лемме 9.5 следует, что фактор-группа X/K не содержит подгруппы, топологически изоморфной двумерному тору $\mathbb{T}^2$. Применяя лемму 9.7, получаем, что $\lambda \in \Gamma(X/K)$. Учитывая теорему 1.9.2, для характеристической функции распределения λ мы имеем такое представление

$$\widehat{\lambda}(y) = (x, y) \exp\{-\varphi(y)\}, \quad x \in X, \ y \in N, \tag{9.14}$$

где $\varphi(y)$ – непрерывная неотрицательная функция на N, удовлетворяющая уравнению 2.16(ii). По лемме 3.18 функцию $\varphi(y)$ можно продолжить с сохранением ее свойств с подгруппы N на

Y. Обозначим продолженную функцию через $\widetilde{\varphi}(y)$. Пусть γ – гауссовское распределение на X с характеристической функцией

$$\widehat{\gamma}(y) = (x, y)\exp\{-\widetilde{\varphi}(y)\}, \quad y \in Y. \tag{9.15}$$

Из 2.14(i) следует, что характеристическая функция распределения Хаара m_K имеет вид

$$\widehat{m}_K(y) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad y \in N, \\ 0, & \text{если} \quad y \notin N. \end{cases} \tag{9.16}$$

Из (9.14)–(9.16) вытекает, что $\widehat{\mu}(y) = \widehat{\gamma}(y)\widehat{m}_K(y)$. Следовательно, применяя 2.7(b) и 2.7(c), получаем $\mu = \gamma * m_K$. А это и означает, что $\mu \in \Gamma(X) * I_B(X)$. $\square$

Ниже мы дадим другое доказательство достаточности в теореме 9.9. Это доказательство не будет опираться на лемму 9.7, при доказательстве которой была использована теорема 4.6 (групповой аналог теоремы Крамера) (ср. с замечанием 7.12). Нам понадобятся две леммы.

9.10. Лемма. *Пусть $X = \mathbb{R}^m \times K$, где $m \geq 0$, а K – компактная группа Корвина. Тогда $X_{(2)} \subset c_X$.*

Доказательство. По теореме 1.7.1 $Y = L \times M$, где $L \cong \mathbb{R}^m$, $M \cong K^*$. По теореме 1.6.1 группа M дискретна. По теореме 1.9.5 из $K^{(2)} = K$ следует, что $M_{(2)} = \{0\}$, т.е. группа M не содержит элементов порядка 2. Отсюда вытекает, что подгруппа b_M состоит из нуля и элементов нечетного порядка группы M. Следовательно $(b_M)^{(2)} = b_M$, а значит, $b_M \subset Y^{(2)}$. По теореме 1.9.3 $c_X = A(X, b_Y)$. Очевидно, что $b_Y = b_M$. Поэтому $A(X, b_M) = A(X, b_Y)$. По теореме 1.9.5 $A(X, Y^{(2)}) = X_{(2)}$. В результате получаем $c_X = A(X, b_Y) = A(X, b_M) \supset A(X, Y^{(2)}) = X_{(2)}$. $\square$

9.11. Лемма. *Пусть группа X содержит не более одного элемента порядка 2, распределение $\mu \in \Gamma_B(X)$ и характеристическая функция $\widehat{\mu}(y)$ не обращается в нуль. Тогда $\mu \in \Gamma(X)$.*

Доказательство. По лемме 9.4 характеристическая функция $\widehat{\mu}(y)$ представима в виде 9.4(i). Лемма будет доказана, если мы проверим, что функция $l(y)$ в 9.4(i) – характер группы Y, т.е. что функция $l(y)$ удовлетворяет уравнению (9.11).

Меняя в уравнении 9.4(ii) u и v местами и, умножая полученное уравнение на 9.4(ii), находим:

$$l^2(u + v) = l^2(u)l^2(v), \quad u, v \in Y. \tag{9.17}$$

Положим в 9.4(ii) $u = v = y$. Имеем, $l(2y) = l^2(y)$, $y \in Y$. Отсюда и из (9.17) вытекает, что

$$l(2u + 2v) = l(2u)l(2v), \quad u, v \in Y. \tag{9.18}$$

Из (9.18) следует, что функция $l(y)$ является характером на подгруппе $\overline{Y^{(2)}}$. Если группа X не содержит элементов порядка 2, то по теореме 1.9.5 $Y = \overline{Y^{(2)}}$ и функция $l(y)$ — характер группы Y. Пусть группа X содержит элемент порядка 2. Покажем, что и в этом случае функция $l(y)$ является характером на группе Y. По теореме 1.9.2 мы имеем $l(y) = (x_0, y)$, $x_0 \in X$, $y \in \overline{Y^{(2)}}$. Положим $m(y) = l(y)/(x_0, y)$. Функция $m(y)$ также удовлетворяет уравнению 9.4(ii) и $m(y) = 1$ при $y \in \overline{Y^{(2)}}$. Так как $m(2y) = m^2(y)$ при $y \in Y$, то

$$m(y) = \pm 1, \quad y \in Y. \tag{9.19}$$

Уравнение 9.4(ii) для функции $m(y)$ переходит в уравнение $m(u+v)m(u-v) = 1,\ u, v \in Y$. Заменим здесь u на $u+v$. Получаем $m(u+2v)m(u) = 1,\ u, v \in Y$, а следовательно, $m(u+2v) = m(u),\ u, v \in Y$, т.е. функция $m(y)$ инвариантна относительно сдвигов на элементы $\overline{Y^{(2)}}$. Рассмотрим фактор-группу $Y/\overline{Y^{(2)}}$. Из теорем 1.9.2 и 1.9.5 следует, что $(Y/\overline{Y^{(2)}})^* \cong A(X, \overline{Y^{(2)}}) = X_{(2)} \cong \mathbb{Z}(2)$. Поэтому фактор-группа $Y/\overline{Y^{(2)}}$ состоит из двух классов смежности, т.е. $Y/\overline{Y^{(2)}} = \overline{Y^{(2)}} \cup (y_0 + \overline{Y^{(2)}})$. На каждом классе смежности функция $m(y)$ принимает постоянное значение. Из (9.19) следует, что возможны всего два случая: либо $m(y) = 1$ при всех $y \in Y$, либо

$$m(y) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad y \in \overline{Y^{(2)}}, \\ -1, & \text{если} \quad y \in y_0 + \overline{Y^{(2)}}. \end{cases}$$

Очевидно, в обоих случаях, функция $m(y)$ удовлетворяет уравнению (9.11) на группе Y. Следовательно, $m(y)$ — характер, а значит, и $l(y)$ — характер. □

Доказанная лемма, очевидно, вытекает из леммы 9.7, но в отличие от леммы 9.7, доказательство леммы 9.11 не использует группового аналога теоремы Крамера (теорема 4.6). Из доказательства леммы 9.11 непосредственно вытекают два следствия.

9.12. Следствие. *Пусть функция $l(y)$ на группе Y непрерывна, удовлетворяет уравнению 9.4(ii) и условиям: $l(-y) = \overline{l(y)},\ |l(y)| = 1$, при всех $y \in Y,\ l(0) = 1$. Тогда*

$$l(y) = m(y)(x_0, y),$$

где $m(y)$ – $\overline{Y^{(2)}}$-инвариантная непрерывная функция, удовлетворяющие уравнению 9.4(ii), условиям: $m(-y) = m(y)$, при всех $y \in Y,\ m(0) = 1$, и принимающая значения $\pm 1,\ x_0 \in X$.

9.13. Следствие. *Пусть группа X содержит не более одного элемента порядка 2. Пусть функция $l(y)$ на группе Y непрерывна, удовлетворяет уравнению 9.4(ii) и условиям: $l(-y) = \overline{l(y)},\ |l(y)| = 1$, при всех $y \in Y,\ l(0) = 1$. Тогда $l(y)$ характер группы Y.*

9.14. 2-е доказательство достаточности в теореме 9.9. Из определения 9.1 и леммы 7.5 следует, что не ограничивая общности мы можем считать, что $X = \mathbb{R}^m \times K$, где $m \geq 0$, а K – компактная группа Корвина. По лемме 9.10 для групп такого вида выполнено $X_{(2)} \subset c_X$. Так как по условию подгруппа c_X содержит не более одного элемента порядка 2, то и вся группа X содержит не более одного элемента порядка 2. Положим $N = \{y \in Y : \widehat{\mu}(y) \neq 0\},\ G = A(X, N)$. По теореме 1.9.2 $N^* \cong X/G$. Как отмечено при доказательстве достаточности в теореме 9.9, G – группа Корвина. Проверим, что фактор-группа X/G содержит не более одного элемента порядка 2. Действительно, пусть $2[x_1] = 2[x_2] = [0],\ [x_1] \neq [x_2],\ [x_1], [x_2] \in X/G$. Тогда $2x_j \in G$. Так как $G = G^{(2)}$, то $2x_j = 2g_j,\ g_j \in G$. Следовательно, $x'_j = x_j - g_j$ — элементы порядка 2. Так как $[x'_j] = [x_j]$ и $[x_1] \neq [x_2]$, то $x'_1 \neq x'_2$, что невозможно.

Рассмотрим ограничение уравнения 9.2(i) на N. По лемме 9.11, примененной к фактор-группе X/G, получаем, что это ограничение является характеристической функцией некоторого гауссовского распределения на X/G. Отсюда немедленно получается, что $\mu \in \Gamma(X) * I_B(X)$. □

9.15. Замечание. Пусть γ – безгранично делимое распределение на группе X и пусть $\gamma \in \Gamma_B(X)$. Тогда $\gamma \in \Gamma(X)$. Для доказательства рассуждаем так же, как и при доказательстве достаточности в теореме 9.9. Лемму 9.7 заменяет при этом следующее утверждение: если γ – безгранично делимое распределение, $\gamma \in \Gamma_B(X)$ и характеристическая функция $\widehat{\gamma}(y) \neq 0$ при всех $y \in Y$, то $\gamma \in \Gamma(X)$. Для доказательства рассмотрим распределение $\lambda = \gamma * \bar{\gamma}$. По лемме 9.4, 2.7($c$) и 2.7($d$) $\lambda \in \Gamma(X)$. Поскольку γ – делитель λ, то по замечанию 4.9 $\gamma \in \Gamma(X)$.

9.16. Замечание. Из определения гауссовского распределения следует, что каждое гауссовское распределение представимо в виде свертки симметричного гауссовского распределения и вырожденного распределения. Оказывается, что аналогичное утверждение справедливо и для гауссовских распределений в смысле Бернштейна. Действительно, пусть $\mu \in \Gamma_B(X)$. По лемме 9.4 характеристическая функция $\widehat{\mu}(y)$ представима в виде 9.4(i). Как установлено при доказательстве леммы 9.11, существует такой характер (x_0, y), что функция $\widehat{\mu}(y)/(x_0, y)$ вещественная. Отсюда легко вытекает требуемое утверждение.

Мы используем лемму 9.7 для доказательства еще одной характеризационной теоремы. Нам понадобится для этого следующая лемма.

9.17. Лемма. *Пусть ξ – случайная величина со значениями в группе X, а η – комплекснозначная случайная величина, причем $\mathbf{E}[|\eta|] < \infty$. Случайная величина η имеет постоянную регрессию на ξ тогда и только тогда, когда равенство*

$$(i) \qquad \mathbf{E}[\eta(\xi, y)] = \mathbf{E}[\eta]\ \mathbf{E}[(\xi, y)].$$

выполнено для всех $y \in Y$.

Доказательство. Обозначим через $\mathbf{E}[\eta|\xi]$ условное математическое ожидание случайной величины η при заданной ξ. Постоянство регрессии η на ξ означает, что выполнено равенство

$$\mathbf{E}[\eta|\xi] = \mathbf{E}[\eta]. \tag{9.20}$$

Умножим обе части равенства (9.20) на (ξ, y) и возьмем математическое ожидание от обеих частей полученного равенства. Получаем

$$\mathbf{E}[(\xi, y)\ \mathbf{E}[\eta|\xi]] = \mathbf{E}[\ \mathbf{E}[(\xi, y)\eta|\xi]] = \mathbf{E}[\eta(\xi, y)] = \mathbf{E}[\eta]\ \mathbf{E}[(\xi, y)], \quad y \in Y.$$

Необходимость условия (i), тем самым, доказана.

Для доказательства достаточности предположим вначале, что $\mathbf{E}[\eta] \neq 0$. Учитывая, что $\mathbf{E}[\eta(\xi, y)] = \mathbf{E}[(\xi, y)\ \mathbf{E}[\eta|\xi]]$, перепишем ($i$) в виде

$$\int\limits_X (x, y)\frac{\mathbf{E}[\eta|x]}{\mathbf{E}[\eta]}d\mu_\xi(x) = \int\limits_X (x, y)d\mu_\xi(x), \quad y \in Y. \tag{9.21}$$

Введем в рассмотрение функцию множества

$$Q(A) = \int\limits_A \frac{\mathbf{E}[\eta|x]}{\mathbf{E}[\eta]}d\mu_\xi(x), \tag{9.22}$$

где A – произвольное борелевское подмножество группы X. Из (9.21) и (9.22) следует, что равенство

$$\int\limits_X (x,y)dQ(x) = \int\limits_X (x,y)d\mu_\xi(x) \tag{9.23}$$

справедливо при любом $y \in Y$. Из (9.23) вытекает, что $Q = \mu_\xi$, а значит,

$$\frac{\mathbf{E}[\eta|\xi]}{\mathbf{E}[\eta]} = 1.$$

Таким образом, справедливо (9.20), что и означает постоянство регрессии η на ξ.

Предположим теперь, что $\mathbf{E}[\eta] = 0$, Тогда условие (i) принимает вид

$$\int\limits_X (x,y)\ \mathbf{E}[\eta|x]d\mu_\xi(x) = 0, \quad y \in Y. \tag{9.24}$$

Для любого борелевского множества A рассмотрим функцию множества

$$R(A) = \int\limits_A \ \mathbf{E}[\eta|x]d\mu_\xi(x).$$

Тогда из (9.24) получаем

$$\int\limits_X (x,y)dR(x) = 0, \quad y \in Y. \tag{9.25}$$

Из (9.25) вытекает, что $R = 0$. Отсюда $\mathbf{E}[\eta|\xi] = 0$. Значит, выполнено (9.20), что и означает постоянство регрессии η на ξ. $\Box$

9.18. Теорема. *Пусть $\xi_1, \dots, \xi_n$, $n \geq 2$, – независимые одинаково распределенные случайные величины со значениями в группе X и с распределением μ. Для того, чтобы из условия постоянства регрессии*

$$(i) \qquad \mathbf{E}\left[\prod_{j=1}^n (\xi_j, y_j) \middle| \sum_{j=1}^n \xi_j\right] = const,$$

выполненного при всех $y_1, \dots, y_n$ таких,что $\sum_{j=1}^n y_j = 0, \quad y_j \in Y$, следовало, что $\mu = \gamma * m_K$, где $\gamma \in \Gamma(X)$, а K – некоторая компактная подгруппа в X, необходимо и достаточно, чтобы группа X удовлетворяла условию:

(ii) для любой компактной подгруппы K в X такой, что $K^{(n)} = K$, фактор-группа X/K не содержит подгруппы, топологически изоморфной двумерному тору $\mathbb{T}^2$.

Доказательство. Мы имеем $\widehat{\mu}(y) = \mathbf{E}[(\xi_j, y)]$, $j = 1, 2, \dots, n$. По лемме 9.17 условие постоянства регрессии (i) эквивалентно выполнению равенства 9.17(i), которое в нашем случае после простых преобразований может быть переписано в виде

$$\prod_{j=1}^n \widehat{\mu}(y + y_j) = \widehat{\mu}^n(y) \prod_{j=1}^n \widehat{\mu}(y_j), \quad y_1, \dots, y_n, y \in Y, \quad \sum_{j=1}^n y_j = 0. \tag{9.26}$$

Необходимость. Пусть K – такая компактная подгруппа группы X, что $K^{(n)} = K$, а фактор-группа X/K содержит подгруппу, топологически изоморфную двумерному тору $\mathbb{T}^2$. Проверим вначале, что характеристическая функция $\widehat{m}_K(y)$ удовлетворяет уравнению (9.26). Пусть правая часть уравнения (9.26) равна 1. Тогда $y, y_1, \dots, y_n \in A(Y, K)$, а значит $y+y_1, \dots, y+y_n \in A(Y, K)$, и левая часть уравнения (9.26) также равна 1. Если же левая часть уравнения (9.26) равна 1, то отсюда следует, что $y + y_1, \dots, y + y_n \in A(Y, K)$. Тогда $\sum_{j=1}^{n}(y + y_j) = ny \in A(Y, K)$. По лемме 7.2 из $ny \in A(Y, K)$ вытекает, что $y \in A(Y, K)$. Следовательно, $y_1, \dots, y_n \in A(Y, K)$, а значит правая часть (9.26) также равна 1. Тем самым, доказано, что характеристическая функция $\widehat{m}_K(y)$ удовлетворяет уравнению (9.26).

Пусть μ_0 – распределение на двумерном торе $\mathbb{T}^2$, построенное в замечании 5.14. Поскольку фактор-группа X/K содержит подгруппу, топологически изоморфную $\mathbb{T}^2$, то распределение μ_0 можно рассматривать, как распределение на фактор-группе X/K. Сохраним для него обозначение μ_0. Заметим, что по теореме 1.9.2 $A(Y, K) \cong (X/K)^*$. Легко непосредственно проверить, что характеристическая функция $\widehat{\mu}_0(y)$ на группе $A(Y, K)$ удовлетворяет уравнению (9.26).

Рассмотрим на группе Y функцию

$$\widehat{f}(y) = \begin{cases} \widehat{\mu}_0(y), & \text{если} \quad y \in A(Y, K), \\ 0, & \text{если} \quad y \notin A(Y, K). \end{cases}$$

Из того, что функции $\widehat{m}_K(y)$ и $\widehat{\mu}_0(y)$ удовлетворяют уравнению (9.26), вытекает, что функция $f(y)$ также удовлетворяет уравнению (9.26). Так как $A(Y, K)$ – подгруппа, а $\widehat{\mu}_0(y)$ – положительно определенная функция, то по предложению 2.12 $f(y)$ – положительно определенная функция. Поскольку K – компактная группа, то по теореме 1.9.4 аннулятор $A(Y, K)$ – открытая подгруппа, а следовательно, функция $f(y)$ непрерывна. По теореме Бохнера существует распределение $\mu \in \mathrm{M}^1(X)$ такое, что $\widehat{\mu}(y) = f(y)$. Пусть $\xi_1, \dots, \xi_n$ – независимые одинаково распределенные случайные величины со значениями в группе X и с распределением μ. Так как функция $\widehat{\mu}(y)$ удовлетворяет уравнению (9.26), то имеет место условие постоянства регрессии (i). С другой стороны, поскольку $\mu_0 \notin \Gamma(X/K)$, то распределение μ нельзя представить в виде свертки $\gamma * m_G$, где $\gamma \in \Gamma(X)$, а G – некоторая компактная подгруппа в X. Необходимость доказана.

Достаточность. Рассмотрим множество $N = \{y \in Y : \widehat{\mu}(y) \neq 0\}$. Полагая в (9.26) $y_2 = -y_1,\ y_3 = \dots = y_n = 0$, получаем

$$\widehat{\mu}(y + y_1)\widehat{\mu}(y - y_1)\widehat{\mu}^{n-2}(y) = \widehat{\mu}^n(y)|\widehat{\mu}(y_1)|^2, \quad y,\ y_1 \in Y. \tag{9.27}$$

Отсюда следует, что N – открытая подгруппа в Y. Положим $K = A(X, N)$. По теореме 1.9.4 K – компактная подгруппа в X. Полагая затем в (9.26) $y_1 = \dots = y_{n-1} = -y,\ y_n = (n-1)y$, получаем

$$\widehat{\mu}(ny) = \widehat{\mu}^n(y)\widehat{\mu}^{n-1}(-y)\widehat{\mu}((n-1)y),$$

откуда следует, что если $ny \in N$, то $y \in N$. Тогда по лемме 7.2 $K^{(n)} = K$.

Рассмотрим ограничение уравнения (9.27) на N. Из (9.27) находим

$$\widehat{\mu}(y + y_1)\widehat{\mu}(y - y_1) = \widehat{\mu}^2(y)|\widehat{\mu}(y_1)|^2,\ y_1,\ y_2 \in N. \tag{9.28}$$

По теореме 1.9.1 $N = A(Y, K)$, а по теореме 1.9.2 $N \cong (X/K)^*$. По лемме 9.2 из (9.28) следует, что ограничение характеристической функции $\widehat{\mu}(y)$ на N является характеристической функцией некоторого гауссовского распределения в смысле Бернштейна на фактор-группе X/K, которая не обращается в ноль. По лемме 9.7, примененной к фактор-группе X/K, из (ii) следует, что это ограничение является характеристической функцией некоторого гауссовского распределения. Заключительная часть доказательства проводится так же, как в теореме 9.9.

Достаточность доказана, а следовательно, теорема полностью доказана. □

Глава IV

Теорема Скитовича–Дармуа для локально компактных абелевых групп (характеристические функции случайных величин не обращаются в нуль)

Пусть $\xi_j,\ j = 1, 2, \ldots, n,\ n \geq 2,$ – независимые случайные величины, $\alpha_j,\ \beta_j$ – отличные от нуля вещественные числа. Согласно теореме Скитовича–Дармуа из независимости линейных форм $L_1 = \alpha_1\xi_1 + \cdots + \alpha_n\xi_n$ и $L_2 = \beta_1\xi_1 + \cdots + \beta_n\xi_n$ следует, что все случайные величины ξ_j – гауссовские. Эта теорема была обобщена Гурье и Олкиным на случай, когда ξ_j – независимые случайные векторы в пространстве $\mathbb{R}^m$, а коэффициенты α_j, β_j – невырожденные матрицы. Они доказали, что из независимости линейных форм L_1 и L_2 следует, что все случайные векторы ξ_j – гауссовские.

Пусть X – локально компактная абелева группа, удовлетворяющая второй аксиоме счетности, $\xi_j,\ j = 1, 2, \ldots, n,\ n \geq 2,$ – независимые случайные величины со значениями в группе X и с распределениями μ_j. Эта глава посвящена групповым аналогам теоремы Скитовича–Дармуа в предположении, что характеристические функции случайных величин ξ_j не обращаются в нуль. Пусть $\alpha_j,\ \beta_j$ – топологические автоморфизмы группы X. Мы доказываем, что если группа X не содержит подгруппы, топологически изоморфной $\mathbb{T}$, то из независимости линейных форм $L_1 = \alpha_1\xi_1+\cdots+\alpha_n\xi_n$ и $L_2 = \beta_1\xi_1+\cdots+\beta_n\xi_n$ вытекает, что все распределения $\mu_j \in \Gamma(X)$. Если же группа X содержит подгруппу, топологически изоморфную $\mathbb{T}$, то указанное утверждение, вообще говоря, не имеет места. Поэтому для таких групп возникает естественная задача описания возможных распределений μ_j независимых случайных величин ξ_j при условии, что линейные формы L_1 и L_2 независимы. Мы решаем эту задачу для двух независимых случайных величин, принимающих значения в группах $\mathbb{T}^2$, $\mathbb{R} \times \mathbb{T}$ и $\Sigma_{\mathbf{a}} \times \mathbb{T}$.

§10. Локально компактные абелевы группы, на которых верна теорема Скитовича–Дармуа

Пусть X – локально компактная абелева группа, удовлетворяющая второй аксиоме счетности, Y – ее группа характеров, $\mathrm{Aut}(X)$ – группа топологических автоморфизмов группы X. В этом параграфе мы описываем группы X, которые обладают следующим свойством: если $\xi_j,\ j = 1, 2, \ldots, n,\ n \geq 2,$ – независимые случайные величины со значениями в группе X, имеющие распределения μ_j с необращающимися в нуль характеристическими функциями, и $\alpha_j,\ \beta_j$ – топологические автоморфизмы группы X, то из независимости линейных форм $L_1 = \alpha_1\xi_1 + \cdots + \alpha_n\xi_n$ и $L_2 = \beta_1\xi_1 + \cdots + \beta_n\xi_n$ вытекает, что все распределения $\mu_j \in \Gamma(X)$. Мы описываем также группы X, которые обладают следующим свойством: существуют автоморфизмы $\alpha_j,\ \beta_j \in \mathrm{Aut}(X)$ такие, что если ξ_j – независимые случайные величины со значениями в группе X, имеющие распределения μ_j с необращающимися в нуль характеристическими функциями, то из независимости линейных форм $L_1 = \alpha_1\xi_1 + \cdots + \alpha_n\xi_n$ и $L_2 = \beta_1\xi_1 + \cdots + \beta_n\xi_n$ вытекает, что все распределения $\mu_j \in \Gamma(X)$.

10.1. Лемма. *Пусть $\xi_j,\ j=1,2,\dots,n,\ n\ge 2,$ – независимые случайные величины со значениями в группе X и с распределениями μ_j. Пусть $\alpha_j,\ \beta_j$ – топологические автоморфизмы группы X. Для того чтобы линейные формы $L_1=\alpha_1\xi_1+\dots+\alpha_n\xi_n$ и $L_2=\beta_1\xi_1+\dots+\beta_n\xi_n$ были независимы, необходимо и достаточно, чтобы характеристические функции $\widehat{\mu}_j(y)$ удовлетворяли уравнению*

$$(i)\qquad \prod_{i=1}^{n}\widehat{\mu}_j(\widetilde{\alpha}_j u+\widetilde{\beta}_j v)=\prod_{i=1}^{n}\widehat{\mu}_j(\widetilde{\alpha}_j u)\prod_{i=1}^{n}\widehat{\mu}_j(\widetilde{\beta}_j v),\quad u,v\in Y.$$

Доказательство. Заметим, что линейные формы L_1 и L_2 независимы тогда и только тогда, когда для любых $u,v\in Y$ выполнено равенство

$$\mathbf{E}[(\alpha_1\xi_1+\dots+\alpha_n\xi_n,u)(\beta_1\xi_1+\dots+\beta_n\xi_n,v)]$$
$$=\ \mathbf{E}[(\alpha_1\xi_1+\dots+\alpha_n\xi_n,u)]\ \mathbf{E}[(\beta_1\xi_1+\dots+\beta_n\xi_n,v)]. \qquad (10.1)$$

Учитывая, что случайные величины ξ_j независимы и $\widehat{\mu}_j(y)=\ \mathbf{E}[(\xi_j,y)]$, преобразуем левую часть равенства (10.1) следующим образом

$$\mathbf{E}[(\alpha_1\xi_1+\dots+\alpha_n\xi_n,u)(\beta_1\xi_1+\dots+\beta_n\xi_n,v)]$$
$$=\ \mathbf{E}\left[\prod_{j=1}^{n}(\xi_j,\widetilde{\alpha}_j u+\widetilde{\beta}_j v)\right]=\prod_{j=1}^{n}\ \mathbf{E}[(\xi_j,\widetilde{\alpha}_j u+\widetilde{\beta}_j v)]=\prod_{j=1}^{n}\widehat{\mu}_j(\widetilde{\alpha}_j u+\widetilde{\beta}_j v),\quad u,v\in Y.$$

Аналогично преобразуем правую часть равенства (10.1)

$$\mathbf{E}[(\alpha_1\xi_1+\dots+\alpha_n\xi_n,u)]\ \mathbf{E}[(\beta_1\xi_1+\dots+\beta_n\xi_n,v)]=\ \mathbf{E}\left[\prod_{j=1}^{n}(\xi_j,\widetilde{\alpha}_j u)\right]\ \mathbf{E}\left[\prod_{j=1}^{n}(\xi_j,\widetilde{\beta}_j v)\right]$$
$$=\prod_{j=1}^{n}\ \mathbf{E}[(\xi_j,\widetilde{\alpha}_j u)]\prod_{j=1}^{n}\ \mathbf{E}[(\xi_j,\widetilde{\beta}_j v)]=\prod_{j=1}^{n}\widehat{\mu}_j(\widetilde{\alpha}_j u)\prod_{j=1}^{n}\widehat{\mu}_j(\widetilde{\beta}_j v),\quad u,v\in Y.$$

□

Уравнение 10.1(i) называется *функциональным уравнением Скитовича–Дармуа.*

10.2. Следствие. *Пусть $\xi_j,\ j=1,2,\dots,n,\ n\ge 2,$ – независимые случайные величины со значениями в группе X и с распределениями μ_j. Пусть $\alpha_j,\ \beta_j$ – топологические автоморфизмы группы X. Предположим, что линейные формы $L_1=\alpha_1\xi_1+\dots+\alpha_n\xi_n$ и $L_2=\beta_1\xi_1+\dots+\beta_n\xi_n$ независимы. Пусть x_j – произвольные элементы группы X. Положим $\xi'_j=\xi_j+x_j$. Тогда линейные формы $L'_1=\alpha_1\xi'_1+\dots+\alpha_n\xi'_n$ и $L'_2=\beta_1\xi'_1+\dots+\beta_n\xi'_n$, также независимы.*

10.3. Теорема. *Пусть группа X не содержит подгруппы, топологически изоморфной $\mathbb{T}$. Пусть $\xi_j,\ j=1,2,\dots,n,\ n\ge 2,$ – независимые случайные величины со значениями в группе X, имеющие распределения μ_j с необращающимися в нуль характеристическими функциями. Пусть $\alpha_j,\ \beta_j$ – топологические автоморфизмы группы X. Тогда из независимости линейных форм $L_1=\alpha_1\xi_1+\dots+\alpha_n\xi_n$ и $L_2=\beta_1\xi_1+\dots+\beta_n\xi_n$ вытекает, что все распределения $\mu_j\in\Gamma(X)$.*

Доказательство. Заметим вначале, что если μ – распределение случайной величины ξ со значениями в группе X и $\alpha\in\mathrm{Aut}(X)$, то по предложению 2.10 характеристическая функция случайной величины $\alpha\xi$ равна $\widehat{\mu}(\widetilde{\alpha}y)$. Учитывая определение 3.1 гауссовского распределения, отсюда вытекает, что $\mu \in \Gamma(X)$ тогда и только тогда, когда $\alpha(\mu) \in \Gamma(X)$. Поэтому, полагая $\zeta_j = \alpha_j\xi_j$, мы редуцируем доказательство теоремы к случаю, когда линейные формы L_1 и L_2 имеют вид $L_1 = \xi_1 + \dots + \xi_n$ и $L_2 = \delta_1\xi_1 + \dots + \delta_n\xi_n,\ \delta_j \in \mathrm{Aut}(X)$. По лемме 10.1 из независимости линейных форм L_1 и L_2 следует, что характеристические функции $\widehat{\mu}_j(y)$ удовлетворяют уравнению 10.1(i), которое принимает вид

$$\prod_{j=1}^{n} \widehat{\mu}_j(u + \widetilde{\delta}_j v) = \prod_{j=1}^{n} \widehat{\mu}_j(u) \prod_{j=1}^{n} \widehat{\mu}_j(\widetilde{\delta}_j v), \quad u, v \in Y. \tag{10.2}$$

Положим $\nu_j = \mu_j * \bar{\mu}_j$. Из 2.7$(c)$ и 2.7(d) вытекает, что $\widehat{\nu}_j(y) = |\widehat{\mu}_j(y)|^2 > 0,\ \ y \in Y$. Очевидно, что характеристические функции $\widehat{\nu}_j(y)$ также удовлетворяют уравнению (10.2). Если мы докажем, что $\nu_j \in \Gamma(X)$, то применяя теорему 4.6, получим, что и $\mu_j \in \Gamma(X)$. Поэтому мы можем с самого начала предполагать, что характеристические функции $\widehat{\mu}_j(y) > 0$ при всех $y \in Y,\ j = 1, 2, \dots, n,\ n \geq 2$.

Положим $\varphi_j(y) = -\log \widehat{\mu}_j(y)$. Из (10.2) следует, что функции $\varphi_j(y)$ удовлетворяют уравнению

$$\sum_{j=1}^{n} \varphi_j(u + \widetilde{\delta}_j v) = P(u) + Q(v), \quad u, v \in Y, \tag{10.3}$$

где

$$P(u) = \sum_{j=1}^{n} \varphi_j(u), \quad Q(v) = \sum_{j=1}^{n} \varphi_j(\widetilde{\delta}_j v). \tag{10.4}$$

Для решения уравнения (10.3) воспользуемся методом конечных разностей. Пусть h_1 — произвольный элемент группы Y. Положим $k_1 = -\widetilde{\delta}_n^{-1} h_1$. Тогда $h_1 + \widetilde{\delta}_n k_1 = 0$. Придадим в (10.3) переменным u и v приращения h_1 и k_1 соответственно. Вычитая из полученного уравнения уравнение (10.3), находим

$$\sum_{j=1}^{n-1} \Delta_{l_{1j}} \varphi_j(u + \widetilde{\delta}_j v) = \Delta_{h_1} P(u) + \Delta_{k_1} Q(v), \quad u, v \in Y, \tag{10.5}$$

где $l_{1j} = h_1 + \widetilde{\delta}_j k_1 = (\widetilde{\delta}_j - \widetilde{\delta}_n) k_1,\ j = 1, 2, \dots, n-1$. Пусть h_2 — произвольный элемент группы Y. Положим $k_2 = -\widetilde{\delta}_{n-1}^{-1} h_2$. Тогда $h_2 + \widetilde{\delta}_{n-1} k_2 = 0$. Придадим в (10.5) переменным u и v приращения h_2 и k_2 соответственно. Вычитая из полученного уравнения уравнение (10.5), находим

$$\sum_{j=1}^{n-2} \Delta_{l_{2j}} \Delta_{l_{1j}} \varphi_j(u + \widetilde{\delta}_j v) = \Delta_{h_2} \Delta_{h_1} P(u) + \Delta_{k_2} \Delta_{k_1} Q(v), \quad u, v \in Y, \tag{10.6}$$

где $l_{2j} = h_2 + \widetilde{\delta}_j k_2 = (\widetilde{\delta}_j - \widetilde{\delta}_{n-1}) k_2,\ j = 1, 2, \dots, n-2$. Рассуждая аналогично, мы приходим к уравнению

$$\Delta_{l_{n-1,1}} \Delta_{l_{n-2,1}} \dots \Delta_{l_{11}} \varphi_1(u + \widetilde{\delta}_1 v) =$$
$$= \Delta_{h_{n-1}} \Delta_{h_{n-2}} \dots \Delta_{h_1} P(u) + \Delta_{k_{n-1}} \Delta_{k_{n-2}} \dots \Delta_{k_1} Q(v), \quad u, v \in Y, \tag{10.7}$$

где h_m — произвольный элемент группы Y, $k_m = -\widetilde{\delta}_{n-m+1}^{-1} h_m$, $m = 1, 2, \dots, n-1$, $l_{mj} = h_m + \widetilde{\delta}_j k_m = (\widetilde{\delta}_j - \widetilde{\delta}_{n-m+1}) k_m,\ j = 1, 2, \dots, n-m$. Пусть h_n — произвольный элемент группы Y. Положим $k_n = -\widetilde{\delta}_1^{-1} h_n$. Тогда $h_n + \widetilde{\delta}_1 k_n = 0$. Придадим в (10.7) переменным u и v приращения h_n и k_n соответственно. Вычитая из полученного уравнения уравнение (10.7), находим

$$\Delta_{h_n} \Delta_{h_{n-1}} \dots \Delta_{h_1} P(u) + \Delta_{k_n} \Delta_{k_{n-1}} \dots \Delta_{k_1} Q(v) = 0, \quad u, v \in Y. \tag{10.8}$$

Пусть h — произвольный элемент группы Y. Придадим в (10.8) переменной u приращение h и вычтем из полученного уравнения уравнение (10.8). Получаем

$$\Delta_h \Delta_{h_n} \Delta_{h_{n-1}} \ldots \Delta_{h_1} P(u) = 0, \quad u \in Y. \tag{10.9}$$

Заметим, что u, h и h_m, $m = 1, 2, \ldots, n$ — произвольные элементы группы Y. Положим в (10.9) $h_1 = \cdots = h_n = h$. Имеем

$$\Delta_h^{n+1} P(u) = 0, \quad u, h \in Y. \tag{10.10}$$

Мы получили, что $P(y)$ — непрерывный многочлен на Y. Обозначим $\gamma = \mu_1 * \cdots * \mu_n$. Тогда из 2.7($c$) вытекает, что

$$\widehat{\gamma}(y) = \prod_{j=1}^{n} \widehat{\mu}_j(y), \quad y \in Y.$$

Учитывая (10.4), мы имеем,

$$\widehat{\gamma}(y) = e^{-P(y)}.$$

Поскольку группа X не содержит подгруппы, топологически изоморфной $\mathbb{T}$, а $P(y)$ – непрерывный многочлен, то из теоремы 5.11 следует, что $\gamma \in \Gamma(X)$. Тогда из теоремы 4.6 получаем, что все $\mu_j \in \Gamma(X)$. □

10.4. Замечание. Если группа X содержит подгруппу, топологически изоморфную $\mathbb{T}$, то утверждение теоремы 10.3 неверно. Это непосредственно вытекает из леммы 7.8 (ср. ниже с предложением 10.17).

10.5. Предложение. *Пусть ξ_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, $n \geq 2$, – независимые случайные величины со значениями в группе X, имеющие распределения μ_j с необращающимися в нуль характеристическими функциями. Пусть α_j, β_j – топологические автоморфизмы группы X. Тогда из независимости линейных форм $L_1 = \alpha_1\xi_1 + \cdots + \alpha_n\xi_n$ и $L_2 = \beta_1\xi_1 + \cdots + \beta_n\xi_n$ вытекает, что существуют элементы $x_j \in X$, $j = 1, 2, \ldots, n$ такие, что носители распределений μ'_j всех случайных величин $\xi'_j = \xi_j + x_j$ содержатся в подгруппе c_X.*

Доказательство. Заметим, что поскольку подгруппа c_X является характеристической, то утверждение можно доказывать, предполагая, что линейные формы L_1 и L_2 имеют вид $L_1 = \xi_1 + \cdots + \xi_n$ и $L_2 = \delta_1\xi_1 + \cdots + \delta_n\xi_n$, где $\delta_j \in \mathrm{Aut}(X)$. Положим $\nu_j = \mu_j * \bar{\mu}_j$, $\varphi_j(y) = -\log \widehat{\nu}_j(y)$, $P(y) = \sum_{j=1}^n \varphi_j(y)$. Как следует из доказательства теоремы 10.3, функция $P(y)$ удовлетворяет уравнению (10.10). По предложению 5.7 функция $P(y) = 0$ при $y \in b_Y$, а значит все характеристические функции $\widehat{\nu}_j(y) = 1$ при $y \in b_Y$. По предложению 2.13 имеют место включения $\sigma(\nu_j) \subset A(X, b_Y)$, $j = 1, 2, \ldots, n$. По теореме 1.9.3 $c_X = A(X, b_Y)$, следовательно все носители $\sigma(\nu_j) \subset c_X$. Применяя предложение 2.2, получаем требуемое утверждение. □

10.6. Замечание. Пусть ξ_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, $n \geq 2$, – независимые случайные величины со значениями в группе X, имеющие распределения μ_j с необращающимися в нуль характеристическими функциями. Пусть α_j, β_j – топологические автоморфизмы группы X. Предположим, что линейные формы $L_1 = \alpha_1\xi_1 + \cdots + \alpha_n\xi_n$ и $L_2 = \beta_1\xi_1 + \cdots + \beta_n\xi_n$ независимы. Принимая во внимание, что c_X – характеристическая подгруппа группы X, из предложения 10.5 и следствия 10.2 вытекает, что изучая возможные распределения μ_j, не ограничивая общности, можно предполагать, что группа X связна.

10.7. Можно рассмотреть другой групповой аналог теоремы Скитовича–Дармуа, а именно, когда коэффициенты линейных форм L_1 и L_2 целые числа. Нам понадобится следующее определение. Целое число a называется *допустимым для группы* X, если $X^{(a)} \neq \{0\}$. Пусть $\xi_j,\ j = 1, 2, \dots, n,\ n \geq 2,$ – случайные величины со значениями в группе X. Допустимость множества целых чисел $\{a_j\}_{j=1}^n$ при рассмотрении линейной формы $L = a_1\xi_1 + \cdots + a_n\xi_n$ – это групповой аналог условия $a_j \neq 0,\ j = 1, 2, \dots, n$, для случая, когда $X = \mathbb{R}$. Справедливо следующее утверждение.

10.8. Предложение. *Пусть $\xi_j,\ j = 1, 2, \dots, n,\ n \geq 2,$ – независимые случайные величины со значениями в группе X, имеющие распределения μ_j с необращающимися в нуль характеристическими функциями. Пусть a_j, b_j – допустимые целые числа для группы X. Из независимости линейных форм $L_1 = a_1\xi_1 + \cdots + a_n\xi_n$ и $L_2 = b_1\xi_1 + \cdots + b_n\xi_n$ вытекает, что все распределения $\mu_j \in \Gamma(X)$ тогда и только тогда, когда либо X – группа без кручения, либо $X^{(p)} = \{0\}$, где p – некоторое простое число (в последнем случае все μ_j – вырожденные распределения).*

Доказательство. Заметим, что если $a \in \mathbb{Z}$, то в силу 1.13(d), $\widetilde{f_a} = f_a$. Рассуждая так же, как при доказательстве леммы 10.1, получаем, что условие независимости линейных форм L_1 и L_2 равносильно тому, что характеристические функции $\widehat{\mu}_j(y)$ удовлетворяют уравнению

$$\prod_{j=1}^{n} \widehat{\mu}_j(a_j u + b_j v) = \prod_{j=1}^{n} \widehat{\mu}_j(a_j u) \prod_{j=1}^{n} \widehat{\mu}_j(b_j v), \quad u, v \in Y. \tag{10.11}$$

Положим $\nu_j = \mu_j * \bar{\mu}_j$. Из 2.7($c$) и 2.7($d$) вытекает, что $\widehat{\nu}_j(y) = |\widehat{\mu}_j(y)|^2 > 0,\ y \in Y$. Очевидно, что характеристические функции $\widehat{\nu}_j(y)$ также удовлетворяют уравнению (10.11).

Предположим вначале, что X – группа без кручения. Тогда группа X не содержит подгруппы, топологически изоморфной $\mathbb{T}$. Поэтому, если мы докажем, что $\nu_j \in \Gamma(X)$, то применяя теорему 4.6, получим, что и $\mu_j \in \Gamma(X)$. Поэтому мы можем с самого начала предполагать, что $\widehat{\mu}_j(y) > 0$ при всех $y \in Y,\ j = 1, 2, \dots, n,\ n \geq 2$.

Положим $\varphi_j(y) = -\log \widehat{\mu}_j(y)$. Из (10.11) следует, что

$$\sum_{j=1}^{n} \varphi_j(a_j u + b_j v) = P(u) + Q(v), \quad u, v \in Y, \tag{10.12}$$

где

$$P(u) = \sum_{j=1}^{n} \varphi_j(a_j u), \quad Q(v) = \sum_{j=1}^{n} \varphi_j(b_j v). \tag{10.13}$$

Для решения уравнения (10.12) воспользуемся методом конечных разностей. Пусть h_n — произвольный элемент группы Y. Придадим в (10.12) переменным u и v приращения $b_n h_n$ и $-a_n h_n$ соответственно. Вычитая из полученного уравнения уравнение (10.12), находим

$$\sum_{j=1}^{n-1} \Delta_{l_{n,j}} \varphi_j(a_j u + b_j v) = \Delta_{b_n h_n} P(u) + \Delta_{-a_n h_n} Q(v), \quad u, v \in Y, \tag{10.14}$$

где $l_{n,j} = (a_jb_n - b_ja_n)h_n$, $j = 1, 2, \dots, n-1$. Пусть h_{n-1} — произвольный элемент группы Y. Придадим в (10.14) переменным u и v приращения $b_{n-1}h_{n-1}$ и $-a_{n-1}h_{n-1}$ соответственно. Вычитая из полученного уравнения уравнение (10.14), находим

$$\sum_{j=1}^{n-2} \Delta_{l_{n-1,j}}\Delta_{l_{n,j}}\varphi_j(a_ju + b_jv) = \Delta_{b_{n-1}h_{n-1}}\Delta_{b_nh_n}P(u) + \Delta_{-a_{n-1}h_{n-1}}\Delta_{-a_nh_n}Q(v), \quad u, v \in Y, \quad (10.15)$$

где $l_{n-1,j} = (a_jb_{n-1} - b_ja_{n-1})h_{n-1}$, $j = 1, 2, \dots, n-2$. Рассуждая аналогично, мы приходим к уравнению

$$\Delta_{l_{2,1}}\Delta_{l_{3,1}}\dots\Delta_{l_{n,1}}\varphi_1(a_1u + b_1v) =$$
$$= \Delta_{b_2h_2}\Delta_{b_3h_3}\dots\Delta_{b_nh_n}P(u) + \Delta_{-a_2h_2}\Delta_{-a_3h_3}\dots\Delta_{-a_nh_n}Q(v), \quad u, v \in Y, \quad (10.16)$$

где h_m — произвольный элемент группы Y, $l_{m,1} = (a_1b_m - b_1a_m)h_m$, $m = 2, 3, \dots, n$.

Пусть h_1 — произвольный элемент группы Y. Придадим в (10.16) переменным u и v приращения b_1h_1 и $-a_1h_1$ соответственно. Вычитая из полученного уравнения уравнение (10.16), находим

$$\Delta_{b_1h_1}\Delta_{b_2h_2}\Delta_{b_3h_3}\dots\Delta_{b_nh_n}P(u) + \Delta_{-a_1h_1}\Delta_{-a_2h_2}\Delta_{-a_3h_3}\dots\Delta_{-a_nh_n}Q(v) = 0, \quad u, v \in Y. \quad (10.17)$$

Придадим в (10.17) переменной u приращение h, где h — произвольный элемент группы Y. Вычитая из полученного уравнения уравнение (10.17), получаем

$$\Delta_h\Delta_{b_1h_1}\Delta_{b_2h_2}\Delta_{b_3h_3}\dots\Delta_{b_nh_n}P(u) = 0, \quad u \in Y. \quad (10.18)$$

Мы предположили, что X – группа без кручения, т.е. $X_{(m)} = \{0\}$ для любого целого $m \in \mathbb{Z}$, $m \neq 0$. По теореме 1.9.5 отсюда следует, что $\overline{Y^{(m)}} = Y$ для любого целого m, $m \neq 0$. В частности, $\overline{Y^{(b_j)}} = Y$, $j = 1, 2, \dots, n$. Поэтому, принимая во внимание, что h_j – произвольные элементы группы Y, из (10.18) вытекает, что функция $P(y)$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta_h^{n+1}P(u) = 0, \quad u, h \in Y.$$

Следовательно, $P(y)$ — непрерывный многочлен на группе Y. Рассмотрим распределение $\gamma = f_{a_1}(\mu_1) * \dots * f_{a_n}(\mu_n)$. Из предложения 2.10 и 1.13(d) следует, что $\widehat{f_{a_j}(\mu_j)}(y) = \widehat{\mu}(a_jy)$, $j = 1, 2, \dots, n$. Тогда из 2.7(c) вытекает, что

$$\widehat{\gamma}(y) = \prod_{j=1}^{n} \widehat{\mu}_j(a_jy), \quad y \in Y.$$

Учитывая (10.13), мы имеем,

$$\widehat{\gamma}(y) = e^{-P(y)}.$$

Из условия теоремы следует, что группа X не содержит подгруппы, топологически изоморфной $\mathbb{T}$. Поэтому из теоремы 5.11 следует, что $\gamma \in \Gamma(X)$. А тогда по теореме 4.6 получаем, что все $f_{a_j}(\mu_j) \in \Gamma(X)$. Отсюда следует, что каждая из функций $\varphi_j(y)$ на множестве $Y^{(a_j)}$ удовлетворяет уравнению 2.16(ii). Так как $\overline{Y^{(a_j)}} = Y$, $j = 1, 2, \dots, n$, следовательно, каждая из функций $\varphi_j(y)$ удовлетворяет уравнению 2.16(ii) на группе Y. А это означает, что все $\mu_j \in \Gamma(X)$.

Если $X^{(p)} = \{0\}$, где p – некоторое простое число, то из допустимости целых чисел a_j, b_j для группы X следует, что $f_{a_j}, f_{b_j} \in \mathrm{Aut}(X)$, $j = 1, 2, \dots, n$. Учитывая, что $c_X = \{0\}$, из предложения 10.5 вытекает, что все $\mu_j \in D(X)$.

Предположим теперь, что группа X содержит элемент x_0 порядка p, где p – простое число, но $X^{(p)} \neq \{0\}$. Пусть M – подгруппа в X, порожденная элементом x_0. Тогда $M \cong \mathbb{Z}(p)$. Пусть ξ_1 и ξ_2 – независимы случайные величины со значениями в подгруппе M, имеющие невырожденные распределения μ_j такие, что характеристические функции $\widehat{\mu}_j(y)$ не обращаются в нуль. Рассмотрим линейные формы $L_1 = p\xi_1 - \xi_2$ и $L_2 = \xi_1 + p\xi_2$. Легко видеть, что характеристические функции $\widehat{\mu}_j(y)$ удовлетворяют уравнению (10.11). Следовательно, линейные формы L_1 и L_2 независимы. Очевидно, что целое число p допустимо для X. В силу предложения 3.6 $\Gamma(M) = D(M)$. Поэтому $\mu_j \notin \Gamma(X)$. $\square$

10.9. Замечание. Пусть $\xi_j,\ j = 1, 2, \ldots, n,\ n \geq 2,$ – независимые случайные величины со значениями в группе X, имеющие распределения μ_j с необращающимися в нуль характеристическими функциями. Пусть a_j, b_j – допустимые целые числа для группы X. Обозначим через k наименьшее общее кратное чисел $\{a_1, \ldots, a_n\}$, а через l – наименьшее общее кратное чисел $\{b_1, \ldots, b_n\}$. Пусть p_j – наибольший общий делитель чисел $\{a_j l, b_j k\}$ и m – наименьшее общее кратное чисел $\{p_1, \ldots, p_n\}$. Тогда из независимости линейных форм $L_1 = a_1\xi_1 + \cdots + a_n\xi_n$ и $L_2 = b_1\xi_1 + \cdots + b_n\xi_n$ следует, что существуют такие элементы $x_j \in X,\ j = 1, 2, \ldots, n$, что носители распределений μ'_j всех случайных величин $\xi'_j = \xi_j + x_j$ содержатся в подгруппе $\{x \in X : mx \in c_X\}$.

Для доказательства положим $\nu_j = \mu_j * \bar{\mu}_j,\ \varphi_j(y) = -\log \widehat{\nu}_j(y),\ P(y) = \sum_{j=1}^n \varphi_j(a_j y)$. Рассуждая так же, как при доказательстве предложения 10.8, получаем, что функция $P(y)$ удовлетворяет уравнению (10.18). Отсюда следует, что функция $P(y)$ – непрерывный многочлен на подгруппе $Y^{(l)}$. По предложению 5.7 $P(y) = 0$ при $y \in b\,\overline{Y^{(l)}}$, а значит $\widehat{\nu}_j(y) = 1$ при $y \in b\,\overline{Y^{(a_j l)}},\ j = 1, 2, \ldots, n$. По предложению 2.13 имеют место включения $\sigma(\nu_j) \subset A\left(X, b\,\overline{Y^{(a_j l)}}\right)$. Обозначим $A_j = A\left(X, b\,\overline{Y^{(a_j l)}}\right)$. Меняя местами формы L_1 и L_2 и рассуждая, как выше, мы находим, что $\sigma(\nu_j) \subset B_j$, где $B_j = A\left(X, b\,\overline{Y^{(b_j k)}}\right)$. Положим $C_j = A_j \cap B_j$. Таким образом, мы имеем

$$\sigma(\nu_j) \subset C_j. \tag{10.19}$$

Из теоремы 1.9.3 легко следует, что $A_j = \{x \in X : a_j l x \in c_X\}$ и $B_j = \{x \in X : b_j k x \in c_X\}$. Следовательно, $C_j = \{x \in X : p_j x \in c_X\}$. Обозначим $C = \{x \in X : mx \in c_X\}$. Очевидно, что

$$C_j \subset C, \quad j = 1, 2, \ldots n, \tag{10.20}$$

и C – наименьшая подгруппа, содержащая все C_j. Применяя предложение 2.2, из (10.19) и (10.20) получаем требуемое утверждение.

Отметим, что в силу следствия 10.2 линейные формы $L_1 = a_1\xi'_1 + \cdots + a_n\xi'_n$ и $L_2 = b_1\xi'_1 + \cdots + b_n\xi'_n$ независимы.

Для дальнейшего нам понадобятся две леммы.

10.10. Лемма. *Пусть Y – произвольная абелева группа, ε – автоморфизм группы Y. Предположим, что функции $\varphi_j(y)$ удовлетворяют уравнению*

$$(i) \qquad \varphi_1(u + v) + \varphi_2(u + \varepsilon v) = P(u) + Q(v), \quad u, v \in Y.$$

Тогда каждая из функций $\varphi_j(y)$ удовлетворяют уравнению

$$(ii) \qquad \Delta_{(I-\varepsilon)k}\Delta_h^2 \varphi_j(u) = 0, \quad u, k, h \in Y.$$

Доказательство. Пусть k – произвольный элемент группы Y. Положим $h = -\varepsilon k$. Придадим в (i) переменным u и v приращения h и k соответственно и вычтем из полученного уравнения уравнение (i). Находим

$$\Delta_{(I-\varepsilon)k}\varphi_1(u+v) = \Delta_h P(u) + \Delta_k Q(v), \quad u, v \in Y. \tag{10.21}$$

Полагая в (10.21) $v = 0$ и вычитая из (10.21) полученное уравнение, получаем

$$\Delta_{(I-\varepsilon)k}\Delta_v\varphi_1(u) = \Delta_k Q(v) - \Delta_k Q(0), \quad u, v \in Y. \tag{10.22}$$

Пусть t – произвольный элемент группы Y. Придавая в (10.22) переменной u приращение t и вычитая из полученного уравнения уравнение (10.22), находим, что функция $\varphi_1(y)$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta_{(I-\varepsilon)k}\Delta_v\Delta_t\varphi_1(u) = 0, \quad u, k, v, t \in Y.$$

Полагая здесь $v = t = h$, получаем (ii).

Обозначим $w = \varepsilon v$. Тогда уравнение (i) переходит в уравнение

$$\varphi_1(u + \varepsilon^{-1}w) + \varphi_2(u + w) = P(u) + Q(w), \quad u, w \in Y.$$

Заметим, что $(I - \varepsilon^{-1})Y = (I - \varepsilon)Y$. Рассуждая аналогично, мы доказываем, что функция $\varphi_2(y)$ также удовлетворяет уравнению (ii). $\square$

10.11. Лемма. *Пусть Y – произвольная абелева группа. Предположим, что функция $\varphi(y)$ удовлетворяет уравнению*

(i) $$\Delta_h^3\varphi(u) = 0, \quad u, h \in Y$$

и условиям

(ii) $$\varphi(-y) = \varphi(y), \ \varphi(0) = 0, \ y \in Y.$$

Тогда функция $\varphi(y)$ удовлетворяют уравнению 2.16(ii).

Доказательство. По теореме 5.5 многочлен $\varphi(y)$ представим в виде 5.5(i). Поскольку $\varphi(y)$ – многочлен степени ≤ 2, то представление 5.5(i) имеет вид

$$\varphi(y) = g_2(y, y) + g_1(y) + g_0, \quad y \in Y,$$

где $g_2(y_1, y_2)$ – 2-аддитивная функция, $g_1(y)$ – аддитивная функция, а $g_0 = const$. Из (ii) вытекает, что $\varphi(y) = g_2(y, y)$, а следовательно, функция $\varphi(y)$ удовлетворяет уравнению 2.16(ii). $\square$

Следующий результат будет использован нами в дальнейшем, но представляет также и самостоятельный интерес.

10.12. Теорема. *Пусть ξ_1 и ξ_2 – независимые случайные величины со значениями в группе X, имеющие распределения μ_1 и μ_2 с необращающимися в нуль характеристическими функциями. Пусть автоморфизмы $\alpha_j, \beta_j \in \mathrm{Aut}(X)$ удовлетворяют условию:*

(i) $$I - \alpha_1{\beta_1}^{-1}\beta_2{\alpha_2}^{-1} \in \mathrm{Aut}(X).$$

Тогда из независимости линейных форм $L_1 = \alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2$ и $L_2 = \beta_1\xi_1 + \beta_2\xi_2$ вытекает, что $\mu_1, \mu_2 \in \Gamma(X)$.

Доказательство. Рассуждения, использованные в начале доказательства теоремы 10.3, позволяют доказывать теорему в предположении, что линейные формы L_1 и L_2 имеют вид $L_1 = \xi_1 + \xi_2$ и $L_2 = \delta_1\xi_1 + \delta_2\xi_2$, где $\delta_j \in \mathrm{Aut}(X)$. Заметим также, что если $\alpha \in \mathrm{Aut}(X)$, то линейные формы L_1 и L_2 независимы тогда и только тогда, когда независимы линейные формы L_1 и αL_2. Поэтому, доказывая теорему, можно предполагать, что $L_1 = \xi_1 + \xi_2$ и $L_2 = \xi_1 + \delta\xi_2$, где $\delta \in \mathrm{Aut}(X)$. Условие (i) при этом переходит в условие: $I - \delta \in \mathrm{Aut}(X)$.

Обозначим $\varepsilon = \widetilde{\delta}$. По лемме 10.1 из независимости линейных форм L_1 и L_2 вытекает, что характеристические функции $\widehat{\mu}_j(y)$ удовлетворяют уравнению 10.1(i), которое принимает вид

$$\widehat{\mu}_1(u+v)\widehat{\mu}_2(u+\varepsilon v) = \widehat{\mu}_1(u)\widehat{\mu}_2(u)\widehat{\mu}_1(v)\widehat{\mu}_2(\varepsilon v), \quad u, v \in Y. \tag{10.23}$$

Положим $\varphi_j(y) = -\log|\widehat{\mu}_j(y)|$, $j = 1, 2$. Тогда из (10.23) получаем, что функции $\varphi_j(y)$ удовлетворяют уравнению 10.10(i), где $P(u) = \varphi_1(u) + \varphi_2(u)$, $Q(v) = \varphi_1(v) + \varphi_2(\varepsilon v)$. По лемме 10.10 функция $\varphi_1(y)$ удовлетворяет уравнению 10.10(ii). Так как k – произвольный элемент группы Y и $I - \varepsilon \in \mathrm{Aut}(Y)$, то $(I - \varepsilon)k$ – также произвольный элемент группы Y. Полагая в 10.10(ii) $(I - \varepsilon)k = h$, получаем, что функция $\varphi_1(y)$ удовлетворяет уравнению 10.11(i). Очевидно также, что функция $\varphi_1(y)$ удовлетворяет условиям 10.11(ii). По лемме 10.11 функция $\varphi_1(y)$ удовлетворяет уравнению 2.16(ii). Аналогично мы доказываем, что функция $\varphi_2(y)$ также удовлетворяет уравнению 2.16(ii).

Теорема будет доказана, если мы проверим, что отношение $l_j(y) = \widehat{\mu}_j(y)/|\widehat{\mu}_j(y)|$ является характером группы Y. Положим $\pi = (\varepsilon - I)^{-1}$, $\rho = \varepsilon\pi$, $f(y) = \widehat{\mu}_1(y)$, $g(y) = \widehat{\mu}_2(y)$. Условимся также, что $\alpha^0 = I$ для любого $\alpha \in \mathrm{Aut}(Y)$. Подставляя в (10.23) вначале $u = \rho y$, $v = -\pi y$ и затем $u = -\pi y$, $v = \pi y$ и учитывая 2.7(d), мы получаем соответственно

$$f(y) = f(\rho y)f(-\pi y)|g(\rho y)|^2, \quad y \in Y, \tag{10.24}$$

и

$$g(y) = |f(\pi y)|^2 g(-\pi y)g(\rho y), \quad y \in Y. \tag{10.25}$$

Из (10.24) и (10.25) следует, что

$$f(y) = \prod_{k=0}^{n} \left(f\left((-1)^k\pi^k\rho^{n-k}y\right)\right)^{C_n^k} G_n(y), \quad y \in Y, \tag{10.26}$$

где $G_n(y) > 0$, и

$$|f(y)| = \prod_{k=0}^{n} |f(\pi^k\rho^{n-k}y)|^{a(n,k)}|g(\pi^k\rho^{n-k}y)|^{b(n,k)}, \quad y \in Y. \tag{10.27}$$

Из (10.27) вытекает неравенство

$$|f(z)| \leq \prod_{k=0}^{n+2} |f(\pi^k\rho^{n+2-k}z)|^{a(n+2,k)} \leq \prod_{k=1}^{n+1} |f(\pi^k\rho^{n+2-k}z)|^{a(n+2,k)}$$

$$= \prod_{k=0}^{n} |f(\pi^{k+1}\rho^{n+1-k}z)|^{a(n+2,k+1)}. \tag{10.28}$$

Нетрудно проверить, что

$$a(n+2,\ k+1) \geq nC_n^k,\ k=0,1,\ldots,n;\ n=0,1,2,\ldots. \tag{10.29}$$

Пусть $y = \pi\rho z$. Учитывая (10.28) и (10.29), находим

$$|f(z)|^{1/n} \leq \left(\prod_{k=0}^{n} |f(\pi^{k+1}\rho^{n+1-k}z)|^{a(n+2,k+1)}\right)^{1/n}$$

$$\leq \prod_{k=0}^{n} |f(\pi^{k+1}\rho^{n+1-k}z)|^{C_n^k} = \prod_{k=0}^{n} |f(\pi^{k}\rho^{n-k}y)|^{C_n^k}. \tag{10.30}$$

Из (10.30) следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=0}^{n} |f(\pi^{k}\rho^{n-k}y)|^{C_n^k} = 1. \tag{10.31}$$

Из (10.26) и (10.30) вытекает, что

$$\lim_{n\to\infty} G_n(y) = |f(y)|. \tag{10.32}$$

Следовательно, из (10.26) и (10.32) вытекает, что

$$l_1(y) = \frac{f(y)}{|f(y)|} = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=0}^{n} \left(f\left((-1)^k \pi^k \rho^{n-k} y\right)\right)^{C_n^k}.$$

Поэтому $l_1(y)$ является положительно определенной функцией, как предел последовательности положительно определенных функций. Поскольку $|l_1(y)| = 1$ при $y \in Y$, то из 2.7(e) мы получаем $l_1(y) = (x_1, y),\ x_1 \in X$. Аналогичное рассуждение доказывает, что $l_2(y) = (x_2, y),\ x_2 \in X$. $\square$

10.13. Замечание. Если X – группа с однозначным делением на два, то автоморфизм $\delta = -I$ удовлетворяет условию: $I - \delta = f_2 \in \mathrm{Aut}(X)$. Поэтому утверждение, сформулированное в замечании 7.12, вытекает из теоремы 10.12.

10.14. Замечание. В связи с теоремой 10.12 мы приведем пример группы X, которая обладает следующими свойствами:

(a) $I - \delta \notin \mathrm{Aut}(X)$ для любого $\delta \in \mathrm{Aut}(X)$;

(b) для любого $\delta \in \mathrm{Aut}(X)$, если ξ_1 и ξ_2 – независимые случайные величины со значениями в группе X, имеющие распределения μ_1 и μ_2 с необращающимися в нуль характеристическими функциями и линейные формы $L_1 = \xi_1 + \xi_2$ и $L_2 = \xi_1 + \delta\xi_2$ независимы, то $\mu_1, \mu_2 \in \Gamma(X)$.

Пусть $X = \Sigma_{\mathbf{a}}$, где $\mathbf{a} = (3, 3, \ldots, 3, \ldots)$. Тогда

$$Y \cong H_{\mathbf{a}} = \left\{\frac{m}{3^n} : n = 0, 1, 2, \ldots; m \in \mathbb{Z}\right\},$$

т.е. тип $\mathbf{t}(H_{\mathbf{a}}) = (0, \infty, 0, 0, \ldots)$. Отсюда следует, что $\mathrm{Aut}(Y) = \left\{\pm f_3^k : k \in \mathbb{Z}\right\}$ (см. 1.14(d)), а значит и $\mathrm{Aut}(X) = \left\{\pm f_3^k : k \in \mathbb{Z}\right\}$. Пусть $\delta \in \mathrm{Aut}(X)$ – произвольный автоморфизм. Поскольку группа X не содержит подгруппы, топологически изоморфной $\mathbb{T}$, то по теореме 10.3 если линейные формы L_1 и L_2 независимы, то $\mu_1,\ \mu_2 \in \Gamma(X)$. С другой стороны, очевидно, что $I - \delta \notin \mathrm{Aut}(X)$ для любого автоморфизма $\delta \in \mathrm{Aut}(X)$.

Перейдем теперь к описанию групп X, для которых существуют автоморфизмы $\alpha_j,\ \beta_j \in \mathrm{Aut}(X)$ такие, что справедливо следующее утверждение: если $\xi_j,\ j = 1, 2, \dots, n,\ n \geq 2,$ – независимые случайные величины со значениями в группе X, имеющие распределения μ_j с необращающимися в нуль характеристическими функциями, то из независимости линейных форм $L_1 = \alpha_1\xi_1 + \cdots + \alpha_n\xi_n$ и $L_2 = \beta_1\xi_1 + \cdots + \beta_n\xi_n$ вытекает, что все распределения $\mu_j \in \Gamma(X)$. Нам понадобится следующая лемма.

10.15. Лемма. *Пусть группа $X \neq \{0\}$ и $X \ncong \mathbb{Z}(2)$. Тогда существует такой автоморфизм $\alpha \in \mathrm{Aut}(X)$, что $\alpha \neq I$.*

Доказательство. Если не все отличные о нуля элементы группы X имеют порядок 2, то $I \neq -I$ и мы положим $\alpha = -I$. Если же каждый отличный от нуля элемент группы X имеет порядок 2, то по теореме 1.11.5 группа X топологически изоморфна группе

$$\mathbb{Z}(2)^{\mathfrak{n}} \times \mathbb{Z}(2)^{\mathfrak{m}*},$$

где $\mathfrak{n}$ и $\mathfrak{m}$ – кардинальные числа, $\mathbb{Z}(2)^{\mathfrak{n}}$ рассматривается в обычной топологии, а $\mathbb{Z}(2)^{\mathfrak{m}*}$ – в дискретной топологии. Отсюда следует, что группа X представима в виде $X = X_1 \times X_2 \times X_3$, где $X_1 \cong X_2 \cong \mathbb{Z}(2)$. Обозначим элементы группы X через $x = (x_1, x_2, x_3)$, где $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}(2),\ x_3 \in X_3$. Положим $\alpha(x_1, x_2, x_3) = (x_2, x_1, x_3)$. $\square$

10.16. Теорема. *Пусть $X \ncong \mathbb{T}$ и $X \ncong \mathbb{T} \times \mathbb{Z}(2)$. Тогда существует автоморфизм $\delta \in \mathrm{Aut}(X)$, $\delta \neq I$, обладающий следующим свойством: если ξ_1 и ξ_2 – независимые случайные величины со значениями в группе X, имеющие распределения μ_1 и μ_2 с необращающимися в нуль характеристическими функциями, то из независимости линейных форм $L_1 = \xi_1 + \xi_2$ и $L_2 = \xi_1 + \delta\xi_2$ вытекает, что $\mu_1, \mu_2 \in \Gamma(X)$.*

Доказательство. Возможны такие 3 случая.

1. Группа X не содержит подгруппы, топологически изоморфной $\mathbb{T}$. В этом случае по теореме 10.3 из независимости произвольных линейных форм L_1 и L_2 следует, что все распределения $\mu_j \in \Gamma(X)$.

2. Группа X содержит подгруппу $G_1 \cong \mathbb{T}$, и X не содержит подгруппы, топологически изоморфной двумерному тору $\mathbb{T}^2$. По теореме 1.17.1 подгруппа G_1 является топологическим прямым сомножителем в X, т.е. $X = G_1 \times G_2$, где подгруппа G_2 не содержит подгруппы, топологически изоморфной $\mathbb{T}$. Будем обозначать элементы группы X через $x = (g_1, g_2),\ g_j \in G_j,\ j = 1, 2$. По условию теоремы $G_2 \neq \{0\}$ и $G_2 \ncong \mathbb{Z}(2)$. По лемме 10.15 существует такой автоморфизм $\alpha \in \mathrm{Aut}(G_2)$, что $\alpha \neq I$. Положим $\delta(g_1, g_2) = (g_1, \alpha g_2)$. Очевидно, что $\delta \in \mathrm{Aut}(X)$. Проверим, что если ξ_1 и ξ_2 – независимые случайные величины со значениями в группе X, имеющие распределения μ_1 и μ_2 с необращающимися в нуль характеристическими функциями, то из независимости линейных форм $L_1 = \xi_1 + \xi_2$ и $L_2 = \xi_1 + \delta\xi_2$ следует, что $\mu_1, \mu_2 \in \Gamma(X)$.

Обозначим $\varepsilon = \widetilde{\delta}$. По лемме 10.1 из независимости линейных форм L_1 и L_2 вытекает, что характеристические функции $\widehat{\mu}_j(y)$ удовлетворяют уравнению 10.1(i), которое принимает вид (10.23). Поскольку $X = G_1 \times G_2$, то по теореме 1.7.1 $Y = H_1 \times H_2$, где $H_j \cong G_j^*,\ j = 1, 2$. Так как $\delta x = x$ для всех $x \in G_1$, то $\varepsilon y = y$ для всех $y \in H_1$. Поэтому ограничение уравнения (10.23) на подгруппу H_1 имеет вид

$$\widehat{\mu}_1(u+v)\widehat{\mu}_2(u+v) = \widehat{\mu}_1(u)\widehat{\mu}_2(u)\widehat{\mu}_1(v)\widehat{\mu}_2(v), \quad u, v \in H_1.$$

Следовательно, ограничение функции $f(y) = \widehat{\mu}_1(y)\widehat{\mu}_2(y)$ на подгруппу H_1 является характером подгруппы H_1. Отсюда следует, что $|\widehat{\mu}_j(y)| = 1$ при $y \in H_1$. Учитывая 2.7(e), получаем, что существуют такие элементы $x_j \in X$, что $\widehat{\mu}_j(y) = (x_j, y),\ y \in H_1,\ j = 1, 2$. Рассмотрим распределения $\mu'_j = \mu_j * E_{-x_j}$. Из 2.7($c$) вытекает, что $\widehat{\mu}'_j(y) = 1$ при $y \in H_1,\ j = 1, 2$. Учитывая предложение 2.13, отсюда следует, что $\sigma(\mu'_j) \subset A(X, H_1) = G_2$. Характеристические функции $\widehat{\mu}'_j(y)$ также удовлетворяют уравнению (10.23). Заметим, что $\varepsilon y = \widetilde{\alpha} y$ для всех $y \in H_2$. Рассмотрим линейные формы $L'_1 = \xi'_1 + \xi'_2$ и $L'_2 = \xi'_1 + \alpha\xi'_2$, где $\xi'_j = \xi_j - x_j$. Принимая во внимание, что ограничения характеристических функций $\widehat{\mu}'_j(y)$ на подгруппу H_2 также удовлетворяют уравнению (10.23), по лемме 10.1 линейные формы L'_1 и L'_2 независимы. Поскольку $H_2 \cong G_2^*$ и группа G_2 не содержит подгруппы, топологически изоморфной $\mathbb{T}$, то по теореме 10.3, примененной к к группе G_2, мы получаем что $\mu'_1, \mu'_2 \in \Gamma(G_2)$. Следовательно, $\mu_1, \mu_2 \in \Gamma(X)$.

3. Группа X содержит подгруппу $G_2 \cong \mathbb{T}^2$. По теореме 1.17.1 подгруппа G_2 является топологическим прямым сомножителем в X, т.е. $X = G_1 \times G_2$. Пусть автоморфизм $\alpha \in \mathrm{Aut}(\mathbb{T}^2)$ определяется матрицей $\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ (см. 1.14(e)). Поскольку $\det(I - \alpha) = 1$, то $I - \alpha \in \mathrm{Aut}(\mathbb{T}^2)$. В силу изоморфизма $G_2 \cong \mathbb{T}^2$ мы можем считать, что $\alpha \in \mathrm{Aut}(G_2)$. Сохраняя обозначения для элементов группы X, использованные при рассмотрения случая **2**, положим $\delta(g_1, g_2) = (g_1, \alpha g_2)$. Тогда автоморфизм δ искомый. Действительно, рассуждая так же, как в случае **2**, проверяем, что если ξ_1 и ξ_2 – независимые случайные величины со значениями в группе X и с такими распределениями μ_1 и μ_2, характеристические функции которых не обращаются в нуль, то из независимости линейных форм $L_1 = \xi_1 + \xi_2$ и $L_2 = \xi_1 + \delta\xi_2$ следует, что $\mu_1, \mu_2 \in \Gamma(X)$. Вместо теоремы 10.3 в этом случае нужно использовать теорему 10.12. □

Теорема 10.16 точна. Именно, справедливо следующее утверждение.

10.17. Предложение. *Пусть либо $X = \mathbb{T}$, либо $X = \mathbb{T} \times \mathbb{Z}(2)$ и $\alpha_j, \beta_j \in \mathrm{Aut}(X),\ j = 1, 2, \dots, n,\ n \geq 2,$ – такие автоморфизмы, что не все автоморфизмы $\alpha_j\beta_j^{-1}$ равны. Тогда существуют независимые случайные величины ξ_j со значениями в группе X, имеющие распределения μ_j с необращающимися в нуль характеристическими функциями такие, что линейные формы $L_1 = \alpha_1\xi_1 + \dots + \alpha_n\xi_n$ и $L_2 = \beta_1\xi_1 + \dots + \beta_n\xi_n$ независимы, но все распределения $\mu_j \notin \Gamma(X)$.*

Доказательство. Очевидно, что группа $\mathrm{Aut}(X)$ состоит лишь из двух автоморфизмов $\mathrm{Aut}(X) = \{\pm I\}$. Ограничимся доказательством предложения для группы $X = \mathbb{T}$. Случай, когда $X = \mathbb{T} \times \mathbb{Z}(2)$, рассматривается аналогично. Не ограничивая общности можно считать, что линейные формы L_1 и L_2 имеют вид $L_1 = \xi_1 + \dots + \xi_n$ и $L_2 = \xi_1 + \dots + \xi_m - \xi_{m+1} - \dots - \xi_n, \quad 1 \leq m < n$. Поскольку $Y \cong \mathbb{Z}$, то элементы группы Y будем обозначать через $k \in \mathbb{Z}$.

Рассмотрим на группе Y функции

$$f(k) = \begin{cases} \exp\{-ak^2/m\}, & \text{если} \quad k \in \mathbb{Z}^{(2)}, \\ \exp\{-(ak^2 - 1)/m\}, & \text{если} \quad k \notin \mathbb{Z}^{(2)} \end{cases}$$

и

$$g(k)=\begin{cases}\exp\{-ak^2/(n-m)\}, & \text{если}\quad k\in\mathbb{Z}^{(2)},\\ \exp\{-(ak^2+1)/(n-m)\}, & \text{если}\quad k\notin\mathbb{Z}^{(2)}.\end{cases}$$

Выберем $a>0$ таким образом, чтобы были выполнены неравенства

$$\sum_{k\in\mathbb{Z},\ k\neq 0} f(k)<1,\qquad \sum_{k\in\mathbb{Z},\ k\neq 0} g(k)<1.$$

Отсюда следует, что

$$\rho(e^{it})=1+\sum_{k\in\mathbb{Z},\ k\neq 0} f(k)e^{-ikt}>0,\quad \tau(e^{it})=\sum_{k\in\mathbb{Z},\ k\neq 0} g(k)e^{-ikt}>0.$$

Тогда $f(k)$ и $g(k)$ являются характеристическими функциями некоторых распределений $\mu,\ \nu\in \mathrm{M}^1(\mathbb{T})$, имеющих плотности $\rho(e^{it})$ и $\tau(e^{it})$ относительно $m_{\mathbb{T}}$. Пусть ξ_j – независимые случайные величины со значениями в группе $\mathbb{T}$ и с распределениями $\mu_j=\mu,\ j=1,2,\dots,m$ и $\mu_j=\nu,\ j=m+1,m+2,\dots,n$. Очевидно, что характеристические функции $\widehat{\mu}_j(y)$ удовлетворяют уравнению

$$\prod_{j=1}^{m}\widehat{\mu}_j(k+l)\prod_{j=m+1}^{n}\widehat{\mu}_j(k-l)=\prod_{j=1}^{n}\widehat{\mu}_j(k)\prod_{j=1}^{m}\widehat{\mu}_j(l)\prod_{j=m+1}^{n}\widehat{\mu}_j(-l),\quad k,l\in\mathbb{Z}.$$

Из леммы 10.1 вытекает, что линейные формы L_1 и L_2 независимы. В то же время, все $\mu_j\notin\Gamma(\mathbb{T})$. $\square$

Мы дополним теорему 10.16 следующим утверждением.

10.18. Предложение. *Пусть группа X такая же, как в теореме* 10.16, *т.е.* $X\ncong\mathbb{T}$ *и* $X\ncong\mathbb{T}\times\mathbb{Z}(2)$. *Предположим также, что группа X удовлетворяет условиям:*

(i) $c_X\neq\{0\}$,

(ii) $c_X\ncong\mathbb{T}$.

Тогда автоморфизм $\delta\in\mathrm{Aut}(X)$ в теореме 10.16 *можно выбрать таким образом, чтобы было справедливо следующее утверждение: существуют невырожденные распределения $\mu_1,\mu_2\in\Gamma(X)$ такие, что если ξ_1 и ξ_2 – независимые случайные величины со значениями в группе X и с распределениями μ_1 и μ_2, то линейные формы $L_1=\xi_1+\xi_2$ и $L_2=\xi_1+\delta\xi_2$ независимы.*

Доказательство. Для доказательства предложения используем схему доказательства теоремы 10.16. Рассмотрим те же самые 3 случая.

1. Группа X не содержит подгруппы, топологически изоморфной $\mathbb{T}$. Поскольку по условию $c_X\neq\{0\}$, то по замечанию 3.12 существует невырожденное распределение $\gamma\in\Gamma(X)$. Из 2.16(*ii*) следует, что характеристическая функция $\widehat{\gamma}(y)$ удовлетворяет уравнению

$$\widehat{\gamma}(u+v)\widehat{\gamma}(u-v)=\widehat{\gamma}(u)^2\widehat{\gamma}(v)\widehat{\gamma}(-v),\quad u,v\in Y.\qquad(10.33)$$

Положим $\delta=-I$ и $\mu_1=\mu_2=\gamma$. По лемме 10.1 из (10.33) следует, что если ξ_1 и ξ_2 независимые одинаково распределенные случайные величины со значениями в группе X и с распределением γ, то линейные формы $L_1=\xi_1+\xi_2$ и $L_2=\xi_1-\xi_2$ независимы.

2. Группа X содержит подгруппу $G_1\cong\mathbb{T}$ и X не содержит подгруппы, топологически изоморфной двумерному тору $\mathbb{T}^2$. По теореме 1.17.1 подгруппа G_1 является топологическим прямым сомножителем в X, т.е. $X = G_1 \times G_2$, где подгруппа G_2 не содержит подгруппы, топологически изоморфной $\mathbb{T}$. Из (ii) следует, что $c_{G_2} \neq \{0\}$. Обозначим через $x = (g_1, g_2)$, $g_j \in G_j$, $j = 1, 2$, элементы группы X. Принимая во внимание рассуждения, использованные при рассмотрении случая **1**, мы можем положить $\delta(g_1, g_2) = (g_1, -g_2)$, и $\mu_1 = \mu_2 = \gamma$, где γ – невырожденное гауссовское распределение на G_2.

3. Группа X содержит подгруппу $G_2 \cong \mathbb{T}^2$. По теореме 1.17.1 подгруппа G_2 является топологическим прямым сомножителем в X, т.е. $X = G_1 \times G_2$. Обозначим $H_2 = G_2^*$. Поскольку $G_2 \cong \mathbb{T}^2$, то $H_2 \cong \mathbb{Z}^2$. Обозначим элементы группы H_2 через (m, n), $m, n \in \mathbb{Z}$. Пусть автоморфизм $\alpha \in \mathrm{Aut}(G_2)$ такой же, как в случае **3** теоремы 10.16. Пусть μ_1 и μ_2 – гауссовские распределения на группе G_2 с характеристическими функциями

$$\widehat{\mu}_1(m, n) = \{-\sigma(t_0 m - n)^2\}, \quad \widehat{\mu}_2(m, n) = \{-\sigma t_0(t_0 m - n)^2\}, \quad (m, n) \in H_2,$$

где $t_0 = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{2}$. Несложно непосредственно проверить, что характеристические функции $\widehat{\mu}_j(y)$ удовлетворяют уравнению

$$\widehat{\mu}_1(u + v)\widehat{\mu}_2(u + \widetilde{\alpha}v) = \widehat{\mu}_1(u)\widehat{\mu}_2(u)\widehat{\mu}_1(v)\widehat{\mu}_2(\widetilde{\alpha}v), \quad u, v \in H_2.$$

Пусть автоморфизм $\delta \in \mathrm{Aut}(X)$ такой же, как в случае **3** теоремы 10.16. Если рассматривать μ_1 и μ_2, как гауссовские распределения на группе X, то легко видеть, что характеристические функции $\widehat{\mu}_1(y)$ и $\widehat{\mu}_2(y)$ удовлетворяют уравнению (10.23). По лемме 10.1, если ξ_1 и ξ_2 – независимые случайные величины со значениями в группе X и с распределениями μ_1 и μ_2, то линейные формы $L_1 = \xi_1 + \xi_2$ и $L_2 = \xi_1 + \delta\xi_2$ независимы. $\square$

10.19. Замечание. Доказательство группового аналога теоремы Скитовича–Дармуа в предположении, что характеристические функции рассматриваемых случайных величин не обращаются в нуль (теорема 10.3), опирается на групповой аналог теоремы Крамера (теорема 4.6). Также, как и в классической ситуации, групповой аналог теоремы Крамера вытекает из следующего частного случая теоремы Скитовича–Дармуа.

(α) *Пусть ξ_j, $j = 1, 2, 3, 4,$ – независимые случайные величины со значениями в группе X, имеющие распределения $\mu_1 = \mu_3$, $\mu_2 = \mu_4$ с необращающимися в нуль характеристическими функциями. Тогда из независимости линейных форм $L_1 = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4$ и $L_2 = \xi_1 + \xi_2 - \xi_3 - \xi_4$ вытекает, что распределения $\mu_1, \mu_2 \in \Gamma(X)$.*

Действительно, пусть ξ_1 и ξ_2 независимые случайные величины со значениями в группе X и с распределениями μ_1 и μ_2. Предположим, что сумма $\xi_1 + \xi_2$ имеет гауссовское распределение, т.е. в силу (2.1) $\gamma = \mu_1 * \mu_2 \in \Gamma(X)$. Выберем случайные величины ξ_3 и ξ_4 равнораспределенными соответственно с ξ_1 и ξ_2 так, чтобы все случайные величины ξ_j были независимы. Поскольку случайные величины $\eta_1 = \xi_1 + \xi_2$ и $\eta_2 = \xi_3 + \xi_4$ имеют одно и то же распределение $\gamma \in \Gamma(X)$, то по лемме 7.1 линейные формы $L_1 = (\xi_1 + \xi_2) + (\xi_3 + \xi_4)$ и $L_2 = (\xi_1 + \xi_2) - (\xi_3 + \xi_4)$ независимы. Из (α) вытекает тогда, что распределения $\mu_1, \mu_2 \in \Gamma(X)$.

В свою очередь, утверждение (α) следует из группового аналога теоремы Крамера. Для доказательства заметим, что по лемме 10.1 независимость линейных форм $L_1 = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4$ и

$L_2 = \xi_1 + \xi_2 - \xi_3 - \xi_4$ эквивалентна тому, что характеристические функции $\mu_j(y)$ удовлетворяют уравнению 10.1(i), которое принимает вид

$$\widehat{\mu}_1(u+v)\widehat{\mu}_2(u+v)\widehat{\mu}_1(u-v)\widehat{\mu}_2(u-v) = \widehat{\mu}_1^2(u)\widehat{\mu}_2^2(u)\widehat{\mu}_1(v)\widehat{\mu}_1(-v)\widehat{\mu}_2(v)\widehat{\mu}_2(-v), \quad u, v \in Y. \quad (10.34)$$

Положим $\gamma = \mu_1 * \mu_2 * \bar{\mu}_1 * \bar{\mu}_2$. Из 2.7$(c)$, 2.7$(d)$ и (10.34) следует, что характеристическая функция $\widehat{\gamma}(y)$ удовлетворяет уравнению

$$\widehat{\gamma}(u+v)\widehat{\gamma}(u-v) = \widehat{\gamma}^2(u)\widehat{\gamma}^2(v), \quad u, v \in Y. \quad (10.35)$$

Из 2.7(c) и 2.7(d) вытекает, что $\widehat{\gamma}(y) > 0$ и положим $\varphi(y) = -\log\widehat{\gamma}(y)$. Из уравнения (10.35) следует, что функция $\varphi(y)$ удовлетворяет уравнению 2.16(ii). Поэтому $\gamma \in \Gamma(X)$. По теореме 4.6 отсюда следует, что и $\mu_j \in \Gamma(X)$, $j = 1, 2$. Утверждение (α) доказано.

Таким образом, класс групп, для которого справедлива теорема 4.6, и класс групп, для которого справедливо утверждение (α), совпадают.

§11. Теорема Скитовича–Дармуа на двумерном торе $\mathbb{T}^2$

Пусть X – локально компактная абелева группа, удовлетворяющая второй аксиоме счетности. Пусть ξ_j, $j = 1, 2, \dots, n$, $n \geq 2$, – независимые случайные величины со значениями в группе X, имеющие распределения μ_j с необращающимися в нуль характеристическими функциями. Пусть α_j, β_j – топологические автоморфизмы группы X. Согласно теореме 10.3, если группа X не содержит подгруппы, топологически изоморфной $\mathbb{T}$, то из независимости линейных форм $L_1 = \alpha_1\xi_1 + \dots + \alpha_n\xi_n$ и $L_2 = \beta_1\xi_1 + \dots + \beta_n\xi_n$ вытекает, что все распределения $\mu_j \in \Gamma(X)$. Если же группа X содержит подгруппу, топологически изоморфную $\mathbb{T}$, то указанное утверждение, вообще говоря, неверно (см. замечание 10.4). Поэтому для таких групп возникает задача описания возможных распределений μ_j независимых случайных величин ξ_j при условии, что линейные формы L_1 и L_2 независимы. В этом параграфе мы решаем эту задачу для двух независимых случайных величин, принимающих значения в двумерном торе $X = \mathbb{T}^2$. Из основного результата параграфа вытекает, в частности, полное описание топологических автоморфизмов α_j, β_j двумерного тора $\mathbb{T}^2$, которые обладают тем свойством, что из независимости линейных форм $L_1 = \alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2$ и $L_2 = \beta_1\xi_1 + \beta_2\xi_2$ вытекает, что случайные величины ξ_1 и ξ_2 – гауссовские. Более того, оказывается, что возникающие при этом гауссовские распределения не произвольны. Они либо вырождены, либо сосредоточены на классах смежности плотных однопараметрических подгрупп в двумерном торе $\mathbb{T}^2$.

11.1. Обозначения. Пусть $X = \mathbb{T}^2$. Элементы группы X будем обозначать через $x = (z, w)$, $z, w \in \mathbb{T}$. Мы имеем $Y \cong \mathbb{Z}^2$. Элементы группы Y будем обозначать через $y = (m, n)$, $m, n \in \mathbb{Z}$. Из определения 3.1 гауссовского распределения на локально компактной абелевой группе следует, что характеристическая функция гауссовского распределения на двумерном торе $\mathbb{T}^2$ имеет вид

$$\widehat{\gamma}(y) = (x, y)\exp\{-\langle Ay, y\rangle\}, \quad y \in Y,$$

где $x \in \mathbb{T}^2$, $A = (a_{ij})_{i,j=1}^2$ — симметричная неотрицательно определенная матрица. Согласно 1.14(e), каждый автоморфизм $\delta \in \mathrm{Aut}(\mathbb{T}^2)$ определяется целочисленной матрицей $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, где

$|ad-bc|=1$, и δ действует на $\mathbb{T}^2$ следующим образом

$$\delta(z,w)=(z^aw^c, z^bw^d), \quad (z,w)\in\mathbb{T}^2,$$

а сопряженный автоморфизм $\varepsilon=\widetilde{\delta}\in\mathrm{Aut}(Y)$ имеет вид

$$\varepsilon(m,n)=(am+bn, cm+dn), \quad (m,n)\in Y.$$

Мы будем отождествлять автоморфизмы δ и ε с матрицей $\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}$.

Пусть ξ_1 и ξ_2 — независимые случайные величины со значениями в группе X и с распределениями μ_1 и μ_2, а $\alpha_j,\ \beta_j$ – топологические автоморфизмы группы X. Как отмечено в начале доказательства теоремы 10.12, изучение возможных распределений μ_j при условии, что линейные формы $L_1=\alpha_1\xi_1+\alpha_2\xi_2$ и $L_2=\beta_1\xi_1+\beta_2\xi_2$ независимы, сводится к случаю, когда $L_1=\xi_1+\xi_2$ и $L_2=\xi_1+\delta\xi_2$, где $\delta\in\mathrm{Aut}(X)$.

Для доказательства основной теоремы этого параграфа нам понадобится ряд лемм.

11.2. Лемма. *Пусть* $\varepsilon=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}^2)$ *и* $\lambda_1,\ \lambda_2$ *— собственные значения матрицы* ε. *Рассмотрим уравнение*

$$(i) \qquad A+B\varepsilon=0,$$

где $A=(a_{ij})_{i,j=1}^2$ *и* $B=(b_{ij})_{i,j=1}^2$ *— симметричные неотрицательно определенные матрицы. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(Ia) *Если* $\lambda_1\lambda_2=1$ *и* $\lambda_1+\lambda_2>-2$, *то единственным решением уравнения* (i) *является решение* $A=B=0$.

(Ib) *Если* $\lambda_1\lambda_2=-1$ *и* $\lambda_1+\lambda_2\neq 0$, *то уравнение* (i) *имеет ненулевые решения. Все решения уравнения* (i) *обладают тем свойством, что* $\det A=\det B=0$ *и* $\mathrm{Ker}\ A\cap\mathbb{Z}^2=\{0\}$.

(IIa) *Если либо* $\lambda_1=\lambda_2=-1$ *и* $\varepsilon\neq -I$, *либо* $\lambda_1=1,\ \lambda_2=-1$, *то уравнение* (i) *имеет ненулевые решения. Все решения уравнения* (i), *обладают тем свойством, что* $A=B,\ \det A=0$ *и* $\mathrm{Ker}\ A\cap\mathbb{Z}^2\neq\{0\}$.

(IIb) *Если либо* $\varepsilon=-I$, *либо* $\lambda_1\lambda_2=1$ *и* $\lambda_1+\lambda_2<-2$, *то существует такое решение уравнения* (i), *что* $\det A=\det B>0$.

Доказательство. Заметим, что уравнение (i) имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда ненулевое решение имеет система уравнений и неравенств относительно b_{ij}:

$$\begin{cases} b_{11}\geq 0, \qquad b_{22}\geq 0, & (11.1)\\ b_{11}b_{22}-b_{12}^2\geq 0 & (11.2)\\ b_{11}b+b_{12}d=b_{12}a+b_{22}c, & (11.3)\\ b_{11}a+b_{12}c\leq 0, \qquad b_{12}b+b_{22}d\leq 0, & (11.4)\\ (b_{11}a+b_{12}c)(b_{12}b+b_{22}d)-(b_{12}a+b_{22}c)^2\geq 0. & (11.5)\end{cases}$$

Нахождение решений этой системы элементарно, но достаточно громоздко, и мы разобьем его на несколько пунктов.

1. $\det\varepsilon = 1$, т.е.

$$ad - bc = 1. \tag{11.6}$$

Отметим, что из условия (11.6) вытекает равносильность неравенств (11.2) и (11.5).

1.A. $a \neq d$. В этом случае $bc \neq 0$. Из уравнения (11.3) получаем

$$b_{12} = (b_{11}b - b_{22}c)/(a-d). \tag{11.7}$$

Подставляя выражение для b_{12} из (11.7) в неравенство (11.2) и учитывая условие (11.6), находим

$$b^2 b_{11}^2 - (a^2 + d^2 - 2) b_{11} b_{22} + c^2 b_{22}^2 \leq 0. \tag{11.8}$$

Из неравенства (11.8) следует, что либо $b_{11} = b_{22} = 0$, а тогда $A = B = 0$, либо $b_{11}b_{22} \neq 0$. Пусть $b_{11}b_{22} \neq 0$. Обозначим $t = b_{11}/b_{22}$. Из неравенства (11.8) получаем

$$b^2 t^2 - (a^2 + d^2 - 2)t + c^2 \leq 0. \tag{11.9}$$

Рассмотрим уравнение

$$b^2 t^2 - (a^2 + d^2 - 2)t + c^2 = 0. \tag{11.10}$$

Его дискриминант $D = (a-d)^2((a+d)^2 - 4)$.

(i). $(a+d)^2 < 4$. Тогда $D < 0$. Уравнение (11.10), а значит, и неравенство (11.9) не имеют решений. Следовательно, уравнение (i) имеет только решение $A = B = 0$.

(ii). $a + d = 2$. Тогда $D = 0$ и $a \neq 1$. Уравнение (11.10), а значит, и неравенство (11.9) имеет единственное решение $t = (a-1)^2/b^2$. Подставляя во второе неравенство системы (11.4) выражение для b_{12} из (11.7) и учитывая (11.6), получаем

$$(b_{11}b^2 - b_{22}(a^2 - 4a + 3))/2(a-1) \leq 0.$$

Это неравенство противоречит равенству $b_{11}/b_{22} = (a-1)^2/b^2$. Значит, уравнение (i) имеет только решение $A = B = 0$.

(iii). $a + d = -2$. Тогда $D = 0$ и $a \neq -1$. Уравнение (11.10), а значит, и неравенство (11.9) имеет единственное решение $t = (a+1)^2/b^2$. Подставляя в систему (11.4) выражение для b_{12} из (11.7) и учитывая условие (11.6), получаем

$$\frac{b_{11}(a^2-1) - b_{22}c^2}{2(a+1)} \leq 0, \qquad \frac{b_{11}b^2 - b_{22}(a^2 + 4a + 3)}{2(a+1)} \leq 0. \tag{11.11}$$

Поскольку

$$b_{11}/b_{22} = (a+1)^2/b^2, \tag{11.12}$$

то легко проверить, что система неравенств (11.11) выполнена при любых $b_{11} > 0$, $b_{22} > 0$, удовлетворяющих (11.12). В этом случае все решения уравнения (i) имеют вид

$$A = B = \sigma \begin{pmatrix} (a+1)^2/b^2 & (a+1)/b \\ (a+1)/b & 1 \end{pmatrix},$$

где $\sigma \geq 0$. Очевидно, что $\det A = 0$ и $\operatorname{Ker} A \cap \mathbb{Z}^2 \neq \{0\}$.

(iv). $(a+d)^2 > 4$ и $a > d$. Тогда $D > 0$ и уравнение (11.10) имеет решения

$$t_1 = \frac{a^2 + d^2 - 2 - (a-d)\sqrt{(a+d)^2 - 4}}{2b^2},\; t_2 = \frac{a^2 + d^2 - 2 + (a-d)\sqrt{(a+d)^2 - 4}}{2b^2}. \tag{11.13}$$

Значит, решением неравенства (11.9) является сегмент $t \in [t_1, t_2]$. Очевидно, что $t_1 > 0$. Подставляя в систему (11.4) выражение для b_{12} из (11.7), учитывая (11.6) и равенство $t = b_{11}/b_{22}$, получаем

$$t(a^2-1) - c^2 \le 0, \quad tb^2 - (d^2-1) \le 0. \tag{11.14}$$

Если $a \in \{0, \pm 1\}$, то первое неравенство системы (11.14) выполнено при $t \in [t_1, t_2]$ и система (11.14) при $t \in [t_1, t_2]$ равносильна неравенству

$$t \le (d^2-1)/b^2. \tag{11.15}$$

Пусть $a \notin \{0, \pm 1\}$. Заметим, что из условия (11.6) следует, что выполнено неравенство $(d^2-1)/b^2 \le c^2/(a^2-1)$, а значит, и в этом случае система (11.14) также равносильна неравенству (11.15).

Очевидно, что если $a+d > 2$, то $t_1 > (d^2-1)/b^2$. Следовательно, неравенство (11.15) не имеет решений на интервале $[t_1, t_2]$, а значит, уравнение (i) имеет лишь решение $A = B = 0$. Если же $a + d < -2$, то $t_2 < (d^2-1)/b^2$. Поэтому неравенство (11.14) выполнено при всех $t \in [t_1, t_2]$. Из сказанного вытекает, что все ненулевые решения уравнения (i) имеют вид

$$B = \sigma \begin{pmatrix} t & (bt-c)/(a-d) \\ (bt-c)/(a-d) & 1 \end{pmatrix}, \qquad A = -B\varepsilon,$$

где $t_1 \le t \le t_2$, $\sigma > 0$. Причем при $t_1 < t < t_2$ выполнено $\det A = \det B > 0$, а если $t = t_1$, либо $t = t_2$, то выполнено $\det A = \det B = 0$. Как следует из (11.13) числа t_j иррациональны. Поэтому в последнем случае $\mathrm{Ker} A \cap \mathbb{Z}^2 = \{0\}$.

(v). $(a+d)^2 > 4$ и $a < d$. Обозначая $t = b_{22}/b_{11}$, переходя от неравенства (11.8) к неравенству $c^2t^2 - (a^2+d^2-2)t + b^2 \le 0$, и рассуждая аналогично тому, как в случае **(iv)**, получаем, что если $a + d > 2$, то уравнение (i) имеет лишь решение $A = B = 0$, а если $a + d < -2$, то уравнение (i) имеет такое решение, что $\det A = \det B > 0$.

1.B. $a = d$. Из уравнения (11.3) получаем

$$b_{11}b = b_{22}c. \tag{11.16}$$

(i). $bc < 0$. Тогда $a = 0$, а из уравнения (11.16) следует, что $b_{11} = b_{22} = 0$. Значит, уравнение (i) имеет только решение $A = B = 0$.

(ii). $bc > 0$. Тогда, очевидно, $|a| \ge 2$. Пусть $a \ge 2$. Из первого неравенства системы (11.4) следует, что $b_{11} \le -cb_{12}/a$. Отсюда, учитывая уравнение (11.16), неравенство (11.2) и условие (11.6), получаем $b_{11}^2 \le c^2b_{12}^2/a^2 \le (a^2-1)b_{11}^2/a^2$. Следовательно, $b_{11} = b_{22} = 0$. Значит, уравнение (i) имеет только решение $A = B = 0$.

Пусть $a \le -2$. Заметим, что если $b_{11} = 0$, то $b_{22} = 0$, а следовательно $A = B = 0$. Пусть $b_{11} \ne 0$. Обозначим $s = b_{12}/b_{11}$. Легко видеть, что систему неравенств (11.2) и (11.4), учитывая уравнение (11.16), можно переписать в виде

$$s^2 \le b/c, \quad a + cs \le 0. \tag{11.17}$$

Из условия (11.6) следует, что решением системы (11.17) является сегмент $s \in [-\sqrt{b/c}, \sqrt{b/c}]$. Из сказанного вытекает, что все ненулевые решения уравнения (i) имеют вид

$$B = \sigma \begin{pmatrix} 1 & s \\ s & b/c \end{pmatrix}, \qquad A = -B\varepsilon,$$

где $-\sqrt{b/c} \le s \le \sqrt{b/c}$, $\sigma > 0$. Причем при $-\sqrt{b/c} < s < \sqrt{b/c}$ выполнено $\det A = \det B > 0$, а при $s = \pm\sqrt{b/c}$ выполнено $\det A = \det B = 0$. Отметим, что в последнем случае из иррациональности $\sqrt{b/c}$ следует, что $\mathrm{Ker}\ A \cap \mathbb{Z}^2 = \{0\}$.

(iii). $b = 0, c \neq 0$. Заметим, что в этом случае $a = \pm 1$. Из уравнения (11.16) находим $b_{22} = 0$, а значит, и $b_{12} = 0$. Поэтому из системы неравенств (11.4) вытекает, что $b_{11}a \le 0$. Учитывая это, получаем, что $b_{11} = 0$ при $a = 1$. Следовательно, уравнение (i) имеет только решение $A = B = 0$. Если $a = -1$, то все решения уравнения (i) имеют вид

$$A = B = \sigma \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{11.18}$$

где $\sigma \ge 0$. Очевидно, что $\det A = 0$ и $\mathrm{Ker}\ A \cap \mathbb{Z}^2 \neq \{0\}$.

(iv). $c = 0, b \neq 0$. Заметим, что в этом случае $a = \pm 1$. Из уравнения (11.16) находим $b_{11} = 0$, а значит, и $b_{12} = 0$. Поэтому из системы неравенств (11.4) вытекает, что $b_{22}a \le 0$. Учитывая это, получаем, что $b_{22} = 0$ при $a = 1$. Следовательно, уравнение (i) имеет только решение $A = B = 0$. Если $a = -1$, то все решения уравнения (i) имеют вид

$$A = B = \sigma \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{11.19}$$

где $\sigma \ge 0$. Очевидно, что $\det A = 0$ и $\mathrm{Ker}\ A \cap \mathbb{Z}^2 \neq \{0\}$.

(v). $b = c = 0$. В этом случае $\varepsilon = \pm I$, и утверждение леммы очевидно.

2. $\det \varepsilon = -1$, т.е.

$$ad - bc = -1. \tag{11.20}$$

Из условия (11.20) вытекает, что если матрицы A и B удовлетворяют уравнению (i), то $\det A = \det B = 0$. Следовательно, неравенство (11.2) переходит в уравнение

$$b_{11}b_{22} - b_{12}^2 = 0, \tag{11.21}$$

а неравенство (11.5) переходит в уравнение

$$(b_{11}a + b_{12}c)(b_{12}b + b_{22}d) - (b_{12}a + b_{22}c)^2 = 0. \tag{11.22}$$

При этом уравнения (11.21) и (11.22) равносильны. Уравнение (i) имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда ненулевое решение имеет система уравнений и неравенств (11.1), (11.3), (11.4) и (11.21).

2.A. $a \neq \pm d$. Заметим, что из $a \neq -d$ следует, что $bc \neq 0$. Подставляя выражение для b_{12} из (11.7) в уравнение (11.21) и учитывая условие (11.20), получаем

$$b^2 b_{11}^2 - (a^2 + d^2 + 2) b_{11} b_{22} + c^2 b_{22}^2 = 0. \tag{11.23}$$

Из уравнения (11.23) следует, что либо $b_{11} = b_{22} = 0$, а тогда $A = B = 0$, либо $b_{11}b_{22} \neq 0$. Пусть $b_{11}b_{22} \neq 0$.

(i). $a < d$. Обозначим $t = b_{11}/b_{22}$. Из уравнения (11.23) получаем

$$b^2 t^2 - (a^2 + d^2 + 2)t + c^2 = 0. \tag{11.24}$$

Решения уравнения (11.24) имеют вид

$$t_1 = \frac{a^2 + d^2 + 2 - (a-d)\sqrt{(a+d)^2+4}}{2b^2}, \; t_2 = \frac{a^2 + d^2 + 2 + (a-d)\sqrt{(a+d)^2+4}}{2b^2}. \tag{11.25}$$

С учетом условия (11.20), уравнения (11.7) и равенства $t = b_{11}/b_{22}$, систему неравенств (11.4) можно переписать в виде

$$t \geq c^2/(a^2+1), \quad t \geq (d^2+1)/b^2. \tag{11.26}$$

Из условия (11.20) следует, что $c^2/(a^2+1) \leq (d^2+1)/b^2$. Поэтому система (11.26) равносильна неравенству $t \geq (d^2+1)/b^2$. Легко видеть, что неравенство (11.26) выполнено при $t = t_1$ и не выполнено при $t = t_2$. Отсюда вытекает, что у уравнения (i) существуют ненулевые решения и все они имеют вид

$$B = \sigma \begin{pmatrix} t_1 & (bt_1 - c)/(a-d) \\ (bt_1 - c)/(a-d) & 1 \end{pmatrix}, \qquad A = kB, \tag{11.27}$$

где $\sigma > 0$, $k = (\sqrt{(a+d)^2+4} - a - d)/2$. Очевидно, что $\det A = \det B = 0$. Из (11.25) следует, что t_1 – иррациональное число. Поэтому $\mathrm{Ker}\ A \cap \mathbb{Z}^2 = \{0\}$.

(ii). $a > d$. Обозначая $t = b_{22}/b_{11}$, переходя от уравнения (11.23) к уравнению

$$c^2t^2 - (a^2 + d^2 + 2)t + b^2 = 0,$$

и рассуждая так же, как и в случае **(i)**, мы доказываем, что у уравнения (i) существуют ненулевые решения и все они обладают тем свойством, что $\det A = \det B = 0$ и $\mathrm{Ker}\ A \cap \mathbb{Z}^2 = \{0\}$.

2.B. $a = d \neq 0$. Заметим, что в этом случае $bc > 0$. Из уравнений (11.16) и (11.21) получаем $b_{12}^2 - bb_{11}^2/c = 0$, а следовательно, $b_{12} = \pm b_{11}\sqrt{b/c}$. Учитывая систему неравенств (11.4), находим, что $b_{12} = -b_{11}\sqrt{b/c}$. Отсюда вытекает, что у уравнения (i) существуют ненулевые решения и все они имеют вид

$$B = \sigma \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{b/c} \\ -\sqrt{b/c} & b/c \end{pmatrix}, \qquad A = kB,$$

где $\sigma > 0$, $k = \sqrt{a^2+1} - a$. Очевидно, что $\det A = \det B = 0$. Из иррациональности $\sqrt{b/c}$ следует, что $\mathrm{Ker}\ A \cap \mathbb{Z}^2 = \{0\}$.

2.C. $a = -d \neq 0$. Отсюда, $a \neq d$. Тогда выполнено (11.7), а следовательно, и (11.23).

(i). $a < 0$, $b \neq 0$. Из уравнения (11.23) следует, что если $b_{22} = 0$, то $b_{11} = 0$, а тогда $A = B = 0$. Пусть $b_{22} \neq 0$. Обозначая $t = b_{11}/b_{22}$ и рассуждая так же, как в случае **2.A(i)**, проверяем, что все решения уравнения (i) имеют вид

$$A = B = \sigma \begin{pmatrix} (a-1)^2/b^2 & (a-1)/b \\ (a-1)/b & 1 \end{pmatrix},$$

где $\sigma \geq 0$.

(ii). $a < 0$, $b = 0$. Тогда из условия (11.20) следует, что $a = -1$. Из второго неравенства системы (11.4) вытекает, что $b_{22} = 0$, а значит, $b_{12} = 0$. Следовательно, все решения уравнения (i) имеют вид (11.18).

(iii). $a > 0$, $c \neq 0$. Из уравнения (11.23) следует, что если $b_{11} = 0$, то $b_{22} = 0$, а тогда $A = B = 0$. Пусть $b_{11} \neq 0$. Обозначая $t = b_{22}/b_{11}$ и рассуждая так же, как в случае **2.A(ii)**, проверяем, что все решения уравнения (i) имеют вид

$$A = B = \sigma \begin{pmatrix} 1 & -(a+1)/c \\ -(a+1)/c & (a+1)^2/c^2 \end{pmatrix},$$

где $\sigma \geq 0$.

(iv). $a > 0$, $c = 0$. Тогда из условия (11.20) следует, что $a = 1$. Из первого неравенства системы (11.4) вытекает, что $b_{11} = 0$, а значит, $b_{12} = 0$. Следовательно, все решения уравнения (i) имеют вид (11.19).

2.D. $a = d = 0$. Тогда $bc = 1$, а значит, либо $b = c = 1$, либо $b = c = -1$. Из уравнения (11.16) находим $b_{11} = b_{22}$. Тогда из уравнения (11.21) получаем, что $b_{22}^2 = b_{12}^2$. Из системы неравенств (11.4) следует, что в случае $b = c = 1$ все решения уравнения (i) имеют вид

$$A = B = \sigma \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

где $\sigma \geq 0$, а в случае $b = c = -1$ все решения уравнения (i) имеют вид

$$A = B = \sigma \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

где $\sigma \geq 0$.

Очевидно, что в случаях **2.C** и **2.D** $\det A = 0$ и $\operatorname{Ker} A \cap \mathbb{Z}^2 \neq \{0\}$.

Чтобы завершить доказательство леммы, остается заметить, что $\lambda_1\lambda_2 = \det\varepsilon$ и $\lambda_1 + \lambda_2 = a + d$. $\square$

11.3. Лемма. *Пусть* $\varepsilon = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \operatorname{Aut}(\mathbb{Z}^2)$, λ_1 *и* λ_2 *— собственные значения матрицы* ε. *Ядро* $\operatorname{Ker}(\varepsilon - I) \neq \{0\}$ *тогда и только тогда, когда либо* $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, *либо* $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$. *При этом либо* $\varepsilon = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 2-a \end{pmatrix}$, $\det\varepsilon = 1$, *либо* $\varepsilon = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$, $\det\varepsilon = -1$ *соответственно.*

Доказательство. Очевидно. $\square$

11.4. Лемма. *Пусть симметричные неотрицательно определенные матрицы* $A = (a_{ij})_{i,j=1}^2$ *и* $B = (b_{ij})_{i,j=1}^2$ *удовлетворяют уравнению* 11.2(i) *и* $\det A = 0$. *Тогда* $B = kA$, *где* $k > 0$.

Доказательство. Из уравнения 11.2(i) следует, что неравенства $a_{11}a_{22} \neq 0$ и $b_{11}b_{22} \neq 0$ равносильны. Пусть $a_{11}a_{22} \neq 0$. Тогда матрицы A и B можно записать в виде $A = x^2 \begin{pmatrix} t^2 & t \\ t & 1 \end{pmatrix}$ и $B = y^2 \begin{pmatrix} s^2 & s \\ s & 1 \end{pmatrix}$, где $xy \neq 0$. Пусть $\varepsilon = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \operatorname{Aut}(\mathbb{Z}^2)$. Подставляя в уравнение 11.2(i) выражения для A, B и ε, получим, что

$$x^2 \begin{pmatrix} t^2 & t \\ t & 1 \end{pmatrix} + y^2 \begin{pmatrix} as^2 + cs & bs^2 + ds \\ as + c & bs + d \end{pmatrix} = 0.$$

Отсюда, в частности, вытекает, что должны быть выполнены равенства

$$x^2 = -y^2(bs + d), \quad x^2 t = -y^2 s(bs + d).$$

Следовательно, $t = s$, а значит, $B = kA$, где $k > 0$. В случае, когда $a_{11}a_{22} = 0$, утверждение леммы очевидно. $\Box$

Докажем теперь основную теорему этого параграфа.

11.5. Теорема. *Пусть $X = \mathbb{T}^2$, $\delta \in \mathrm{Aut}(X)$ и λ_1, λ_2 — собственные значения матрицы $\delta = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(I) Пусть $\delta \neq -I$ и либо $\lambda_1\lambda_2 = -1$, либо $\lambda_1\lambda_2 = 1$ и $\lambda_1 + \lambda_2 \geq -2$. Пусть ξ_1 и ξ_2 – независимые случайные величины со значениями в группе X, имеющие распределения μ_1 и μ_2 с необращающимися в нуль характеристическими функциями. Предположим, что линейные формы $L_1 = \xi_1 + \xi_2$ и $L_2 = \xi_1 + \delta\xi_2$ независимы. Тогда:

(Ia) если $\lambda_1\lambda_2 = 1$ и $\lambda_1 + \lambda_2 > -2$, то μ_j – вырожденные распределения;

(Ib) если $\lambda_1\lambda_2 = -1$ и $\lambda_1 + \lambda_2 \neq 0$, то μ_j — гауссовские распределения, сосредоточенные на классах смежности одной и той же плотной в X однопараметрической подгруппы;

(Ic) если либо $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ и $\delta \neq -I$, либо $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, то $\mu_j = E_{x_j} * \gamma * \pi_j$, где $x_j \in X$, $\gamma \in \Gamma(K)$, K – подгруппа в X, топологически изоморфная $\mathbb{T}$, π_j – заряды на F, F – подгруппа в K, порожденная элементом порядка 2, и $\pi_1 * \pi_2 = E_{(1,1)}$.

(II) Пусть либо $\delta = -I$, либо $\lambda_1\lambda_2 = 1$ и $\lambda_1 + \lambda_2 < -2$. Тогда существуют независимые случайные величины ξ_1 и ξ_2 со значениями в группе X и с распределениями μ_1, $\mu_2 \notin \Gamma(X)$ такими, что линейные формы $L_1 = \xi_1 + \xi_2$ и $L_2 = \xi_1 + \delta\xi_2$ независимы. При этом распределения μ_j имеют не обращающиеся в нуль характеристические функции и не обращающиеся в нуль плотности относительно распределения Хаара m_X.

Доказательство Обозначим $\varepsilon = \widetilde{\delta}$, $L = Ker(I - \varepsilon)$. По лемме 10.1 независимость линейных форм L_1 и L_2 равносильна тому, что характеристические функции $\widehat{\mu}_j(y)$ удовлетворяют уравнению 10.1(i), которое принимает вид (10.23). Докажем сначала утверждения (Ia), (Ib) и (Ic). Возможны два случая: $L \neq \{0\}$ и $L = \{0\}$.

1. $L \neq \{0\}$. Пусть $\delta \neq I$. Проверим вначале, что если $L \neq \{0\}$, то существует такая подгруппа K в X, топологически изоморфная $\mathbb{T}$, что после подходящих сдвигов носители распределений μ_j лежат в K, а ограничение автоморфизма δ на K является автоморфизмом подгруппы K.

Поскольку L — подгруппа в Y, инвариантная относительно автоморфизма ε, то можно рассмотреть ограничение уравнения (10.23) на L. Мы получим

$$\widehat{\mu}_1(u + v)\widehat{\mu}_2(u + v) = \widehat{\mu}_1(u)\widehat{\mu}_1(v)\widehat{\mu}_2(u)\widehat{\mu}_2(v), \quad u, v \in L. \tag{11.28}$$

Обозначим $h(y) = \widehat{\mu}_1(y)\widehat{\mu}_2(y)$. Из (11.28) следует, что функция $h(y)$ на подгруппе L удовлетворяет уравнению $h(u + v) = h(u)h(v)$, т.е. $h(y)$ является характером подгруппы L. Из 2.7(e) вытекает, что сужения функций $\widehat{\mu}_1(y)$ и $\widehat{\mu}_2(y)$ на L также являются характерами подгруппы L. Из теоремы 1.9.2 следует, что существуют элементы $x_j \in X$ такие, что $\widehat{\mu}_j(y) = (x_j, y)$, $y \in L$, $j = 1, 2$. Заменяя, если это необходимо, распределения μ_j их сдвигами, мы можем считать с самого начала, что $\widehat{\mu}_1(y) = \widehat{\mu}_2(y) = 1$, $y \in L$. Тогда по предложению 2.13 имеет место включение $\sigma(\mu_j) \subset A(X, L)$, $j = 1, 2$. Положим $K = A(X, L)$. Поскольку, очевидно, $\varepsilon L = L$, то автоморфизм ε индуцирует некоторый автоморфизм $\widehat{\varepsilon}$ на фактор-группе Y/L по формуле $\widehat{\varepsilon}[y] = [\varepsilon y]$, $y \in [y]$. По теоремам 1.9.1 и 1.9.2 $K \cong (Y/L)^*$. Из сказанного следует, что ограничение автоморфизма δ

на подгруппу K является автоморфизмом подгруппы K и совпадает с автоморфизмом, сопряженным к $\widehat{\varepsilon}$. Осталось доказать, что $K \cong \mathbb{T}$.

Так как $\varepsilon \neq I$, то $L \cong \mathbb{Z}$. Пусть $y_0 = (p_0, q_0)$ — образующая группы L, т.е. $L = \{ky_0 : k \in \mathbb{Z}\}$. Очевидно, что p_0 и q_0 взаимно просты. Тогда существуют целые числа m_0 и n_0 такие, что

$$p_0 n_0 - q_0 m_0 = 1. \tag{11.29}$$

Пусть $L' = \{kz_0 : k \in \mathbb{Z}\}$, где $z_0 = (m_0, n_0)$. Учитывая равенство (11.29), легко проверить, что $Y = L \times L'$. Поскольку $L' \cong \mathbb{Z}$, то $K \cong (Y/L)^* \cong (L')^* \cong \mathbb{T}$. Тем самым, задача редуцируется к случаю, когда независимые случайные величины принимают значения в группе $\mathbb{T}$.

Пусть выполнены условия: $\lambda_1\lambda_2 = 1$ и $\lambda_1 + \lambda_2 > -2$. Из леммы 11.3 и условия $L \neq \{0\}$ вытекает, что $\varepsilon = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 2-a \end{pmatrix}$, $\det\varepsilon = 1$. Покажем, что $\widehat{\varepsilon} = I$. Для этого достаточно проверить, что $\widehat{\varepsilon}[z_0] = [z_0]$, т.е. что $\varepsilon z_0 - z_0 \in L$. Другими словами, что $\varepsilon(\varepsilon z_0 - z_0) = \varepsilon z_0 - z_0$. Но это непосредственно вытекает из равенства $\det\varepsilon = 2a - a^2 - bc = 1$. Следовательно, ограничение автоморфизма δ на подгруппу K — тождественный автоморфизм, и мы имеем независимые случайные величины ξ_1 и ξ_2 с распределениями μ_1 и μ_2, принимающие значения в подгруппе K, и линейные формы $L_1 = \xi_1 + \xi_2$ и $L_2 = \xi_1 + \xi_2$ независимы. Очевидно, что в этом случае μ_j — вырожденные распределения.

Пусть $\delta = I$. Тогда уравнение (10.23) переходит в уравнение (11.28), которое выполнено на всей группе Y. Очевидно, что тогда μ_j — вырожденные распределения. Утверждение (Ia) в случае **1** доказано.

Пусть выполнены условия: $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ и $\varepsilon \neq -I$, либо $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$. Из леммы 11.3 и условия $L \neq \{0\}$ вытекает, что $\varepsilon = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$, $\det\varepsilon = -1$. Проверим, что $\widehat{\varepsilon} = -I$. Для этого достаточно проверить, что $\widehat{\varepsilon}[z_0] = -[z_0]$, т.е. что $\varepsilon z_0 + z_0 \in L$. Другими словами, что $\varepsilon(\varepsilon z_0 + z_0) = \varepsilon z_0 + z_0$. Но это непосредственно вытекает из равенства $\det\varepsilon = -a^2 - bc = -1$. Следовательно, ограничение автоморфизма δ на подгруппу K совпадает с автоморфизмом $-I$. Из следствия 8.6 вытекает, что $\mu_j = E_{x_j} * \gamma * \pi_j$, где $x_j \in X$, $\gamma \in \Gamma(K)$, π_j – заряды на F, где F – подгруппа в K, порожденная элементом порядка 2 и $\pi_1 * \pi_2 = E_{(1,1)}$. Утверждение (Ic) в случае **1** доказано.

2. $L = \{0\}$. Обозначим $H = (I - \varepsilon)Y$. Тогда $H \cong \mathbb{Z}^2$. Положим $\nu_j = \mu_j * \bar{\mu}_j$. Из 2.7$(c)$ и 2.7(d) следует, что $\widehat{\nu}_j(y) = |\widehat{\mu}_j(y)|^2 > 0$, $y \in Y$. Очевидно, что характеристические функции $\widehat{\nu}_j(y)$ также удовлетворяют уравнению (10.23). Докажем вначале следующее утверждение.

(α). *Если $L = \{0\}$, то на подгруппе H характеристические функции $\widehat{\nu}_j(y)$ представимы в виде*

$$\widehat{\nu}_1(y) = \exp\{-\langle Ay, y\rangle\}, \quad \widehat{\nu}_2(y) = \exp\{-\langle By, y\rangle\}, \quad y \in H,$$

где A и B – симметричные неотрицательно определенные матрицы удовлетворяющие уравнению 11.2(i).

Для доказательства положим $\varphi_j(y) = -\log\widehat{\nu}_j(y)$. Тогда из уравнения (10.23) следует, что функции $\varphi_j(y)$ удовлетворяют уравнению 10.10(i). По лемме 10.10 каждая из функций $\varphi_j(y)$ удовлетворяет уравнению 10.10(ii). Полагая в 10.10(ii) $(I-\varepsilon)k = h$, где h – произвольный элемент подгруппы H, получаем, что на H функция $\varphi_j(y)$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta_h^3 \varphi_j(u) = 0, \quad u, h \in H,$$

а значит, $\varphi_j(y) = \varphi_j(m,n)$ — многочлен на H степени ≤ 2. Заметим, что $H \cong \mathbb{Z}^2$ и $\varphi_j(y) \ge 0$, $\varphi_j(-y) = \varphi_j(y)$ для любого $y \in Y$, $\varphi_j(0) = 0$. Отсюда, учитывая замечание 5.12, получаем представления

$$\varphi_1(m,n) = a_{11}m^2 + 2a_{12}mn + a_{22}n^2 = \langle Ay, y\rangle, \quad y = (m,n) \in H,$$

$$\varphi_2(m,n) = b_{11}m^2 + 2b_{12}mn + b_{22}n^2 = \langle By, y\rangle, \quad y = (m,n) \in H,$$

где $A = (a_{ij})_{i,j=1}^2$, $B = (b_{ij})_{i,j=1}^2$ — симметричные неотрицательно определенные матрицы. Рассматривая уравнение 10.10(i) на H и подставляя выражения для $\varphi_j(y)$ в 10.10(i), получаем, что

$$\langle u, (A + B\varepsilon)v\rangle = 0, \quad u, v \in H. \tag{11.30}$$

Так как $H \cong \mathbb{Z}^2$, то из (11.30) вытекает, что матрицы A и B удовлетворяют уравнению 10.3(i). Утверждение (α) доказано.

Пусть выполнены условия: $\lambda_1\lambda_2 = 1$ и $\lambda_1 + \lambda_2 > -2$. Применим (α). Поскольку матрицы A и B удовлетворяют уравнению 11.2(i), то по лемме 11.2 $A = B = 0$ и, следовательно, $\widehat{\nu}_j(y) = 1$ при $y \in H$. Тогда по предложению 2.13 имеет место включение $\sigma(\nu_j) \subset A(X,H)$. Обозначим $K = A(X,H)$. Поскольку, очевидно, $\varepsilon H = H$, то автоморфизм ε индуцирует некоторый автоморфизм $\widehat{\varepsilon}$ на фактор-группе Y/H по формуле $\widehat{\varepsilon}[y] = [\varepsilon y]$, $y \in [y]$. По теоремам 1.9.1 и 1.9.2 $K \cong (Y/H)^*$. Из сказанного следует, что ограничение автоморфизма δ на подгруппу K является автоморфизмом подгруппы K и совпадает с автоморфизмом, сопряженным к $\widehat{\varepsilon}$. Так как $H \cong Y$, то Y/H — конечная группа. Поэтому K – конечная группа. Следовательно, группа K не содержит подгруппы, топологически изоморфной $\mathbb{T}$. Пусть ξ_1' и ξ_2' – независимые случайные величины со значениями в группе K и с распределениями ν_j. Применяя теорему 10.3 к группе K, получаем, что $\nu_j \in \Gamma(K)$. В силу предложения 3.6 $\Gamma(K) = D(K)$. Значит, ν_j – вырожденные распределения. Следовательно, и μ_j – вырожденные распределения. Утверждение (Ia) доказано в случае **2**, а следовательно, полностью доказано.

Для доказательства (Ib) и (Ic) нам понадобится следующее утверждение.

(β). *Положим* $\gamma = \nu_1 * \nu_2$. *Тогда* $\gamma \in \Gamma(X)$.

Действительно, как установлено при доказательстве теоремы 10.3, из уравнения 10.12(i) вытекает, что функция $P(y) = \varphi_1(y) + \varphi_2(y)$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta_h^3 P(u) = 0, \quad u, h \in Y.$$

Следовательно, $P(y) = P(m,n)$ — многочлен на Y степени ≤ 2. Так как $P(y) \ge 0$, $P(-y) = P(y)$, $y \in Y$, и $P(0) = 0$, то силу замечания 5.12 имеет место представление

$$P(m,n) = c_{11}m^2 + 2c_{12}mn + c_{22}n^2 = \langle Cy, y\rangle, \quad y = (m,n) \in Y,$$

где $C = (C_{ij})_{i,j=1}^2$ — симметричная неотрицательно определенная матрица. Следовательно утверждение (β) вытекает из 2.7(b) и 2.7(c).

Пусть выполнены условия: $\lambda_1\lambda_2 = -1$ и $\lambda_1 + \lambda_2 \ne 0$. Применим (α). Так как матрицы A и B удовлетворяют уравнению 11.2(i), то по лемме 11.2 у уравнения 11.2(i) существуют ненулевые решения, и все ненулевые решения уравнения 11.2(i) обладают тем свойством, что $\det A = \det B = 0$ и $\mathrm{Ker}\ A \cap \mathbb{Z}^2 = \{0\}$. Очевидно, что тогда $a_{11}a_{22} \ne 0$. Мы имеем $\langle Ay, y\rangle = (\sqrt{a_{11}}m \pm \sqrt{a_{22}}n)^2$, $y =$

(m,n). Пусть для определенности $\langle Ay,y\rangle = (\sqrt{a_{11}}m+\sqrt{a_{22}}n)^2$. Из (α), (β) и леммы 11.4 следует, что $\langle Cy,y\rangle = q(\sqrt{a_{11}/a_{22}}m+n)^2$, $q>0$, при $y\in H$, а так как $H\cong\mathbb{Z}^2$, то и при $y\in Y$. Из $\mathrm{Ker}\ A\cap\mathbb{Z}^2=\{0\}$ вытекает, что $\sqrt{a_{11}/a_{22}}$ – иррациональное число. Пусть $\gamma=\nu_1*\nu_2$. Тогда $\widehat{\gamma}(m,n)=\exp\{-q(\sqrt{a_{11}/a_{22}}m+n)^2\}$.

Рассмотрим гауссовское распределение ϱ на группе $\mathbb{R}$ с характеристической функцией $\widehat{\varrho}(s)=\exp\{-qs^2\}$. Пусть $\tau: Y\mapsto\mathbb{R}$ — гомоморфизм, определяемый формулой $\tau(m,n)=\sqrt{a_{11}/a_{22}}m+n$. Обозначим через $p=\widetilde{\tau}:\mathbb{R}\mapsto X$ – сопряженный гомоморфизм. Из предложения 2.10 и 2.7(b) следует, что $\gamma=p(\varrho)$. Так как $\sqrt{a_{11}/a_{22}}$ — иррациональное число, то τ, очевидно, мономорфизм. В силу 1.13(a) и 1.13(b) образ $p(\mathbb{R})$ плотен в X. Таким образом, распределение γ сосредоточено на плотной однопараметрической подгруппе $V=p(\mathbb{R})\subset X$. Поскольку $\gamma=\mu_1*\bar{\mu}_1*\mu_2*\bar{\mu}_2$, то по предложению 2.2 распределения μ_j можно так заменить их сдвигами μ_j', что

$$\gamma=\mu_1'*\bar{\mu}_1'*\mu_2'*\bar{\mu}_2',$$

а распределения μ_j' сосредоточены на подгруппе V. Так как образ $\tau(Y)$, очевидно, плотен в $\mathbb{R}$, то в силу 1.13 (b) p — мономорфизм. По следствию 2.5 отсюда следует, что $\varrho=\varrho_1*\overline{\varrho}_1*\varrho_2*\overline{\varrho}_2$, где $\varrho_j=p^{-1}(\mu_j')$. Из теоремы Крамера вытекает, что $\varrho_j\in\Gamma(\mathbb{R})$, но тогда $\mu_j'=p(\varrho_j)\in\Gamma(X)$, а значит, $\mu_j\in\Gamma(X)$. Утверждение (Ib) доказано.

Предположим теперь, что выполнены условия: либо $\lambda_1=\lambda_2=-1$ и $\delta\neq -I$, либо $\lambda_1=1$, $\lambda_2=-1$. Применим (α). Поскольку матрицы A и B удовлетворяют уравнению 11.2(i), то по лемме 11.2 у уравнения 11.2(i) существуют ненулевые решения, и все ненулевые решения уравнения 11.2(i) обладают тем свойством, что $A=B$, $\det A=0$ и $M=\mathrm{Ker}A\cap\mathbb{Z}^2\neq\{0\}$. Так как $A=B$, то из (α) и (β) вытекает, что

$$\widehat{\gamma}(y)=\exp\{-2\langle Ay,y\rangle\},\quad y\in H. \tag{11.31}$$

Поскольку $H\cong Y$, то представление (11.31) справедливо и при $y\in Y$. Поэтому $\widehat{\gamma}(y)=1$ при $y\in M$, а значит по предложению 2.13 имеет место включение $\sigma(\gamma)\subset A(X,M)$. Обозначим $K=A(X,M)$. По предложению 2.2 распределения μ_j можно заменить их сдвигами μ_j' так, чтобы $\sigma(\mu_j')\subset K$. Легко видеть, что $M\cong\mathbb{Z}$ и существует такая подгруппа $M'\subset Y$, что $Y=M\times M'$. Очевидно,что $K\cong\mathbb{T}$. Так как $A=B$, то $A+A\varepsilon=0$. Следовательно, $\varepsilon(M)\subset M$ и $\varepsilon^{-1}(M)\subset M$, а значит, $\varepsilon(M)=M$. Поэтому ограничение автоморфизма ε на подгруппу M является автоморфизмом подгруппы M и автоморфизм ε индуцирует некоторый автоморфизм $\widehat{\varepsilon}$ на фактор-группе Y/M по формуле $\widehat{\varepsilon}[y]=[\varepsilon y], y\in[y]$. Из $A(I+\varepsilon)=0$ следует, что $y+\varepsilon y\in M$ для любого $y\in Y$. Отсюда $[y+\varepsilon y]=0$ для любого $y\in Y$, а, следовательно, $\widehat{\varepsilon}[y]=-[y]$. Поскольку $\widehat{\varepsilon}$ является автоморфизмом, сопряженным к сужению автоморфизма δ на K, то ограничение автоморфизма δ на K совпадает с $-I$. Из следствия 8.6 вытекает, что $\mu_j=E_{x_j}*\gamma*\pi_j$, где $x_j\in X$, $\gamma\in\Gamma(K)$, π_j – заряды на F, где F – подгруппа в K, порожденная элементом порядка 2 и $\pi_1*\pi_2=E_{(1,1)}$. Утверждение (Ic) доказано в случае **2**, а следовательно, полностью доказано.

Докажем теперь утверждение (II). Обозначим $H=(I-\varepsilon)Y$. Пусть выполнены условия: либо $\delta=-I$, либо $\lambda_1\lambda_2=1$ и $\lambda_1+\lambda_2<-2$. Тогда, как следует из леммы 11.2, существует такое решение уравнения 11.2(i), что $\det A=\det B>0$. Отметим, что при этом $I-\varepsilon\notin\mathrm{Aut}(Y)$. Пусть ν_j – гауссовские распределения на X с характеристическими функциями $\widehat{\nu}_j(y)=\exp\{-\varphi_j(y)\}$, где $\varphi_1(y) = \langle Ay, y\rangle$, $\varphi_2(y) = \langle By, y\rangle$. Очевидно, что характеристические функции $\widehat{\nu}_j(y)$ удовлетворяют уравнению (10.23). Положим $G = A(X, H)$. Так как $I - \varepsilon \notin \mathrm{Aut}(Y)$, то $H \neq Y$, и, следовательно, $G \neq \{0\}$. Возьмем $0 < r < 1$ и рассмотрим распределение $\pi_1 = rE_{(1,1)} + (1-r)m_G$ и заряд $\pi_2 = (1/r)E_{(1,1)} + (1-1/r)m_G$. В силу теоремы 1.9.1 $H = A(Y, G)$. Из 2.14(i) следует, что

$$\widehat{m}_G(y) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad y \in H, \\ 0, & \text{если} \quad y \notin H. \end{cases}$$

Поэтому характеристические функции $\widehat{\pi}_j(y)$ имеют вид

$$\widehat{\pi}_1(y) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad y \in H, \\ r, & \text{если} \quad y \notin H, \end{cases} \qquad \widehat{\pi}_2(y) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad y \in H, \\ 1/r, & \text{если} \quad y \notin H. \end{cases}$$

Проверим, что функции $\widehat{\pi}_j(y)$ удовлетворяют уравнению (10.23). Так как $\varepsilon(H) = H$, то $\widehat{\pi}_1(u)\widehat{\pi}_1(v)\widehat{\pi}_2(u)\widehat{\pi}_2(\varepsilon v) = 1$ при любых $u, v \in Y$, и следовательно, правая часть уравнения (10.23) равна 1. Предположим, что существуют $u, v \in Y$ такие, что $\widehat{\pi}_1(u+v)\widehat{\pi}_2(u+\varepsilon v) \neq 1$. Тогда либо $u + v \in H, u + \varepsilon v \notin H$, либо $u + v \notin H, u + \varepsilon v \in H$. В каждом из этих случаев получаем, что $(I - \varepsilon)v \notin H$, что невозможно. Таким образом, левая часть уравнения (10.23) также равна 1. Следовательно, функции $\widehat{\pi}_j(y)$ удовлетворяют уравнению (10.23).

Пусть k – натуральное число. Рассмотрим функции $g_j(y) = (\widehat{\nu}_j(y))^k \widehat{\pi}_j(y)$. Функции $g_j(y)$ также удовлетворяют уравнению (10.23). Выберем k столь большим, чтобы

$$\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2,\ (m,n)\neq(0,0)} g_j(m,n) < 1.$$

Так как $\det A = \det B > 0$, то это всегда можно сделать. Отсюда следует, что выполнено неравенство

$$\rho_j(z,w) = 1 + \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2,\ (m,n)\neq(0,0)} g_j(m,n)\overline{z^m w^n} > 0, \quad (z,w) \in X.$$

Очевидно также, что

$$\int\limits_X \rho_j(z,w) dm_X(z,w) = 1.$$

Пусть μ_j – распределение на X с плотностью $\rho_j(z,w)$ относительно распределения Хаара m_X. Очевидно, что $\widehat{\mu}_j(y) = g_j(y)$ и $\mu_j \notin \Gamma(X)$. Пусть ξ_1 и ξ_2 – независимые случайные величины со значениями в группе X, имеющие распределения μ_j. Поскольку характеристические функции $\widehat{\mu}_j(y)$ удовлетворяют уравнению (10.23), то по лемме 10.1 линейные формы $L_1 = \xi_1 + \xi_2$ и $L_2 = \xi_1 + \delta\xi_2$ независимы. Утверждение (II) доказано. Теорема полностью доказана. □

11.6. Замечание. Пусть $X = \mathbb{T}^2$, $\delta \in \mathrm{Aut}(X)$ и λ_1, λ_2 — собственные значения матрицы $\delta = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Пусть выполнены условия: $\lambda_1\lambda_2 = -1$ и $\lambda_1 + \lambda_2 \neq 0$. Пусть A и B – ненулевое решение уравнения 11.2(i), существующее по лемме 11.2. Рассмотрим гауссовские распределения μ_1 и μ_2 на группе X с характеристическими функциями

$$\widehat{\mu}_1(y) = \exp\{-\langle Ay, y\rangle\}, \quad \widehat{\mu}_2(y) = \exp\{-\langle By, y\rangle\}, \quad y \in Y.$$

Тогда, очевидно, характеристические функции $\widehat{\mu}_j(y)$ удовлетворяют уравнению (10.23). По лемме 10.1 отсюда следует, что при выполнении предположений утверждения (Ib) существуют невырожденные гауссовские распределения μ_1 и μ_2, сосредоточенные на классах смежности одной и той же плотной в X однопараметрической подгруппы, обладающие следующим свойством: если ξ_1 и ξ_2 – независимые случайные величины со значениями в группе X и с распределениями μ_1 и μ_2, то линейные формы $L_1 = \xi_1 + \xi_2$ и $L_2 = \xi_1 + \delta\xi_2$ независимы.

Пусть выполнены условия: $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ и $\delta \neq -I$, либо $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1$. Пусть $A = B$ – ненулевое решение уравнения 11.2(i), существующее по лемме 11.2. Положим $K = A(X, M)$, где $M = \text{Ker } A \cap \mathbb{Z}^2 \neq \{0\}$. Тогда $K \cong \mathbb{T}$ и ограничение автоморфизма δ на подгруппу K совпадает с автоморфизмом $-I$. Пусть γ – гауссовское распределение на группе X с характеристической функцией вида

$$\widehat{\gamma}(y) = \exp\{-\langle Ay, y\rangle\}, \quad y \in Y.$$

Тогда характеристические функции $\widehat{\gamma}_j(y) = \widehat{\gamma}(y),\ j = 1, 2$, удовлетворяют уравнению (10.23). Пусть F – подгруппа в K, порожденная элементом порядка 2. Пусть $0 < a < 1$. Рассмотрим распределение $\pi_1 = aE_{(1,1)} + (1-a)m_F$ и заряд $\pi_2 = (1/a)E_{(1,1)} + (1 - 1/a)m_F$. Очевидно, что $\pi_1 * \pi_2 = E_{(1,1)}$. Легко видеть, что характеристические функции $\widehat{\pi}_j(y)$ удовлетворяют уравнению (10.23). Положим $\mu_j = \gamma * \pi_j,\ j = 1, 2$. Ясно, что при заданной матрице A можно выбрать число a таким образом, чтобы μ_j были распределениями. Характеристические функции распределений μ_j также удовлетворяют уравнению (10.23). Учитывая лемму 10.1, отсюда следует, что при выполнении предположений утверждения (Ic) существуют распределения μ_j вида $\mu_j = \gamma * \pi_j$, обладающие следующим свойством: если ξ_1 и ξ_2 – независимые случайные величины со значениями в группе X и с распределениями μ_j, то линейные формы $L_1 = \xi_1 + \xi_2$ и $L_2 = \xi_1 + \delta\xi_2$ независимы.

Таким образом, утверждения (Ib) и (Ic) в теореме 11.6 не могут быть усилены за счет сужения в этих случаях класса распределений, характеризующихся независимостью линейных форм $L_1 = \xi_1 + \xi_2$ и $L_2 = \xi_1 + \delta\xi_2$.

11.7. Замечание. Как установлено при доказательстве утверждения (Ib) теоремы 11.5, распределения μ_1 и μ_2 сосредоточены на классах смежности одной и той же плотной в $X = \mathbb{T}^2$ однопараметрической подгруппы V вида $V = p(\mathbb{R})$. Используя полученные при доказательстве леммы 11.2 представления для матрицы A (см. **2A, 2B** в доказательстве леммы 11.2), нетрудно проверить, что $\delta(V) = V$. Мы ограничимся проведением соответствующего рассуждения для случая **2A(i)**. Обозначим $t_0 = (bt_1 - c)/(a - d)$, где t_1 определено по формуле (11.25). Тогда матрица A имеет вид

$$A = \sigma \begin{pmatrix} t_1 & t_0 \\ t_0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma > 0.$$

Поскольку $\det A = 0$, то $t_0^2 = t_1$. Мы напомним, что $p = \widetilde{\tau}$, где $\tau : Y \mapsto \mathbb{R}$ определяется по формуле $\tau(m, n) = t_0 m + n$. Найдем p. Пусть $ps = (z, w)$, и следовательно, $(ps, (m, n)) = z^m w^n,\ s \in \mathbb{R},\ (m, n) \in Y$. С другой стороны, $(ps, (m, n)) = (s, \tau(m, n)) = (s, t_0 m + n) = e^{is(t_0 m + n)} = e^{ist_0 m} e^{isn}$. Таким образом, $z^m w^n = e^{ist_0 m} e^{isn}$ для любых $(m, n) \in Y$. Следовательно, $ps = (e^{ist_0}, e^{is})$. Отсюда вытекает, что $\delta(ps) = (e^{is(t_0 a + c)}, e^{is(t_0 b + d)})$. Проверим, что $(t_0 a + c)/(t_0 b + d) = t_0$. Тем самым будет доказано, что $\delta(p(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$. Имеем,

$$t_0(t_0 b + d) = t_0^2 b + t_0 d = bt_1 + d\frac{bt_1 - c}{a - d} = \frac{abt_1 - dc + ac - ac}{a - d} = t_0 a + c.$$

Мы проверили, что $\delta(p(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$. Следовательно, $\delta(p(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Кроме того, легко видеть, что $p^{-1}\delta p(s) = (t_0 b + d)s$.

Таким образом, вывод о том, что при выполнении предположений утверждения (Ib) распределения μ_1 и μ_2 гауссовские, может быть сделан прямо из теоремы Скитовича–Дармуа для вещественной прямой.

§12. Теорема Скитовича–Дармуа на группах $\mathbb{R} \times \mathbb{T}$ и $\Sigma_{\mathbf{a}} \times \mathbb{T}$

Пусть либо $X = \mathbb{R} \times \mathbb{T}$, либо $X = \Sigma_{\mathbf{a}} \times \mathbb{T}$. Предположим, что ξ_1 и ξ_2 – независимые случайные величины со значениями в группе X, имеющие распределения μ_1 и μ_2 с необращающимися в нуль характеристическими функциями. Пусть α_j, β_j – топологические автоморфизмы группы X. В этом параграфе мы опишем возможные распределения μ_j в предположении, что линейные формы $L_1 = \alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2$ и $L_2 = \beta_1\xi_1 + \beta_2\xi_2$ независимы.

12.1. Обозначения. Пусть $X = \mathbb{R} \times \mathbb{T}$. Элементы группы X будем обозначать через $x = (t, z)$, $t \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{T}$. Нам удобно считать, что группа вращений окружности $\mathbb{T}$ и мультипликативная группа корней степени 2 из единицы $\mathbb{Z}(2)$ естественным образом вложены в группу X. Мы имеем $Y \cong \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$. Элементы группы Y будем обозначать через $y = (s, n)$, $s \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$. Легко проверить, что каждый автоморфизм $\varepsilon \in \mathrm{Aut}(\mathbb{R} \times \mathbb{Z})$ определяется матрицей $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$, где $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$, и ε действует на $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$ следующим образом

$$\varepsilon(s, n) = (as + bn, \pm n), \quad (s, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z}.$$

Тогда сопряженный автоморфизм $\delta = \widetilde{\varepsilon} \in \mathrm{Aut}(\mathbb{R} \times \mathbb{T})$ имеет вид

$$\delta(t, z) = (at, e^{ibt} z^{\pm 1}), \quad (t, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{T}.$$

Мы будем отождествлять автоморфизмы δ и ε с матрицей $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$.

Пусть ξ_1 и ξ_2 — независимые случайные величины со значениями в группе X и с распределениями μ_1 и μ_2, а α_j, β_j – топологические автоморфизмы группы X. Легко видеть, что изучение возможных распределений μ_j при условии, что линейные формы $L_1 = \alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2$ и $L_2 = \beta_1\xi_1 + \beta_2\xi_2$ независимы, сводится к случаю, когда $L_1 = \xi_1 + \xi_2$ и $L_2 = \xi_1 + \delta\xi_2$, где $\delta \in \mathrm{Aut}(X)$.

Для дальнейшего нам понадобится ряд лемм.

12.2. Лемма. *Пусть* $\varepsilon = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, *где* $a \neq 0$ *Пусть* $A = (a_{ij})_{i,j=1}^2$ *и* $B = (b_{ij})_{i,j=1}^2$ *— симметричные неотрицательно определенные матрицы. Если либо* $a > 0$, *либо* $a = -1$ *и* $b \neq 0$, *то ненулевые решения уравнения*

$$(i) \qquad A + B\varepsilon = 0,$$

имеют вид

$$(ii) \qquad A = B = \sigma \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \sigma > 0.$$

Если $a < 0, a \neq -1$, то ненулевые решения уравнения (i) имеют вид

$$(iii) \qquad B = \sigma \begin{pmatrix} 1 & b/(a+1) \\ b/(a+1) & t \end{pmatrix}, \quad A = -B\varepsilon, \ \sigma > 0, \ t \geq b^2/(a+1)^2.$$

Доказательство. Заметим, что уравнение (i) имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда ненулевое решение имеет система уравнений и неравенств относительно b_{ij}

$$\begin{cases} b_{11} \geq 0, \quad b_{22} \geq 0, & (12.1) \\ b_{11}b_{22} - b_{12}^2 \geq 0, & (12.2) \\ b_{11}b - b_{12} = b_{12}a, & (12.3) \\ b_{11}a \leq 0, & (12.4) \\ b_{12}b - b_{22} \leq 0, & (12.5) \\ b_{11}a(b_{12}b - b_{22}) - (b_{12}a)^2 \geq 0. & (12.6) \end{cases}$$

Пусть $a > 0$. Из неравенств (12.1) и (12.4) следует, что $b_{11} = 0$. Тогда из неравенства (12.2) получаем, что $b_{12} = 0$. Очевидно, что в этом случае ненулевые решения уравнения (i) имеют вид (ii).

Пусть $a = -1$ и $b \neq 0$. Из уравнения (12.3) получаем, что $b_{11} = 0$. Как было отмечено выше, тогда ненулевые решения уравнения (i) имеют вид (ii).

Заметим, что если $a < 0$, то $\det \varepsilon > 0$ и из (i) следует, что неравенства (12.2) и (12.6) равносильны. Пусть $a < 0, a \neq -1$. Из уравнения (12.3) находим

$$b_{12} = b_{11}b/(a+1). \tag{12.7}$$

Подставляя выражение (12.7) для b_{12} в (12.2), получаем

$$b_{11}b_{22} - b_{11}^2 b^2/(a+1)^2 \geq 0. \tag{12.8}$$

Если $b_{11} = 0$, то как отмечено выше ненулевые решения уравнения (i) имеют вид (ii). Пусть $b_{11} = \sigma > 0$. Тогда неравенство (12.8) равносильно неравенству

$$b_{22} - b_{11}b^2/(a+1)^2 \geq 0. \tag{12.9}$$

Подставляя выражение (12.7) для b_{12} в (12.5), получаем

$$b_{22} - b_{11}b^2/(a+1) \geq 0. \tag{12.10}$$

Обозначим $t = b_{22}/b_{11}$. Тогда неравенства (12.9) и (12.10) принимают вид

$$t \geq b^2/(a+1)^2, \quad t \geq b^2/(a+1). \tag{12.11}$$

Очевидно, что при $a < 0, a \neq -1$ система неравенств (12.11) равносильна неравенству

$$t \geq b^2/(a+1)^2.$$

Отсюда следует, что ненулевые решения уравнения (i) имеют вид (iii). $\square$

Следующая алгебраическая лемма позволяет в некоторых случаях сводить решение функционального уравнения Скитовича–Дармуа к решению функционального уравнения Каца–Бернштейна.

12.3. Лемма. *Пусть Y – произвольная абелева группа, ε – автоморфизм группы Y. Пусть нормированные функции $f_j(y)$ не обращаются в нуль и удовлетворяют уравнению*

$$(i) \qquad f_1(u+v)f_2(u+\varepsilon v) = f_1(u)f_1(v)f_2(u)f_2(\varepsilon v), \quad u,\ v \in Y.$$

Тогда каждая из функций $f_j(y)$ удовлетворяет уравнению

$$(ii) \qquad f_j(u+v)f_j(u-v) = f_j^2(u)f_j(v)f_j(-v), \quad u \in (\varepsilon - I)Y,\ v \in Y.$$

Доказательство. Полагая в уравнении (i) $u = p-q, v = q$, где $p, q \in Y$, имеем

$$f_1(p)f_2(p+(\varepsilon-I)q) = f_1(p-q)f_1(q)f_2(p-q)f_2(\varepsilon q), \quad p,\ q \in Y. \tag{12.12}$$

Пусть $h \in Y$. Придадим p и q в уравнении (12.12) приращение h. Получаем

$$f_1(p+h)f_2(p+(\varepsilon-I)q+\varepsilon h) = f_1(p-q)f_1(q+h)f_2(p-q)f_2(\varepsilon q+\varepsilon h), \quad p,\ q,\ h \in Y. \tag{12.13}$$

Разделим уравнение (12.13) на уравнение (12.12). Находим

$$\frac{f_1(p+h)f_2(p+(\varepsilon-I)q+\varepsilon h)}{f_1(p)f_2(p+(\varepsilon-I)q)} = \frac{f_1(q+h)f_2(\varepsilon q+\varepsilon h)}{f_1(q)f_2(\varepsilon q)}, \quad p,\ q,\ h \in Y. \tag{12.14}$$

Пусть $k \in Y$. Придадим p и q в уравнении (12.14) соответственно приращения $(\varepsilon - I)k$ и $-k$. Имеем,

$$\frac{f_1(p+h+(\varepsilon-I)k)f_2(p+(\varepsilon-I)q+\varepsilon h)}{f_1(p+(\varepsilon-I)k)f_2(p+(\varepsilon-I)q)} = \frac{f_1(q+h-k)f_2(\varepsilon q+\varepsilon h-\varepsilon k)}{f_1(q-k)f_2(\varepsilon q-\varepsilon k)}, \quad p,\ q,\ h,\ k \in Y. \tag{12.15}$$

Разделим уравнение (12.15) на уравнение (12.14). Получаем,

$$\frac{f_1(p)f_1(p+h+(\varepsilon-I)k)}{f_1(p+h)f_1(p+(\varepsilon-I)k)} = \frac{f_1(q+h-k)f_1(q)f_2(\varepsilon q)f_2(\varepsilon q+\varepsilon h-\varepsilon k)}{f_1(q-k)f_1(q+h)f_2(\varepsilon q+\varepsilon h)f_2(\varepsilon q-\varepsilon k)}, \quad p,\ q,\ h,\ k \in Y. \tag{12.16}$$

Правая часть уравнения (12.16) не зависит от p. Следовательно, левая часть уравнения (12.16) принимает одно и то же значение при $p = -h$ и при $p = 0$. Имеем,

$$\frac{f_1(-h)f_1((\varepsilon-I)k)}{f_1(-h+(\varepsilon-I)k)} = \frac{f_1(h+(\varepsilon-I)k)}{f_1(h)f_1((\varepsilon-I)k)}, \quad h,\ k \in Y. \tag{12.17}$$

Отсюда следует, что

$$f_1((\varepsilon-I)k+h)f_1((\varepsilon-I)k-h) = f_1^2((\varepsilon-I)k)f_1(h)f_1(-h), \quad h,\ k \in Y. \tag{12.18}$$

Полагая в уравнении (12.18) $u = (\varepsilon - I)k,\ v = h$, получаем, что функция $f_1(y)$ удовлетворяет уравнению (ii).

Обозначим $w = \varepsilon v$. Тогда уравнение (i) переходит в уравнение

$$f_1(u+\varepsilon^{-1}w)f_2(u+w) = f_1(u)f_1(\varepsilon^{-1}w)f_2(u)f_2(w), \quad u \in (\varepsilon-I)Y,\ w \in Y.$$

Поскольку $(\varepsilon^{-1} - I)Y = (\varepsilon - I)Y$, приведенное выше рассуждение доказывает, что функция $f_2(y)$ также удовлетворяет уравнению (ii). $\square$

Следующая лемма относится к произвольным топологическим абелевым группам.

12.4. Лемма. *Пусть Y – топологическая абелева группа, $\psi(y)$ – непрерывная функция на группе Y, удовлетворяющая уравнению*

$$(i) \qquad \Delta_{2k}\Delta_h^2\psi(y) = 0, \quad y, k, h \in Y,$$

и условиям $\psi(-y) = \psi(y)$, $\psi(0) = 0$. Тогда функция $\psi(y)$ может быть представлена в виде

$$(ii) \qquad \psi(y) = \varphi(y) + r_\alpha, \quad y \in y_\alpha + \overline{Y^{(2)}},$$

где $\varphi(y)$ – непрерывная функция на Y удовлетворяющая уравнению 2.16(ii), и

$$Y = \bigcup_\alpha (y_\alpha + \overline{Y^{(2)}}), \quad y_0 = 0,$$

– разложение группы Y по подгруппе $\overline{Y^{(2)}}$.

Доказательство. Заметим, что любая функция $\varphi(y)$ на группе $Y^{(2)}$ удовлетворяющая уравнению 2.16(ii) может быть продолжена до функции $\widetilde{\varphi}(y)$ на группе Y по формуле

$$\widetilde{\varphi}(y) = \frac{1}{4}\varphi(2y), \quad y \in Y, \tag{12.19}$$

и функция $\widetilde{\varphi}(y)$ также удовлетворяет уравнению 2.16(ii). Аналогично, любая аддитивная функция $l(y)$, т.е. функция удовлетворяющая уравнению Коши

$$l(u+v) = l(u) + l(v) \tag{12.20}$$

на группе $Y^{(2)}$ может быть продолжена до аддитивной функции $\widetilde{l}(y)$ на группе Y по формуле

$$\widetilde{l}(y) = \frac{1}{2}l(2y), \quad y \in Y. \tag{12.21}$$

Заметим, что как следует из теоремы 5.5 и замечания 3.3, любой непрерывный многочлен $f(y)$ на группе Y степени ≤ 2 может быть представлен в виде

$$f(y) = \varphi(y) + l(y) + c,$$

где $\varphi(y)$ – непрерывная функция, удовлетворяющая уравнению 2.16(ii), $l(y)$ – непрерывная функция, удовлетворяющая уравнению (12.20), и c – константа.

Заметим, что согласно замечанию 3.3 существует взаимно однозначное соответствие между функциями $\varphi(y)$, удовлетворяющими уравнению 2.16(ii), и билинейными формами $\Phi(u,v)$. Зафиксируем элемент y_α. Функция $\psi(y_\alpha + y)$, как функция от y, удовлетворяет уравнению (i). Поэтому ограничение этой функции на подгруппу $\overline{Y^{(2)}}$ – непрерывный многочлен степени ≤ 2. Следовательно, мы имеем такое представление

$$\psi(y_\alpha + y) = \varphi_\alpha(y) + l_\alpha(y) + c_\alpha, \quad y \in \overline{Y^{(2)}}, \tag{12.22}$$

где непрерывная функция $\varphi_\alpha(y)$ удовлетворяет уравнению 2.16(ii), функция $l_\alpha(y)$ удовлетворяет уравнению (12.20), и c_α – константа. Продолжим функции $\varphi_\alpha(y)$ и $l_\alpha(y)$ с группы $Y^{(2)}$ до функций $\widetilde{\varphi}_\alpha(y)$ и $\widetilde{l}_\alpha(y)$ на группе Y по формулам (12.19) и (12.21) соответственно. Переходя от функции $\widetilde{\varphi}_\alpha(y)$ к соответствующей билинейной форме $\Phi_\alpha(u,v)$, мы находим из (12.22)

$$\psi(-y_\alpha - y) = \psi(y_\alpha + (-2y_\alpha - y)) = \widetilde{\varphi}_\alpha(-2y_\alpha - y) + \widetilde{l}_\alpha(-2y_\alpha - y) + c_\alpha$$

$$= 4\Phi_\alpha(y_\alpha, y_\alpha) + 4\Phi_\alpha(y_\alpha, y) + \Phi_\alpha(y, y) - 2\widetilde{l}_\alpha(y_\alpha) - \widetilde{l}_\alpha(y) + c_\alpha, \quad y \in \overline{Y^{(2)}}. \tag{12.23}$$

Поскольку

$$\psi(y_\alpha + y) = \Phi_\alpha(y, y) + \widetilde{l}_\alpha(y) + c_\alpha, \quad y \in \overline{Y^{(2)}}, \tag{12.24}$$

и $\psi(-y) = \psi(y)$, из (12.23) и (12.24) следует, что

$$2\Phi_\alpha(y_\alpha, y) = \widetilde{l}_\alpha(y), \quad y \in \overline{Y^{(2)}}. \tag{12.25}$$

Из (12.24) и (12.25) мы получаем

$$\psi(y_\alpha + y) = \Phi_\alpha(y_\alpha + y, y_\alpha + y) - 2\Phi_\alpha(y_\alpha, y) - \Phi_\alpha(y_\alpha, y_\alpha)$$

$$+ \widetilde{l}_\alpha(y) + c_\alpha = \widetilde{\varphi}_\alpha(y_\alpha + y) + r_\alpha, \quad y \in \overline{Y^{(2)}}, \tag{12.26}$$

где r_α – константа.

Подставляя $k = h$ в 12.4(i), мы получаем, что функция $\psi(y)$ удовлетворяет уравнению

$$\psi(y + 4h) - 2\psi(y + 3h) + 2\psi(y + h) - \psi(y) = 0, \quad y, h \in Y. \tag{12.27}$$

Подставляя $y = 0,\ h = y_\alpha + 2u,\ u \in Y$ в (12.27), мы находим

$$\psi(4y_\alpha + 8u) - 2\psi(3y_\alpha + 6u) + 2\psi(y_\alpha + 2u) = 0, \quad u \in Y.$$

Учитывая (12.26), отсюда следует, что

$$\widetilde{\varphi}_0(4y_\alpha + 8u) - 2\widetilde{\varphi}_\alpha(3y_\alpha + 6u) + 2\widetilde{\varphi}_\alpha(y_\alpha + 2u) = 0, \quad u \in Y.$$

Переходя здесь от функций $\widetilde{\varphi}_0(y)$ и $\widetilde{\varphi}_\alpha(y)$ к соответствующим билинейным формам $\Phi_0(u, v)$ и $\Phi_\alpha(u, v)$, мы получаем

$$4(\Phi_0(u, u) - \Phi_\alpha(u, u)) + 4(\Phi_0(y_\alpha, u) - \Phi_\alpha(y_\alpha, u)) + (\Phi_0(y_\alpha, y_\alpha) - \Phi_\alpha(y_\alpha, y_\alpha)) = 0,\ u \in Y.$$

Отсюда следует, что $\widetilde{\varphi}_\alpha(y) = \widetilde{\varphi}_0(y),\ y \in Y$ и представление (ii) вытекает из (12.26). $\square$

12.5. Замечание. Отметим, что уравнение 12.4(i) на группе $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$ уже встречалось нам при доказательстве теоремы 8.5. При его решении мы использовали представление решений уравнения (8.13) на группе $\mathbb{Z}$ (лемма 8.2), а также тот факт, что в условиях теоремы 8.5 функции $|\widehat{\mu}_j(y)| = \exp\{-\varphi_j(y)\}$ удовлетворяют уравнению (7.20). Решение уравнения 12.4(i) в лемме 12.4 основано на других соображениях.

12.6. Теорема. *Пусть $X = \mathbb{R} \times \mathbb{T}$. Пусть ξ_1 и ξ_2 — независимые случайные величины со значениями в группе X, имеющие распределения μ_1 и μ_2 с необращающимися в нуль характеристическими функциями. Пусть $\delta \in \mathrm{Aut}(X)$. Предположим, что линейные формы $L_1 = \xi_1 + \xi_2$ и $L_2 = \xi_1 + \delta\xi_2$ независимы. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(a) если $\delta = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, где $a > 0$, то μ_j – вырожденные распределения;

(b) если $\delta = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, где $a < 0$, то либо μ_j — вырожденные распределения, либо $\mu_j = E_{x_j} * \gamma_j$, где $\gamma_j \in \Gamma(X),\ \sigma(\gamma_j) = K$, K – подгруппа в X топологически изоморфная $\mathbb{R}$;

(c) если либо $\delta = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, где $a > 0$, либо $\delta = \begin{pmatrix} -1 & b \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, где $b \neq 0$, то либо μ_j — вырожденные распределения, либо $\mu_j = E_{x_j} * \gamma * \pi_j$, где $x_j \in X$, $\gamma \in \Gamma(X)$, $\sigma(\gamma) = \mathbb{T}$, π_j – заряды на $\mathbb{Z}(2)$, такие что $\pi_1 * \pi_2 = E_{(0,1)}$;

(d) если $\delta = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, где $a < 0, a \neq -1$, то либо $\mu_j = \gamma_j * \pi_j$, где $\gamma_j \in \Gamma(X)$, $\sigma(\gamma_j) = X$, π_j – заряды на $\mathbb{Z}(2)$, такие что $\pi_1 * \pi_2 = E_{(0,1)}$, либо μ_j такие, как в (b);

(e) если $\delta = -I$, то либо μ_j такие, как в (c), либо такие, как в (d).

Доказательство Обозначим $\varepsilon = \widetilde{\delta}$, $L = Ker(I - \varepsilon)$, $H = (I - \varepsilon)Y$. По лемме 10.1 независимость линейных форм L_1 и L_2 равносильна тому, что характеристические функции $\widehat{\mu}_j(y)$ удовлетворяют уравнению 10.1(i), которое принимает вид (10.23). Возможны два случая: $L \neq \{0\}$ и $L = \{0\}$.

1. $L \neq \{0\}$. Тогда либо $\delta = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ либо $\delta = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Положим $K = A(X, L)$. Рассмотрим ограничение уравнения (10.23) на подгруппу L. Получаем, что характеристические функции $\widehat{\mu}_1(y)$ и $\widehat{\mu}_2(y)$ удовлетворяют уравнению (11.28). Рассуждая так же, как при рассмотрении случая **1** в теореме 11.5, из уравнения (11.28) получаем, что распределения μ_j можно так заменить их сдвигами μ'_j, что $\sigma(\mu'_j) \subset K = A(X, L)$. Кроме того, ограничение автоморфизма δ на подгруппу K является автоморфизмом подгруппы K. Учитывая следствие 10.2, мы можем предполагать с самого начала, что случайные величины ξ_j принимают значения в K.

Докажем вначале утверждения (a) и (b). Пусть $\delta = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. В случае, когда $\delta = I$, очевидно, что μ_j – вырожденные распределения. Пусть $\delta = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $b \neq 0$. Тогда $L = \{(s, 0),\ s \in \mathbb{R}\}$, а значит, $K = \mathbb{T}$. Сужение автоморфизма δ на подгруппу $\mathbb{T}$, очевидно, совпадает с тождественным автоморфизмом I. Мы имеем, таким образом, независимые случайные величины ξ_1 и ξ_2 с распределениями μ_1 и μ_2, принимающие значения в подгруппе $\mathbb{T}$, причем линейные формы $L_1 = \xi_1 + \xi_2$ и $L_2 = \xi_1 + \xi_2$ независимы. Очевидно, что в этом случае μ_j — вырожденные распределения.

Пусть $\delta = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, где $a \neq 1$. Тогда, как не трудно проверить, $L = \left\{\left(\frac{b}{1-a}n, n\right) :\ n \in \mathbb{Z}\right\}$. Отсюда получаем, что $K = \left\{\left(t, e^{it\frac{b}{a-1}}\right) :\ t \in \mathbb{R}\right\}$, т.е. подгруппа K топологически изоморфна $\mathbb{R}$. Рассмотрим мономорфизм $\tau : \mathbb{R} \mapsto X$, определяемый формулой $\tau t = \left(t, e^{it\frac{b}{a-1}}\right)$ и независимые случайные величины $\widetilde{\xi}_j = \tau^{-1}(\xi_j)$. Поскольку $\delta\left(t, e^{it\frac{b}{a-1}}\right) = \left(at, e^{iat\frac{b}{a-1}}\right)$, то $\tau^{-1}\delta(\xi_2) = a\widetilde{\xi}_2$. Мы имеем, таким образом, независимые случайные величины $\widetilde{\xi}_j$ со значениями в группе $\mathbb{R}$, такие что линейные формы $L_1 = \widetilde{\xi}_1 + \widetilde{\xi}_2$ и $L_2 = \widetilde{\xi}_1 + a\widetilde{\xi}_2$ независимы. По теореме Скитовича–Дармуа случайные величины $\widetilde{\xi}_j$ имеют гауссовские распределения, а значит и случайные величины ξ_j также имеют гауссовские распределения, т.е. $\mu_j \in \Gamma(X)$.

Очевидно, что если $a > 0$, то μ_j – вырожденные распределения. Если же $a < 0$, то существуют независимые случайные величины ξ_j со значениями в подгруппе K, имеющие невырожденные гауссовские распределения μ_j такие, что линейные формы $L_1 = \xi_1 + \xi_2$ и $L_2 = \xi_1 + \delta\xi_2$ независимы. Утверждения (a) и (b) доказаны.

Пусть $\delta = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Тогда $L = \{(s, 0) :\ s \in \mathbb{R}\}$, а значит, $K = \mathbb{T}$. Сужение автоморфизма δ на подгруппу $\mathbb{T}$, очевидно, совпадает с автоморфизмом $-I$. Мы находимся в условиях применимости следствия 8.6. Из следствия 8.6 вытекает, что $\mu_j = E_{x_j} * \gamma * \pi_j$, где $x_j \in X,\ \gamma \in \Gamma(X),\ \sigma(\gamma) = \mathbb{T},\ \pi_j$ — заряды на $\mathbb{Z}(2)$, и $\pi_1 * \pi_2 = E_{(0,1)}$. Утверждение (c) в случае $a = 1$ доказано.

2. $L = \{0\}$. Тогда $\delta = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, где $a \neq 1$. Мы имеем $H = (I - \varepsilon)Y = Y^{(2)}$. Обозначим $G = H^*$. Поскольку характеристические функции $\widehat{\mu}_j(y)$ удовлетворяют уравнению (10.23), то из леммы 12.3 вытекает, что каждая из характеристических функций $\widehat{\mu}_j(y)$ удовлетворяют уравнению 12.3(ii) при $u, v \in Y^{(2)}$. Следовательно, по лемме 9.2 эти сужения являются характеристическими функциями некоторых гауссовских распределений в смысле Бернштейна на группе G. Так как $H \cong \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$, то теореме 1.7.1 $G \cong \mathbb{R} \times \mathbb{T}$. Группа G не содержит подгруппы, топологически изоморфной двумерному тору $\mathbb{T}^2$. Поэтому, применяя лемму 9.7 к группе G, мы получаем, что сужения характеристических функций $\widehat{\mu}_j(y)$ на подгруппу H являются характеристическими функциями некоторых гауссовских распределений. Как следует из замечания 5.12, непрерывная функция $\varphi(y)$ на группе $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$, удовлетворяющая уравнению 2.16(ii), имеет вид $\varphi(y) = \exp\{-\langle Cy, y\rangle\}$, где C – симметричная неотрицательно определенная матрица. Значит, на подгруппе H имеет место представление

$$\widehat{\mu}_1(y) = m_1(y)\exp\{-\langle Ay, y\rangle\}, \quad \widehat{\mu}_2(y) = m_2(y)\exp\{-\langle By, y\rangle\}, \quad y \in H,$$

где $m_j(y)$ — характер подгруппы H, а $A,\ B$ — симметричные неотрицательно определенные матрицы. По теореме 1.9.2 существуют элементы $x_j \in X$ такие, что $m_j(y) = (x_j, y),\ y \in H$. Заменяя, если это необходимо, распределения μ_j их сдвигами, можно считать, что

$$\widehat{\mu}_1(y) = \exp\{-\langle Ay, y\rangle\}, \quad \widehat{\mu}_2(y) = \exp\{-\langle By, y\rangle\}, \quad y \in H. \tag{12.28}$$

Рассматривая ограничение уравнения (10.23) на подгруппу H и подставляя в это уравнение представления (12.28) для функций $\widehat{\mu}_j(y)$, мы получаем, что

$$\langle u, (A + B\varepsilon)v\rangle = 0, \quad u, v \in H. \tag{12.29}$$

Так как $H \cong \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$, то из (12.29) следует, что матрицы A и B удовлетворяют уравнению 12.2(i).

Положим

$$l_j(y) = \widehat{\mu}_j(y)/|\widehat{\mu}_j(y)|, \quad y \in Y,$$

и проверим, что $l_j(y)$ — характеры группы Y. Так как $\widehat{\mu}_j(y) = |\widehat{\mu}_j(y)|$ при $y \in H$, то $l_j(y) = 1$ при $y \in H$. Функции $l_j(y)$ удовлетворяют уравнению (10.23). По лемме 12.3 каждая из функций $l_j(y)$ удовлетворяет уравнению 12.3(ii), которое принимает вид

$$l_j(u + v)l_j(u - v) = 1, \quad u \in H,\ v \in Y. \tag{12.30}$$

Положим в (12.30) $u = (s/2, 0), v = (s/2, n)$. Получаем

$$l_j(s, n)l_j(0, -n) = 1, \quad s \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{Z}.$$

Умножая это уравнение на $l_j(0, n)$, находим

$$l_j(s, n) = l_j(0, n), \quad s \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{Z}. \tag{12.31}$$

Из уравнения (10.23) для функций $l_j(y)$, с учетом (12.31), получаем

$$l_1(0,m+n)l_2(0,m-n) = l_1(0,m)l_1(0,n)l_2(0,m)l_2(0,-n), \quad m,n \in \mathbb{Z}. \tag{12.32}$$

Из уравнения (12.32) по индукции легко следует, что функции $l_j(0,n)$ — характеры группы $\mathbb{Z}$, а значит, функции $l_j(y)$ — характеры группы Y. По теореме двойственности Понтрягина существуют элементы $x_j \in X$ такие, что

$$l_j(y) = (x_j, y), \ y \in Y. \tag{12.33}$$

Найдем теперь представления для модулей $|\widehat{\mu}_j(y)|$. Положим $\varphi_j(y) = -\log|\widehat{\mu}_j(y)|, \ j = 1,2$. Из уравнения (10.23) следует, что функции $\varphi_j(y)$ удовлетворяют уравнению 10.10(i). По лемме 10.10 каждая из функций $\varphi_j(y)$ удовлетворяет уравнению 10.10(ii). Так как $(I-\varepsilon)Y = Y^{(2)}$, то из 10.10($ii$) следует, что каждая из функций $\varphi_j(y)$ удовлетворяет уравнению 12.4(i). Обозначим $\zeta = (0,1) \in Y$. Тогда разложение группы Y по подгруппе H имеет вид

$$Y = H \cup (\zeta + H).$$

Учитывая (12.28), по лемме 12.4 получаем

$$\varphi_1(y) = \langle Ay, y\rangle + c_1, \quad y \in (0,1) + H, \tag{12.34}$$

и

$$\varphi_2(y) = \langle By, y\rangle + c_2, \quad y \in (0,1) + H. \tag{12.35}$$

Возьмем модули в обеих частях уравнения (10.23) и подставим в полученное выражение $u, v \in (0,1)+H$. Учитывая (12.28), (12.34) и (12.35), находим, что $c_1 = -c_2$. Обозначим $c_1 = -c_2 = -2\kappa$. Таким образом, функции $|\widehat{\mu}_j(y)|$ имеют вид

$$|\widehat{\mu}_1(y)| = \exp\{-\langle Ay, y\rangle + \kappa(1-(-1)^n)\}, \quad y = (s,n) \in Y,$$

$$|\widehat{\mu}_2(y)| = \exp\{-\langle By, y\rangle - \kappa(1-(-1)^n)\}, \quad y = (s,n) \in Y.$$

Учитывая (12.33), в результате получаем

$$\widehat{\mu}_1(y) = (x_1, y)\exp\{-\langle Ay, y\rangle + \kappa(1-(-1)^n)\}, \quad y = (s,n) \in Y, \tag{12.36}$$

$$\widehat{\mu}_2(y) = (x_2, y)\exp\{-\langle By, y\rangle - \kappa(1-(-1)^n)\}, \quad y = (s,n) \in Y. \tag{12.37}$$

Пусть либо $\delta = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, где $a > 0, a \neq 1$, либо $\delta = \begin{pmatrix} -1 & b \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, где $b \neq 0$. Так как матрицы A и B удовлетворяют уравнению 12.2(i), то по лемме 12.2 матрицы A и B имеют вид 12.2(ii). Обозначим через γ гауссовское распределение на группе X с характеристической функцией

$$\widehat{\gamma}(y) = \exp\{-\sigma n^2\}, \quad y = (s,n) \in Y.$$

Поскольку $N = \{y \in Y : \widehat{\gamma}(y) = 1\} = \{(s,0) : \ s \in \mathbb{R}\}$, то $A(X,N) = \mathbb{T}$. Из предложения 2.13 следует, что $\sigma(\gamma) = \mathbb{T}$. Учитывая 2.7($b$) и 2.7($c$), из (12.36), (12.37) и леммы 8.3 вытекают искомые представления для распределений μ_j. Поскольку случай, когда $a = 1$, был исследован ранее, утверждение (c) полностью доказано.

Пусть $\delta = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, где $a < 0, a \neq -1$. По лемме 12.2 матрицы A и B имеют вид 12.2(iii). Обозначим через γ_j гауссовские распределение на X с характеристическими функциями

$$\widehat{\gamma}_1(y) = (x_1, y)\exp\{-\langle Ay, y\rangle\}, \quad \widehat{\gamma}_2(y) = (x_2, y)\exp\{-\langle By, y\rangle\}, \quad y \in Y.$$

Учитывая 2.7(b) и 2.7(c), из (12.36) и леммы 8.3 получаем, что $\mu_1 = \gamma_1 * \pi_1$. Если $\sigma > 0$ и $t > b^2/(a+1)^2$, то $\det A > 0$ и поэтому $\sigma(\gamma_1) = X$. Аналогично, из (12.37) и леммы 8.3 получаем представление для μ_2.

Если $\sigma > 0$ и $t = b^2/(a+1)^2$, то $A = -aB$ и $\det\ A = \det\ B = 0$. Рассмотрим $M = \mathrm{Ker}A$. Имеем $M = \left\{\left(-\frac{b}{a+1}n, n\right) :\ n \in \mathbb{Z}\right\}$. Обозначим $K = A(X, M)$. Легко видеть, что $K = \left\{\left(t, e^{it\frac{b}{a+1}}\right) : t \in \mathbb{R}\right\}$. Очевидно, что подгруппа K топологически изоморфна $\mathbb{R}$. По предложению 2.13 имеет место включение $\sigma(\gamma_j) \subset A(X, M)$. Поскольку $\gamma \in \Gamma(X)$, то $\sigma(\gamma) = K$. Отсюда вытекает, что в (12.36) и (12.37) $\kappa = 0$, так как в противном случае одно из распределений μ_j было бы зарядом, а не мерой. Следовательно, $\mu_j = E_{x_j} * \gamma_j$. Утверждение (d) доказано.

Пусть $\delta = -I$. Тогда $A = B$, и представления для μ_j вытекают из (12.36), (12.37) и леммы 8.3. Утверждение (e) доказано. □

12.7. Замечание. Нетрудно проверить, что утверждения $(b)-(e)$ в теореме 12.6 не могут быть усилены за счет сужения в этих случаях класса распределений, характеризующихся независимостью линейных форм $L_1 = \xi_1 + \xi_2$ и $L_2 = \xi_1 + \delta\xi_2$. Именно, справедливо следующее утверждение. Пусть $\delta \in \mathrm{Aut}(X)$ – такой топологический автоморфизм группы X, как в одном из случаев $(b) - (e)$. Тогда существуют независимые случайные величины ξ_j со значениями в X, имеющие распределения μ_j, которые по теореме 12.6 возможны в соответствующем случае $(b)-(e)$, и такие, что линейные формы $L_1 = \xi_1 + \xi_2$ и $L_2 = \xi_1 + \delta\xi_2$ независимы.

Перейдем теперь к изучению распределений, характеризующихся независимостью линейных форм на группе $X = \Sigma_{\mathbf{a}} \times \mathbb{T}$.

12.8. Обозначения. Пусть $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \dots, a_n, \dots)$ — произвольная фиксированная последовательность целых чисел, больших 1, $\Sigma_{\mathbf{a}}$ – $\mathbf{a}$-адический соленоид. Группа характеров $\Sigma_{\mathbf{a}}^*$ топологически изоморфна подгруппе в $\mathbb{Q}$ вида $H_{\mathbf{a}}$, где

$$H_{\mathbf{a}} = \left\{\frac{m}{a_0 a_1 \cdots a_n} : n = 0, 1, \dots; m \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Пусть $X = \Sigma_{\mathbf{a}} \times \mathbb{T}$. Тогда $Y = X^* \cong H_{\mathbf{a}} \times \mathbb{Z}$. Чтобы не вводить дополнительных обозначений, будем считать, что $Y = H_{\mathbf{a}} \times \mathbb{Z}$. Элементы группы X будем обозначать через $x = (g, z)$, $g \in \Sigma_{\mathbf{a}}, z \in \mathbb{T}$, а элементы группы Y – через $y = (r, n)$, $r \in H_{\mathbf{a}},\ n \in \mathbb{Z}$. Нам удобно считать также, что группа вращений окружности $\mathbb{T}$ и мультипликативная группа корней степени 2 из единицы $\mathbb{Z}(2)$ естественным образом вложены в группу X, а группа $H_{\mathbf{a}}$ естественным образом вложена в подгруппу Y.

Любой автоморфизм $a \in \mathrm{Aut}(H_{\mathbf{a}})$ имеет вид $a = f_p f_q^{-1}$, где $f_p,\ f_q \in \mathrm{Aut}(H_{\mathbf{a}})$, т.е. a действует в $H_{\mathbf{a}}$ как умножение на рациональное число $\frac{p}{q}$ (1.14(d)). Очевидно, что $\frac{p}{q} \in H_{\mathbf{a}}$. Мы будем отождествлять a с рациональным числом $\frac{p}{q}$. Так как в силу 1.13(d) $\widetilde{f}_n = f_n$, то $\widetilde{a} = f_p f_q^{-1} \in \mathrm{Aut}(\Sigma_{\mathbf{a}})$, и мы будем также отождествлять автоморфизм $\widetilde{a}$ с рациональным числом $\frac{p}{q} \in H_{\mathbf{a}}$.

Нетрудно проверить, что каждый автоморфизм $\varepsilon \in \mathrm{Aut}(H_{\mathbf{a}} \times \mathbb{Z})$ определяется матрицей $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$, где $a \in \mathrm{Aut}(H_{\mathbf{a}}),\ b \in H_{\mathbf{a}}$ и ε действует на $H_{\mathbf{a}} \times \mathbb{Z}$ следующим образом

$$\varepsilon(r,n) = (ar + bn, \pm n) \quad (r,n) \in H_{\mathbf{a}} \times \mathbb{Z}.$$

Тогда сопряженный автоморфизм $\widetilde{\varepsilon} = \delta \in \mathrm{Aut}(\Sigma_{\mathbf{a}} \times \mathbb{T})$ имеет вид

$$\delta(g,z) = (\widetilde{a}g, (g,b)z^{\pm 1}), \quad (g,z) \in \Sigma_{\mathbf{a}} \times \mathbb{T}.$$

Мы будем отождествлять автоморфизмы δ и ε с матрицей $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$.

Пусть ξ_1 и ξ_2 — независимые случайные величины со значениями в группе X и с распределениями μ_1 и μ_2, а α_j, β_j – топологические автоморфизмы группы X. Легко видеть, что изучение возможных распределений μ_j при условии, что линейные формы $L_1 = \alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2$ и $L_2 = \beta_1\xi_1 + \beta_2\xi_2$ независимы, сводится к случаю, когда $L_1 = \xi_1 + \xi_2$ и $L_2 = \xi_1 + \delta\xi_2$, где $\delta \in \mathrm{Aut}(X)$.

12.9. Пусть $X = \Sigma_{\mathbf{a}} \times \mathbb{T}$, $Y = H_{\mathbf{a}} \times \mathbb{Z}$. Обозначим через ι – естественное вложение $\iota : Y \mapsto \mathbb{R} \times \mathbb{Z},\ \iota(r,n) = (r,n)$. Пусть $\tau = \widetilde{\iota}$ – сопряженный гомоморфизм $\tau : \mathbb{R} \times \mathbb{T} \mapsto X$. Обозначим через $g_t = \tau(t,1),\ g_t \in \Sigma_{\mathbf{a}}$. Тогда $\tau(t,z) = (g_t, z)$. Очевидно, что $(g_t, r) = e^{itr},\ t \in \mathbb{R},\ r \in H_{\mathbf{a}}$. Поскольку $\overline{\iota(Y)} = \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$ и ι – мономорфизм, то в силу 1.13(b) τ – мономорфизм и $\overline{\tau(\mathbb{R} \times \mathbb{T})} = X$.

12.10. Лемма. *Пусть a – рациональное число, $\tau : \mathbb{R} \times \mathbb{T} \mapsto X$ – гомоморфизм, определенный в* 12.9. *Пусть $K = \{(t,\ e^{ita}) :\ t \in \mathbb{R}\}$ — подгруппа в $\mathbb{R} \times \mathbb{T}$. Тогда $\overline{\tau(K)} \cong \Sigma_{\mathbf{a}}$.*

Доказательство. Обозначим $L = A(Y, \overline{\tau(K)})$. Поскольку $\tau(K) = \{(g_t, e^{ita}) : t \in \mathbb{R}\}$, то $L = \{(r,n) \in Y :\ r + an = 0\}$. Очевидно, что $L \cong \mathbb{Z}$. Пусть (r_0, n_0) – образующая группы L. Тогда $L = \{k(r_0,n_0) :\ k \in \mathbb{Z}\}$. Рассмотрим гомоморфизм $\pi : Y \mapsto H_{\mathbf{a}}$, определенный формулой $\pi(r,n) = rn_0 - nr_0$. Как легко видеть, $\mathrm{Ker}\ \pi = L$. Следовательно, $Y/L \cong \pi(Y)$. Имеем, $H_{\mathbf{a}} \cong H_{\mathbf{a}}^{(n_0)} \subset \pi(Y) \subset H_{\mathbf{a}}$. Поскольку $H_{\mathbf{a}}$ – группа без кручения ранга 1, то отсюда следует, что $\pi(Y) \cong H_{\mathbf{a}}$ (см. 1.3), а значит и $Y/L \cong H_{\mathbf{a}}$. По теореме 1.9.2 $(\overline{\tau(K)})^* \cong Y/L \cong H_{\mathbf{a}}$. Применяя теорему двойственности Понтрягина, отсюда заключаем, что $\overline{\tau(K)} \cong \Sigma_{\mathbf{a}}$. □

12.11. Теорема. *Пусть $X = \Sigma_{\mathbf{a}} \times \mathbb{T}$. Пусть ξ_1 и ξ_2 — независимые случайные величины со значениями в группе X, имеющие распределения μ_1 и μ_2 с необращающимися в нуль характеристическими функциями. Пусть $\delta \in \mathrm{Aut}(X)$. Предположим, что линейные формы $L_1 = \xi_1 + \xi_2$ и $L_2 = \xi_1 + \delta\xi_2$ независимы. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(a) *если $\delta = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, где $a > 0$, то μ_j – вырожденные распределения;*

(b) *если $\delta = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, где $a < 0$, то либо μ_j — вырожденные распределения, либо $\mu_j = E_{x_j} * \gamma_j$, где $\gamma_j \in \Gamma(X),\ \sigma(\gamma_j) = K$, K – подгруппа в X топологически изоморфная $\Sigma_{\mathbf{a}}$;*

(*c*) *если либо* $\delta = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, *где* $a > 0$, *либо* $\delta = \begin{pmatrix} -1 & b \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, *где* $b \neq 0$, *то либо* μ_j *– вырожденные распределения, либо* $\mu_j = E_{x_j} * \gamma * \pi_j$, *где* $x_j \in X$, $\gamma \in \Gamma(X)$, $\sigma(\gamma) = \mathbb{T}$, π_j *– заряды на* $\mathbb{Z}(2)$, *такие что* $\pi_1 * \pi_2 = E_{(0,1)}$;

(*d*) *если* $\delta = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, *где* $a < 0, a \neq -1$, *то либо* $\mu_j = \gamma_j * \pi_j$, *где* $\gamma_j \in \Gamma(X)$, $\sigma(\gamma_j) = X$, π_j *– заряды на* $\mathbb{Z}(2)$, *такие что* $\pi_1 * \pi_2 = E_{(0,1)}$, *либо* μ_j *такие, как в* (*b*);

(*e*) *если* $\delta = -I$, *то либо* μ_j *такие, как в* (*c*), *либо такие, как в* (*d*).

Доказательство. Обозначим $\varepsilon = \widetilde{\delta}$. По лемме 10.1 независимость линейных форм L_1 и L_2 равносильна тому, что характеристические функции $\widehat{\mu}_j(y)$ удовлетворяют уравнению 10.1(*i*), которое принимает вид (10.23). Положим $\nu_j = \mu_j * \bar{\mu}_j$. Из 2.7(*c*) и 2.7(*d*) вытекает, что $\widehat{\nu}_j(y) = |\widehat{\mu}_j(y)|^2 > 0,\ y \in Y$, и характеристические функции $\widehat{\nu}_j(y)$ также удовлетворяют уравнению (10.23). Заметим, что ограничение автоморфизма ε на подгруппу $H_{\mathbf{a}}$ является автоморфизмом подгруппы $H_{\mathbf{a}}$. Рассмотрим ограничение уравнения (10.23) для характеристических функций $\widehat{\nu}_j(y)$ на подгруппу $H_{\mathbf{a}}$. Поскольку $H^*_{\mathbf{a}} \cong \Sigma_{\mathbf{a}}$, а группа $\Sigma_{\mathbf{a}}$ не содержит подгруппы, топологически изоморфной $\mathbb{T}$, то по лемме 10.1 и теореме 10.3 $\widehat{\nu}_j(r, 0)$ – характеристические функции некоторых гауссовских распределений на группе $\Sigma_{\mathbf{a}}$. Так как $\widehat{\nu}_j(y) > 0,\ y \in Y$, то

$$\widehat{\nu}_j(r, 0) = \exp\{-\sigma r^2\}, \quad r \in H_{\mathbf{a}}, \tag{12.38}$$

где $\sigma \geq 0$. Пустьι, τ и g_t – такие, как в 12.9. Из (12.38), учитывая неравенство 2.7(*g*), вытекает, что характеристические функции $\widehat{\nu}_j(r, n)$ равномерно непрерывны на подгруппе $\iota(Y)$ в топологии, индуцированной на $\iota(Y)$ топологией группы $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$. Поскольку подгруппа $\iota(Y)$ плотна в $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$ в топологии $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$, то характеристические функции $\widehat{\nu}_j(r, n)$ продолжаются по непрерывности до некоторых непрерывных функций $g_j(s, n)$ на группе $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$. Очевидно, что функции $g_j(s, n)$ положительно определены. По теореме Бохнера существуют распределения λ_j на группе $\mathbb{R} \times \mathbb{T}$ такие, что $\widehat{\lambda}_j(s, n) = g_j(s, n)$. Из предложения 2.10 вытекает, что $\nu_j = \tau(\lambda_j)$. Следовательно, распределения ν_j сосредоточены на борелевской подгруппе $B = \tau(\mathbb{R} \times \mathbb{T})$. Пусть $\delta = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Aut}(X)$ и $x = (g_t, z) \in B$. Тогда $\delta x = \delta(g_t, z) = (ag_t, (g_t, b)z^{\pm 1}) = (g_{at}, e^{ibt}z^{\pm 1}) \in B$, т.е. подгруппа B инвариантна относительно любого автоморфизма $\delta \in \mathrm{Aut}(X)$. По автоморфизму δ определим отображение $\bar{\delta} : \mathbb{R} \times \mathbb{T} \mapsto \mathbb{R} \times \mathbb{T}$ по формуле $\bar{\delta}(t, z) = \tau^{-1}\delta\tau(t, z)$. Очевидно, что $\bar{\delta} \in \mathrm{Aut}(\mathbb{R} \times \mathbb{T})$. Поскольку

$$\bar{\delta}(t, z) = \tau^{-1}\delta\tau(t, z) = \tau^{-1}\delta(g_t, z) = \tau^{-1}(g_{at}, e^{ibt}z^{\pm 1}) = (at, e^{ibt}z^{\pm 1}),$$

то автоморфизму $\bar{\delta}$ соответствует та же самая матрица $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$, что и автоморфизму δ.

Так как распределения ν_j сосредоточены на подгруппе B и $\nu_j = \mu_j * \bar{\mu}_j$, то по предложению 2.2 распределения μ_j можно заменить их сдвигами μ'_j так, чтобы распределения μ'_j были также сосредоточены на подгруппе B. Будем поэтому с самого начала предполагать, что распределения μ_j сосредоточены на подгруппе B. Заметим, что поскольку отображение τ непрерывно и взаимно однозначно, то по теореме Суслина образы борелевских множеств при отображении τ – борелевские.

Рассмотрим $\widetilde{\xi}_j = \tau^{-1}\xi_j$ – независимые случайные величины со значениями в группе $\mathbb{R} \times \mathbb{T}$. Так как $\tau^{-1}\delta\xi_2 = \bar{\delta}\widetilde{\xi}_2$ то линейные формы $\widetilde{L}_1 = \widetilde{\xi}_1 + \widetilde{\xi}_2$ и $\widetilde{L}_2 = \widetilde{\xi}_1 + \bar{\delta}\widetilde{\xi}_2$ независимы. Пусть $\widetilde{\mu}_j$ –

распределения случайных величин $\widetilde{\xi}_j$. Поскольку $\mu_j = \tau(\widetilde{\mu}_j)$, то утверждения $(a) - (e)$ вытекают теперь из утверждений $(a) - (e)$ теоремы 12.6 и леммы 12.10. $\square$

12.12. Замечание. Пусть ξ_1 и ξ_2 — независимые случайные величины со значениями в группе X, имеющие распределения μ_1 и μ_2 с необращающимися в нуль характеристическими функциями. Пусть $\alpha_j, \ \beta_j \in \mathrm{Aut}(X)$. Предположим, что линейные формы $L_1 = \alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2$ и $L_2 = \beta_1\xi_1 + \beta_2\xi_2$ независимы. Как отмечено в замечании 10.6, изучая возможные распределения μ_j, группу X можно считать связной. Важной характеристикой связной локально компактной абелевой группы X является ее размерность. Если размерность группы X равна 1, то группа X топологически изоморфна одной из групп: $\mathbb{R}$, $\Sigma_{\mathbf{a}}$, $\mathbb{T}$.

Описание распределений μ_j которые характеризуются независимостью линейных форм L_1 и L_2 в случае $X = \mathbb{R}$ – это теорема Скитовича–Дармуа. Поскольку группа $\Sigma_{\mathbf{a}}$ не содержит подгруппы, топологически изоморфной $\mathbb{T}$, то для группы $X = \Sigma_{\mathbf{a}}$ это описание содержится в теореме 10.3. В обоих случаях соответствующие распределения гауссовские. Поскольку $\mathrm{Aut}(\mathbb{T}) = \{\pm I\}$, то для группы $X = \mathbb{T}$ описание возможных распределений μ_j вытекает из следствия 8.6.

Предположим теперь, что размерность группы X равна 2. Если группа X не содержит подгруппы, топологически изоморфной $\mathbb{T}$, то распределения μ_j, характеризующиеся независимостью линейных форм L_1 и L_2, гауссовские (теорема 10.3). Пусть X — связная локально компактная абелева группа размерности 2, содержащая подгруппу K, топологически изоморфную $\mathbb{T}$. Тогда по теореме 1.17.1 подгруппа K является в X топологическим прямым сомножителем, т.е. $X = G \times K$, где G – связная локально компактная абелева группа размерности 1. Следовательно, для группы X имеются такие возможности: либо $X \cong \mathbb{T}^2$, либо $X \cong \mathbb{R} \times \mathbb{T}$, либо $X \cong \Sigma_{\mathbf{a}} \times \mathbb{T}$. Описание возможных распределений μ_j для группы $X = \mathbb{T}^2$ содержится в теореме 11.5 (за исключением случая (II)), а для групп $X = \mathbb{R} \times \mathbb{T}$ и $X = \Sigma_{\mathbf{a}} \times \mathbb{T}$ – в теоремах 12.6 и 12.11 соответственно.

Глава V

Теорема Скитовича–Дармуа для локально компактных абелевых групп (общий случай)

Пусть X – локально компактная абелева группа, удовлетворяющая второй аксиоме счетности, $\xi_j,\ j = 1, 2, \dots, n,\ n \geq 2,$ – независимые случайные величины со значениями в группе X и с распределениями μ_j. Пусть $L_1 = \alpha_1\xi_1 + \dots + \alpha_n\xi_n$ и $L_2 = \beta_1\xi_1 + \dots + \beta_n\xi_n$, где $\alpha_j,\ \beta_j$ – топологические автоморфизмы группы X. В этой главе мы продолжаем изучение групповых аналогов теоремы Скитовича–Дармуа. В отличие от главы IV, мы не будем предполагать, что характеристические функции $\widehat{\mu}_j(y)$ не обращаются в нуль. Зафиксируем число n независимых случайных величин. Основное внимание в этой главе будет уделено следующей задаче: для каких групп X из независимости линейных форм L_1 и L_2 вытекает, что все $\mu_j \in \Gamma(X) * I(X)$? Мы решаем эту задачу в классах конечных, дискретных, компактных вполне несвязных, связные компактных и некоторых других классах групп. Мы рассматриваем случай двух случайных величин, трех случайных величин и $n \geq 4$ случайных величин. Оказывается, что перечисленные случаи существенно различны.

§13. Число случайных величин $n = 2$

Пусть X – локально компактная абелева группа, удовлетворяющая второй аксиоме счетности, Y – ее группа характеров, ξ_1 и ξ_2– независимые случайные величины со значениями в группе X и с распределениями μ_1 и μ_2. Пусть $L_1 = \alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2$ и $L_2 = \beta_1\xi_1 + \beta_2\xi_2$, где $\alpha_j,\ \beta_j \in \mathrm{Aut}(X)$. В этом параграфе мы доказываем, что если X – дискретная группа, то из независимости линейных форм L_1 и L_2 вытекает, что $\mu_1,\ \mu_2 \in I(X)$. Мы полностью описываем компактные вполне несвязные группы, для которых независимость линейных форм L_1 и L_2 влечет, что $\mu_1,\ \mu_2 \in I(X)$. Мы доказываем также, что для произвольной связной компактной группы X существуют такие независимые случайные величины ξ_1 и ξ_2 со значениями в группе X и с распределениями $\mu_1, \mu_2 \notin \Gamma(X) * I(X)$ и автоморфизмы $\alpha_j,\ \beta_j \in \mathrm{Aut}(X)$ такие, что линейные формы L_1 и L_2 независимы.

Изучим вначале случай, когда группа X конечна.

13.1. Теорема. *Пусть X – конечная группа, ξ_1 и ξ_2 – независимые случайные величины со значениями в группе X и с распределениями μ_1 и μ_2. Пусть α_j, β_j – автоморфизмы группы X. Тогда из независимости линейных форм $L_1 = \alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2$ и $L_2 = \beta_1\xi_1 + \beta_2\xi_2$ вытекает, что $\mu_1, \mu_2 \in I(X)$.*

Доказательство. Заметим вначале, что если μ – распределение случайной величины ξ со значениями в произвольной группе X и $\alpha \in \mathrm{Aut}(X)$, то по предложению 2.10 характеристическая функция случайной величины $\alpha\xi$ равна $\widehat{\mu}(\widetilde{\alpha}y)$. Учитывая определение 2.14 идемпотентного распределения, отсюда вытекает, что $\mu \in I(X)$ тогда и только тогда, когда $\alpha(\mu) \in I(X)$. Поэтому, полагая $\zeta_j = \alpha_j\xi_j$, мы редуцируем доказательство теоремы к случаю, когда линейные формы L_1 и L_2 имеют вид $L_1 = \xi_1 + \xi_2$ и $L_2 = \delta_1\xi_1 + \delta_2\xi_2,\ \delta_j \in \mathrm{Aut}(X)$. Заметим также, что если $\alpha \in \mathrm{Aut}(X)$, то линейные формы L_1 и L_2 независимы тогда и только тогда, когда независимы линейные формы L_1 и αL_2. Поэтому, доказывая теорему, можно предполагать, что $L_1 = \xi_1 + \xi_2$ и $L_2 = \xi_1 + \delta\xi_2$, где $\delta \in \mathrm{Aut}(X)$. Обозначим $\varepsilon = \widetilde{\delta}$. По лемме 10.1 независимость линейных форм L_1 и L_2 равносильна тому, что характеристические функции $\widehat{\mu}_j(y)$ удовлетворяют уравнению (10.23). Обозначим $f(y) = \widehat{\mu}_1(y),\ g(y) = \widehat{\mu}_2(y)$ и перепишем уравнение (10.23), используя эти обозначения. Мы получаем

$$f(u+v)g(u+\varepsilon v) = f(u)g(u)f(v)g(\varepsilon v), \quad u,v \in Y. \tag{13.1}$$

Положим $\nu_j = \mu_j * \bar{\mu}_j$. Из 2.7($c$) и 2.7($d$) вытекает, что $\widehat{\nu}_j(y) = |\widehat{\mu}_j(y)|^2 \geq 0,\ y \in Y$. Очевидно, что характеристические функции $\widehat{\nu}_j(y)$ также удовлетворяют уравнению (10.23). Если мы докажем, что $\nu_j \in I(X)$, то из 2.7(b) и 2.7(e) следует, что и $\mu_j \in I(X)$. Это дает нам возможность решать уравнение (13.1) в предположении, что $f(y) \geq 0,\ g(y) \geq 0,\ f(-y) = f(y),\ g(-y) = g(y)$. Мы докажем, что в этом случае $f(y) = g(y) = \widehat{m}_K(y)$, где K – некоторая подгруппа X. Отсюда будет следовать утверждение теоремы. Обозначим $\beta = I - \varepsilon$. Возможны два случая: $\mathrm{Ker}\ \beta = \{0\},\ \mathrm{Ker}\ \beta \neq \{0\}$.

1. $\mathrm{Ker}\ \beta = \{0\}$. Так как группа Y конечна, это значит, что $\beta \in \mathrm{Aut}(Y)$. В этом случае для каждого $y \in Y,\ y \neq 0$, выполнено $\varepsilon y \neq y$. Полагая в (13.1) $v = -u$, мы находим

$$g(\beta u) = f^2(u)g(u)g(\varepsilon u), \quad u \in Y. \tag{13.2}$$

Учитывая, что $0 \leq f(y) \leq 1,\ 0 \leq g(y) \leq 1$, из (13.2) получаем

$$g(\beta u) \leq g(u), \quad u \in Y. \tag{13.3}$$

Поскольку группа Y конечна, то конечна и ее группа автоморфизмов $\mathrm{Aut}(Y)$ и, следовательно,

$$\beta^n = I \tag{13.4}$$

для некоторого натурального n. Будем предполагать, что n в (13.4) наименьшее из возможных. Из (13.3) тогда вытекает

$$g(u) = g(\beta^n u) \leq \cdots \leq g(\beta u) \leq g(u), \quad u \in Y,$$

и следовательно,

$$g(u) = g(\beta u) = \cdots = g(\beta^{n-1}u), \quad u \in Y.$$

Таким образом, на каждой из орбит $\{u, \beta u, \ldots, \beta^{n-1}u\}$ функция $g(y)$ принимает постоянное значение, зависящее, вообще говоря, от u.

Положим теперь в (13.1) $u = -\varepsilon v$. Получаем

$$f(\beta v) = f(\varepsilon v)g^2(\varepsilon v)f(v), \quad v \in Y. \tag{13.5}$$

Рассуждая аналогично, мы находим из (13.5), что функция $f(y)$ также принимает постоянное значение на каждой из орбит.

Очевидно, что группу Y можно представить как объединение непересекающихся орбит. Обозначим через N объединение орбит, где $g(y) > 0$. Представим Y как объединение $Y = N \cup N'$, где $N' = \{y \in Y : g(y) = 0\}$. Из (13.2) следует, что

$$1 = f^2(u)g(\varepsilon u), \quad u \in N. \tag{13.6}$$

Отсюда вытекает, что $g(\varepsilon y) = 1$ для всех $y \in N$. Это значит, в частности, что $\varepsilon(N) \subset N$. Поскольку ε – взаимно однозначное отображение и N – конечное множество, то $\varepsilon(N) = N$. Следовательно, $g(y) = 1$ при $y \in N$. Принимая во внимание, что $g(y) = 0$ при $y \in N'$, мы видим, что

$$g(y) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad y \in N, \\ 0, & \text{если} \quad y \in N'. \end{cases} \tag{13.7}$$

По предложению 2.13 N – подгруппа в Y. Обозначим $K = A(X, N)$. По теореме 1.9.1 $N = A(Y, K)$. Учитывая 2.16(i), из (13.7) вытекает, что $g(y) = \widehat{m}_K(y)$. Из 2.7(b) тогда заключаем, что $\mu_2 = m_K$.

Из (13.6) следует также, что $f(y) = 1$ при $y \in N$. Проверим, что $f(y) = 0$, если $y \in N'$. Предположим, что $v \in N'$. Поскольку $\varepsilon(N') = N'$, то $\varepsilon v \in N'$ и, следовательно, $g(\varepsilon v) = 0$. Тогда из (13.5) находим, что $f(\beta v) = 0$. Поскольку $f(v) = f(\beta v)$, то $f(v) = 0$. Тем самым доказано, что и $f(y) = \widehat{m}_K(y)$. В случае **1** теорема доказана.

2. $\mathrm{Ker}\ \beta \neq \{0\}$, т.е. существует элемент $y_0 \in Y$, $y_0 \neq 0$ такой, что $\varepsilon y_0 = y_0$. Обозначим $L = \mathrm{Ker}\ \beta = \{y \in Y : \varepsilon y = y\}$. Очевидно, что $\varepsilon(L) = L$. Рассмотрим ограничение уравнения (13.1) на L. Мы получим

$$f(u+v)g(u+v) = f(u)g(u)f(v)g(v), \quad u, v \in L. \tag{13.8}$$

Полагая в (13.8) $v = -u$, получаем

$$1 = f^2(u)g^2(u), \quad u \in L.$$

Следовательно, $f(y) = g(y) = 1$ при $y \in L$. Обозначим $K = A(X, L)$. По предложению 2.13 функции $f(y)$ и $g(y)$ являются L-инвариантными и имеет место включение $\sigma(\mu_j) \subset K$, $j = 1, 2$. Заметим, что по теоремам 1.9.1 и 1.9.2 $K^* \cong Y/L$.

Поскольку функции $f(y)$ и $g(y)$ L-инвариантны, то они индуцируют некоторые функции $\widetilde{f}$ и $\widetilde{g}$ на фактор-группе Y/L, а именно $\widetilde{f}([y]) = f(y)$, $\widetilde{g}([y]) = g(y)$, $y \in [y]$. Так как $\varepsilon(L) = L$, то автоморфизм ε также индуцирует некоторый автоморфизм $\widehat{\varepsilon}$ на фактор-группе Y/L по формуле $\widehat{\varepsilon}[y] = [\varepsilon y]$, $y \in [y]$. Это позволяет нам рассматривать уравнение (13.1) на фактор-группе Y/L. Индуцированный гомоморфизм $\widehat{\beta}$ может, как и ранее, удовлетворять условию $\mathrm{Ker}\ \widehat{\beta} \neq \{0\}$. Повторяя описанную процедуру, мы за конечное число шагов получим индуцированный гомоморфизм $\widehat{\beta}$, который уже является автоморфизмом. Тогда из **1** вытекает, что характеристические функции $\widetilde{f}([y])$ и $\widetilde{g}([y])$ являются характеристическими функциями некоторых распределений Хаара $m_{\widehat{K}}$, где $\widehat{K}$ – подгруппа в X. Возвращаясь к исходным характеристическим функциям $f(y)$ и $g(y)$, получаем утверждение теоремы. Отметим, что если $\beta^m y = 0$ при некотором m и каждом $y \in Y$, то это означает, что распределения μ_1 и μ_2 – вырожденные. $\square$

Для дальнейшего нам понадобятся две стандартные леммы, относящиеся к произвольным группам X.

13.2. Лемма. *Пусть G – компактная подгруппа группы X, α – непрерывный эндоморфизм группы X. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(i) $\alpha(G) \supset G$;

(ii) если $\widetilde{\alpha} y \in A(Y, G)$, то $y \in A(Y, G)$;

Доказательство. $(i) \Rightarrow (ii)$. Из (i) следует, что

$$A(Y,G) \supset A(Y,\alpha(G)). \tag{13.9}$$

Предположим, что $\widetilde{\alpha}y \in A(Y,G)$. Тогда для любого $x \in K$ выполнено $(x, \widetilde{\alpha}y) = 1$. В силу 1.13($a$) $(\alpha x, y) = 1$ для любого $x \in G$, т.е. $y \in A(Y,\alpha(G))$. Следовательно, из (13.9) вытекает, что $y \in A(Y,G)$.

$(ii) \Rightarrow (i)$. Предположим, что $y \in A(Y,\alpha(G))$. Тогда $(\alpha x, y) = 1$ для любого $x \in G$. Поэтому $(x, \widetilde{\alpha}y) = 1$ для любого $x \in G$, т.е. $\widetilde{\alpha}y \in A(Y,G)$, и в силу (i) $y \in A(Y,G)$. Значит, $A(Y,\alpha(G)) \subset A(Y,G)$. Отсюда по теореме 1.9.1 следует (i). Эквивалентность (i) и (ii) доказана. $\square$

13.3. Лемма. *Пусть G – замкнутая подгруппа группы X и $\delta \in \mathrm{Aut}(X)$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(i) $\delta(G) = G$;

(ii) $\widetilde{\delta}(A(Y,G)) = A(Y,G)$.

Доказательство. В силу теоремы 1.9.1 и 1.13(a) достаточно проверить $(i) \Rightarrow (ii)$. Предположим, что $y \in A(Y,G)$. Тогда $(\delta x, y) = 1$ при любом $x \in G$ и поэтому $(x, \widetilde{\delta}y) = 1$ при любом $x \in G$, т.е. $\widetilde{\delta}y \in A(Y,G)$. Итак,

$$\widetilde{\delta}(A(Y,G)) \subset A(Y,G). \tag{13.10}$$

Заметим теперь, что из (i) вытекает равенство $\delta^{-1}(G) = G$. Тогда, как доказано выше, имеет место включение $\widetilde{\delta}^{-1}(A(Y,G)) \subset A(Y,G)$. Отсюда, $A(Y,G) \subset \widetilde{\delta}(A(Y,G))$. Учитывая (13.10), получаем (ii). $\square$

13.4. Следствие. *Замкнутая подгруппа G группы X тогда и только тогда является характеристической, когда ее аннулятор $A(Y,G)$ является характеристической подгруппой группы Y.*

Из доказательства теоремы 13.1 и леммы 13.3 непосредственно вытекает следующее утверждение.

13.5. Следствие. *Пусть X – конечная группа, ξ_1 и ξ_2 – независимые случайные величины со значениями в группе X и с распределениями μ_1 и μ_2. Пусть $\delta \in \mathrm{Aut}(X)$. Тогда из независимости линейных форм $L_1 = \xi_1 + \xi_2$ и $L_2 = \xi_1 + \delta\xi_2$ вытекает, что $\mu_j = m_K * E_{x_j}$, где K – некоторая подгруппа группы X, $x_j \in X$, $j = 1, 2$. Кроме того, $\delta(K) = K$.*

Теорема 13.1 позволяет доказать следующее утверждение.

13.6. Теорема. *Пусть $X = \mathbb{R}^m \times G$, где $m \geq 1$, а G – конечная группа. Пусть ξ_1 и ξ_2 – независимые случайные величины со значениями в группе X и с распределениями μ_1 и μ_2. Пусть α_j, β_j – топологические автоморфизмы группы X. Тогда из независимости линейных форм $L_1 = \alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2$ и $L_2 = \beta_1\xi_1 + \beta_2\xi_2$ вытекает, что $\mu_1, \mu_2 \in \Gamma(X) * I(X)$.*

Доказательство. Мы ограничимся доказательством для случая, когда $m = 1$, т.е. $X = \mathbb{R} \times G$. Случай произвольного m рассматривается аналогично. Тогда $Y \cong \mathbb{R} \times H$, где $H = G^*$. Чтобы не вводить дополнительных обозначений, будем считать, что $Y = \mathbb{R} \times H$ и обозначать элементы группы Y через $y = (s, h)$, $s \in \mathbb{R}$, $h \in H$.

Поскольку $\mathbb{R}$ – связная компонента нуля группы Y, то $\mathbb{R}$ – характеристическая подгруппа, а следовательно, ограничение любого автоморфизма $\tau \in \mathrm{Aut}(Y)$ на $\mathbb{R}$ является топологическим автоморфизмом подгруппы $\mathbb{R}$. Обозначим это ограничение через $\tau_{\mathbb{R}}$. Поскольку H – подгруппа, состоящая из всех компактных элементов группы Y, то H – характеристическая подгруппа, а следовательно, ограничение любого автоморфизма $\tau \in \mathrm{Aut}(Y)$ на подгруппу H также является автоморфизмом подгруппы H. Обозначим это ограничение через τ_H. Следовательно, любой автоморфизм $\tau \in \mathrm{Aut}(Y)$ имеет вид $\tau(s,h) = (\tau_{\mathbb{R}}s, \tau_H h)$.

Пусть $\mu \in \mathrm{M}^1(X)$ и $\alpha \in \mathrm{Aut}(X)$. Ясно, что $\mu \in \Gamma(X) * I(X)$ тогда и только тогда, когда $\alpha(\mu) \in \Gamma(X) * I(X)$. Поэтому, рассуждая так же, как и при доказательстве теоремы 13.1, мы сведем доказательство теоремы к случаю, когда линейные формы L_1 и L_2 имеют вид $L_1 = \xi_1 + \xi_2$ и $L_2 = \xi_1 + \delta\xi_2$, где $\delta \in \mathrm{Aut}(X)$. Обозначим $f(y) = \widehat{\mu}_1(y),\ g(y) = \widehat{\mu}_2(y)$, $\varepsilon = \widehat{\delta}$. В силу леммы 10.1 доказательство теоремы сводится к решению уравнения (13.1), которое в наших обозначениях принимает вид

$$\begin{aligned} &f(s+s', h+h')g(s+\varepsilon_{\mathbb{R}}s', h+\varepsilon_H h') \\ &= f(s,h)g(s,h)f(s',h')g(\varepsilon_{\mathbb{R}}s', \varepsilon_H h'), \quad (s,h),(s',h') \in Y. \end{aligned} \tag{13.11}$$

Полагая в (13.11) $s = s' = 0$, мы получим функциональное уравнение

$$f(0,h+h')g(0,h+\varepsilon_H h') = f(0,h)g(0,h)f(0,h')g(0,\varepsilon_H h'), \quad h,\ h' \in H. \tag{13.12}$$

Как вытекает из леммы 10.1 и следствия 13.5, решения уравнения (13.12) имеют вид

$$f(0,h) = \widehat{m}_M(h)(g_1,h), \quad g(0,h) = \widehat{m}_M(h)(g_2,h),\ h \in H, \tag{13.13}$$

где M – некоторая подгруппа группы G, а $g_1,\ g_2 \in G$. Обозначим $E = A(H,M)$. Рассмотрим сдвиги $\mu_j' = \mu_j * E_{-g_j}$ и обозначим $f'(y) = \widehat{\mu}_1'(y),\ g'(y) = \widehat{\mu}_2'(y)$. Учитывая 2.14($i$) и 2.7($c$), из (13.13) получаем

$$f'(0,h) = g'(0,h) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad h \in E, \\ 0, & \text{если} \quad h \notin E. \end{cases} \tag{13.14}$$

Очевидно, что характеристические функции $f'(y)$ и $g'(y)$ также удовлетворяют уравнению (13.11). Обозначим $L = H/E$. Мы имеем $Y/E \cong \mathbb{R} \times L$. Будем обозначать элементы фактор-группы Y/E через $(s,l),\ s \in \mathbb{R},\ l \in L$. По теореме 1.9.2 $M^* \cong L$, а тогда по теореме 1.7.1 $(\mathbb{R} \times M)^* \cong Y/E$. По предложению 2.13 из (13.14) следует, что характеристические функции $f'(y)$ и $g'(y)$ E-инвариантны. Из следствия 13.5 и леммы 13.3 вытекает равенство $\varepsilon(E) = E$. Это позволяет перейти от уравнения (13.11) для функций $f'(y)$ и $g'(y)$ на группе Y к индуцированному уравнению на фактор-группе Y/E, полагая $\widetilde{f}([y]) = f'(y),\ \widetilde{g}([y]) = g'(y),\ \widehat{\varepsilon}[y] = [\varepsilon y]$. При этом $\widehat{\varepsilon} \in \mathrm{Aut}(Y/E)$. Очевидно, что ограничение автоморфизма $\widehat{\varepsilon} \in \mathrm{Aut}(Y/E)$ на L является автоморфизмом группы L. Обозначим это ограничение через $\widehat{\varepsilon}_L$. Элементы группы $Y/E \cong \mathbb{R} \times L$ будем обозначать через $(s,l),\ s \in \mathbb{R},\ l \in L$. Очевидно, что, автоморфизм $\widehat{\varepsilon} \in \mathrm{Aut}(Y/E)$ имеет вид $\widehat{\varepsilon}(s,l) = (\varepsilon_{\mathbb{R}}s, \widehat{\varepsilon}_L l)$.

Переход от уравнения (13.11) на группе Y к индуцированному уравнению на фактор-группе Y/E означает, что мы переходим от рассмотрения случайных величин со значениями в группе $\mathbb{R} \times G$ к случайным величинам со значениями в группе $\mathbb{R} \times M$.

Уравнение, индуцированное уравнением (13.11) для функций $\widetilde{f}(s,l)$ и $\widetilde{g}(s,l)$, имеет вид

$$\widetilde{f}(s+s',l+l')\widetilde{g}(s+\varepsilon_{\mathbb{R}}s',l+\widehat{\varepsilon}_L l')$$

$$=\widetilde{f}(s,l)\widetilde{g}(s,l)\widetilde{f}(s',l')\widetilde{g}(\varepsilon_{\mathbb{R}}s',\widehat{\varepsilon}_L l'),\quad s,s'\in\mathbb{R},\ l,l'\in L. \tag{13.15}$$

Легко видеть, что для решений уравнения (13.15) выполнено

$$\{l\in L:\widetilde{f}(0,l)=1\}=\{l\in L:\widetilde{g}(0,l)=1\}=\{0\}. \tag{13.16}$$

Обозначим $V=\{l\in L:\widehat{\varepsilon}_L l=l\}$. Полагая в (13.15) $s=s'=0$, легко видеть, что $\widetilde{f}(0,l)=\widetilde{g}(0,l)=1$ при всех $l\in V$. Учитывая (13.16), это значит, что $V=\{0\}$. Поскольку L – конечная группа, то отсюда следует, что

$$I-\widehat{\varepsilon}_L\in\mathrm{Aut}(L). \tag{13.17}$$

Кроме того, очевидно, что

$$\widetilde{f}(0,l)=\widetilde{g}(0,l)=\begin{cases}1, & \text{если}\quad l=0,\\ 0, & \text{если}\quad l\neq 0.\end{cases} \tag{13.18}$$

Полагая в (13.11) $h=h'=0$, и учитывая лемму 10.1, по теореме Скитовича–Дармуа находим

$$f(s,0)=\exp\{-\sigma_1 s^2+it_1 s\},\quad g(s,0)=\exp\{-\sigma_2 s^2+it_2 s\}, \tag{13.19}$$

где $\sigma_j\geq 0,\ t_j\in\mathbb{R},\ j=1,2$. Отметим, что

$$\widetilde{f}(s,0)=f(s,0),\ \widetilde{g}(s,0)=g(s,0). \tag{13.20}$$

Полагая в (13.15) $s=0,\ l'=0$, получаем

$$\widetilde{f}(s',l)\widetilde{g}(\varepsilon_{\mathbb{R}}s',l)=\widetilde{f}(0,l)\widetilde{g}(0,l)\widetilde{f}(s',0)\widetilde{g}(\varepsilon_{\mathbb{R}}s',0),\quad s'\in\mathbb{R},\quad l'\in L. \tag{13.21}$$

Из (13.18) следует, что при $l\neq 0$ правая часть уравнения (13.21) обращается в нуль. Значит, $\widetilde{f}(s',l)\widetilde{g}(\varepsilon_{\mathbb{R}}s',l)\equiv 0,\ s'\in\mathbb{R}$, при $l\neq 0$. По предложению 2.20 из (13.19) и (13.20) вытекает, что при любом фиксированном $l\in L$ функции $\widetilde{f}(s,l)$ и $\widetilde{g}(s,l)$ являются целыми функциями по s. Поэтому либо $\widetilde{f}(s,l)\equiv 0$, либо $\widetilde{g}(s,l)\equiv 0,\ s\in\mathbb{R},\ l\neq 0$. Следовательно, при любом $l\neq 0$ правая часть уравнения (13.15) равна нулю.

Возьмем произвольный элемент $l_0\in L,\ l_0\neq 0$. Найдем l и l' из системы уравнений

$$\begin{cases}l+l'=0,\\ l+\widehat{\varepsilon}_L l'=l_0,\end{cases}$$

которая в силу (13.17) имеет единственное решение. Подставляя найденные $l,\ l'$ и $s'=0$ в (13.15) и учитывая (13.19) и (13.20), получаем, что $\widetilde{g}(s,l_0)=0,\ \ s\in\mathbb{R}$. Отсюда, учитывая (13.19) и (13.20), вытекает представление

$$\widetilde{g}(s,l)=\begin{cases}\exp\{-\sigma_2 s^2+it_2 s\}, & \text{если}\quad l=0,\\ 0, & \text{если}\quad l\neq 0.\end{cases}$$

Возвращаясь от функции $\widetilde{g}(s,h)$ к исходной функции $g(s,h)$, находим

$$g(s,h) = \begin{cases} \exp\{-\sigma_2 s^2 + it_2 s\}(g_2, h), & \text{если} \quad h \in E, \\ 0, & \text{если} \quad h \notin E. \end{cases} \tag{13.22}$$

Рассуждая аналогично, получаем, что

$$f(s,h) = \begin{cases} \exp\{-\sigma_1 s^2 + it_1 s\}(g_1, h), & \text{если} \quad h \in E, \\ 0, & \text{если} \quad h \notin E. \end{cases} \tag{13.23}$$

Пусть γ_j – гауссовское распределение на X с характеристической функцией

$$\widehat{\gamma}_j(s,h) = \exp\{-\sigma_j s^2 + it_j s\}(g_j, h), \quad (s,h) \in Y, \quad j = 1,2.$$

Из (13.22), (13.23) и 2.14(i) следует, что

$$f(s,h) = \widehat{\gamma}_1(s,h)\widehat{m}_M(s,h), \quad g(s,h) = \widehat{\gamma}_2(s,h)\widehat{m}_M(s,h).$$

Отсюда, учитывая 2.7(b), получаем $\mu_j = \gamma_j * m_M$, j=1, 2. □

Следующее утверждение непосредственно вытекает из доказательства теоремы 13.6.

13.7. Следствие. *Пусть $X = \mathbb{R}^m \times G$, где $m \geq 1$, а G – конечная группа. Пусть ξ_1 и ξ_2 – независимые случайные величины со значениями в группе X и с распределениями μ_1 и μ_2. Пусть $\delta \in \mathrm{Aut}(X)$. Тогда из независимости линейных форм $L_1 = \xi_1 + \xi_2$ и $L_2 = \xi_1 + \delta\xi_2$ вытекает, что $\mu_j = \gamma_j * m_F * E_{x_j}$, где $\gamma_j \in \Gamma^s(\mathbb{R}^m)$, F – подгруппа в G, $x_j \in X$, $j = 1,2$.*

Рассмотрим теперь случай, когда группа X дискретна. Докажем вначале одно утверждение, относящееся к произвольному числу независимых случайных величин. Это утверждение можно рассматривать, как аналог теоремы Скитовича–Дармуа для дискретных групп без кручения.

13.8. Теорема. *Пусть X – дискретная группа без кручения. Пусть ξ_j, $j = 1,2,\ldots,n$, $n \geq 2$, – независимые случайные величины со значениями в группе X и с распределениями μ_j. Пусть α_j, β_j – автоморфизмы группы X. Тогда из независимости линейных форм $L_1 = \alpha_1\xi_1 + \cdots + \alpha_n\xi_n$ и $L_2 = \beta_1\xi_1 + \cdots + \beta_n\xi_n$ вытекает, что все μ_j – вырожденные распределения.*

Доказательство. Вводя в рассмотрение новые случайные величины $\zeta_j = \alpha_j\xi_j$, мы редуцируем доказательство теоремы к случаю, когда линейные формы L_1 и L_2 имеют вид $L_1 = \xi_1 + \cdots + \xi_n$ и $L_2 = \delta_1\xi_1 + \cdots + \delta_n\xi_n$, $\delta_j \in \mathrm{Aut}(X)$. По лемме 10.1 независимость линейных форм L_1 и L_2 равносильна тому, что характеристические функции $\widehat{\mu}_j(y)$ удовлетворяют уравнению (10.2).

Докажем вначале, что характеристические функции $\widehat{\mu}_j(y)$ не обращаются в нуль. Положим $\nu_j = \mu_j * \bar{\mu}_j$. Из 2.7$(c)$ и 2.7(d) вытекает, что $\widehat{\nu}_j(y) = |\widehat{\mu}_j(y)|^2 \geq 0$, $y \in Y$. Очевидно, что характеристические функции $\widehat{\nu}_j(y)$ также удовлетворяют уравнению (10.2). Обозначим

$$A_j = \{y \in Y : \widehat{\nu}_j(y) > 0\}, \quad A = \bigcap_{j=1}^n A_j, \quad B = \left\{y \in Y : \prod_{j=1}^n \widehat{\nu}_j(\widetilde{\delta}_j y) > 0\right\}, \quad C = \bigcap_{j=1}^n \widetilde{\delta}_j(B).$$

Легко видеть, что $A + C \subset A$. Действительно, пусть $u \in A, v \in C$. Тогда $v = \widetilde{\delta}_j t_j$, где $t_j \in B$, $j = 1,2,\ldots,n$. Из уравнения (10.2) вытекает, что $u + v = u + \widetilde{\delta}_j t_j \in A_j$, $j = 1,2,\ldots,n$. Поэтому

$u+v\in\bigcap_{j=1}^{n} A_j=A$. Обозначим $(m)C=\{y\in Y: y=y_1+\dots+y_m,\ y_j\in C\}$. Тогда из включения $A+C\subset A$ вытекает, что $A+\bigcup_{m=1}^{\infty}(m)C\subset A$, а так как $0\in C$, то $A+\bigcup_{m=1}^{\infty}(m)C=A$.

Поскольку X – дискретная группа без кручения, то по теоремам 1.6.1 и 1.6.2 Y – связная компактная группа. Так как C – открытое множество, содержащее нуль, то в силу связности группы Y имеем $Y=\bigcup_{m=1}^{\infty}(m)C$. Отсюда $A=Y$, т.е. характеристические функции $\widehat{\nu}_j(y)>0$ при всех $y\in Y$. Следовательно, $\widehat{\mu}_j(y),\ j=1,2,\dots,n$, не обращаются в нуль.

Положим $\varphi_j(y)=-\log\widehat{\nu}_j(y)$. Из (10.2) следует, что функции $\varphi_j(y)$ удовлетворяют уравнению

$$\sum_{j=1}^{n}\varphi_j(u+\widetilde{\delta}_j v)=\sum_{j=1}^{n}\varphi_j(u)+\sum_{j=1}^{n}\varphi_j(\widetilde{\delta}_j v),\quad u,v\in Y. \tag{13.24}$$

Интегрируя уравнение (13.24) по Y по мере $dm_Y(u)$ и пользуясь инвариантностью меры m_Y относительно сдвига, находим, что

$$\sum_{j=1}^{n}\varphi_j(\widetilde{\delta}_j v)=0,\quad v\in Y. \tag{13.25}$$

Поэтому все функции $\varphi_j(y)\equiv 0$ на Y. Отсюда получаем, что все характеристические функции $\widehat{\nu}_j(y)\equiv 1$ на Y. Тем самым доказано, что все $\nu_j=E_0$. Следовательно, все $\mu_j\in D(X)$. $\square$

Из теоремы 1.6.2, леммы 10.1 и теоремы 13.8 непосредственно вытекает следующее утверждение.

13.9. Следствие. *Пусть Y – связная компактная группа, $\widetilde{\alpha}_j,\widetilde{\beta}_j,\ j=1,2,\dots,n,\ n\geq 2$, – топологические автоморфизмы группы Y, $\widehat{\mu}_j(y)$ – характеристические функции на группе Y, удовлетворяющие уравнению* 10.1(i). *Тогда характеристические функции $\widehat{\mu}_j(y)$ имеют вид*

$$\widehat{\mu}_j(y)=(x_j,y),\quad x_j\in X,\ j=1,2,\dots,n.$$

13.10. Замечание. При доказательстве необращения в нуль характеристических функций $\widehat{\mu}_j(y)$ в теореме 13.8 использована лишь связность группы Y. Отсюда вытекает, в частности, что если $Y=\mathbb{R}^m$, то характеристические функции $\widehat{\mu}_j(y)$ на группе Y, удовлетворяющие уравнению 10.1(i), не обращаются в нуль. Учитывая это, из леммы 10.1 и теоремы 10.3 следуют теоремы Скитовича–Дармуа и Гурье–Олкина.

Следствие 13.9 позволяет доказать следующее общее утверждение.

13.11. Предложение *Пусть $X=\mathbb{R}^m\times G$, где $m\geq 0$, а группа G содержит компактную открытую подгруппу. Пусть $\xi_j,\ j=1,2,\dots,n,\ n\geq 2$, – независимые случайные величины со значениями в группе X и с распределениями μ_j. Пусть α_j,β_j – топологические автоморфизмы группы X. Предположим, что линейные формы $L_1=\alpha_1\xi_1+\dots+\alpha_n\xi_n$ и $L_2=\beta_1\xi_1+\dots+\beta_n\xi_n$ независимы. Тогда существуют элементы $x_j\in X,\ \ j=1,2,\dots,n$ такие, что носители распределений μ_j' всех случайных величин $\xi_j'=\xi_j+x_j$ содержатся в подгруппе $\mathbb{R}^m\times K$, где K – некоторая компактная подгруппа группы X.*

Доказательство. Очевидно, что не ограничивая общности можно считать, что $L_1=\xi_1+\dots+\xi_n$ и $L_2=\delta_1\xi_1+\dots+\delta_n\xi_n$, где $\delta_j\in\mathrm{Aut}(X)$. Заметим, что $b_X=b_G$. Мы имеем по теореме

1.11.2 $c_Y = L \times M$, где $L \cong \mathbb{R}^m$, а M – некоторая связная компактная группа. Поскольку по теореме 1.9.3 $A(G,M) = b_G$, то $A(X,M) = \mathbb{R}^m \times b_G = \mathbb{R}^m \times b_X$. Положим $\nu_j = \mu_j * \bar{\mu}_j$. По лемме 10.1 независимость линейных форм L_1 и L_2 эквивалентна тому, что характеристические функции $\widehat{\mu}_j(y)$ удовлетворяют уравнению (10.2). Из 2.7(c) и 2.7(d) следует, что $\widehat{\nu}_j(y) = |\widehat{\mu}_j(y)|^2 \geq 0,\ y \in Y$. Ясно, что характеристические функции $\widehat{\nu}_j(y)$ также удовлетворяют уравнению (10.2). Легко видеть, что M – характеристическая подгруппа группы Y. Поэтому мы можем рассмотреть ограничение уравнения (10.2) на подгруппу M. По следствию 13.9 $\widehat{\nu}_j(y) = 1$ при $y \in M$. По предложению 2.13 $\sigma(\nu_j) \subset A(X,M) = \mathbb{R}^m \times b_X$. Из предложения 2.2 вытекает, что существуют такие элементы $x_j \in X,\ \ j = 1, 2, \ldots, n$, что носители распределений μ'_j всех случайных величин $\xi'_j = \xi_j + x_j$ содержатся в подгруппе $\mathbb{R}^m \times b_X$. Отметим, что по следствию 13.4 подгруппа $\mathbb{R}^m \times b_X$ – характеристическая, а в силу следствия 10.2 линейные формы $L'_1 = \alpha_1\xi'_1 + \cdots + \alpha_n\xi'_n$ и $L'_2 = \beta_1\xi'_1 + \cdots + \beta_n\xi'_n$ независимы. Поэтому, доказывая предложение 13.11, мы можем считать с самого начала что группа G состоит из компактных элементов.

Поскольку группа G состоит из компактных элементов, то по теореме 1.9.3 группа $H = G^*$ вполне несвязна. По теореме 1.12.1 любая окрестность нуля группы H содержит компактную открытую подгруппу. Обозначим эту подгруппу через N и выберем ее так, чтобы все характеристические функции $\widehat{\nu}_j(y) > 0$ при $y \in N$. Снова применяя теорему 1.12.1 и учитывая непрерывность автоморфизмов $\widetilde{\delta}_j$, получаем, что существует такая компактная открытая подгруппа $F \subset N$, что $\widetilde{\delta}_j(F) \subset N,\ j = 1, 2, \ldots, n$. Положим $\varphi_j(y) = -\log \widehat{\mu}_j(y),\ y \in H$. Поскольку характеристические функции $\widehat{\nu}_j(y)$ удовлетворяют уравнению (10.2), то функции $\varphi_j(y)$ удовлетворяют уравнению (13.24) при $u \in N,\ v \in F$.

Интегрируя уравнение (13.24) по подгруппе N по распределению Хаара $dm_N(u)$ и пользуясь инвариантностью распределения Хаара m_N относительно сдвига, находим, что функции $\varphi_j(y)$ удовлетворяют уравнению (13.25) на подгруппе F. Значит, все характеристические функции $\widehat{\nu}_j(\widetilde{\delta}_j v) = 1$ при $v \in F$. Положим $B = \bigcap_{j=1}^{s} \widetilde{\delta}_j(F)$. Тогда B – открытая подгруппа в H, и все характеристические функции $\widehat{\nu}_j(y) = 1$ при $y \in B$.

Заметим, что $A(X,B) = \mathbb{R}^m \times K$, где по теореме 1.9.4 K – компактная группа. По предложению 2.13 $\sigma(\nu_j) \subset \mathbb{R}^m \times K$. Из предложения 2.2 вытекает, что существуют такие элементы $x_j \in X,\ \ j = 1, 2, \ldots, n$, что носители распределений μ'_j всех случайных величин $\xi'_j = \xi_j + x_j$ содержатся в подгруппе $\mathbb{R}^m \times K$. Отметим, что, вообще говоря, подгруппа $\mathbb{R}^m \times K$ – не обязана быть характеристической. $\square$

13.12. Замечание. Пусть $X = \mathbb{R}^m \times G$, где $m \geq 0$, а группа G содержит компактную открытую подгруппу. Пусть $\xi_j,\ j = 1, 2, \ldots, n,\ n \geq 2$, – независимые случайные величины со значениями в группе X и с распределениями μ_j. Пусть $\alpha_j,\ \beta_j$ – топологические автоморфизмы группы X. Предположим, что линейные формы $L_1 = \alpha_1\xi_1 + \cdots + \alpha_n\xi_n$ и $L_2 = \beta_1\xi_1 + \cdots + \beta_n\xi_n$ независимы. Поскольку подгруппа $\mathbb{R}^m \times b_G$ является характеристической, то из предложения 13.11 и следствия 10.2 вытекает, что изучая возможные распределения μ_j, можно предполагать, что группа X такова, что, $G = b_G$, т.е. группа G состоит из компактных элементов.

Из доказательства предложения 13.11 непосредственно вытекает следующее утверждение.

13.13. Лемма. *Пусть X – дискретная периодическая группа. Пусть ξ_j, $j = 1, 2, \dots, n$, $n \geq 2$, – независимые случайные величины со значениями в группе X и с распределениями μ_j, причем все характеристические функции $\widehat{\mu}_j(y) \geq 0$. Пусть δ_j – автоморфизмы группы X. Тогда из независимости линейных форм $L_1 = \xi_1 + \cdots + \xi_n$ и $L_2 = \delta_1\xi_1 + \cdots + \delta_n\xi_n$ вытекает, что все характеристические функции $\widehat{\mu}_j(y) \equiv 1$ на некоторой открытой подгруппе $B \subset Y$.*

Нам понадобится также следующая лемма, относящаяся к произвольным группам X.

13.14. Лемма. *Пусть ξ_1 и ξ_2 – независимые случайные величины со значениями в группе X, имеющие распределения $\mu_1 = m_{K_1}$ и $\mu_2 = m_{K_2}$, где K_1 и K_2 – конечные подгруппы группы X. Пусть $\delta \in \mathrm{Aut}(X)$. Тогда из независимости линейных форм $L_1 = \xi_1 + \xi_2$ и $L_2 = \xi_1 + \delta\xi_2$ вытекает, что $K_1 = K_2 = K$ и $\delta(K) = K$.*

Доказательство. Обозначим $\varepsilon = \widetilde{\delta}$, $\beta = I - \varepsilon$, $f(y) = \widehat{m}_{K_1}(y)$, $g(y) = m_{K_2}(y)$, $H_j = A(Y, K_j)$, $j = 1, 2$. Мы будем использовать представление 2.14(i). По лемме 10.1 независимость линейных форм L_1 и L_2 эквивалентна тому, что характеристические функции $f(y)$ и $g(y)$ удовлетворяет уравнению (13.1). Полагая в (13.1) $u = -\varepsilon v$, получаем (13.5). Из уравнения (13.5) следует, что если $\beta v \in H_1$, то $v \in H_1$. Значит, по лемме 13.2 $(I - \delta)(K_1) \supset K_1$, а поскольку подгруппа K_1 конечна, то $(I - \delta)(K_1) = K_1$. Это влечет $\delta(K_1) \subset K_1$, а поскольку $\delta \in \mathrm{Aut}(X)$ и группа K_1 конечна, то $\delta(K_1) = K_1$. Отсюда по лемме 13.3 $\varepsilon(H_1) = H_1$. Рассмотрим ограничение уравнения (13.1) на подгруппу H_1. Имеем

$$g(u + \varepsilon v) = g(u)g(\varepsilon v), \quad u, v \in H_1.$$

Отсюда, $g(y) = 1$ при всех $y \in H_1$, т.е. $H_1 \subset H_2$.

Полагая теперь в уравнении(13.1) $v = -u$, получаем (13.2). Рассуждение, аналогичное приведенному выше, где вместо уравнения (13.5) рассматривается уравнение (13.2), доказывает, что $H_2 \subset H_1$. Значит, $H_1 = H_2$. По теореме 1.9.1 отсюда следует, что $K_1 = K_2 = K$. □

13.15. Замечание. Следующий пример показывает, что утверждение в лемме 13.14, вообще говоря, неверно, если K_1 и K_2 – компактные, но не конечные подгруппы группы X. Пусть G – произвольная компактная группа. Рассмотрим прямое произведение

$$X = \mathop{\mathbf{P}}_{j=-\infty}^{\infty} G_j,$$

где все $G_j = G$. Обозначим $H = G^*$. По теореме 1.7.2

$$Y = \mathop{\mathbf{P}^*}_{j=-\infty}^{\infty} H_j,$$

где $H_j \cong H$. Пусть автоморфизм $\delta \in \mathrm{Aut}(X)$ имеет вид

$$\delta(g_j)_{j=-\infty}^{\infty} = (g_{j-2})_{j=-\infty}^{\infty}, \qquad (g_j)_{j=-\infty}^{\infty} \in X.$$

Обозначим $\varepsilon = \widetilde{\delta}$. Тогда

$$\varepsilon(h_j)_{j=-\infty}^{\infty} = (h_{j+2})_{j=-\infty}^{\infty}, \qquad (h_j)_{j=-\infty}^{\infty} \in Y.$$

Легко видеть, что

$$\mathrm{Ker}(I - \varepsilon) = \{0\}. \tag{13.26}$$

Рассмотрим подгруппы
$$K_1 = \mathop{\mathbf{P}}_{j\neq 1} G_j, \qquad K_2 = \mathop{\mathbf{P}}_{j\neq 2} G_j.$$
Очевидно, что $K_1 \neq K_2$ и $H_j = A(Y, K_j),\ j = 1, 2$. Проверим, что характеристические функции $f(y) = \widehat{m}_{K_1}(y)$ и $g(y) = \widehat{m}_{K_2}(y)$ удовлетворяют уравнению(13.1). Достаточно проверить, что уравнение(13.1) превращается в равенство при $u \neq 0,\ v \neq 0$. Поскольку $H_1 \cap H_2 = \{0\}$, то при $u \neq 0,\ v \neq 0$ правая часть уравнения (13.1) обращается в нуль. При этом левая часть уравнения(13.1) также обращается в нуль. В противном случае $u+v \in H_1, u+\varepsilon v \in H_2$. Но тогда $(I-\varepsilon)v \in H_1 \times H_2$. Но это возможно лишь в случае, если $(I-\varepsilon)v = 0$. Но тогда, как следует из (13.26), $v = 0$, что противоречит условию. Таким образом, характеристические функции $f(y)$ и $g(y)$ удовлетворяют уравнению(13.1). Пусть ξ_1 и ξ_2 – независимые случайные величины со значениями в группе X и с распределениями m_{K_1} и m_{K_2}. По лемме 10.1 линейные формы $L_1 = \xi_1 + \xi_2$ и $L_2 = \xi_1 + \delta\xi_2$ независимы.

13.16. Теорема. *Пусть X – дискретная группа, ξ_1 и ξ_2 – независимые случайные величины со значениями в группе X и с распределениями μ_1 и μ_2. Пусть α_j, β_j – автоморфизмы группы X. Тогда из независимости линейных форм $L_1 = \alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2$ и $L_2 = \beta_1\xi_1 + \beta_2\xi_2$ вытекает, что $\mu_1, \mu_2 \in I(X)$.*

Доказательство. Рассуждая так же, как при доказательстве теоремы 13.1, мы сводим доказательство к случаю, когда линейные формы L_1 и L_2 имеют вид $L_1 = \xi_1 + \xi_2$ и $L_2 = \xi_1 + \delta\xi_2$, где $\delta \in \mathrm{Aut}(X)$. Обозначим $f(y) = \widehat{\mu}_1(y),\ g(y) = \widehat{\mu}_2(y)$. По лемме 10.1 независимость линейных форм L_1 и L_2 равносильна тому, что характеристические функции $\widehat{\mu}_j(y)$ удовлетворяют уравнению (10.23), которое принимает вид (13.1), где $\varepsilon = \widetilde{\delta}$. Положим $\nu_j = \mu_j * \bar{\mu}_j$. Из 2.7($c$) и 2.7($d$) вытекает, что $\widehat{\nu}_j(y) = |\widehat{\mu}_j(y)|^2 \geq 0,\ \ y \in Y$. Очевидно, что характеристические функции $\widehat{\nu}_j(y)$ также удовлетворяют уравнению (10.23). Если мы докажем, что $\nu_j \in I(X)$, то из 2.7(b) и 2.7(e) следует, что и $\mu_j \in I(X)$. Это дает нам возможность решать уравнение(13.1) в предположении, что $f(y) \geq 0,\ g(y) \geq 0,\ f(-y) = f(y),\ g(-y) = g(y)$. Мы докажем, что в этом случае $f(y) = g(y) = \widehat{m}_K(y)$, где K – некоторая конечная подгруппа X. Отсюда будет следовать утверждение теоремы.

Поскольку периодическая часть группы X является характеристической подгруппой в X, то по замечанию 13.12 доказательство теоремы сводится к случаю, когда группа X периодическая, что мы и будем предполагать. Обозначим
$$E_f = \{y \in Y : f(y) = 1\}, \quad E_g = \{y \in Y : g(y) = 1\}.$$
Тогда по предложению 2.13 $\sigma(\mu_1) \subset A(X, E_f) = F,\ \sigma(\mu_2) \subset A(X, E_g) = G$. В силу леммы 13.13 существует такая открытая подгруппа B, что $B \subset E_f \cap E_g$. Обозначим $S = A(X, B)$. Тогда F и G – подгруппы в S. Поскольку подгруппа B открыта, то по теореме 1.9.4 S – компактная группа, а так как группа X дискретна, то S – конечная группа. Следовательно, F и G – также конечные группы.

Заметим теперь, что уравнению(13.1) при любом натуральном n удовлетворяют и характеристические функции $f^n(y)$ и $g^n(y)$, т.е.
$$f^n(u+v)g^n(u+\varepsilon v) = f^n(u)g^n(u)f^n(v)g^n(\varepsilon v), \quad u, v \in Y. \tag{13.27}$$

Очевидно, что существуют пределы

$$\bar{f}(y) = \lim_{n\to\infty} f^n(y) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad y \in E_f, \\ 0, & \text{если} \quad y \notin E_f, \end{cases} \qquad \bar{g}(y) = \lim_{n\to\infty} g^n(y) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad y \in E_g, \\ 0, & \text{если} \quad y \notin E_g. \end{cases}$$

Поскольку по теореме 1.9.1 $E_f = A(Y,F),\ E_g = A(Y,G)$, то из 2.14($i$) следует, что

$$\widehat{m}_F(y) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad y \in E_f, \\ 0, & \text{если} \quad y \notin E_f, \end{cases} \qquad \widehat{m}_G(y) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad y \in E_g, \\ 0, & \text{если} \quad y \notin E_g. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\widehat{m}_F(y) = \bar{f}(y), \quad \widehat{m}_G(y) = \bar{g}(y).$$

Пусть ζ_1 и ζ_2 – независимые случайные величины со значениями в группе X и с распределениями $\lambda_1 = m_F$ и $\lambda_2 = m_G$. Из (13.27) следует, что характеристические функции $\bar{f}(y)$ и $\bar{g}(y)$ также удовлетворяют уравнению (13.1). По лемме 10.1 отсюда следует, что линейные формы $L_1 = \zeta_1 + \zeta_2$ и $L_2 = \zeta_1 + \delta\zeta_2$ независимы. Мы находимся в условиях применимости леммы 13.14. Из леммы 13.14 вытекает, что $F = G$ и $\delta(G) = G$.

Вернемся к случайным величинам ξ_1 и ξ_2 и линейным формам $L_1 = \xi_1 + \xi_2$ и $L_2 = \xi_1 + \delta\xi_2$. Так как $\sigma(\mu_j) \subset G$, то ξ_j принимают значения в конечной группе G. Поскольку $\delta(G) = G$, то ограничение автоморфизма δ на подгруппу G является автоморфизмом G. Применяя следствие 13.5 к группе G, мы находим $\mu_j = m_K * E_{g_j}$, где K – некоторая подгруппа группы G, а $g_j \in G,\ j = 1, 2$. $\square$

Из доказательства теоремы 13.16 непосредственно вытекает следующее утверждение.

13.17. Следствие. *Пусть X – дискретная группа, ξ_1 и ξ_2 – независимые случайные величины со значениями в группе X и с распределениями μ_1 и μ_2. Пусть $\delta \in \mathrm{Aut}(X)$. Тогда из независимости линейных форм $L_1 = \xi_1 + \xi_2$ и $L_2 = \xi_1 + \delta\xi_2$ вытекает, что $\mu_j = m_K * E_{x_j}$, где K – некоторая конечная подгруппа группы X, $x_j \in X,\ j = 1, 2$. Кроме того, $\delta(K) = K$.*

13.18. Замечание. Отметим, что из теоремы 13.16 вытекает аналог теоремы 13.6 для группы $X = \mathbb{R}^m \times G$, где $m \geq 1$, а G – дискретная группа. Доказательство аналогично доказательству теоремы 13.6, только вместо следствия 13.5 нужно воспользоваться следствием 13.17.

Отметим следующее утверждение, относящееся к произвольным группам X.

13.19. Предложение. *Пусть ξ_1 и ξ_2 – независимые одинаково распределенные случайные величины со значениями в группе X, имеющие распределение m_K, где K – компактная подгруппа группы X. Пусть $\delta \in \mathrm{Aut}(X)$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(i) *линейные формы $L_1 = \xi_1 + \xi_2$ и $L_2 = \xi_1 + \delta\xi_2$ независимы;*

(ii) $(I - \delta)(K) \supset K$.

Доказательство. Обозначим $\varepsilon = \widetilde{\delta},\ \beta = I - \varepsilon,\ H = A(Y,K),\ f(y) = \widehat{m}_K(y)$.

(i) $\Rightarrow$ (ii). По лемме 10.1 независимость линейных форм L_1 и L_2 эквивалентна тому, что характеристическая функция $f(y)$ удовлетворяет уравнению 10.1(i), которое принимает вид

$$f(u+v)f(u+\varepsilon v) = f^2(u)f(v)f(\varepsilon v), \quad u, v \in Y. \tag{13.28}$$

Полагая здесь $v = -u$, получаем

$$f(\beta u) = f^3(u)f(\varepsilon u), \quad u \in Y. \tag{13.29}$$

Из (13.29) следует, что если $\beta y \in H$, то $y \in H$. Поэтому по лемме 13.2 выполнено (ii).

$(ii) \Rightarrow (i)$. Проверим, что функция $f(y) = \widehat{m}_K(y)$ удовлетворяет уравнению (13.28). Если $u, v \in H$, то левая и правая части уравнения (13.28) равны либо 1, если $\varepsilon v \in H$, либо нулю, если $\varepsilon v \notin H$. Если $u \in H,\ v \notin H$, или $u \notin H,\ v \in H$, то обе части уравнения (13.28) обращаются в нуль. Если же $u, v \notin H$, то правая часть уравнения (13.28) равна нулю. Тогда левая часть уравнения (13.28) также должна обращаться в нуль, ибо в противном случае было бы $u + v, u + \varepsilon v \in H$. Отсюда следует, что $\beta v \in H$. Поскольку выполнено (ii), то по лемме 13.2 справедливо утверждение 13.2(ii) при $\widetilde{\alpha} = \beta$, а значит, $v \in H$. Полученное противоречие показывает, что левая часть уравнения (13.28) обращается в нуль. Итак, функция $f(y)$ удовлетворяет уравнению (13.28), а следовательно, по лемме 10.1 линейные формы L_1 и L_2 независимы. Эквивалентность (i) и (ii) доказана. $\square$

13.20. Замечание. Отметим, что при $\delta = -I$, из предложения 13.19 вытекает описание идемпотентных распределений m_K, которые являются в то же время гауссовскими распределениями в смысле Бернштейна на группе X. Именно, подгруппа K должна быть группой Корвина (см. предложение 7.4).

Отметим, что если группа K конечна, то 13.19(ii) равносильно тому, что $(I - \delta)(K) = K$. С другой стороны, если K – компактная группа, то независимость линейных форм L_1 и L_2, вообще говоря, не влечет равенства $(I - \delta)(K) = K$. Действительно, пусть G – произвольная компактная группа. Рассмотрим прямое произведение

$$X = \mathop{\mathbf{P}}_{j=-\infty}^{\infty} G_j,$$

где все $G_j = G$. Положим

$$K = \mathop{\mathbf{P}}_{j=0}^{\infty} G_j,$$

и пусть автоморфизм $\delta \in \mathrm{Aut}(X)$ имеет вид

$$\delta(g_j)_{j=-\infty}^{\infty} = (g_{j+1})_{j=-\infty}^{\infty}, \qquad (g_j)_{j=-\infty}^{\infty} \in X.$$

Очевидно, что 13.19(ii) выполнено, в то время как K – собственная подгруппа в $(I - \delta)(K)$.

Рассмотрим теперь случай, когда группа X компактна и вполне несвязна. Нам понадобится ряд лемм.

13.21. Лемма. *Пусть X – компактная группа. Предположим, что существуют автоморфизм $\delta \in \mathrm{Aut}(X)$ и элемент $\widetilde{y} \in Y$ такие, что выполнены следующие условия:*

(i) $\mathrm{Ker}(I - \widetilde{\delta}) = \{0\}$;

(ii) $(I - \widetilde{\delta})Y \cap \{0, \pm\widetilde{y}, \pm 2\widetilde{y}\} = \{0\}$;

(iii) $\widetilde{\delta}\widetilde{y} \neq -\widetilde{y}$.

Тогда для каждого $n \geq 2$ существуют независимые одинаково распределенные случайные величины $\xi_j,\ j = 1, 2, \ldots, n$, со значениями в группе X и с распределением $\mu \notin \Gamma(X) * I(X)$ такие, что линейные формы $L_1 = \xi_1 + \cdots + \xi_n$ и $L_2 = \xi_1 + \cdots + \xi_{n-1} + \delta\xi_n$ независимы.

Доказательство. Рассмотрим на группе X функцию

$$\rho(x) = 1 + (1/2)\mathrm{Re}(x, \widetilde{y}).$$

Тогда $\rho(x) > 0,\ x \in X$, и

$$\int\limits_X \rho(x) dm_X(x) = 1.$$

Обозначим через μ – распределение на X с плотностью $\rho(x)$ относительно m_X. Очевидно, что $\mu \notin \Gamma(X) * I(X)$. Пусть $\xi_j,\ j = 1, 2, \dots, n,\ n \geq 2$, – независимые одинаково распределенные случайные величины со значениями в группе X и с распределением μ. Положим $f(y) = \widehat{\mu}(y)$. Проверим что линейные формы $L_1 = \xi_1 + \cdots + \xi_n$ и $L_2 = \xi_1 + \cdots + \xi_{n-1} + \delta\xi_n$ независимы. По лемме 10.1 достаточно убедиться, что характеристические функции случайных величин ξ_j удовлетворяют уравнению 10.1(i), которое принимает вид

$$f^{n-1}(u + v) f(u + \varepsilon v) = f^n(u) f^{n-1}(v) f(\varepsilon v), \quad u, v \in Y, \tag{13.30}$$

где $\varepsilon = \widetilde{\delta}$. Пусть $a(\widetilde{y}) = \dfrac{1}{4}$, если $2\widetilde{y} \neq 0$ и $a(\widetilde{y}) = \dfrac{1}{2}$, если $2\widetilde{y} = 0$. Легко видеть, что

$$f(y) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad y = 0, \\ a(\widetilde{y}), & \text{если} \quad y = \pm\widetilde{y}, \\ 0 & \text{если} \quad y \notin \{0, \pm\widetilde{y}\}. \end{cases} \tag{13.31}$$

Очевидно, что уравнение (13.30) превращается в равенство, если либо $u = 0$ либо $v = 0$. Проверим, что уравнение (13.30) превращается в равенство при любых $u \neq 0$ и $v \neq 0$. Из (i) и (iii) следует, что $\varepsilon\widetilde{y} \neq \pm\widetilde{y}$. Поэтому из (13.31) вытекает, что правая часть в (13.30) равна нулю при любом $v \neq 0$. Если левая часть в (13.30) отлична от нуля, то это влечет, что $u + v, u + \varepsilon v \in \{0, \pm\widetilde{y}\}$. Отсюда следует, что $(I - \varepsilon)v \in \{0, \pm\widetilde{y}, \pm 2\widetilde{y}\}$. Принимая во внимание ($ii$), получаем, что $(I - \varepsilon)v = 0$. Но тогда из (i) вытекает, что $v = 0$. Полученное противоречие доказывает, что и левая часть в (13.30) равна нулю. □

13.22. Лемма. *Пусть p – простое число и $X = \Delta_p^{\aleph_0}$. Тогда для любого $n \geq 2$ существуют независимые одинаково распределенные случайные величины $\xi_j,\ j = 1, 2, \dots, n$, со значениями в группе X и с распределением $\mu \notin I(X)$ и автоморфизм $\delta \in \mathrm{Aut}(X)$ такие, что линейные формы $L_1 = \xi_1 + \cdots + \xi_n$ и $L_2 = \xi_1 + \cdots + \xi_{n-1} + \delta\xi_n$ независимы.*

Доказательство. Нам удобно считать, что элементами группы X являются двусторонние последовательности $x = (x_k)_{k=-\infty}^{\infty},\ x_k \in \Delta_p$. Рассмотрим автоморфизм $\delta \in \mathrm{Aut}(X)$ вида

$$\delta(x_k)_{k=-\infty}^{\infty} = (x_{k-1})_{k=-\infty}^{\infty}.$$

Мы имеем $\Delta_p^* \cong \mathbb{Z}(p^\infty)$. Тогда по теореме 1.7.2 $Y \cong (\mathbb{Z}(p^\infty))^{\aleph_0 *}$. Элементы группы Y будем записывать в виде $y = (y_k)_{k=-\infty}^{\infty},\ y_k \in \mathbb{Z}(p^\infty)$. Тогда

$$\widetilde{\delta}(y_k)_{k=-\infty}^{\infty} = (y_{k+1})_{k=-\infty}^{\infty}.$$

Положим $\widetilde{y} = (\widetilde{y}_k)_{k=-\infty}^{\infty}$, где $\widetilde{y}_k = 0$ при $k \neq 0$, а $\widetilde{y}_0$ – произвольный ненулевой элемент группы $\mathbb{Z}(p^\infty)$. Проверим, что автоморфизм δ и элемент $\widetilde{y}$ удовлетворяют условиям леммы 13.21.

Пусть $y = (y_k)_{k=-\infty}^{\infty} \in \mathrm{Ker}(I - \widetilde{\delta})$. Тогда $\widetilde{\delta} y = y$. Отсюда следует, что $y_{k+1} = y_k,\ k \in \mathbb{Z}$. Так как $y_k \neq 0$ лишь для конечного числа индексов k, то $y_k = 0,\ k \in \mathbb{Z}$. Таким образом, 13.21$(i)$ выполнено. Заметим теперь, что если $y = (y_k)_{k=-\infty}^{\infty} \in (I - \widetilde{\delta})Y,\ y \neq 0$, то по крайней мере два элемента y_{k_1} и y_{k_2} отличны от нуля. Отсюда вытекает 13.21(ii). Справедливость 13.21(iii) очевидна. Так как группа X вполне несвязна, то по предложению 3.6 $\Gamma(X) = D(X)$. Утверждение леммы вытекает теперь из леммы 13.21. □

13.23. Лемма. *Пусть p – простое число и*

$$X = \mathop{\mathbf{P}}_{m=1}^{\infty} \mathbb{Z}(p^{k_m}), \quad k_m \leq k_{m+1}, \quad m = 1, 2, \dots$$

Тогда для любого $n \geq 2$ существуют независимые одинаково распределенные случайные величины $\xi_j,\ j = 1, 2, \dots, n$, со значениями в группе X и с распределением $\mu \notin I(X)$ и автоморфизм $\delta \in \mathrm{Aut}(X)$ такие, что линейные формы $L_1 = \xi_1 + \dots + \xi_n$ и $L_2 = \xi_1 + \dots + \xi_{n-1} + \delta\xi_n$ независимы.

Доказательство. Будем записывать элементы группы X в виде $t = (t_m)_{m=1}^{\infty}$, где $t_m \in \mathbb{Z}(p^{k_m})$. Пусть $j \geq i$. Обозначим через π_{ij} эпиморфизм $\pi_{ij} : \mathbb{Z}(p^{k_j}) \mapsto \mathbb{Z}(p^{k_i})$, определяемый формулой

$$\pi_{ij}(t_j) = t_j (\mathrm{mod}\ \ p^{k_i}),\ t_j \in \mathbb{Z}(p^{k_j}).$$

Заметим, что $\pi_{m,m+1}\pi_{m+1,m+2} = \pi_{m,m+2}$. Зададим гомоморфизм $\delta : X \mapsto X$ по формуле $\delta(t_m)_{m=1}^{\infty} = (s_m)_{m=1}^{\infty}$, где

$$s_m = \begin{cases} t_m + \pi_{m,m+1}t_{m+1} + \pi_{m,m+2}t_{m+2}, & \text{если} \quad m \text{ нечетное}, \\ t_m + \pi_{m,m+1}t_{m+1}, & \text{если} \quad m \text{ четное}. \end{cases} \tag{13.32}$$

Очевидно, что гомоморфизм δ непрерывен. Проверим, что гомоморфизм δ является мономорфизмом. Предположим, что $\delta(t_m)_{m=1}^{\infty} = 0$. Возьмем два последовательных числа: нечетное m и следующее за ним четное $m+1$. Тогда имеем

$$t_m + \pi_{m,m+1}t_{m+1} + \pi_{m,m+2}t_{m+2} = 0, \tag{13.33}$$

$$t_{m+1} + \pi_{m+1,m+2}t_{m+2} = 0. \tag{13.34}$$

Применим $\pi_{m,m+1}$ к равенству (13.34). Получим

$$\pi_{m,m+1}t_{m+1} + \pi_{m,m+2}t_{m+2} = 0. \tag{13.35}$$

Вычитая из равенства (13.33) равенство (13.35) получаем, что $t_m = 0$ при $m = 1, 3, 5, \dots$. Тогда из (13.34) следует, что $t_{m+1} = 0$ при $m = 1, 3, 5, \dots$. Итак, $t_m = 0$ при $n \in \mathbb{N}$.

Проверим, что гомоморфизм δ является эпиморфизмом. Для этого докажем, что при любом $s = (s_m)_{m=1}^{\infty} \in X$ уравнение $\delta t = s$ имеет решение. Для этого достаточно доказать существование решения системы

$$\left\{ \begin{aligned} & t_m + \pi_{m,m+1}t_{m+1} + \pi_{m,m+2}t_{m+2} = s_m, && (13.36) \\ & t_{m+1} + \pi_{m+1,m+2}t_{m+2} = s_{m+1} && (13.37) \end{aligned} \right.$$

при любом нечетном m и следующим за ним четным $m+1$. Применим $\pi_{m,m+1}$ к равенству (13.37). Получим

$$\pi_{m,m+1}t_{m+1} + \pi_{m,m+2}t_{m+2} = \pi_{m,m+1}s_{m+1}. \tag{13.38}$$

Вычитая из равенства (13.36) равенство (13.38) получаем, что $t_m = s_m - \pi_{m,m+1}s_{m+1}$. Таким образом, находим все t_m, где m — нечетное, а затем из (13.37) все t_m, где m — четное. Итак, мы доказали, что $\delta \in \mathrm{Aut}(X)$.

По теореме 1.7.2

$$Y \cong \mathop{\mathbf{P}^*}_{m=1}^{\infty} \mathbb{Z}(p^{k_m}),$$

где $k_m \le k_{m+1}, \ m = 1, 2, \dots$. Элементы группы Y будем обозначать через $l = (l_m)_{m=1}^{\infty}$, где $l_m \in \mathbb{Z}(p^{k_m})$ и лишь конечное число элементов $l_m \neq 0$. Пусть $\widetilde{y} = (\widetilde{y}_m)_{m=1}^{\infty} \in Y$ такой элемент, что $\widetilde{y}_1 \neq 0, \ \widetilde{y}_m = 0$ при $m > 1$. Проверим, что автоморфизм δ и элемент $\widetilde{y}$ удовлетворяют условиям леммы 13.21.

Пусть $j \ge i$. Рассмотрим сопряженный к π_{ij} гомоморфизм $\widetilde{\pi}_{ij} : \mathbb{Z}(p^{k_i}) \mapsto \mathbb{Z}(p^{k_j})$, определяемый формулой

$$\widetilde{\pi}_{ij}t_i = p^{k_j - k_i}t_i, \ t_i \in \mathbb{Z}(p^{k_i}).$$

Несложно непосредственно проверить, что гомоморфизм $\widetilde{\delta}$ имеет вид $\widetilde{\delta}(l_m)_{m=1}^{\infty} = (h_m)_{m=1}^{\infty}$, где

$$h_m = \begin{cases} l_1, & \text{если} \quad m = 1, \\ \widetilde{\pi}_{m-1,m}l_{m-1} + l_m, & \text{если} \quad m \text{ четное }, \\ \widetilde{\pi}_{m-2,m}l_{m-2} + \widetilde{\pi}_{m-1,m}l_{m-1} + l_m, & \text{если} \quad m \text{ нечетное }, \ m \neq 1. \end{cases} \tag{13.39}$$

Из (13.32), очевидно, следует, что $I - \delta$ – эпиморфизм. Тогда по теореме 1.13(b) $I - \widetilde{\delta}$ – мономорфизм, т.е. выполнено 13.21(i). Из (13.39) вытекает 13.21(ii). Очевидно также, что выполнено 13.21(iii). Так как группа X вполне несвязна, то по предложению 3.6 $\Gamma(X) = D(X)$. Утверждение леммы вытекает теперь из леммы 13.21. □

13.24. Замечание. Пусть X – произвольная группа, G – замкнутая подгруппа группы X. Пусть $\alpha_j, \ \beta_j \in \mathrm{Aut}(G), \ \ j = 1, 2, \dots, n, \ n \ge 2$, и автоморфизмы $\alpha_j, \ \beta_j$ продолжаются до топологических автоморфизмов $\bar{\alpha}_j, \ \bar{\beta}_j$ группы X. Предположим, что существуют независимые случайные величины ξ_j со значениями в группе G и с распределениями $\mu_j \notin \Gamma(G) * I(G)$ такие, что линейные формы $L_1 = \alpha_1\xi_1 + \cdots + \alpha_n\xi_n$ и $L_2 = \beta_1\xi_1 + \cdots + \beta_n\xi_n$ независимы. Тогда, очевидно, ξ_j можно рассматривать, как независимые случайные величины со значениями в группе X. При этом линейные формы $L_1 = \bar{\alpha}_1\xi_1 + \cdots + \bar{\alpha}_n\xi_n$ и $L_2 = \bar{\beta}_1\xi_1 + \cdots + \bar{\beta}_n\xi_n$ будут независимы, а $\mu_j \notin \Gamma(X) * I(X)$.

Отметим, что если G – топологический прямой сомножитель в X, то любой топологический автоморфизм $\delta \in \mathrm{Aut}(G)$ продолжается до топологического автоморфизма группы X.

13.25. Лемма. *Пусть X – компактная вполне несвязная группа. Тогда либо группа X топологически изоморфна группе*

(i)
$$\mathop{\mathbf{P}}_{p \in \mathcal{P}} (\Delta_p^{n_p} \times G_p),$$

где n_p – неотрицательное целое число, а G_p – конечная p-примарная группа, либо при некотором простом p группа X имеет топологический прямой сомножитель, топологически изоморфный либо группе $\Delta_p^{\aleph_0}$, либо группе

(ii)
$$\mathop{\mathbf{P}}_{m=1}^{\infty} \mathbb{Z}(p^{k_m}), \quad k_m \le k_{m+1}, \quad m = 1, 2, \dots$$

Доказательство. По теоремам 1.6.1 и 1.6.4 группа характеров Y дискретна и периодична. По теореме 1.20.1 группа Y является слабым прямым произведением своих p-компонент

$$Y = \mathop{\mathbf{P}^*}_{p\in\mathcal{P}} Y_p. \tag{13.40}$$

По теореме 1.20.2 каждая из p-примарных подгрупп Y_p может быть представлена, как прямое произведение $Y_p = D_p \times N_p$, где D_p – максимальная делимая подгруппа в Y_p и N_p – счетная редуцированная p-примарная группа. По теореме 1.20.3 группа D_p в свою очередь может быть представлена как слабое прямое произведение групп, каждая из которых изоморфна группе $Z(p^\infty)$. Учитывая, что $(Z(p^\infty))^* \cong \Delta_p$, из теоремы 1.7.2 вытекает, что

$$X = \mathop{\mathbf{P}}_{p\in\mathcal{P}} X_p,$$

где

$$X_p \cong \Delta_p^{\mathfrak{n}} \times G_p,\ \mathfrak{n} \le \aleph_0,\ G_p \cong (N_p)^*. \tag{13.41}$$

Предположим, что группа топологически не изоморфна группе вида (i). Это значит, что в (13.41) при некотором p либо $\mathfrak{n} = \aleph_0$, либо группа G_p бесконечна. Если $\mathfrak{n} = \aleph_0$, то группа X имеет топологический прямой сомножитель G, топологически изоморфный группе $\Delta_p^{\aleph_0}$. Если группа G_p бесконечна, то и группа N_p бесконечна. Как известно, всякая счетная бесконечная редуцированная p-примарная абелева группа имеет прямой сомножитель, изоморфный группе

$$\mathop{\mathbf{P}^*}_{m=1}^{\infty} \mathbb{Z}(p^{k_m}), \quad k_m \le k_{m+1}, \quad m = 1, 2, \dots$$

([80, предложение 77.5]). Поэтому такой прямой сомножитель имеет и группа N_p. Но тогда по теореме 1.7.2 группа G_p имеет топологический прямой сомножитель G, топологически изоморфный группе вида (ii). □

13.26. Теорема. *Пусть X – компактная вполне несвязная группа, ξ_1 и ξ_2 – независимые случайные величины со значениями в группе X и с распределениями μ_1 и μ_2. Пусть α_j, β_j – топологические автоморфизмы группы X. Для того чтобы из независимости линейных форм $L_1 = \alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2$ и $L_2 = \beta_1\xi_1 + \beta_2\xi_2$ вытекало, что $\mu_1, \mu_2 \in I(X)$, необходимо и достаточно, чтобы группа X была топологически изоморфна группе вида* 13.25(i).

Доказательство. Необходимость. Предположим, что группа X топологически не изоморфна группе вида 13.25(i). По лемме 13.25 при некотором простом p группа X имеет топологический прямой сомножитель G, топологически изоморфный либо группе $\Delta_p^{\aleph_0}$, либо группе вида 13.25(ii). Если группа X имеет топологический прямой сомножитель G, топологически изоморфный группе $\Delta_p^{\aleph_0}$, то по лемме 13.22 существуют автоморфизм $\delta \in \mathrm{Aut}(G)$ и независимые случайные величины ξ_1 и ξ_2 со значениями в G и с распределениями μ_1, $\mu_2 \notin I(G)$ такие, что линейные формы $L_1 = \xi_1 + \xi_2$ и $L_2 = \xi_1 + \delta\xi_2$ независимы. Если же группа X имеет топологический прямой сомножитель, топологически изоморфный группе вида 13.25(ii), то аналогичное утверждение верно по лемме 13.23. Поскольку подгруппа G является топологическим прямым сомножителем в X, то необходимость вытекает из замечания 13.24.

Достаточность. Предположим, что группа X топологически изоморфна группе вида 13.25(i). По лемме 10.1 независимость линейных форм L_1 и L_2 равносильна тому, что характеристические функции $\widehat{\mu}_j(y)$ удовлетворяют уравнению 10.1(i). Положим $\nu_j = \mu_j * \bar{\mu}_j$. Из 2.7($c$) и 2.7($d$) вытекает, что $\widehat{\nu}_j(y) = |\widehat{\mu}_j(y)|^2 \geq 0, \ \ y \in Y$. Очевидно, что характеристические функции $\widehat{\nu}_j(y)$ также удовлетворяют уравнению 10.1(i). Если мы докажем, что $\nu_j \in I(X)$, то из 2.7(e) следует, что и $\mu_j \in I(X)$. Это дает нам возможность решать уравнение 10.1(i) в предположении, что $\widehat{\mu}_j(y) \geq 0$. Достаточность будет доказана, если мы проверим, что функции $\widehat{\mu}_j(y)$ принимают лишь значения 0 и 1. Действительно, в этом случае $\widehat{\mu}_j^2(y) = \widehat{\mu}_j(y), \ j = 1, 2$, при всех $y \in Y$. Из 2.7(b) и 2.7(c) тогда следует, что $\mu_j^{*2} = \mu_j$, т.е. $\mu_j \in I(X), \ j = 1, 2$.

Пусть $y_0 \in Y$. Учитывая (13.40), мы имеем

$$y_0 = \sum_{j=1}^{n} \ y_j,$$

где $y_j \in Y_{p_j}$. Очевидно, что ${p_j}^{k_j} \ y_j = 0, \ j = 1, 2, \ldots, n$ при некоторых k_j. Рассмотрим подгруппы $B_j = \{y \in Y_{p_j} : {p_j}^{k_j} \ y = 0\}$. Тогда $y_0 \in B = B_1 \times \cdots \times B_n$. Так как группа X топологически изоморфна группе вида 13.25(i), то каждая подгруппа B_j конечна. Следовательно, подгруппа B также конечна. Очевидно, что подгруппа B характеристическая. Ясно, что для любых $u, v \in Y$ существует подгруппа B указанного вида, такая что $u, v \in B$. Рассмотрим ограничение уравнения 10.1(i) на B. По следствию 2.11 сужения характеристических функций $\widehat{\mu}_j(y)$ на B – это характеристические функции некоторых распределений на фактор-группе $X/A(X, B)$. Так как группа B конечна и в силу теорем 1.9.1 и 1.9.2 $(X/A(X, B))^* \cong B$, то фактор-группа $X/A(X, B)$ также конечна. По теореме 13.1 характеристические функции $\widehat{\mu}_j(y)$ принимают лишь значения 0 и 1. Достаточность также доказана. $\square$

Теорема 13.16 означает, что теорема Скитовича–Дармуа для двух независимых случайных величин верна для произвольных дискретных групп. Из теоремы 13.26 вытекает, что теорема Скитовича–Дармуа для двух независимых случайных величин верна для компактных вполне несвязных групп вида 13.25(i). Ниже мы докажем, что теорема Скитовича–Дармуа для двух независимых случайных величин верна для прямого произведения указанных групп и группы $\mathbb{R}^m$. Этот результат можно рассматривать, как обобщение теоремы 13.6. Для доказательства нам понадобится следующая лемма.

13.27. Лемма. *Пусть $H = F \times S$, где F – дискретная периодическая группа, удовлетворяющая условию:*

(i) *для любого простого числа p подгруппа $F_{(p)} = \{d \in F : pd = 0\}$ конечна, а S – компактная группа.*

Тогда для любого элемента $h_0 \in H$ и любого автоморфизма $\varepsilon \in \mathrm{Aut}(H)$ существует такая компактная подгруппа Q в H, что $h_0 \in Q$ и $\varepsilon(Q) = Q$.

Доказательство. Рассмотрим разложение группы F в слабое прямое произведение ее p-компонент

$$\mathop{\mathbf{P^*}}_{p \in \mathcal{P}} F_p.$$

Пусть $d \in F$. Тогда элемент d представим в виде

$$d = \sum_{j=1}^{n} d_j,$$

где $d_j \in F_{p_j}$, а значит, при некоторых натуральных k_j выполнено $p_j^{k_j} d_j = 0, \ j = 1, 2, \dots, n$. Будем считать, что k_j здесь выбраны наименьшими из возможных. Положим

$$B_j = \{c \in F_{p_j} : p_j^{k_j} c = 0\}.$$

Тогда

$$d \in B_1 \times \cdots \times B_n = B, \tag{13.42}$$

и из условия (i) следует, что подгруппа B конечна. Очевидно, что для любого конечного подмножества $M \subset F$ существует подгруппа B указанного вида, содержащая M.

Обозначим через $h = (d, k), \ d \in F, \ k \in S,$ – элементы группы H. Пусть $\pi : H \mapsto F$ – гомоморфизм $\pi h = \pi(d, k) = d$. Для автоморфизма $\varepsilon \in \mathrm{Aut}(H)$ рассмотрим подгруппу $S_\varepsilon = \pi(\varepsilon(S))$. Поскольку гомоморфизмы π и ε непрерывны, а S – компактная группа, то S_ε – также компактная группа. В силу дискретности группы F, группа S_ε конечна. Очевидно, мы имеем

$$\varepsilon(S) \subset S_\varepsilon \times S. \tag{13.43}$$

Пусть $h_0 = (d_0, k_0) \in H$. Обозначим через B подгруппу вида (13.42), содержащую элемент d_0 и подгруппы S_ε и $S_{\varepsilon^{-1}}$. Тогда $h_0 \in B \times S$. Проверим, что $\varepsilon(B \times S) = B \times S$.

Пусть $c \in B_j$. Очевидно, что порядки элементов c и εc одинаковы и равны p_j^l, где $l \leq k_j$. Поскольку все элементы группы H, имеющие порядок p_j^l, где $l \leq k_j$, содержатся в $B_j \times S$, то $\varepsilon c \in B_j \times S$. Следовательно, $\varepsilon(B_j) \subset B_j \times S$. Отсюда вытекает, что

$$\varepsilon(B) \subset B \times S. \tag{13.44}$$

Поскольку $S_\varepsilon \subset B$, то из (13.43) и (13.44) получаем

$$\varepsilon(B \times S) \subset \varepsilon(B) + \varepsilon(S) \subset (B \times S) + (S_\varepsilon \times S) = B \times S. \tag{13.45}$$

Аналогично находим

$$\varepsilon^{-1}(B \times S) \subset B \times S. \tag{13.46}$$

Из (13.45) и (13.46) следует, что $\varepsilon(B \times S) = B \times S$. Положим $Q = B \times S$. Подгруппа Q – искомая. $\square$

13.28. Замечание Условие 13.27(i) существенно для справедливости леммы 13.27. Действительно, пусть G – произвольная конечная группа и $\Phi_i = G, \ i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Обозначим через F слабое прямое произведение

$$F = \mathop{\mathbf{P}^*}_{i=-\infty}^{-1} \Phi_i,$$

и рассмотрим группу F в дискретной топологии. Тогда F – дискретная периодическая группа, не удовлетворяющая условию 13.27(i). Обозначим через S прямое произведение

$$S = \mathop{\mathbf{P}}_{i=0}^{\infty} \Phi_i,$$

и рассмотрим группу S в топологии произведения. Очевидно, что S – компактная группа. Элементы группы $H = F \times S$ будем записывать в виде $h = \{x_i\}_{i=-\infty}^{\infty}$, где $x_i \in \Phi_i$, причем $x_i = 0$ при $i < n(h)$. Положим $a\{x_i\}_{i=-\infty}^{\infty} = \{x_{i+1}\}_{i=-\infty}^{\infty}$. Очевидно, что $a \in \mathrm{Aut}(H)$. Ясно, что для любого элемента $h \in H, \ h \neq 0$, траектория $\{a^n h\}_{n=0}^{\infty}$ некомпактна. Следовательно, не существует такой компактной подгруппы $Q \subset H$, которая была бы инвариантна относительно a.

13.29. Теорема. *Пусть*

$$(i) \qquad X = \mathbb{R}^m \times K \times D,$$

где $m \ge 0$, K – группа вида 13.25(i), а D – дискретная группа. Пусть ξ_1 и ξ_2 – независимые случайные величины со значениями в группе X и с распределениями μ_1 и μ_2. Пусть α_j, β_j – топологические автоморфизмы группы X. Тогда из независимости линейных форм $L_1 = \alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2$ и $L_2 = \beta_1\xi_1 + \beta_2\xi_2$ вытекает, что $\mu_1, \mu_2 \in \Gamma(X) * I(X)$.

Доказательство. Легко видеть, что $b_X = K \times b_D$ и подгруппа $\mathbb{R}^m \times b_X$ – характеристическая. Поэтому, учитывая замечание 13.12, можно с самого начала считать группу D периодической. Обозначим $G = K \times D,\ H = G^*$. Тогда $Y \cong \mathbb{R}^m \times H$. Чтобы не вводить дополнительных обозначений, будем считать, что $Y = \mathbb{R}^m \times H$. Элементы группы Y будем обозначать через $y = (s, h)$, где $s \in \mathbb{R}^m,\ h \in H$. Обозначим $F = K^*,\ \ S = D^*$. Поскольку группа K компактна и вполне несвязна, то по теоремам 1.6.1 и 1.6.4 группа F дискретна и периодическая. Так как D – дискретная периодическая группа, то по теоремам 1.6.1 и 1.6.4 группа S компактна и вполне несвязна. Следовательно, группа $H = F \times S$ вполне несвязна и состоит из компактных элементов. Из сказанного следует, что $\mathbb{R}^m$ – связная компонента нуля группы Y, а следовательно, ограничение любого автоморфизма $\tau \in \mathrm{Aut}(Y)$ на $\mathbb{R}^m$ является топологическим автоморфизмом подгруппы $\mathbb{R}^m$. Обозначим это ограничение через $\tau_{\mathbb{R}^m}$. Поскольку H – подгруппа, состоящая из всех компактных элементов группы Y, то H – характеристическая подгруппа, а следовательно, ограничение любого автоморфизма $\tau \in \mathrm{Aut}(Y)$ на подгруппу H также является автоморфизмом подгруппы H. Обозначим это ограничение через τ_H. Следовательно, любой автоморфизм $\tau \in \mathrm{Aut}(Y)$ имеет вид $\tau(s, h) = (\tau_{\mathbb{R}^m} s, \tau_H h)$.

Рассуждая так же, как и при доказательстве теоремы 13.1, мы сведем доказательство теоремы к случаю, когда линейные формы L_1 и L_2 имеют вид $L_1 = \xi_1 + \xi_2$ и $L_2 = \xi_1 + \delta\xi_2$, где $\delta \in \mathrm{Aut}(X)$. Обозначим $f(y) = \widehat{\mu}_1(y),\ g(y) = \widehat{\mu}_2(y)$, $\varepsilon = \widehat{\delta}$. В силу леммы 10.1 доказательство теоремы сводится к решению уравнения (13.1), которое в наших обозначениях принимает вид

$$f(s + s', h + h')g(s + \varepsilon_{\mathbb{R}^m} s', h + \varepsilon_H h')$$

$$= f(s, h)g(s, h)f(s', h')g(\varepsilon_{\mathbb{R}^m} s', \varepsilon_H h'), \quad (s, h),\ (s', h') \in Y. \tag{13.47}$$

Рассмотрим распределения $\nu_j = \mu_j * \bar{\mu}_j$. В силу 2.7$(c)$ и 2.7(d) $\widehat{\nu}_j(y) = |\widehat{\mu}_j(y)|^2 \ge 0$. Очевидно, что характеристические функции $\widehat{\nu}_j(0, h)$ удовлетворяют уравнению

$$\widehat{\nu}_1(0, h + h')\widehat{\nu}_2(0, h + \varepsilon_H h') = \widehat{\nu}_1(0, h)\widehat{\nu}_2(0, h)\widehat{\nu}_1(0, h')\widehat{\nu}_2(0, \varepsilon_H h'), \quad h, h' \in H. \tag{13.48}$$

Легко видеть, что компактная вполне несвязная группа K топологически изоморфна группе вида 13.25(i) тогда и только тогда, когда ее группа характеров $F = K^*$ удовлетворяет условию 13.27(i). Из условий теоремы следует поэтому, что условия леммы 13.27 выполнены для группы H. Пусть $h_0 \in H$. По лемме 13.27 существует такая компактная подгруппа $Q \subset H$, что $h_0 \in Q$ и $\varepsilon(Q) = Q$. По теореме 1.9.2 группа Q является группой характеров группы N, где $N \cong G/A(G, Q)$. Поскольку группа Q компактна, то по теореме 1.6.1 группа N дискретна. Рассмотрим ограничение уравнения (13.48) на Q. Это можно сделать, поскольку $\varepsilon(Q) = Q$. Из леммы 10.1 и следствия 13.17 вытекает, что $\widehat{\nu}_1(0, h) = \widehat{\nu}_2(0, h),\ h \in Q$, и функции $\widehat{\nu}_j(0, h),\ h \in Q$, являются характеристическими функциями распределения Хаара некоторой конечной подгруппы в N. Отсюда вытекает, что характеристические функции $\widehat{\nu}_j(0,h)$ принимают на Q лишь два значения 0 и 1. Отсюда следует, что

$$\widehat{\nu}_1(0,h)=\widehat{\nu}_2(0,h), \quad h\in H,$$

и характеристические функции $\widehat{\nu}_j(0,h)$ принимают на H лишь два значения 0 и 1. Положим

$$E=\{h\in H:\widehat{\nu}_1(0,h)=\widehat{\nu}_2(0,h)=1\}.$$

Мы имеем

$$\widehat{\nu}_1(0,h)=\widehat{\nu}_2(0,h)=\begin{cases}1, & \text{если} \quad h\in E,\\ 0, & \text{если} \quad h\notin E.\end{cases} \tag{13.49}$$

Из предложения 2.13 следует, что E открытая подгруппа в H. Положим $M=A(G,E)$. Тогда по теореме 1.9.4 M – компактная подгруппа в G. Из 2.7(b), 2.14(i) и (13.49) вытекает, что

$$\widehat{\nu}_1(0,h)=\widehat{\nu}_2(0,h)=\widehat{m}_M(y),\ h\in H.$$

Из 2.7(e) тогда легко заключить, что характеристические функции $\widehat{\mu}_1(0,h)$ и $\widehat{\mu}_2(0,h)$ имеют вид

$$f(0,h)=\widehat{m}_M(h)(g_1,h), \quad g(0,h)=\widehat{m}_M(h)(g_2,h),\ h\in H, \tag{13.50}$$

где $g_1,g_2\in G$. Заметим, что из теорем 1.9.1 и 1.9.2 следует, что $M^*\cong H/E$.

Заменяя распределения μ_j их сдвигами, будем считать, что в (13.50) $g_1=g_2=0$. Тогда

$$f(0,h)=g(0,h)=\begin{cases}1, & \text{если} \quad h\in E,\\ 0, & \text{если} \quad h\notin E.\end{cases} \tag{13.51}$$

Из (13.51) по предложению 2.13 следует, что характеристические функции $f(s,h)$ и $g(s,h)$ E-инвариантны. Легко видеть также, что $\varepsilon(E)=E$. Поэтому мы можем перейти от уравнения (13.47) на группе Y к индуцированному уравнению на фактор-группе $Y/E\cong\mathbb{R}^m\times(H/E)$, полагая $\widehat{f}([y])=f(y)$, $\widehat{g}([y])=g(y)$, $\widehat{\varepsilon}[y]=[\varepsilon y]$. При этом гомоморфизм, индуцированный автоморфизмом ε на фактор-группе Y/E, очевидно, является топологическим автоморфизмом фактор-группы Y/E. Положим $L=H/E$. Очевидно, что ограничение автоморфизма $\widehat{\varepsilon}\in\mathrm{Aut}(Y/E)$ на L является топологическим автоморфизмом L. Обозначим это ограничение через $\widehat{\varepsilon}_L$. Элементы группы $Y/E\cong\mathbb{R}^m\times L$ будем обозначать через (s,l), $s\in\mathbb{R}^m$, $l\in L$. В наших обозначениях $\widehat{\varepsilon}(s,l)=(\varepsilon_{\mathbb{R}^m}s,\widehat{\varepsilon}_L l)$. Уравнение, индуцированное уравнением (13.47) на фактор-группе Y/E, имеет вид

$$\begin{aligned}&\widehat{f}(s+s',l+l')\widehat{g}(s+\varepsilon_{\mathbb{R}^m}s',l+\widehat{\varepsilon}_L l')\\ &=\widehat{f}(s,l)\widehat{g}(s,l)\widehat{f}(s',l')\widehat{g}(\varepsilon_{\mathbb{R}^m}s',\widehat{\varepsilon}_L l'), \quad (s,l),\ (s',l')\in\mathbb{R}^m\times L.\end{aligned} \tag{13.52}$$

Легко видеть, что для решений уравнения (13.52) выполнено

$$\{l\in L:\widehat{f}(0,l)=1\}=\{l\in L:\widehat{g}(0,l)=1\}=\{0\}. \tag{13.53}$$

Рассмотрим подгруппу $V=\{l\in L:\widehat{\varepsilon}_L l=l\}$. Как следует из (13.48), сужения характеристических функций $\widehat{f}(0,l)$ и $\widehat{g}(0,l)$ на V удовлетворяют уравнению

$$\widehat{f}(0,l+l')\widehat{g}(0,l+l')=\widehat{f}(0,l)\widehat{g}(0,l)\widehat{f}(0,l')\widehat{g}(0,l'), \quad l,l'\in V. \tag{13.54}$$

Полагая в (13.54) $l' = -l$ и учитывая (13.51), получаем, что $\widehat{f}(0,l) = \widehat{g}(0,l) = 1$ при всех $l \in V$. Учитывая (13.53), это означает, что $V = \{0\}$, т.е.

$$\mathrm{Ker}(I - \widehat{\varepsilon}_L) = \{0\}. \tag{13.55}$$

Поскольку M – компактная подгруппа в G, а группа G вполне несвязна, то M – компактная вполне несвязная группа, а следовательно, по теоремам 1.6.1 и 1.6.4 L – дискретная периодическая группа. Заметим, что группа M, как компактная подгруппа в G, топологически изоморфна группе вида 13.25(i). Следовательно, группа L удовлетворяет условию 13.27(i). Но для таких групп L, как нетрудно проверить, любой мономорфизм является автоморфизмом. Поэтому из (13.55) вытекает, что

$$I - \widehat{\varepsilon}_L \in \mathrm{Aut}(L). \tag{13.56}$$

Кроме того, очевидно, что для решений уравнения (13.52) мы имеем

$$\widehat{f}(0,l) = \widehat{g}(0,l) = \begin{cases} 1, & \text{если} \ \ l = 0, \\ 0, & \text{если} \ \ l \neq 0. \end{cases} \tag{13.57}$$

Подставим в (13.52) $l = l' = 0$. Учитывая лемму 10.1, из полученного уравнения по теореме по теореме Гурье–Олкина находим

$$\widehat{f}(s,0) = \exp\{-\langle A_1 s, s\rangle + i\langle t_1, s\rangle\},$$

$$\widehat{g}(s,0) = \exp\{-\langle A_2 s, s\rangle + i\langle t_2, s\rangle\}, \quad s \in \mathbb{R}^m, \tag{13.58}$$

где A_j – симметричные неотрицательно определенные матрицы, $t_j \in \mathbb{R}^m$, $j = 1, 2$.

Учитывая (13.56), (13.57) и (13.58), мы решаем уравнение (13.52) так, как это делается при доказательстве теоремы 13.6. В результате получаем представления

$$\widehat{f}(s,l) = \begin{cases} \exp\{-\langle A_1 s, s\rangle + i\langle t_1, s\rangle\}, & \text{если} \ \ l = 0, \\ 0, & \text{если} \ \ l \neq 0. \end{cases} \tag{13.59}$$

$$\widehat{g}(s,l) = \begin{cases} \exp\{-\langle A_2 s, s\rangle + i\langle t_2, s\rangle\}, & \text{если} \ \ l = 0, \\ 0, & \text{если} \ \ l \neq 0. \end{cases} \tag{13.60}$$

Возвращаясь от функций $\widehat{f}(s,l)$ и $\widehat{g}(s,l)$ к характеристическим функциям $\widehat{\mu}_j(y)$, из (13.59) и (13.60) заключаем, что $\mu_j \in \Gamma(X) * I(X)$. $\square$

Согласно теореме 13.26 в классе компактных вполне несвязных групп X условие: группа X топологически изоморфна группе вида 13.25(i), является не только достаточным, но и необходимым для справедливости на группе X теоремы Скитовича–Дармуа для двух независимых случайных величин. В этой связи интересно отметить, что группами, которые топологически изоморфны группам вида 13.29(i), не исчерпываются локально компактные абелевы группы, на которых теорема Скитовича–Дармуа справедлива для двух независимых случайных величин. Ниже мы построим пример группы X, топологически не изоморфной группе вида 13.29(i), и обладающей следующим свойством: если ξ_1 и ξ_2 – независимые случайные величины со значениями в группе X и с распределениями μ_1 и μ_2, а α_j, β_j, $j = 1, 2$, – топологические автоморфизмы группы X, то из независимости линейных форм $L_1 = \alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2$ и $L_2 = \beta_1\xi_1 + \beta_2\xi_2$ вытекает, что $\mu_1, \mu_2 \in \Gamma(X) * I(X)$.

13.30. Пример. Пусть p — простое число, а $\mathbb{Z}(p^\infty)$ – дискретная аддитивная группа вида 1.2(e). Через $\mathbb{Z}(p)$ обозначим подгруппу в $\mathbb{Z}(p^\infty)$ вида $\mathbb{Z}(p) = \{k/p : k = 0, 1, \dots, p-1\}$. Обозначим через p_n — n-е простое число и рассмотрим группу $\mathop{\mathbf{P}}\limits_{n=1}^{\infty} \mathbb{Z}(p_n^\infty)$. Обозначим через Y подгруппу в $\mathop{\mathbf{P}}\limits_{n=1}^{\infty} \mathbb{Z}(p_n^\infty)$, состоящую из таких элементов $y = (y_1, y_2, \dots, y_n, \dots)$, что $y_n \notin \mathbb{Z}(p_n)$ лишь для конечного числа индексов n. Положим

$$H = \mathop{\mathbf{P}}\limits_{n=1}^{\infty} \mathbb{Z}(p_n).$$

Тогда H – подгруппа в Y. Рассмотрим группу H в топологии произведения. Очевидно, что H – компактная абелева группа, удовлетворяющая второй аксиоме счетности. Превратим Y в топологическую группу, считая, что H – открытая подгруппа в Y. Тогда Y – локально компактная абелева группа, удовлетворяющая второй аксиоме. Очевидно, что группа Y недискретна некомпактна и вполне несвязна. Легко видеть, что

$$Y/H \cong \mathop{\mathbf{P}^*}\limits_{n=1}^{\infty} \mathbb{Z}(p_n^\infty).$$

Положим $X = Y^*$. Проверим вначале, что группа X топологически не изоморфна группе вида 13.29(i). Для этого заметим, что $Y^{(n)} = Y$ для любого натурального n. Отсюда по теореме 1.9.5 вытекает, что $X_{(n)} = \{0\}$ для любого натурального n, т.е. X – группа без кручения. Предположим, что группа X топологически изоморфна группе вида 13.29(i). Тогда, очевидно, $m = 0$. Кроме того, поскольку группа X некомпактна и недискретна, то по теореме 1.6.1 в 13.29(i) $K \neq \{0\}$ и $D \neq \{0\}$. Следовательно, по теоремам 1.7.1 и 1.6.1 группа Y имеет компактный прямой сомножитель M, где $M \cong D^*$. Так как группа Y вполне несвязна, то и группа M вполне несвязна. Отсюда по теореме 1.6.4 следует, что группа D периодическая. Но это противоречит тому, что X – группа без кручения. Следовательно, группа X топологически не изоморфна группе вида 13.29(i).

Пусть ξ_1 и ξ_2 – независимые случайные величины со значениями в группе X и с распределениями μ_1 и μ_2. Пусть α_j, β_j – топологические автоморфизмы группы X. Проверим, что из независимости линейных форм $L_1 = \alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2$ и $L_2 = \beta_1\xi_1 + \beta_2\xi_2$ следует, что $\mu_1, \mu_2 \in I(X)$. Рассуждая так же, как при доказательстве теоремы 13.1, мы можем считать, что $L_1 = \xi_1 + \xi_2$ и $L_2 = \xi_1 + \delta\xi_2$, где $\delta \in \mathrm{Aut}(X)$, и $\widehat{\mu}_j(y) \geq 0, \ j = 1, 2$. Обозначим $f(y) = \widehat{\mu}_1(y), \ g(y) = \widehat{\mu}_2(y)$ и $\varepsilon = \widetilde{\delta}$. По лемме 10.1 независимость линейных форм L_1 и L_2 равносильна тому, что характеристические функции $\widehat{\mu}_j(y)$ удовлетворяют уравнению (13.1).

Пусть $a \in \mathrm{Aut}(Y)$ и $y = (y_1, y_2, \dots, y_n, \dots) \in H$. Обозначим $y^{(n)} = (y_1, y_2, \dots, y_n, 0, 0, \dots)$. Тогда $y^{(n)} \in H$ и $y^{(n)} \to y$. Отсюда следует, что $ay^{(n)} \to ay$. Так как, очевидно, $ay^{(n)} \in H$, то и $ay \in H$. Значит, $a(H) \subset H$. Отсюда следует, что ограничение на подгруппу H любого топологического автоморфизма a группы Y является топологическим автоморфизмом подгруппы H. В частности, ограничение ε на подгруппу H является топологическим автоморфизмом подгруппы H, и мы можем рассмотреть ограничение уравнения (13.1) на подгруппу H. По теореме 1.7.2 $H = G^*$, где

$$G \cong \mathop{\mathbf{P}^*}\limits_{n=1}^{\infty} \mathbb{Z}(p_n).$$

Поскольку группа G дискретна, то по лемме 10.1 и следствию 13.17 имеем

$$f(y) = g(y) = m_K(y), \ y \in H, \tag{13.61}$$

где K – некоторая конечная подгруппа группы G. Легко видеть, что тогда K имеет вид

$$K = \mathop{\mathbf{P}}_{j=1}^{l} \mathbb{Z}(p_{n_j}).$$

Обозначим $S = \{n_1, n_2, \dots, n_l\}$. Положим $L = A(H, K)$. Очевидно, что

$$L = \mathop{\mathbf{P}}_{n\in\mathbb{N}\setminus S} \mathbb{Z}(p_n).$$

Из 2.14(i) и (13.61) вытекает, что $f(y) = g(y) = 1$ при $y \in L$. Отсюда, по предложению 2.13 следует, что функции $f(y)$ и $g(y)$ – L-инвариантны. Кроме того, по следствию 13.17 и лемме 13.3 $\varepsilon(L) = L$. Поэтому мы можем перейти от уравнения (13.1) на группе Y к индуцированному уравнению на фактор-группе Y/L, полагая $\widehat{f}([y]) = f(y)$, $\widehat{g}([y]) = g(y)$, $\widehat{\varepsilon}[y] = \varepsilon y$. Так как $\varepsilon(L) = L$, то $\widehat{\varepsilon} \in \mathrm{Aut}(Y/L)$. Таким образом, функции $\widehat{f}([y])$ и $\widehat{g}([y])$ удовлетворяют уравнению

$$\widehat{f}([u] + [v])g([u] + \widehat{\varepsilon}[v]) = f([u])g([u])f([v])g(\widehat{\varepsilon}[v]), \quad [u], [v] \in Y/L. \tag{13.62}$$

Нетрудно проверить, что

$$Y/L \cong \mathop{\mathbf{P}^*}_{n=1}^{\infty} \mathbb{Z}(p_n^\infty).$$

Учитывая теорему 1.7.2 и 1.10(d), отсюда следует, что $Y/L \cong F^*$, где

$$F = \mathop{\mathbf{P}}_{n=1}^{\infty} \Delta_{p_n}.$$

Поскольку, очевидно, F – компактная вполне несвязная группа, то искомое утверждение вытекает из леммы 10.1, уравнения (13.62) и теоремы 13.26.

Рассмотрим теперь случай, когда X – связная компактная группа. Справедливо следующее утверждение.

13.31. Теорема. *Пусть X – связная компактная группа. Тогда существуют независимые случайные величины ξ_1 и ξ_2 со значениями в группе X и с распределениями $\mu_1, \mu_2 \notin \Gamma(X) * I(X)$ и топологические автоморфизмы α_j, β_j группы X такие, что линейные формы $L_1 = \alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2$ и $L_2 = \beta_1\xi_1 + \beta_2\xi_2$ независимы.*

Доказательство. По теоремам 1.6.1 и 1.6.2 группа характеров Y – дискретная группа без кручения. Возможны два случая: $f_p \notin \mathrm{Aut}(X)$ для некоторого простого p и $f_p \in \mathrm{Aut}(X)$ при всех p.

1. Пусть $f_p \notin \mathrm{Aut}(X)$ для некоторого простого p. Предположим, что p – минимальное из натуральных чисел, обладающих этим свойством. Так как группа X связна, то по теореме 1.9.6 $X^{(n)} = X$ для всех натуральных n. Поэтому, если $f_p \notin \mathrm{Aut}(X)$, то $\mathrm{Ker} f_p \neq \{0\}$.

Пусть $p = 2$. Тогда $\mathrm{Ker} f_2 = \{x \in X : 2x = 0\} \neq \{0\}$, т.е. группа X содержит элементы порядка 2. Так как $c_X = X$, то по теореме 7.10 существуют независимые случайные величины ξ_1 и ξ_2 со значениями в группе X и с распределениями $\mu_1, \mu_2 \notin \Gamma(X) * I(X)$ такие, что линейные формы $L_1 = \xi_1 + \xi_2$ и $L_2 = \xi_1 - \xi_2$ независимы.

Предположим, что $p \geq 3$. Положим $a = 1 - p$. Поскольку число p – минимальное натуральное число, обладающее свойством $f_p \notin \mathrm{Aut}(X)$, то $f_{-a} \in \mathrm{Aut}(X)$, а значит и $f_a \in \mathrm{Aut}(X)$. По теореме 1.9.5 $\mathrm{Ker} f_p = A(X, Y^{(p)})$. Следовательно, $Y^{(p)} \neq Y$. Возьмем $\widetilde{y} \notin Y^{(p)}$ и проверим, что автоморфизм $\delta = f_a$ и элемент $\widetilde{y}$ удовлетворяют условиям леммы 13.21. Из 1.13(d) следует, что $\widetilde{f_a} = f_a$.

Имеем $I-\widetilde{f}_a=\widetilde{f}_p$. Поскольку Y – группа без кручения, то $\operatorname{Ker}(I-\widetilde{f}_a)=\{0\}$, т.е. выполнено 13.21($i$). Так как $I-\widetilde{f}_a=\widetilde{f}_p$, то $(I-\widetilde{f}_a)Y=Y^{(p)}$. Поскольку $p\geq 3$, то числа 2 и p взаимно просты. Поэтому существуют целые m и n такие, что $2m+pn=1$. Отсюда следует $y=2my+pny$. Поэтому, если $\widetilde{y}\notin Y^{(p)}$, то и $2\widetilde{y}\notin Y^{(p)}$. Следовательно, выполнено 13.21(ii). Так как Y – группа без кручения, то очевидно, выполнено 13.21(iii). В этом случае утверждение теоремы вытекает из леммы 13.21.

2. $f_p\in\operatorname{Aut}(X)$ при всех p. Это означает, что X – группа без кручения. Так как группа X связна, то по теореме 1.11.4 группа X топологически изоморфна группе вида

$$(\Sigma_{\mathbf{a}})^{\mathfrak{n}},\quad \mathbf{a}=(2,3,4,\dots),\quad \mathfrak{n}\leq\aleph_0.$$

Очевидно, что теорему достаточно доказать для группы $X=\Sigma_{\mathbf{a}}$. Тогда $Y\cong\mathbb{Q}$. Элементы группы Y будем обозначать через $r,\ r\in\mathbb{Q}$.

Пусть H – подгруппа в Y вида $H=\left\{\dfrac{m}{5^n}\right\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$. Обозначим $G=H^*,\ K=A(G,H^{(2)})$. Из теорем 1.9.1 и 1.9.2 вытекает, что $K\cong\mathbb{Z}(2)$. Пусть λ – произвольное неидемпотентное распределение на G с носителем в K. Легко видеть, что характеристическая функция $\widehat{\lambda}(h)$ имеет вид

$$\widehat{\lambda}(h)=\begin{cases}1, & \text{если}\quad h\in H^{(2)},\\ c, & \text{если}\quad h\notin H^{(2)},\end{cases}\tag{13.63}$$

где $-1<c<1$. Рассмотрим на группе Y функцию

$$g(y)=\begin{cases}\widehat{\lambda}(y), & \text{если}\quad y\in H,\\ 0, & \text{если}\quad y\notin H.\end{cases}\tag{13.64}$$

По предложению 2.12 $g(y)$ – положительно определенная функция. По теореме Бохнера существует распределение $\mu\in\mathrm{M}^1(X)$ такое, что $\widehat{\mu}(y)=g(y)$. Очевидно, что $\mu\notin\Gamma(X)*I(X)$.

Пусть ξ_1 и ξ_2 – независимые одинаково распределенные случайные величины со значениями в группе X и с распределением μ. Проверим, что линейные формы $L_1=\xi_1+2\xi_2$ и $L_2=2\xi_1-\xi_2$ независимы. По лемме 10.1 достаточно убедиться, что характеристические функции случайных величин ξ_j удовлетворяют уравнению 10.1(i), которое принимает вид

$$\widehat{\mu}(u+2v)\widehat{\mu}(2u-v)=\widehat{\mu}(u)\widehat{\mu}(2u)\widehat{\mu}(2v)\widehat{\mu}(-v),\quad u,v\in Y.\tag{13.65}$$

Из (13.63) вытекает, что при $u,v\in H$ уравнение (13.65) превращается в равенство. Очевидно также, что уравнение (13.65) превращается в равенство, если либо $u\in H,\ v\notin H$ либо $v\in H,\ u\notin H$. Предположим, что $u,v\notin H$. Тогда правая часть в (13.65) равна нулю. Если левая часть в (13.65) отлична от нуля, то тогда $u+2v, 2u-v\in H$. Но в этом случае $5u\in H$, и следовательно, $u\in H$. Полученное противоречие показывает, что уравнение (13.65) превращается в равенство при любых $u,v\in Y$. $\square$

13.32. Замечание. Пусть X – связная компактная группа. Предположим, что автоморфизмы $\alpha_j=f_{m_j},\ \beta_j=f_{n_j}\in\operatorname{Aut}(X)$ удовлетворяют условию:

$$\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2=0.\tag{13.66}$$

Пусть γ – невырожденное гауссовское распределение на X. Из леммы 10.1 и замечания 3.4 следует, что если ξ_1 и ξ_2 независимые одинаково распределенные с распределением γ случайные величины со значениями в группе X, то линейные формы $L_1 = \alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2$ и $L_2 = \beta_1\xi_1 + \beta_2\xi_2$ независимы. Возникает естественный вопрос, можно ли построить автоморфизмы α_j, β_j в теореме 13.31, удовлетворяющие условию (13.66), и независимые одинаково распределенные случайные величины ξ_1 и ξ_2, со значениями в группе X и с распределением $\mu \notin \Gamma(X) * I(X)$ такие, что линейные формы $L_1 = \alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2$ и $L_2 = \beta_1\xi_1 + \beta_2\xi_2$ независимы.

В случае **2** это уже было сделано при доказательстве теоремы 13.31. Рассмотрим случай **1**.

Пусть $f_p \notin \mathrm{Aut}(X)$, где $p \geq 3$. Предположим, что ξ_1 и ξ_2 – независимые случайные величины со значениями в группе X и с распределением μ. Рассмотрим линейные формы $L_1 = \xi_1 + a\xi_2$ и $L_2 = a\xi_1 - \xi_2$, где $a = p - 1$. Проверим, что существует такое распределение $\mu \notin \Gamma(X) * I(X)$, что L_1 и L_2 независимы. Положим $q = a^2 + 1$. По лемме 10.1 независимость линейных форм L_1 и L_2 равносильна тому, что характеристическая функция $\widehat{\mu}(y)$ удовлетворяют уравнению 10.1(i), которое принимает вид

$$\widehat{\mu}(u + av)\widehat{\mu}(au - v) = \widehat{\mu}(u)\widehat{\mu}(au)\widehat{\mu}(av)\widehat{\mu}(-v), \quad u, v \in Y. \tag{13.67}$$

Если $f_q \notin \mathrm{Aut}(X)$, то мы рассуждаем так же, как при доказательстве теоремы 13.31 в случае **1**. Возьмем $\widetilde{y} \notin Y^{(q)}$. Пусть μ – распределение на X с плотностью $\rho(x) = 1 + \mathrm{Re}(x, \widetilde{y})$ относительно m_X. Ясно, что $\mu \notin \Gamma(X) * I(X)$. Проверим, что характеристическая функция $\widehat{\mu}(y)$ удовлетворяют уравнению (13.67). Очевидно, что уравнение (13.67) превращается в равенство, если либо $u = 0$ либо $v = 0$. Пусть $u \neq 0$ и $v \neq 0$. Так как $a\widetilde{y} \neq -\widetilde{y}$, то правая часть уравнения (13.67) равна нулю при любом $v \neq 0$. Если левая часть уравнения (13.67) отлична от нуля, то это влечет, что $u + av, au - v \in \{0, \pm\widetilde{y}\}$. Отсюда следует, что

$$qv \in \{0, \pm\widetilde{y}, \pm(a \pm 1)\widetilde{y}\}. \tag{13.68}$$

По условию $\pm\widetilde{y} \notin Y^{(q)}$. Поскольку числа $a+1$ и q взаимно просты и числа $a-1$ и q также взаимно просты, то $(a \pm 1)\widetilde{y} \notin Y^{(q)}$. Поэтому из (13.68) вытекает, что $qv = 0$. Поскольку Y – группа без кручения, то $v = 0$. Полученное противоречие доказывает, что и левая часть в (13.67) равна нулю.

Если $f_q \in \mathrm{Aut}(X)$, то мы используем схему доказательства теоремы 13.31 в случае **2**. Именно, пусть y_0 – произвольный элемент группы Y. Так как $f_q \in \mathrm{Aut}(X)$, то $f_q \in \mathrm{Aut}(Y)$. Поэтому можно рассмотреть подгруппу H в Y вида $H = \left\{\frac{m}{q^n}y_0\right\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$. Пусть $G = H^*$. Так как q и a взаимно просты, то $H \neq H^{(a)}$. Рассмотрим распределение $\pi = \gamma * \lambda \in \mathrm{M}^1(G)$, где $\gamma \in \Gamma(G)$, $\lambda \in \mathrm{M}^1(K)$, $K = A(G, H^{(a)})$ и построим μ, как это было сделано в теореме 13.31 при рассмотрении случая **2**.

Что касается групп X, для которых $f_2 \notin \mathrm{Aut}(X)$, то ответ на упомянутый выше вопрос, вообще говоря, отрицательный. Действительно, пусть $X = \mathbb{T}$. Тогда $\mathrm{Aut}(\mathbb{T}) = \{\pm I\}$, так что рассмотрение произвольных линейных форм L_1 и L_2 сводится к рассмотрению форм $L_1 = \xi_1 + \xi_2$ и $L_2 = \xi_1 - \xi_2$. Поскольку группа X содержит лишь один элемент порядка 2, то по теореме 9.9 если ξ_1 и ξ_2 – независимые одинаково распределенные с распределением μ случайные величины со значениями в группе X такие, что линейные формы $L_1 = \xi_1 + \xi_2$ и $L_2 = \xi_1 - \xi_2$ независимы, то $\mu \in \Gamma(X) * I(X)$.

С другой стороны, пусть $X = \mathbb{T}^2$. Как следует из леммы 9.6, существуют независимые одинаково распределенные с распределением $\mu_0 \notin \Gamma(X) * I(X)$ случайные величины ξ_1 и ξ_2 со значениями в группе X такие, что линейные формы $L_1 = \xi_1 + \xi_2$ и $L_2 = \xi_1 - \xi_2$ независимы.

13.33. Замечание. Пусть X – связная компактная группа. Следуя схеме доказательства теоремы 13.31, проверим, что утверждение теоремы 13.31 справедливо для произвольного числа $n \geq 2$ независимых случайных величин.

Пусть $f_2 \notin \mathrm{Aut}(X)$. Рассмотрим распределения μ_1 и μ_2 на группе $\mathbb{T}$, построенные в лемме 7.8. Из 2.7(c) следует, что параметры a и b в (7.10) можно выбрать таким образом, чтобы $\mu_1 = \lambda^{*(n-1)}$, где $\lambda \in \mathrm{M}^1(\mathbb{T})$. Пусть ξ_j – независимые случайные величины со значениями в группе $\mathbb{T}$ и с распределениями ν_j, где $\nu_1 = \cdots = \nu_{n-1} = \lambda,\ \nu_n = \mu_2$. Из лемм 7.8 и 10.1 вытекает, что линейные формы $L_1 = \xi_1 + \cdots + \xi_n$ и $L_2 = \xi_1 + \cdots + \xi_{n-1} - \xi_n$ независимы. Рассуждая далее так же, как при доказательстве утверждения (II) в теореме 7.10, получаем требуемое утверждение.

Если $f_p \notin \mathrm{Aut}(X)$, при некотором простом $p \geq 3$, то требуемое утверждение прямо вытекает из леммы 13.21.

Пусть $f_p \in \mathrm{Aut}(X)$ при всех p. Так же, как в теореме 13.31, будем считать, что $X = \Sigma_{\mathbf{a}}$, где $\mathbf{a} = (2, 3, 4, \dots)$. Пусть μ – распределение на группе X с характеристической функцией, определенной формулой (13.64). Пусть ξ_j – независимые одинаково распределенные случайные величины со значениями в группе X и с распределением μ. Рассуждая так же, как при доказательстве теоремы 13.31 и используя лемму 10.1, доказываем, что линейные формы $L_1 = \xi_1 + \cdots + \xi_{n-1} + \xi_n$ и $L_2 = 2\xi_1 + \cdots + 2\xi_{n-1} - \xi_n$ независимы.

§14. Число случайных величин $n \geq 3$

Пусть X – локально компактная абелева группа, удовлетворяющая второй аксиоме счетности, Y – ее группа характеров, $\xi_j,\ j = 1, 2, \dots, n,\ n \geq 2,$ – независимые случайные величины со значениями в группе X и с распределениями μ_j. Пусть $L_1 = \alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2$ и $L_2 = \beta_1\xi_1 + \beta_2\xi_2$, где $\alpha_j,\ \beta_j$ – топологические автоморфизмы группы X. Мы будем предполагать, что число случайных величин $n \geq 3$. Оказывается, что в отличие от случая, когда $n = 2$, классы групп, на которых справедлива теорема Скитовича–Дармуа, оказываются весьма бедными. Рассмотрим конечные, компактные вполне несвязные, дискретные периодические и компактные группы. Изучим вначале случай, когда группа X конечна.

14.1. Лемма. *Пусть*

$$(i) \qquad X = \mathbb{Z}(2^{m_1}) \times \cdots \times \mathbb{Z}(2^{m_l}), \ \text{где} \quad m_1 < \cdots < m_l.$$

Пусть $\xi_j,\ j = 1, 2, \dots, n,\ n \geq 2,$ – независимые случайные величины со значениями в группе X и с распределениями μ_j. Пусть $\alpha_j,\ \beta_j$ – автоморфизмы группы X. Тогда из независимости линейных форм $L_1 = \alpha_1\xi_1 + \cdots + \alpha_n\xi_n$ и $L_2 = \beta_1\xi_1 + \cdots + \beta_n\xi_n$ вытекает, что все μ_j – вырожденные распределения.

Доказательство. Вводя в рассмотрение новые случайные величины $\zeta_j = \alpha_j\xi_j$, мы редуцируем доказательство леммы к случаю, когда линейные формы L_1 и L_2 имеют вид $L_1 = \xi_1 + \cdots + \xi_n$

и $L_2 = \delta_1\xi_1 + \dots + \delta_n\xi_n$, $\delta_j \in \mathrm{Aut}(X)$. По лемме 10.1 независимость линейных форм L_1 и L_2 равносильна тому, что характеристические функции $\widehat{\mu}_j(y)$ удовлетворяют уравнению (10.2). Положим $\nu_j = \mu_j * \bar{\mu}_j$. Из 2.7$(c)$ и 2.7(d) вытекает, что $\widehat{\nu}_j(y) = |\widehat{\mu}_j(y)|^2 \geq 0$, $y \in Y$. Очевидно, что характеристические функции $\widehat{\nu}_j(y)$ также удовлетворяют уравнению (10.2). Лемма будет доказана, если мы докажем, что все $\nu_j \in D(X)$. Поэтому можно с самого начала предполагать, что все $\widehat{\mu}_j(y) \geq 0$, $y \in Y$. Докажем, что в таком случае $\widehat{\mu}_j(y) \equiv 1$, $j = 1, 2, \dots, n$.

По теореме 1.7.1 $Y \cong X$. Пусть ε – произвольный автоморфизм группы Y. Положим $H_i = Y^{(2^{m_i-1})} \bigcap Y_{(2)}$, $i = 1, 2, \dots, l$. Поскольку при любом натуральном k подгруппы $Y^{(k)}$ и $Y_{(k)}$ – характеристические, то и подгруппы H_i – также характеристические. Отсюда следует, что

$$\varepsilon(H_{i-1} \backslash H_i) = H_{i-1} \backslash H_i. \tag{14.1}$$

Из (14.1) вытекает, что если $u, v \in H_{i-1}\backslash H_i$, то $u + \varepsilon v \in H_i$, $i = 1, 2, \dots, l$. Легко видеть, что $H_l \cong \mathbb{Z}(2)$. Поэтому $\varepsilon y = y$ для любого $y \in H_l$. Сужение уравнения (10.2) на подгруппу H_l принимает вид

$$\prod_{j=1}^{n} \widehat{\mu}_j(u+v) = \prod_{j=1}^{n} \widehat{\mu}_j(u) \prod_{j=1}^{n} \widehat{\mu}_j(v), \quad u, v \in H_l. \tag{14.2}$$

Обозначим

$$f(y) = \prod_{j=1}^{n} \widehat{\mu}_j(y), \quad y \in Y.$$

Из (14.2) вытекает, что ограничение функции $f(y)$ на подгруппу H_l – есть характер подгруппы H_l. Учитывая, что $f(y) \geq 0$, получаем, что $f(y) = 1$ при $y \in H_l$. Следовательно, все $\widehat{\mu}_j(y) = 1$ при $y \in H_l$. Подставляя в уравнение (10.2) $u, v \in H_{l-1}\backslash H_l$ и учитывая, что при всех $\widetilde{\delta}_j$ выполнено $u + \widetilde{\delta}_j v \in H_l$, получаем, что $\widehat{\mu}_j(y) = 1$, $j = 1, 2, \dots, n$, при $y \in H_{l-1}$. Рассуждая аналогичным образом, мы в результате доказываем, что $\widehat{\mu}_j(y) = 1$, $j = 1, 2, \dots, n$, при $y \in Y_{(2)}$.

Докажем теперь, что $\widehat{\mu}_j(y) = 1$, $j = 1, 2, \dots, n$, при $y \in Y$. Доказательство проведем индукцией по m_l. При $m_l = 1$ имеем $X = \mathbb{Z}(2)$. Тогда $Y \cong \mathbb{Z}(2)$ и поэтому $Y = Y_{(2)}$. Как отмечено выше, при $y \in Y_{(2)}$ выполнено $\widehat{\mu}_j(y) = 1$, $j = 1, 2, \dots, n$. Таким образом, при $m_l = 1$ утверждение верно.

Так как $\widehat{\mu}_j(y) = 1$, $j = 1, 2, \dots, n$, при $y \in Y_{(2)}$, то по предложению 2.13 функции $\widehat{\mu}_j(y)$ постоянны на классах смежности $y + Y_{(2)}$. Следовательно, они индуцируют некоторые характеристические функции $g_j([y])$ на фактор-группе $Y/Y_{(2)}$ по формуле $g_j([y]) = \widehat{\mu}_j(y)$, $y \in [y]$. Поскольку $Y_{(2)}$ – характеристическая подгруппа группы Y, то автоморфизмы $\widetilde{\delta}_j$ также индуцируют некоторые автоморфизмы ε_j на фактор-группе $Y/Y_{(2)}$ по формуле $\varepsilon_j[y] = [\widetilde{\delta}_j y]$, $y \in [y]$. Это позволяет нам рассматривать уравнение (10.2) на фактор-группе $Y/Y_{(2)}$. Поскольку

$$Y/Y_{(2)} \cong \mathbb{Z}(2^{m_1-1}) \times \dots \times \mathbb{Z}(2^{m_l-1}),$$

то по предположению индукции $g_j([y]) = 1$, $j = 1, 2, \dots, n$, при $[y] \in Y/Y_{(2)}$. Следовательно, $\widehat{\mu}_j(y) = 1$, $j = 1, 2, \dots, n$, при $y \in Y$. $\square$

Из теоремы 1.7.1 и лемм 10.1 и 14.1 непосредственно вытекает следующее утверждение.

14.2. Следствие. *Пусть Y – группа вида 14.1(i). Пусть $\widetilde{\alpha}_j, \widetilde{\beta}_j$, $j = 1, 2, \dots, n$, $n \geq 2$, – автоморфизмы группы Y, а $\widehat{\mu}_j(y)$ – характеристические функции на группе Y, удовлетворяющие уравнению 10.1(i). Тогда характеристические функции $\widehat{\mu}_j(y)$ имеют вид*

$$\widehat{\mu}_j(y) = (x_j, y), \quad x_j \in X, \ j = 1, 2, \dots, n.$$

14.3. Лемма. *Пусть $X = \mathbb{Z}(3)$. Пусть ξ_j, $j = 1, 2, \dots, n$, $n \geq 2$, – независимые случайные величины со значениями в группе X и с распределениями μ_j. Пусть α_j, β_j – автоморфизмы группы X. Тогда из независимости линейных форм $L_1 = \alpha_1\xi_1 + \dots + \alpha_n\xi_n$ и $L_2 = \beta_1\xi_1 + \dots + \beta_n\xi_n$ вытекает, что либо все μ_j – вырожденные распределения, либо $\mu_{j_1} = \mu_{j_2} = m_X$ по крайней мере для двух распределений μ_{j_1} и μ_{j_2}, а остальные распределения μ_j произвольны.*

Доказательство. Заметим, что $\mathrm{Aut}(X) = \{\pm I\}$. Поэтому, изменяя, если это необходимо, нумерацию случайных величин ξ_j, мы можем считать, что линейные формы L_1 и L_2 имеют вид $L_1 = \xi_1 + \dots + \xi_n$ и $L_2 = \xi_1 + \dots + \xi_m - \dots - \xi_n$. Рассмотрим новые независимые случайные величины $\eta_1 = \xi_1 + \dots + \xi_m$ и $\eta_2 = \xi_{m+1} + \dots + \xi_n$. По условию линейные формы $L_1 = \eta_1 + \eta_2$ и $L_2 = \eta_1 - \eta_2$ независимы. Обозначим через λ_j распределение случайной величины η_j. Из (2.1) следует, что $\lambda_1 = \mu_1 * \dots * \mu_m$, $\lambda_2 = \mu_{m+1} * \dots * \mu_n$. Так как $c_X = \{0\}$, то по теореме 7.10 либо $\lambda_1, \lambda_2 \in D(X)$, либо $\lambda_1 = \lambda_2 = m_X$. В случае, когда $\lambda_1, \lambda_2 \in D(X)$, то и все $\mu_j \in D(X)$. Заметим теперь, что на группе X, если $\pi_1, \pi_2 \in \mathrm{M}^1(X)$ и $\pi_1 * \pi_2 = m_X$, то $\pi_j = m_X$ по крайней мере для одного из распределений π_j. Это прямо следует из 2.7(c) и 2.14(i). Значит, если $\lambda_1 = \lambda_2 = m_X$, то $\mu_{j_1} = \mu_{j_2} = m_X$ по крайней мере для двух распределений μ_{j_1} и μ_{j_2}, а остальные распределения μ_j произвольны. $\square$

14.4. Лемма. *Пусть $X = \mathbb{Z}(5)$. Пусть ξ_j, $j = 1, 2, 3$, – независимые случайные величины со значениями в группе X и с распределениями μ_j. Пусть α_j, β_j – автоморфизмы группы X. Тогда из независимости линейных форм $L_1 = \alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2 + \alpha_3\xi_3$ и $L_2 = \beta_1\xi_1 + \beta_2\xi_2 + \beta_3\xi_3$ вытекает, что либо все μ_j – вырожденные распределения, либо $\mu_{j_1} = m_X$ по крайней мере для одного распределения μ_{j_1}.*

Доказательство. Заметим, что $Y \cong \mathbb{Z}(5)$. Вводя в рассмотрение новые случайные величины $\zeta_j = \alpha_j\xi_j$, мы редуцируем доказательство теоремы к случаю, когда линейные формы L_1 и L_2 имеют вид $L_1 = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3$ и $L_2 = \delta_1\xi_1 + \delta_2\xi_2 + \delta_3\xi_3$, где $\delta_j \in \mathrm{Aut}(X)$. Предположим вначале, что не все автоморфизмы δ_j различны. Пусть для определенности $\delta_2 = \delta_3 = \delta$. Рассмотрим независимые случайные величины ξ_1 и $\xi = \xi_2 + \xi_3$. Тогда линейные формы $L_1 = \xi_1 + \xi$ и $L_2 = \delta_1\xi_1 + \delta\xi$ независимы. В силу (2.1) случайная величина ξ имеет распределение $\mu = \mu_2 * \mu_3$. Из теоремы 13.1 следует, что либо μ_1 и μ – вырожденные распределения, и тогда все μ_j – вырожденные распределения, либо $\mu_1 = \mu = m_X$.

Предположим теперь, что все δ_j различны. Очевидно, что каждый автоморфизм $\delta \in \mathrm{Aut}(X)$ имеет вид $\delta x = kx$, $k = 1, 2, 3, 4$, $x \in X$. Поскольку линейные формы L_1 и L_2 независимы тогда и только тогда, когда независимы линейные формы L_1 и δL_2, мы можем предполагать, не ограничивая общности, что $L_2 = \xi_1 + 2\xi_2 + 3\xi_3$. Обозначим $f(y) = \widehat{\mu}_1(y)$, $g(y) = \widehat{\mu}_2(y)$, $h(y) = \widehat{\mu}_3(y)$. По лемме 10.1 независимость линейных форм L_1 и L_2 равносильна тому, что характеристические функции $\widehat{\mu}_j(y)$ удовлетворяют уравнению 10.1(i), которое принимает вид

$$f(u+v)g(u+2v)h(u+3v) = f(u)g(u)h(u)f(v)g(2v)h(3v), \quad u, v, \in Y. \tag{14.3}$$

Заметим, что группа X не содержит подгруппы, топологически изоморфной $\mathbb{T}$. Поэтому, если все характеристические функции $\widehat{\mu}_j(y)$ не обращаются в нуль, то по теореме 10.3 все распределения μ_j – вырожденные.

Отметим, что для любого $u \in Y$, $u \neq 0$ и любого автоморфизма $\varepsilon \in \mathrm{Aut}(Y)$ существует элемент $v \in Y$ такой, что $u + \varepsilon v = 0$. Поэтому из (14.3) следует, что невозможно, чтобы только одна из характеристических функций обращалась в нуль.

Предположим, что только две характеристические функции обращаются в нуль. Пусть для определенности это $f(y)$ и $g(y)$. Тогда они должны иметь общие нули. Действительно, в противном случае мы имеем $f(u_0) = g(2u_0) = 0,\ f(2u_0) \neq 0,\ g(u_0) \neq 0$ для некоторого $u_0 \in Y$. Следовательно, при $u = 3u_0,\ v = 4u_0$ правая часть уравнения (14.3) обращается в нуль, в то время как левая часть не равна нулю. Таким образом, $f(y)$ и $g(y)$ имеют общие нули. Пусть $f(u_0) = g(u_0) = 0$. Подставляя в (14.3) $u = u_0,\ v = 2u_0$, мы получим, что $f(3u_0) = 0$, т.е. $\mu_1 = m_X$. Подставляя в (14.3) $u = 3u_0,\ v = 2u_0$, мы получим, что $g(2u_0) = 0$, т.е. $\mu_2 = m_X$. Случаи, когда либо $f(y)$ и $h(y)$, либо $g(y)$ и $h(y)$ обращаются в нуль, рассматриваются аналогично.

Предположим теперь, что все три характеристические функции $f(y),\ g(y)$ и $h(y)$ обращаются в нуль. Рассмотрим вначале случай, когда

$$f(u_0) = g(u_0) = h(u_0) = 0 \tag{14.4}$$

в некоторой точке $u_0 \in Y$. Полагая в (14.3) $u = u_0,\ v = 2u_0$, мы получим $f(3u_0)h(2u_0) = 0$, т.е. либо $\mu_1 = m_X$, либо $\mu_3 = m_X$.

Если (14.4) не выполнено, то возможны следующие 3 случая.

1. $f(u_0) = g(u_0) = h(2u_0) = 0,\ h(u_0) \neq 0$ для некоторого $u_0 \in Y$. Полагая в (14.3) $u = 2u_0,\ v = 3u_0$, мы получим, что $g(3u_0) = 0$, т.е. $\mu_2 = m_X$.

2. $f(u_0) = g(2u_0) = h(u_0) = 0,\ g(u_0) \neq 0$ для некоторого $u_0 \in Y$. Полагая в (14.3) $u = 2u_0,\ v = u_0$, мы получим, что $f(3u_0) = 0$, т.е. $\mu_1 = m_X$. Полагая в (14.3) $u = u_0,\ v = 4u_0$, мы получим, что $h(3u_0) = 0$, т.е. $\mu_3 = m_X$.

3. $f(2u_0) = g(u_0) = h(u_0) = 0,\ f(u_0) \neq 0$ для некоторого $u_0 \in Y$. Полагая в (14.3) $u = 4u_0,\ v = 2u_0$, мы получим, что $g(3u_0) = 0$, т.е. $\mu_2 = m_X$. $\square$

14.5. Замечание. Отметим, что лемму 14.4 нельзя усилить, утверждая, что $\mu_{j_1} = \mu_{j_2} = m_X$ по крайней мере для двух распределений μ_{j_1} и μ_{j_2}. Для доказательства возьмем $u_0 \in Y,\ u_0 \neq 0$, и рассмотрим распределения

$$\mu_1 = m_X, \quad \mu_2(\{x\}) = \mu_3(\{x\}) = (1/5)(1 + \mathrm{Re}(x, u_0)),\ x \in X.$$

Тогда $\widehat{\mu}_j(y) = 0$ при $y \in \{2u_0, 3u_0\},\ j = 2, 3$. Легко непосредственно проверить, что характеристические функции $\widehat{\mu}_j(y)$ удовлетворяют уравнению (14.3). Поэтому по лемме 10.1, если ξ_j – независимые случайные величины со значениями в группе X и с распределениями μ_j, то линейные формы $L_1 = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3$ и $L_1 = \xi_1 + 2\xi_2 + 3\xi_3$ независимы.

14.6. Лемма. *Для каждой из групп $X = (\mathbb{Z}(k))^2$, где $k \geq 2,\ X = \mathbb{Z}(2k-1)$, где $k \geq 4$, и $X = \mathbb{Z}(3) \times \mathbb{Z}(5)$ и любого $n \geq 3$ существуют независимые одинаково распределенные случайные величины $\xi_j,\ j = 1, 2, \dots, n$, со значениями в группе X и с распределением $\mu \notin I(X)$ и автоморфизмы $\alpha, \beta \in \mathrm{Aut}(X)$ такие, что линейные формы $L_1 = \xi_1 + \dots + \xi_n$ и $L_2 = \xi_1 + \dots + \xi_{n-2} + \alpha\xi_{n-1} + \beta\xi_n$ независимы.*

Доказательство. Заметим, что $Y \cong X$. Пусть $X = (\mathbb{Z}(k))^2,\ k \geq 2$. Элементы групп X и Y будем обозначать через $(p, q),\ p, q \in \mathbb{Z}(k)$. Обозначим $\widetilde{y} = (0, 1) \in Y$. Пусть μ – распределение на группе X такое, как в лемме 13.21. Тогда характеристическая функция $f(y) = \widehat{\mu}(y)$ определяется формулой (13.31). Очевидно, что $\mu \notin I(X)$. Пусть $\xi_j,\ j = 1, 2, \dots, n,\ n \geq 3,$ – независимые одинаково распределенные случайные величины со значениями в группе X и с распределением μ. Пусть автоморфизмы $\alpha, \beta \in \mathrm{Aut}(X)$ имеют вид

$$\alpha(p, q) = (p, p + q), \quad \beta(p, q) = (q, p), \quad p, q \in \mathbb{Z}(k). \tag{14.5}$$

Тогда

$$\widetilde{\alpha}(p, q) = (p + q, q), \quad \widetilde{\beta}(p, q) = (q, p), \quad p, q \in \mathbb{Z}(k). \tag{14.6}$$

Проверим, что линейные формы $L_1 = \xi_1 + \dots + \xi_n$ и $L_2 = \xi_1 + \dots + \xi_{n-2} + \alpha\xi_{n-1} + \beta\xi_n$ независимы. По лемме 10.1 достаточно доказать, что характеристические функции случайных величин ξ_j удовлетворяют уравнению 10.1(i), которое принимает вид

$$f^{n-2}(u + v)f(u + \widetilde{\alpha}v)f(u + \widetilde{\beta}v) = f^n(u)f^{n-2}(v)f(\widetilde{\alpha}v)f(\widetilde{\beta}v), \quad u, v \in Y. \tag{14.7}$$

Очевидно, что уравнение (14.7) превращается в равенство, если либо $u = 0$ либо $v = 0$. Пусть $u \neq 0$ и $v \neq 0$. Так как $\widetilde{\beta}\widetilde{y} \neq \pm\widetilde{y}$, то правая часть уравнения (14.7) равна нулю. Если левая часть уравнения (14.7) отлична от нуля, то, как следует из (13.31), должно быть выполнено $u + v,\ u + \widetilde{\alpha}v,\ u + \widetilde{\beta}v \in \{0, \pm\widetilde{y}\}$. Отсюда вытекает, что

$$(\widetilde{\alpha} - I)v \in \{0, \pm\widetilde{y}, \pm2\widetilde{y}\} \tag{14.8}$$

и

$$(\widetilde{\alpha} - \widetilde{\beta})v \in \{0, \pm\widetilde{y}, \pm2\widetilde{y}\}. \tag{14.9}$$

Пусть $v = (p, q)$. Тогда $(\widetilde{\alpha} - I)v = (q, 0)$. Следовательно, из (14.8) вытекает, что $q = 0$. С другой стороны, $(\widetilde{\alpha} - \widetilde{\beta})v = (p, q - p)$. Поэтому из (14.9) следует, что $p = 0$. А значит, $v = 0$, вопреки предположению. Следовательно, и левая часть уравнения (14.7) равна нулю. Таким образом, характеристическая функция $f(y)$ удовлетворяет уравнению (14.7). Итак, для группы $X = (\mathbb{Z}(k))^2,\ k \geq 2$, лемма доказана.

Пусть либо $X = \mathbb{Z}(2k - 1),\ k \geq 4$, либо $X = \mathbb{Z}(3) \times \mathbb{Z}(5)$. Если $X = \mathbb{Z}(2k - 1),\ k \geq 4$, то обозначим через $\widetilde{y}$ элемент порядка $2k - 1$ в Y. Если $X = \mathbb{Z}(3) \times \mathbb{Z}(5)$, то обозначим через $\widetilde{y}$ элемент порядка 15 в Y. Пусть μ – распределение на группе X такое, как в лемме 13.21. Тогда характеристическая функция $f(y) = \widehat{\mu}(y)$ определяется формулой (13.31). Очевидно, что $\mu \notin I(X)$. Пусть $\xi_j,\ j = 1, 2, \dots, n,\ n \geq 3,$ – независимые одинаково распределенные случайные величины со значениями в группе X и с распределением μ. Пусть автоморфизмы $\alpha, \beta \in \mathrm{Aut}(X)$ имеют вид $\alpha = f_2,\ \beta = -I$.

Проверим, что линейные формы $L_1 = \xi_1 + \dots + \xi_n$ и $L_2 = \xi_1 + \dots + \xi_{n-2} + 2\xi_{n-1} - \xi_n$ независимы. По лемме 10.1 достаточно доказать, что характеристические функции случайных величин ξ_j удовлетворяет уравнению 10.1(i), которое принимает вид

$$f^{n-2}(u + v)f(u + 2v)f(u - v) = f^n(u)f^{n-2}(v)f(2v)f(-v), \quad u, v \in Y. \tag{14.10}$$

Очевидно, что уравнение (14.10) превращается в равенство, если либо $u = 0$ либо $v = 0$. Пусть $u \neq 0$ и $v \neq 0$. Так как $2\widetilde{y} \neq \pm\widetilde{y}$, то правая часть уравнения (14.10) равна нулю. Если при

этом левая часть уравнения (14.10) отлична от нуля, то, как следует из (13.31), должно быть выполнено
$$u \pm v,\ u + 2v \in \{0, \pm\widetilde{y}\}. \tag{14.11}$$
Отсюда вытекает, что
$$v, 2v \in \{0, \pm\widetilde{y}, \pm 2\widetilde{y}\}. \tag{14.12}$$
Из (14.12) получаем, что $v = \pm\widetilde{y}$. Учитывая, что $u + v \in \{0, \pm\widetilde{y}\}$, имеем такие возможности: $u = \widetilde{y}, v = -\widetilde{y}$; $u = 2\widetilde{y}, v = -\widetilde{y}$; $u = -\widetilde{y}, v = \widetilde{y}$; $u = -2\widetilde{y}, v = \widetilde{y}$. В каждом из этих случаев выполнено $u - v \notin \{0, \pm\widetilde{y}\}$, что противоречит (14.11). Следовательно, и левая часть уравнения (14.10) равна нулю. Таким образом, характеристическая функция $f(y)$ удовлетворяет уравнению (14.10). $\square$

Следующее утверждение можно рассматривать, как аналог теоремы Скитовича–Дармуа для конечных групп и трех независимых случайных величин.

14.7. Теорема. *Пусть X – конечная группа, G – группа вида 14.1(i). Тогда справедливы следующие утверждения.*

(I) Пусть ξ_j, $j = 1, 2, 3$, – независимые случайные величины со значениями в группе X и с распределениями μ_j. Пусть α_j, β_j – автоморфизмы группы X. Предположим, что линейные формы $L_1 = \alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2 + \alpha_3\xi_3$ и $L_2 = \beta_1\xi_1 + \beta_2\xi_2 + \beta_3\xi_3$ независимы. Если $X = G$, то все μ_j – вырожденные распределения. Если $X = \mathbb{Z}(3) \times G$, то либо все μ_j – вырожденные распределения, либо $\mu_{j_1} = m_{\mathbb{Z}(3)} * E_{x_1}$, $\mu_{j_2} = m_{\mathbb{Z}(3)} * E_{x_2}$, где $x_1, x_2 \in X$, по крайней мере для двух распределений μ_{j_1} и μ_{j_2}. Если $X = \mathbb{Z}(5) \times G$, то либо все μ_j – вырожденные распределения, либо $\mu_{j_1} = m_{\mathbb{Z}(5)} * E_{x_1}$, $x_1 \in X$, по крайней мере для одного распределения μ_{j_1}.

(II) Если группа X не изоморфна группам, перечисленным в (I), то для любого $n \geq 3$ существуют независимые одинаково распределенные случайные величины ξ_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, со значениями в группе X и с распределением $\mu \notin I(X)$ и автоморфизмы $\alpha_j, \beta_j \in \mathrm{Aut}(X)$ такие, что линейные формы $L_1 = \alpha_1\xi_1 + \cdots + \alpha_n\xi_n$ и $L_2 = \beta_1\xi_1 + \cdots + \beta_n\xi_n$ независимы.

Доказательство. (I). Если группа $X = G$, то утверждение теоремы вытекает из леммы 14.1.

Пусть $X = \mathbb{Z}(3) \times G$. По теореме 1.7.1 $Y = L \times H$, где $L \cong \mathbb{Z}(3)$, $H \cong G$. По лемме 10.1 независимость линейных форм L_1 и L_2 равносильна тому, что характеристические функции $\widehat{\mu}_j(y)$ удовлетворяют уравнению 10.1(i). Положим $\nu_j = \mu_j * \bar{\mu}_j$. Из 2.7$(c)$ и 2.7(d) вытекает, что $\widehat{\nu}_j(y) = |\widehat{\mu}_j(y)|^2 \geq 0$, $y \in Y$. Очевидно, что характеристические функции $\widehat{\nu}_j(y)$ также удовлетворяют уравнению 10.1(i). Так как H является 2-компонентой группы Y, то подгруппа H является характеристической. Рассмотрим ограничение уравнения 10.1(i) на H. Применяя следствие 14.2, получаем, что $\widehat{\nu}_j(y) = 1$ при $y \in H$. По предложению 2.13 имеет место включение $\sigma(\nu_j) \subset A(X, H) = \mathbb{Z}(3)$. По предложению 2.2 распределения μ_j можно так заменить их сдвигами μ'_j, что $\sigma(\mu'_j) \subset \mathbb{Z}(3)$. Поскольку подгруппа $\mathbb{Z}(3)$ характеристическая, то сужения автоморфизмов α_j, β_j на $\mathbb{Z}(3)$ являются автоморфизмами группы $\mathbb{Z}(3)$. Сохраним для этих сужений обозначения α_j, β_j. Рассмотрим независимые случайные величины ξ'_j со значениями в $\mathbb{Z}(3)$ и с распределениями μ'_j. Очевидно, что линейные формы $L_1 = \alpha_1\xi'_1 + \alpha_2\xi'_2 + \alpha_3\xi'_3$ и $L_2 = \beta_1\xi'_1 + \beta_2\xi'_2 + \beta_3\xi'_3$ независимы. Утверждение теоремы следует теперь из леммы 14.3.

В случае, когда $X = \mathbb{Z}(5) \times G$, рассуждение совершенно аналогично. Нужно лишь воспользоваться леммой 14.4 вместо леммы 14.3.

(II). Предположим теперь, что группа X не изоморфна группам, перечисленным в (I). По теореме 1.20.1 представим группу X в виде прямого произведения своих p-компонент X_p, т.е.

$$X = \mathbf{P}_{p \in \mathcal{P}} X_p$$

По теореме 1.20.4 каждая из групп X_p изоморфна конечному прямому произведению групп вида $\mathbb{Z}(p^m)$ при различных m. Отсюда следует, что если группа X не изоморфна перечисленным в (I) группам, то группа X имеет в качестве прямого сомножителя одну из групп, перечисленных в лемме 14.6. Утверждение теоремы вытекает теперь из леммы 14.6 и замечания 13.24. $\square$

14.8. Замечание. Доказательство утверждения (I) в теореме 14.7 в случае, когда $X = G$, опиралось на лемму 14.1, а в случае, когда $X = \mathbb{Z}(3) \times G$, на лемму 14.3. Леммы 14.1 и 14.3 справедливы для произвольного числа $n \geq 2$ независимых случайных величин. Поэтому и утверждение (I) в теореме 14.7, в случае, когда либо $X = G$, либо $X = \mathbb{Z}(3) \times G$, справедливо для произвольного числа $n \geq 2$ независимых случайных величин.

Рассмотрим теперь случай, когда X – компактная вполне несвязная группа.

14.9. Лемма. *Пусть либо $X = \Delta_2$, либо $X = \Delta_2 \times G$, где G – группа вида* 14.1(i). *Пусть ξ_j, $j = 1, 2, \dots, n$, $n \geq 2$, – независимые случайные величины со значениями в группе X и с распределениями μ_j. Пусть α_j, β_j – топологические автоморфизмы группы X. Тогда из независимости линейных форм $L_1 = \alpha_1\xi_1 + \dots + \alpha_n\xi_n$ и $L_2 = \beta_1\xi_1 + \dots + \beta_n\xi_n$ вытекает, что все μ_j – вырожденные распределения.*

Доказательство. По лемме 10.1 независимость линейных форм L_1 и L_2 равносильна тому, что характеристические функции $\widehat{\mu}_j(y)$ удовлетворяют уравнению 10.1(i). Положим $\nu_j = \mu_j * \bar{\mu}_j$. Из 2.7$(c)$ и 2.7(d) вытекает, что $\widehat{\nu}_j(y) = |\widehat{\mu}_j(y)|^2 \geq 0$, $y \in Y$. Очевидно, что характеристические функции $\widehat{\nu}_j(y)$ также удовлетворяют уравнению 10.1(i). Лемма будет доказана, если мы докажем, что все $\nu_j \in D(X)$. Поэтому можно с самого начала предполагать, что все $\widehat{\mu}_j(y) \geq 0$, $y \in Y$.

1. Пусть $X = \Delta_2$. Мы имеем $Y \cong \mathbb{Z}(2^\infty)$, $Y_{(2^m)} \cong \mathbb{Z}(2^m)$. Кроме того, имеют место естественные вложения

$$Y_{(2)} \subset \dots \subset Y_{(2^m)} \subset \dots \subset Y, \tag{14.13}$$

и

$$Y = \bigcup_{m=1}^{\infty} Y_{(2^m)}. \tag{14.14}$$

Каждая подгруппа $Y_{(2^m)}$ является характеристической. Рассмотрим ограничение уравнения 10.1(i) на подгруппу $Y_{(2^m)}$. По лемме 14.1 $\widehat{\mu}_j(y) = 1$, $j = 1, 2, \dots, n$, при $y \in Y_{(2^m)}$. Из (14.13) и (14.14) следует, что $\widehat{\mu}_j(y) = 1$, $y \in Y$, $j = 1, 2, \dots, n$. Утверждение леммы вытекает из 2.7(b).

2. Пусть $X = \Delta_2 \times G$, где G – группа вида 14.1(i). По теореме 1.7.1 $Y = H \times L$, где $H \cong \mathbb{Z}(2^\infty)$, $L \cong G$. Поскольку $G^{(2^{m_l})} = \{0\}$, то $L^{(2^{m_l})} = \{0\}$, и следовательно $H = Y^{(2^{m_l})}$. Поэтому H – характеристическая подгруппа группы Y. Рассмотрим ограничение уравнения 10.1(i) на подгруппу H. Как доказано в **1**, $\widehat{\mu}_j(y) = 1$, $y \in H$, $j = 1, 2, \dots, n$. Отсюда по предложению

2.13 имеют место включения $\sigma(\mu_j) \subset A(X,H) = G,\ j = 1,2,\dots,n$. Поскольку H – характеристическая подгруппа группы Y и $G = A(X,H)$ то по следствию 13.4 G – характеристическая подгруппа группы X. Поэтому сужения топологических автоморфизмов α_j, β_j на G являются автоморфизмами группы G. Сохраним для этих сужений обозначения α_j, β_j. Мы имеем независимые случайные величины ξ_j со значениями в группе G и с распределениями μ_j, причем линейные формы $L_1 = \alpha_1\xi_1 + \dots + \alpha_n\xi_n$ и $L_2 = \beta_1\xi_1 + \dots + \beta_n\xi_n$ независимы. Требуемое утверждение вытекает теперь из леммы 14.1. □

Из теоремы 1.7.1 и лемм 10.1 и 14.9 непосредственно вытекает следующее утверждение.

14.10. Следствие. *Пусть либо $Y = \mathbb{Z}(2^\infty)$, либо $Y = \mathbb{Z}(2^\infty) \times H$, где H – группа вида 14.1(i). Пусть $\widetilde{\alpha}_j, \widetilde{\beta}_j,\ j = 1,2,\dots,n,\ n \geq 2,$ – автоморфизмы группы Y, а $\widehat{\mu}_j(y)$ – характеристические функции на группе Y, удовлетворяющие уравнению 10.1(i). Тогда характеристические функции $\widehat{\mu}_j(y)$ имеют вид*

$$\widehat{\mu}_j(y) = (x_j, y), \quad x_j \in X,\ j = 1,2,\dots,n.$$

Нам понадобится следующая лемма, относящаяся к произвольным группам X.

14.11. Лемма. *Пусть G – компактная подгруппа группы X и $\alpha_j,\ \beta_j,\ j = 1,2,\dots,n,\ n \geq 2,$ – топологические автоморфизмы группы X, причем сужения $\alpha_j,\ \beta_j$ на G являются топологическими автоморфизмами группы G. Пусть $g_j(y)$ – непрерывные нормированные положительно определенные функции на аннуляторе $A(Y,G)$. Предположим, что выполнены условия:*

(i) функции $g_j(y)$ удовлетворяют уравнению 10.1(i) при $y \in A(Y,G)$;

(ii) характеристические функции $\widehat{\lambda}_j(y) = \widehat{m}_G(y),\ j = 1,2,\dots,n,$ удовлетворяют уравнению 10.1(i) при $y \in Y$.

Пусть $\mu_j \in \mathrm{M}^1(X),\ j = 1,2,\dots,n,$ и характеристические функции $\widehat{\mu}_j(y),\ y \in Y$, имеют вид

$$\widehat{\mu}_j(y) = \begin{cases} g_j(y), & \text{если} \quad y \in A(Y,G), \\ 0, & \text{если} \quad y \notin A(Y,G). \end{cases}$$

Тогда характеристические функции $\widehat{\mu}_j(y)$ также удовлетворяют уравнению 10.1(i).

Доказательство. Обозначим $L = A(Y,G)$. По лемме 13.3 из того, что сужения автоморфизмов $\alpha_j,\ \beta_j$ на G являются топологическими автоморфизмами группы G вытекает, что сужения автоморфизмов $\widetilde{\alpha}_j,\ \widetilde{\beta}_j$ на L являются топологическими автоморфизмами группы L. Если $u, v \in L$, то уравнение 10.1(i) в силу (i) превращается в равенство. Отметим также, что характеристическая функция $\widehat{m}_G(y)$ имеет вид 2.14(i). Поэтому, если либо $u \in L,\ v \notin L$, либо $u \notin L,\ v \in L$, то обе части уравнения 10.1(i) обращаются в нуль. Если $u, v \notin L$, то правая часть уравнения 10.1(i) равна нулю. Если при этом левая часть уравнения 10.1(i) отлична от нуля, то $\widetilde{\alpha}_j u + \widetilde{\beta}_j v \in L,\ j = 1,2,\dots,n$, что противоречит (ii). □

14.12. Лемма. *Для каждой из групп $X = \Delta_2^2$ и $X = \Delta_p$, где p – простое число, $p \geq 3$, и любого $n \geq 3$ существуют независимые одинаково распределенные случайные величины $\xi_j,\ j = 1,2,\dots,n$, со значениями в группе X и с распределением $\mu \notin I(X)$ и автоморфизмы $\alpha, \beta \in \mathrm{Aut}(X)$ такие, что линейные формы $L_1 = \xi_1 + \dots + \xi_n$ и $L_2 = \xi_1 + \dots + \xi_{n-2} + \alpha\xi_{n-1} + \beta\xi_n$ независимы.*

Доказательство. Пусть $X = \Delta_2^2$. Обозначим $G = X^{(2)}$. Тогда G – характеристическая подгруппа группы X. По теореме 1.7.1 $Y \cong (\mathbb{Z}(2^\infty))^2$. По теореме 1.9.5 $L = A(Y, G) = Y_{(2)}$. Очевидно, что $Y_{(2)} \cong (\mathbb{Z}(2))^2$. Подгруппу L можно рассматривать, как группу характеров группы $K = (\mathbb{Z}(2))^2$. Обозначим элементы группы X через $(a, b),\ a, b \in \Delta_2$, а элементы группы Y через $(p, q),\ p, q \in \mathbb{Z}(2^\infty)$. Элементы группы K мы будем также обозначать через $(a, b),\ a, b \in \mathbb{Z}(2)$, а элементы группы L через $(p, q),\ p, q \in \mathbb{Z}(2)$. Пусть автоморфизмы $\alpha, \beta \in \mathrm{Aut}(X)$ имеют вид

$$\alpha(a, b) = (a, a + b), \quad \beta(a, b) = (b, a), \quad a, b \in \Delta_2.$$

Тогда

$$\widetilde{\alpha}(p, q) = (p + q, q), \quad \widetilde{\beta}(p, q) = (q, p), \quad p, q \in \mathbb{Z}(2^\infty). \tag{14.15}$$

Пусть автоморфизмы $\alpha_1, \beta_1 \in \mathrm{Aut}(K)$ определяются формулами (14.5). Отметим, что из (14.6) и (14.15) вытекает, что сужения автоморфизмов $\widetilde{\alpha}$ и $\widetilde{\beta}$ на L совпадают с автоморфизмами $\widetilde{\alpha}_1$ и $\widetilde{\beta}_1$. По лемме 14.6 существуют независимые одинаково распределенные случайные величины $\zeta_j,\ j = 1, 2, \dots, n,\ n \geq 3$, со значениями в группе K и с распределением $\nu \notin I(K)$ такие, что линейные формы $L_1 = \zeta_1 + \dots + \zeta_n$ и $L_2 = \zeta_1 + \dots + \zeta_{n-2} + \alpha_1\zeta_{n-1} + \beta_1\zeta_n$ независимы. Тогда по лемме 10.1 характеристические функции $\widehat{\nu}_j(y) = \widehat{\nu}(y),\ j = 1, 2, \dots, n,\ y \in L$, удовлетворяют уравнению 10.1(i), которое принимает вид (14.7).

Характеристическая функция $f(y) = \widehat{m}_G(y),\ y \in Y$, имеет вид 2.14$(i)$. Проверим, что характеристическая функция $f(y)$ также удовлетворяет уравнению (14.7). Поскольку L – характеристическая подгруппа группы Y, то если $u, v \in L$, то обе части уравнения (14.7) равны 1, а если либо $u \in L,\ v \notin L$, либо $u \notin L,\ v \in L$, то обе части уравнения (14.7) обращаются в нуль. Если $u, v \notin L$, то правая часть уравнения (14.7) равна нулю. Если при этом левая часть уравнения (14.7) отлична от нуля, то $u + v,\ u + \widetilde{\alpha}v,\ u + \widetilde{\beta}v \in L$. Но тогда $(\widetilde{\alpha} - \widetilde{\beta})v \in L$. Так как $\widetilde{\alpha} - \widetilde{\beta} \in \mathrm{Aut(Y)}$, то $v \in L$. Полученное противоречие показывает, что и левая часть уравнения (14.7) равна нулю.

Рассмотрим на группе Y функцию

$$g(y) = \begin{cases} \widehat{\nu}(y), & \text{если} \quad y \in L, \\ 0, & \text{если} \quad y \notin L. \end{cases}$$

По предложению 2.12, $g(y)$ – положительно определенная функция. Следовательно, по теореме Бохнера существует распределение $\mu \in \mathrm{M}^1(X)$, такое что $\widehat{\mu}(y) = g(y)$. Пусть $\xi_j,\ j = 1, 2, \dots, n,\ n \geq 3$, – независимые одинаково распределенные случайные величины со значениями в группе X и с распределением μ. По лемме 14.11 характеристические функции $\widehat{\mu}_j(y) = \widehat{\mu}(y),\ j = 1, 2, \dots, n$, удовлетворяют уравнению 10.1(i), которое принимает вид (14.7). Тогда по лемме 10.1 линейные формы $L_1 = \xi_1 + \dots + \xi_n$ и $L_2 = \xi_1 + \dots + \xi_{n-2} + \alpha\xi_{n-1} + \beta\xi_n$ независимы. Очевидно, что $\mu \notin I(X)$. В случае, когда $X = \Delta_2^2$, лемма доказана.

Пусть $X = \Delta_p$, где p – простое число, $p \geq 3$. Схема доказательства леммы в этом случае такая же, как для группы $X = \Delta_2^2$. Обозначим $G = X^{(p^2)}$. Тогда G – характеристическая подгруппа группы X. По теореме 1.7.1 $Y \cong \mathbb{Z}(p^\infty)$. По теореме 1.9.5 $L = A(Y, G) = Y_{(p^2)}$. Очевидно, что $Y_{(p^2)} \cong \mathbb{Z}(p^2)$. Подгруппу L можно рассматривать, как группу характеров группы $K = \mathbb{Z}(p^2)$. По лемме 14.6 существуют независимые одинаково распределенные случайные величины $\zeta_j,\ j = 1, 2, \dots, n,\ n \geq 3$, со значениями в группе K и с распределением $\nu \notin I(K)$ такие, что линейные формы $L_1 = \zeta_1 + \cdots + \zeta_n$ и $L_2 = \zeta_1 + \cdots + \zeta_{n-2} + 2\zeta_{n-1} - \zeta_n$ независимы. Тогда по лемме 10.1 характеристические функции $\widehat{\nu}_j(y) = \widehat{\nu}(y)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, $y \in L$, удовлетворяют уравнению 10.1(i), которое принимает вид (14.10).

Проверка того, что характеристическая функция $f(y) = \widehat{m}_G(y)$ также удовлетворяет уравнению (14.10) и заключительная часть доказательства леммы проводятся аналогично тому, как это сделано для группы $X = \Delta_2^2$. $\square$

Следующее утверждение можно рассматривать, как аналог теоремы Скитовича–Дармуа для компактных вполне несвязных групп и трех независимых случайных величин.

14.13. Теорема. *Пусть X – компактная вполне несвязная группа, G – группа вида 14.1(i). Обозначим через K одну из групп: G, Δ_2, $\Delta_2 \times G$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(I) Пусть ξ_j, $j = 1, 2, 3$, – независимые случайные величины со значениями в группе X и с распределениями μ_j. Пусть α_j, β_j – топологические автоморфизмы группы X. Предположим, что линейные формы $L_1 = \alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2 + \alpha_3\xi_3$ и $L_2 = \beta_1\xi_1 + \beta_2\xi_2 + \beta_3\xi_3$ независимы. Если $X = K$, то все μ_j – вырожденные распределения. Если $X = \mathbb{Z}(3) \times K$, то либо все μ_j – вырожденные распределения, либо $\mu_{j_1} = m_{\mathbb{Z}(3)} * E_{x_1}$, $\mu_{j_2} = m_{\mathbb{Z}(3)} * E_{x_2}$, где $x_1, x_2 \in X$, по крайней мере для двух распределений μ_{j_1} и μ_{j_2}. Если $X = \mathbb{Z}(5) \times K$, то либо все μ_j – вырожденные распределения, либо $\mu_{j_1} = m_{\mathbb{Z}(5)} * E_{x_1}$, $x_1 \in X$, по крайней мере для одного распределения μ_{j_1}.

(II) Если группа X топологически не изоморфна группам, перечисленным в (I), то для любого $n \geq 3$ существуют независимые одинаково распределенные случайные величины ξ_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, со значениями в группе X и с распределением $\mu \notin I(X)$ и автоморфизмы $\alpha_j, \beta_j \in \mathrm{Aut}(X)$ такие, что линейные формы $L_1 = \alpha_1\xi_1 + \cdots + \alpha_n\xi_n$ и $L_2 = \beta_1\xi_1 + \cdots + +\beta_n\xi_n$ независимы.

Доказательство. (I). Если $X = K$, то утверждение теоремы вытекает из лемм 14.1 и 14.9. Если либо $X = \mathbb{Z}(3) \times K$, либо $X = \mathbb{Z}(5) \times K$, то доказательство теоремы совершенно аналогично доказательству теоремы 14.7 в случае (I). Нужно лишь наряду со следствием 14.2 использовать также и следствие 14.10.

(II). Предположим, что группа X топологически не изоморфна группам, перечисленным в (I). Если группа X содержит топологический прямой сомножитель, топологически изоморфный либо группе $\Delta_p^{\aleph_0}$, где p – простое число, $p \geq 3$, либо группе вида 13.25(ii), то утверждение теоремы вытекает из лемм 13.22, 13.23 и замечания 13.24.

Поэтому предположим, что группа X не содержит топологического прямого сомножителя, топологически изоморфного либо группе $\Delta_p^{\aleph_0}$, где p – простое число, $p \geq 3$, либо группе вида 13.25(ii). В этом случае по лемме 13.25 группа X имеет вид 13.25(i). Из представления 13.25(i) следует, что если группа X топологически не изоморфна группам, перечисленным в (I), то группа X содержит в качестве топологического прямого сомножителя подгруппу M такую, что либо $M \cong \Delta_2^2$, либо $M \cong \Delta_p$, где p – простое число, $p \geq 3$, либо M топологически изоморфна одной из групп, перечисленных в лемме 14.6. Утверждение теоремы в этом случае вытекает из лемм 14.12, 14.6 и замечания 13.24. $\square$

14.14. Замечание. Учитывая замечание 14.8 и лемму 14.9, легко видеть что утверждение (I) в теореме 14.13, в случае, когда либо $X = K$, либо $X = \mathbb{Z}(3) \times K$, справедливо для произвольного числа $n \geq 2$ независимых случайных величин.

Перейдем теперь к рассмотрению дискретных периодических групп. Так как мы предполагаем, что все рассматриваемые группы удовлетворяют второй аксиоме счетности, то для дискретных групп это означает, что группы они счетны. Мы не будем специально это оговаривать.

14.15. Лемма. *Пусть X – дискретная редуцированная 2-примарная группа такая, что все ее инварианты Ульма–Капланского равны либо 0, либо 1. Пусть ξ_j, $j = 1, 2, \dots, n$, $n \geq 2$, – независимые случайные величины со значениями в группе X и с распределениями μ_j. Пусть α_j, β_j – автоморфизмы группы X. Тогда из независимости линейных форм $L_1 = \alpha_1\xi_1 + \dots + \alpha_n\xi_n$ и $L_2 = \beta_1\xi_1 + \dots + \beta_n\xi_n$ вытекает, что все μ_j – вырожденные распределения.*

Доказательство. Вводя в рассмотрение новые случайные величины $\zeta_j = \alpha_j\xi_j$, мы редуцируем доказательство леммы к случаю, когда линейные формы L_1 и L_2 имеют вид $L_1 = \xi_1 + \dots + \xi_n$ и $L_2 = \delta_1\xi_1 + \dots + \delta_n\xi_n$, $\delta_j \in \mathrm{Aut}(X)$. По лемме 10.1 независимость линейных форм L_1 и L_2 равносильна тому, что характеристические функции $\widehat{\mu}_j(y)$ удовлетворяют уравнению (10.2). Положим $\nu_j = \mu_j * \bar{\mu}_j$. Из 2.7$(c)$ и 2.7(d) вытекает, что $\widehat{\nu}_j(y) = |\widehat{\mu}_j(y)|^2 \geq 0$, $y \in Y$. Очевидно, что характеристические функции $\widehat{\nu}_j(y)$ также удовлетворяют уравнению (10.2). Лемма будет доказана, если мы докажем, что все $\nu_j \in D(X)$. Поэтому можно с самого начала предполагать, что все $\widehat{\mu}_j(y) \geq 0$, $y \in Y$.

1. Рассмотрим вначале случай, когда группа X либо конечна, либо бесконечна и является слабым прямым произведением циклических групп. Положим $X^1 = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} X^{(2^n)}$. Тогда $X^1 = \{0\}$. Из 1.21 вытекает, что последовательность Ульма группы X в этом случае состоит из одного члена $X_0 = X/X^1 \cong X$. Заметим, что число циклических прямых сомножителей порядка 2^n в разложении ульмовского фактора X_0 совпадает с $(n-1)$-м инвариантом Ульма–Капланского группы X. Поэтому, если группа X конечна, то X изоморфна группе вида 14.1(i). Утверждение леммы в этом случае доказано в лемме 14.1. Если группа X бесконечна, то X изоморфна группе вида

$$\mathop{\mathbf{P}^*}_{j=1}^{\infty} \mathbb{Z}(2^{m_j}), \quad m_j < m_{j+1}, \quad j = 1, 2, \dots \tag{14.16}$$

По теореме 1.7.2

$$Y = \mathop{\mathbf{P}}_{j=1}^{\infty} A_j, \quad A_j \cong \mathbb{Z}(2^{m_j}).$$

Докажем, что все $\widehat{\mu}_j(y) = 1$ при $y \in Y$. Положим

$$B_i = \mathop{\mathbf{P}}_{j=i+1}^{\infty} A_j, \quad H_i = Y_{(2)} \cap B_i.$$

Легко видеть, что $H_i = Y_{(2)} \cap Y^{(2^{m_{i+1}-1})}$. Поскольку при любом натуральном k подгруппы $Y^{(k)}$ и $Y_{(k)}$ – характеристические, то и подгруппы H_i также характеристические. По лемме 13.13 существует такая открытая подгруппа $B \subset Y$, что все характеристические функции $\widehat{\mu}_j(y) = 1$ при $y \in B$. Поскольку подгруппы B_i образуют базу системы окрестностей в нуле, то, не ограничивая общности, можно считать, что $B = B_{k_0}$ при некотором k_0.

Проверим вначале, что все характеристические функции $\widehat{\mu}_j(y) = 1$ при $y \in Y_{(2)}$. Рассмотрим ограничение уравнения (10.2) на подгруппу $Y_{(2)}$. Поскольку $H_{k_0} \subset B_{k_0}$, то все характеристические функции $\widehat{\mu}_j(y) = 1$ при $y \in H_{k_0}$. Заметим теперь, что для любого автоморфизма $\varepsilon \in \mathrm{Aut}(Y)$ и любого натурального i выполнено $\varepsilon(H_{i-1}\setminus H_i) = H_{i-1}\setminus H_i$. Отсюда следует, что если $u,v\in H_{i-1}\setminus H_i$, то $u+\varepsilon v\in H_i$. Подставляя $u,v\in H_{k_0-1}\setminus H_{k_0}$ в уравнение (10.2), мы получаем

$$1=\mathop{\mathbf{P}}_{j=1}^{n}\widehat{\mu}_j(u)\ \mathop{\mathbf{P}}_{j=1}^{n}\widehat{\mu}_j(\widetilde{\delta}_j v),\quad u,v\in H_{k_0-1}\setminus H_{k_0}.$$

Следовательно, все характеристические функции $\widehat{\mu}_j(y)=1$ при $y\in H_{k_0-1}$. Рассуждая аналогичным образом, последовательно получим, что все характеристические функции $\widehat{\mu}_j(y)=1$ при $y\in H_0=Y_{(2)}$.

Поскольку все характеристические функции $\widehat{\mu}_j(y)=1$ при $y\in Y_{(2)}$, то по следствию 2.13 каждая характеристическая функция $\widehat{\mu}_j(y)$ постоянна на классах смежности $y+Y_{(2)}$ и индуцирует некоторую характеристическую функцию $g_j([y])$ на фактор-группе $Y/Y_{(2)}$ по формуле $g_j([y])=\widehat{\mu}_j(y),\ y\in[y]$. С другой стороны, так как $Y_{(2)}$ – характеристическая подгруппа группы Y, то каждый автоморфизм $\widetilde{\delta}_j$ индуцирует некоторый топологический автоморфизм ε_j фактор-группы $Y/Y_{(2)}$ по формуле $\varepsilon_j[y]=[\widetilde{\delta}_j y],\ y\in[y]$. Это позволяет рассмотреть уравнение (10.2) на фактор-группе $Y/Y_{(2)}$. Имеем,

$$\mathop{\mathbf{P}}_{j=1}^{n} g_j([u]+\varepsilon_j[v])=\mathop{\mathbf{P}}_{j=1}^{n} g_j([u])\ \mathop{\mathbf{P}}_{j=1}^{n} g_j(\varepsilon_j[v]),\ [u],[v]\in Y/Y_{(2)}.$$

Фактор-группа $Y/Y_{(2)}$ имеет такой же вид, как и группа Y, т.е. является прямым произведением групп, каждая из которых изоморфна группе $\mathbb{Z}(2^{l_k})$ и все l_k различны. Поэтому, как доказано выше, $g_j([y])=1$ при $[y]\in\big(Y/Y_{(2)}\big)_{(2)}$. Возвращаясь к исходным характеристическим функциям $\widehat{\mu}_j(y)$, получаем, что $\widehat{\mu}_j(y)=1$ при $y\in Y_{(4)}$. Рассуждая аналогичным образом, мы последовательно докажем, что $\widehat{\mu}_j(y)=1$ при $y\in Y_{(2^m)}$ при любом m. Поскольку подгруппы $Y_{(2^{m_{k_0}})}$ и B_{k_0} порождают группу Y, то, по предложению 2.13 $\widehat{\mu}_j(y)=1$ при $y\in Y$, т.е. все $\mu_j=E_0$.

2. Рассмотрим теперь общий случай. Положим

$$X^0=X,\quad X^1=\bigcap_{n=1}^{\infty}X^{(2^n)},\quad X^{\sigma+1}=(X^\sigma)^1,\quad X^\rho=\bigcap_{\sigma<\rho}X^\sigma,$$

если ρ — предельное порядковое число. Пусть τ – наименьшее порядковое число, для которого $X^\tau=\{0\}$. По теореме 1.21.1 τ – счетное порядковое число и каждая группа $X_\sigma=X^\sigma/X^{\sigma+1}$ – слабое прямое произведение циклических групп, причем при $\sigma+1<\tau$ порядки элементов группы A_σ неограничены. Так как число циклических прямых сомножителей порядка 2^n в разложении X_σ совпадает с $\big(\omega\sigma+n-1\big)$-м инвариантом Ульма–Капланского группы X, то ульмовские факторы X_σ имеют следующий вид:

$$X_\sigma\cong\mathop{\mathbf{P}^*}_{j=1}^{\infty}\mathbb{Z}(2^{m_{\sigma,j}}),\ m_{\sigma,j}<m_{\sigma,j+1},\quad \text{если } \sigma+1<\tau. \tag{14.17}$$

Если порядковое число $\tau-1$ существует, то группа $X_{\tau-1}$ изоморфна либо группе вида 14.1(i), либо группе вида (14.16).

Положим $L=A(Y,X^1)$. Очевидно, что X^1 – характеристическая подгруппа группы X. По следствию 13.4 L – характеристическая подгруппа группы Y. По теореме 1.9.1 $X^1=A(X,L)$. Поэтому по теореме 1.9.2 $L\cong(X_0)^*$. Рассмотрим ограничение уравнения (10.2) на подгруппу L. Поскольку группа X_0 имеет вид (14.17), то как доказано при рассмотрении случая **1**, все $\widehat{\mu}_j(y)=1$ при $y\in L$. По предложению 2.13 $\sigma(\mu_j)\subset A(X,L)=X^1$. Очевидно, что X^κ - характеристическая подгруппа группы X при любом $\kappa<\tau$. Предположим, что уже доказано включение

$\sigma(\mu_j) \subset X^\kappa$, $j = 1, 2, \dots, n$, где $\kappa < \rho$. Если порядковое число $\rho - 1$ существует, то рассуждение, проведенное выше, где вместо X рассматривается $X^{\rho-1}$, доказывает, что все $\sigma(\mu_j) \subset X^\rho$. Если же ρ – предельное порядковое число, то $X^\rho = \bigcap\limits_{\delta<\rho} X^\delta$, и поэтому также все $\sigma(\mu_j) \subset X^\rho$. Следовательно, все $\sigma(\mu_j) \subset X^\tau = \{0\}$, т.е. все $\mu_j = E_0$. $\square$

14.16. Лемма. *Пусть либо $X = \mathbb{Z}(2^\infty)$, либо $X = \mathbb{Z}(2^\infty) \times G$, где G – дискретная редуцированная 2-примарная группа такая, что все ее инварианты Ульма–Капланского равны либо 0, либо 1. Пусть ξ_j, $j = 1, 2, \dots, n$, $n \geq 2$, – независимые случайные величины со значениями в группе X и с распределениями μ_j. Пусть α_j, β_j – автоморфизмы группы X. Тогда из независимости линейных форм $L_1 = \alpha_1\xi_1 + \dots + \alpha_n\xi_n$ и $L_2 = \beta_1\xi_1 + \dots + \beta_n\xi_n$ вытекает, что все μ_j – вырожденные распределения.*

Доказательство. По лемме 10.1 независимость линейных форм L_1 и L_2 равносильна тому, что характеристические функции $\widehat{\mu}_j(y)$ удовлетворяют уравнению 10.1(i). Положим $\nu_j = \mu_j * \bar{\mu}_j$. Из 2.7$(c)$ и 2.7(d) вытекает, что $\widehat{\nu}_j(y) = |\widehat{\mu}_j(y)|^2 \geq 0$, $y \in Y$. Очевидно, что характеристические функции $\widehat{\nu}_j(y)$ также удовлетворяют уравнению 10.1(i). Лемма будет доказана, если мы докажем, что все $\nu_j \in D(X)$. Поэтому можно с самого начала предполагать, что все $\widehat{\mu}_j(y) \geq 0$, $y \in Y$.

1. Пусть $X = \mathbb{Z}(2^\infty)$. Имеем $Y \cong \Delta_2$. Обозначим $Y_i = Y^{(2^i)}$. Из определения топологии в группе Δ_2 следует, что множества Y_i образуют базу системы окрестностей в нуле. По лемме 13.13 существует такая открытая подгруппа B в группе Y, что все $\widehat{\mu}_j(y) = 1$ при $y \in B$. Не ограничивая общности, можно считать, $B = Y_{k_0}$ при некотором k_0. По предложению 2.13 $\sigma(\mu_j) \subset A(X, Y_{k_0}) = X_{(2^{k_0})} \cong \mathbb{Z}(2^{k_0})$. Так как подгруппа $X_{(2^{k_0})}$ является характеристической подгруппой группы X, то утверждение леммы вытекает из леммы 14.1.

2. Пусть $X = \mathbb{Z}(2^\infty) \times G$, где G – дискретная редуцированная 2-примарная группа такая, что все ее инварианты Ульма–Капланского равны либо 0, либо 1. Положим $H = A(Y, \mathbb{Z}(2^\infty))$. По теореме 1.9.1 $A(X, H) = \mathbb{Z}(2^\infty)$. Так как $Z(2^\infty)$ – максимальная делимая подгруппа группы X, то $Z(2^\infty)$ – характеристическая подгруппа группы X. По следствию 13.4 H – характеристическая подгруппа группы Y. Рассмотрим ограничение уравнения 10.1(i) на подгруппу H. Поскольку $H \cong G^*$, то по лемме 14.15 все $\widehat{\mu}_j(y) = 1$ при $y \in H$, а значит, по предложению 2.13 все $\sigma(\mu_j) \subset A(X, H) = \mathbb{Z}(2^\infty)$. Утверждение леммы вытекает теперь из **1**. $\square$

Из теоремы 1.7.1 и лемм 10.1, 14.15 и 14.16 непосредственно вытекает следующее утверждение.

14.17. Следствие. *Пусть H – компактная группа, которая является группой характеров дискретной редуцированной 2-примарной группы такой, что все ее инварианты Ульма–Капланского равны либо 0, либо 1. Пусть либо $Y = H$, либо $Y = \Delta_2$, либо $Y = \Delta_2 \times H$. Пусть $\widetilde{\alpha}_j, \widetilde{\beta}_j$, $j = 1, 2, \dots, n$, $n \geq 2$, – топологические автоморфизмы группы Y, а $\widehat{\mu}_j(y)$ – характеристические функции на группе Y, удовлетворяющие уравнению 10.1(i). Тогда характеристические функции $\widehat{\mu}_j(y)$ имеют вид*

$$\widehat{\mu}_j(y) = (x_j, y), \quad x_j \in X,\ j = 1, 2, \dots, n.$$

14.18. Лемма. *Пусть X – дискретная редуцированная 2-примарная группа такая, что не все ее инварианты Ульма–Капланского равны либо 0, либо 1. Тогда группа X содержит подгруппу*

M, $M \cong (\mathbb{Z}(2^k))^2$ *такую, что любой автоморфизм подгруппы* M *продолжается до автоморфизма группы* X.

Доказательство. Пусть A – произвольная p-примарная группа. Как известно (см. ([79, §33])) в A существует подгруппа B, называемая *базисной*, которая обладает следующими свойствами:

(a) B – слабое прямое произведение циклических групп;

(b) B – сервантная подгруппа группы A;

(c) A/B – делимая группа.

Обозначим через B_n слабое прямое произведение циклических сомножителей в B, имеющих порядок p^n, т.е. $B_n \cong \mathbf{P}^* \, \mathbb{Z}(p^n)$ и

$$B = \mathop{\mathbf{P}^*}_{n=1}^{\infty} B_n.$$

Тогда имеет место разложение

$$A = B_1 \times \cdots \times B_n \times C_n, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{14.18}$$

где C_n – подгруппа в A, порожденная $\mathop{\mathbf{P}^*}_{i \geq n+1} B_i$ и $A^{(p^n)}$ ([79, теорема 32.4]).

Перейдем теперь к доказательству леммы. По теореме 1.21 каждый ульмовский фактор группы X является слабым прямым произведением циклических 2-примарных групп. Поэтому условие леммы означает, что один из ульмовских факторов X_σ содержит прямой сомножитель L изоморфный группе $(\mathbb{Z}(2^k))^2$ при некотором натуральном k. Имеем $X_\sigma = X^\sigma / X^{\sigma+1}$. Пусть B – базисная подгруппа группы X^σ. Тогда $X^{\sigma+1} \cap B = \{0\}$. Обозначим через B_0 образ подгруппы B при естественном гомоморфизме $\pi : X^\sigma \mapsto X_\sigma$. Тогда B_0 является базисной подгруппой группы X_σ, причем π – изоморфизм между B и B_0 ([79, §34]). Так как X_σ – слабое прямое произведение циклических групп, то группа X_σ служит сама для себя базисной подгруппой. Так как все базисные подгруппы p-примарной группы изоморфны ([79, теорема 35.2]), то $X_\sigma \cong B_0$. Отсюда вытекает, что $X_\sigma \cong B$. Следовательно подгруппа B содержит прямой множитель M, изоморфный $(\mathbb{Z}(2^k))^2$. Имеем $B = M \times N$, где N, как подгруппа B, – также слабое прямое произведение циклических групп. Мы получили разложение группы B в слабое прямое произведение циклических групп. Пусть B_n – слабое прямое произведение циклических множителей в B порядка 2^n. Тогда M – прямой сомножитель в B_k. Используя разложение (14.18) для группы X^σ, заключаем, что M – прямой сомножитель в X^σ. Следовательно, любой автоморфизм подгруппы M продолжается до автоморфизма группы X^σ. По теореме Цыпина любой автоморфизм подгруппы X^σ продолжается до автоморфизма группы X ([80, теорема 77.4]). Таким образом, любой, автоморфизм подгруппы M продолжается до автоморфизма группы X. $\square$

14.19. Лемма. *Для каждой из групп* $X = (\mathbb{Z}(2^\infty))^2$ *и* $X = \mathbb{Z}(p^\infty)$, *где* p *– простое число,* $p \geq 3$, *и любого* $n \geq 3$ *существуют независимые одинаково распределенные случайные величины* ξ_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, *со значениями в группе* X *и с распределением* $\mu \notin I(X)$ *и автоморфизмы* $\alpha, \beta \in \mathrm{Aut}(X)$ *такие, что линейные формы* $L_1 = \xi_1 + \cdots + \xi_n$ *и* $L_2 = \xi_1 + \cdots + \xi_{n-2} + \alpha\xi_{n-1} + \beta\xi_n$ *независимы.*

Доказательство. Пусть $X = (\mathbb{Z}(2^\infty))^2$. Обозначим элементы группы X через (a, b), $a, b \in \mathbb{Z}(2^\infty)$. Пусть автоморфизмы $\alpha, \beta \in \mathrm{Aut}(X)$ имеют вид

$$\alpha(a, b) = (a, a + b), \quad \beta(a, b) = (b, a), \quad a, b \in \mathbb{Z}(2^\infty).$$

Рассмотрим подгруппу $K = X_{(2)}$. Очевидно, что $K \cong (\mathbb{Z}(2))^2$. Подгруппа K – характеристическая, а ограничение автоморфизмов α и β на K совпадает с автоморфизмами, определяемыми формулой (14.5). По лемме 14.6 существуют независимые одинаково распределенные случайные величины $\xi_j,\ j = 1, 2, \dots, n,\ n \geq 3$, со значениями в группе K и с распределением $\mu \notin I(K)$ такие, что линейные формы $L_1 = \xi_1 + \dots + \xi_n$ и $L_2 = \xi_1 + \dots + \xi_{n-2} + \alpha\xi_{n-1} + \beta\xi_n$ независимы. Утверждение леммы вытекает теперь из замечания 13.24.

Пусть $X = \mathbb{Z}(p^\infty)$, где p – простое число, $p \geq 3$. Схема доказательства леммы в этом случае такая же, как для группы $X = (\mathbb{Z}(2^\infty))^2$. Обозначим $K = X_{(p^2)}$. Очевидно, что $K \cong \mathbb{Z}(p^2)$ и подгруппа K – характеристическая. По лемме 14.6 существуют независимые одинаково распределенные случайные величины $\xi_j,\ j = 1, 2, \dots, n,\ n \geq 3$, со значениями в группе K и с распределением $\mu \notin I(K)$ такие, что линейные формы $L_1 = \xi_1 + \dots + \xi_n$ и $L_2 = \xi_1 + \dots + \xi_{n-2} + 2\xi_{n-1} - \zeta_n$ независимы. Очевидно, что автоморфизмы f_2 и $-I$ продолжаются с K до автоморфизмов группы X. Утверждение леммы также вытекает из замечания 13.24. $\square$

Следующее утверждение можно рассматривать, как аналог теоремы Скитовича–Дармуа для дискретных периодических групп и трех независимых случайных величин.

14.20. Теорема. *Пусть X – дискретная периодическая группа, G – дискретная редуцированная 2-примарная группа такая, что все ее инварианты Ульма–Капланского равны либо 0, либо 1. Обозначим через K одну из групп: G, $\mathbb{Z}(2^\infty)$, $\mathbb{Z}(2^\infty) \times G$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(I) Пусть $\xi_j,\ j = 1, 2, 3,$ – независимые случайные величины со значениями в группе X и с распределениями μ_j. Пусть $\alpha_j,\ \beta_j$ – автоморфизмы группы X. Предположим, что линейные формы $L_1 = \alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2 + \alpha_3\xi_3$ и $L_2 = \beta_1\xi_1 + \beta_2\xi_2 + \beta_3\xi_3$ независимы. Если $X = K$, то все μ_j – вырожденные распределения. Если $X = \mathbb{Z}(3) \times K$, то либо все μ_j – вырожденные распределения, либо $\mu_{j_1} = m_{\mathbb{Z}(3)} * E_{x_1}$, $\mu_{j_2} = m_{\mathbb{Z}(3)} * E_{x_2}$, $x_j \in X$, по крайней мере для двух распределений μ_{j_1} и μ_{j_2}. Если $X = \mathbb{Z}(5) \times K$, то либо все μ_j – вырожденные распределения, либо $\mu_{j_1} = m_{\mathbb{Z}(5)} * E_{x_1},\ x_1 \in X$, по крайней мере для одного распределения μ_{j_1}.

(II) Если группа X не изоморфна группам, перечисленным в (I), то для любого $n \geq 3$ существуют независимые одинаково распределенные случайные величины $\xi_j,\ j = 1, 2, \dots, n$, со значениями в группе X и с распределением $\mu \notin I(X)$ и автоморфизмы $\alpha_j, \beta_j \in \mathrm{Aut}(X)$ такие, что $L_1 = \alpha_1\xi_1 + \dots + \alpha_n\xi_n$ и $L_2 = \beta_1\xi_1 + \dots + \beta_n\xi_n$ независимы.

Доказательство. (I). Если $X = K$, то утверждение теоремы вытекает из лемм 14.15 и 14.16. Если либо $X = \mathbb{Z}(3) \times K$, либо $X = \mathbb{Z}(5) \times K$, то доказательство теоремы совершенно аналогично доказательству теоремы 14.7 в случае (I).

(II). Предположим, что группа X топологически не изоморфна группам, перечисленным в (I). По теореме 1.20.1 группа X является слабым прямым произведением своих p-компонент X_p. По теореме 1.20.2 каждая из p-примарных подгрупп X_p может быть представлена, как прямое произведение $X_p = D_p \times N_p$, где D_p – максимальная делимая подгруппа в X_p и N_p – редуцированная p-примарная группа. По теореме 1.20.3 группа D_p в свою очередь может быть представлена как слабое прямое произведение групп, каждая из которых изоморфна группе $Z(p^\infty)$. Воспользуемся тем, любая редуцированная p-примарная группа обладает циклическим прямым сомножителем ([79, §27]). Следовательно, группа N_p обладает прямым сомножителем $M \cong \mathbb{Z}(p^k)$ при некотором натуральном k. Отсюда следует, что если группа X не изоморфна группам, перечисленным в (I), то X содержит в качестве прямого сомножителя либо группу $(\mathbb{Z}(2^\infty))^2$, либо группу $\mathbb{Z}(p^\infty)$, где p – простое число, $p \geq 3$, либо такую редуцированную 2-примарную группу, что не все ее инварианты Ульма–Капланского равны либо 0, либо 1, либо одну из групп, перечисленных в лемме 14.6. Утверждение теоремы в этом случае вытекает, соответственно, из лемм 14.19, 14.18, 14.6 и замечания 13.24. □

14.21. Замечание. Учитывая замечание 14.8 и леммы 14.15 и 14.16, легко видеть что утверждение (I) в теореме 14.20, в случае, когда либо $X = K$, либо $X = \mathbb{Z}(3) \times K$, справедливо для произвольного числа $n \geq 2$ независимых случайных величин.

Обсудим теперь случай, когда X – либо компактная (не обязательно вполне несвязная) группа, либо дискретная периодическая группа, а число независимых случайных величин $n \geq 4$. Нам понадобится следующая лемма, относящаяся к произвольным группам X.

14.22. Лемма. *Пусть группа X содержит компактную подгруппу F, обладающую следующими свойствами:*

(a) $F \ncong Z(3)$;

(b) существует автоморфизм $\delta \in \mathrm{Aut}(F)$, который продолжается до топологического автоморфизма группы X;

(c) $I - \delta$ — эпиморфизм подгруппы F.

Тогда для любого $n \geq 4$ существуют независимые случайные величины $\xi_j,\ j = 1, 2, \dots, n$, со значениями в группе X и с распределениями $\mu_j \notin \Gamma(X) * I(X)$ и автоморфизмы $\alpha_j, \beta_j \in \mathrm{Aut}(X)$ такие, что линейные формы $L_1 = \alpha_1\xi_1 + \cdots + \alpha_n\xi_n$ и $L_2 = \beta_1\xi_1 + \cdots + \beta_n\xi_n$ независимы.

Доказательство. Учитывая замечание 13.24, можно доказывать лемму, предполагая, что $X = F$. Так как $X \ncong Z(3)$, то и $Y \ncong \mathbb{Z}(3)$. Так как $I - \delta$ — эпиморфизм группы X, то $X \ncong \mathbb{Z}(2)$, так как единственным автоморфизмом группы $\mathbb{Z}(2)$ является тождественный автоморфизм I. Следовательно, и $Y \ncong \mathbb{Z}(2)$. Поэтому можно выбрать отличные от нуля элементы $y_1, y_2 \in Y$ так, чтобы $\{y_1, -y_1\} \cap \{y_2, -y_2\} = \emptyset$. Рассмотрим на группе X функции

$$\rho_j(x) = 1 + (1/2)\mathrm{Re}(x, y_j).$$

Тогда $\rho_j(x) > 0,\ x \in X$, и

$$\int\limits_X \rho_j(x) dm_X(x) = 1, \quad j = 1, 2.$$

Обозначим через λ_j распределение на группе X с плотностью $\rho_j(x)$ относительно распределения Хаара m_X. Пусть $a(y_j) = \dfrac{1}{4}$, если $2y_j \neq 0$ и $a(y_j) = \dfrac{1}{2}$, если $2y_j = 0$. Легко видеть, что характеристические функции распределений λ_j имеют вид:

$$\widehat{\lambda}_j(y) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad y = 0, \\ a(y_j), & \text{если} \quad y = \pm y_j, \\ 0 & \text{если} \quad y \notin \{0, \pm y_j\}. \end{cases} \tag{14.19}$$

Пусть ξ_j — независимые случайные величины со значениями в группе X и с распределениями μ_j, где $\mu_1 = \mu_3 = \lambda_1$, $\mu_2 = \mu_4 = \lambda_2$, а μ_j при $j \geq 5$ — произвольные распределения на X такие, что $\mu_j \notin \Gamma(X) * I(X)$. Пусть $\delta_1 = \delta_2 = I,\ \delta_3 = \delta_4 = \delta$, а остальные автоморфизмы $\delta_j \in \mathrm{Aut}(X)$ — произвольны. Очевидно, что все $\mu_j \notin \Gamma(X) * I(X)$. Проверим, что характеристические функции $\widehat{\mu}_j(y)$ удовлетворяют уравнению 10.1(i), которое принимает вид

$$\widehat{\lambda}_1(u+v)\widehat{\lambda}_2(u+v)\widehat{\lambda}_1(u+\widetilde{\delta}v)\widehat{\lambda}_2(u+\widetilde{\delta}v)\prod_{j=5}^{n}\widehat{\mu}_j(u+\widetilde{\delta}_j v) =$$

$$= \widehat{\lambda}_1^2(u)\widehat{\lambda}_1(v)\widehat{\lambda}_1(\widetilde{\delta}v)\widehat{\lambda}_2^2(u)\widehat{\lambda}_2(v)\widehat{\lambda}_2(\widetilde{\delta}v)\prod_{j=5}^{n}\widehat{\mu}_j(u)\prod_{j=5}^{n}\widehat{\mu}_j(\widetilde{\delta}_j v), \quad u, v \in Y. \tag{14.20}$$

Тогда по лемме 10.1 отсюда будет следовать независимость линейных форм $L_1 = \xi_1 + \cdots + \xi_n$ и $L_1 = \delta_1\xi_1 + \cdots + \delta_n\xi_n$. Тем самым лемма будет доказана.

Очевидно, что уравнение (14.20) превращается в равенство, если либо $u = 0$ либо $v = 0$. Проверим, что уравнение (14.20) превращается в равенство при любых $u \neq 0$ и $v \neq 0$. Из (14.19) тогда следует, что правая часть уравнения (14.20) равна нулю. Проверим, что левая часть уравнения (14.20) также равна нулю. Для этого покажем, что произведение $\widehat{\lambda}_1(u+v)\widehat{\lambda}_2(u+v)\widehat{\lambda}_1(u+\widetilde{\delta}v)\widehat{\lambda}_2(u+\widetilde{\delta}v) = 0$ при любых $u \neq 0,\ v \neq 0$. Предположим, что это не так. Тогда должно быть выполнено $u+v,\ u+\widetilde{\delta}v \in \{0, y_1, -y_1\} \bigcap \{0, y_2, -y_2\} = \{0\}$. Отсюда следует, что

$$\begin{cases} u + v = 0, \\ u + \widetilde{\delta}v = 0. \end{cases}$$

Из этой системы получаем, что $(I - \widetilde{\delta})v = 0$. Так как по условию $I - \delta$ — эпиморфизм группы X, то по 1.13(b) $I - \widetilde{\delta}$ — мономорфизм группы Y. Следовательно, из равенства $(I - \widetilde{\delta})v = 0$ вытекает, что $v = 0$. Но это противоречит предположению о том, что $v \neq 0$. Таким образом, левая часть уравнения (14.20) также равна нулю при $u \neq 0, v \neq 0$. Следовательно, характеристические функции $\widehat{\mu}_j(y)$ удовлетворяют уравнению (14.20). $\square$

14.23. Предложение. *Пусть X – компактная группа, G – группа вида* 14.1(i). *Обозначим через K одну из групп: $G,\ \Delta_2,\ \Delta_2 \times G$. Если группа X топологически не изоморфна группам K и $\mathbb{Z}(3) \times K$, то для любого $n \geq 4$ существуют независимые случайные величины $\xi_j,\ j = 1, 2, \ldots, n$, со значениями в группе X и с распределениями $\mu_j \notin \Gamma(X) * I(X)$ и автоморфизмы $\alpha_j, \beta_j \in \mathrm{Aut}(X)$ и такие, что линейные формы $L_1 = \alpha_1\xi_1 + \cdots + \alpha_n\xi_n$ и $L_2 = \beta_1\xi_1 + \cdots + \beta_n\xi_n$ независимы.*

Доказательство. Рассмотрим c_X – компоненту связности нуля группы X и предположим, что $c_X \neq \{0\}$. По теореме 1.9.6 $(c_X)^{(2)} = c_X$. Поэтому подгруппа $F = c_X$ и автоморфизм $-I$ удовлетворяют условиям леммы 14.22. Предложение вытекает в таком случае из леммы 14.22.

Если $c_X = \{0\}$, то группа X вполне несвязна. Воспользуемся теоремой 14.13. Из теоремы 14.13 следует утверждение доказываемого предложения для всех групп X, кроме $X = \mathbb{Z}(5) \times K$. Пусть $X = \mathbb{Z}(5) \times K$. Тогда подгруппа $F = \mathbb{Z}(5)$ и автоморфизм $-I$ удовлетворяют условиям леммы 14.22. Предложение вытекает в таком случае из леммы 14.22. $\square$

14.24. Замечание. Из замечания 14.14 и предложения 14.23, очевидно, вытекает аналог теоремы Скитовича–Дармуа для компактных групп и произвольного числа $n \geq 4$ независимых случайных.

14.25. Предложение. *Пусть X – дискретная периодическая группа, G – дискретная редуцированная 2-примарная группа такая, что все ее инварианты Ульма–Капланского равны либо 0, либо 1. Обозначим через K одну из групп: G, $\mathbb{Z}(2^\infty)$, $\mathbb{Z}(2^\infty)\times G$. Если группа X не изоморфна группам K и $\mathbb{Z}(3)\times K$, то для любого $n\geq 4$ существуют независимые случайные величины ξ_j, $j=1,2,\dots,n$, со значениями в группе X и с распределениями $\mu_j\notin I(X)$ и автоморфизмы $\alpha_j,\beta_j\in \mathrm{Aut}(X)$ и такие, что линейные формы $L_1=\alpha_1\xi_1+\cdots+\alpha_n\xi_n$ и $L_2=\beta_1\xi_1+\cdots+\beta_n\xi_n$ независимы.*

Доказательство. Воспользуемся теоремой 14.20. Из теоремы 14.20 следует утверждение доказываемого предложения для всех групп X, кроме $X=\mathbb{Z}(5)\times K$. Пусть $X=\mathbb{Z}(5)\times K$. Тогда подгруппа $F=\mathbb{Z}(5)$ и автоморфизм $-I$ удовлетворяют условиям леммы 14.22. Предложение вытекает в таком случае из леммы 14.22. □

14.26. Замечание. Из замечания 14.21 и предложения 14.25, очевидно, вытекает аналог теоремы Скитовича–Дармуа для дискретных периодических групп и произвольного числа $n\geq 4$ независимых случайных величин.

В заключение параграфа докажем следующее утверждение.

14.27. Теорема. *Пусть*

$$X=\mathbb{R}^m\times\Delta_2\times\mathbb{Z}(2^\infty)\times D, \tag{i}$$

где D — дискретная группа, периодическая часть которой b_D является редуцированной 2-примарной группой, все инварианты Ульма–Капланского которой равны либо 0, либо 1. Пусть ξ_j, $j=1,2,\dots,n$, $n\geq 2$, – независимые случайные величины со значениями в группе X и с распределениями μ_j. Пусть α_j, β_j – топологические автоморфизмы группы X. Тогда из независимости линейных форм $L_1=\alpha_1\xi_1+\cdots+\alpha_n\xi_n$ и $L_2=\beta_1\xi_1+\cdots+\beta_n\xi_n$ вытекает, что все $\mu_j\in\Gamma(X)$.

Доказательство. По лемме 10.1 независимость линейных форм L_1 и L_2 равносильна тому, что характеристические функции $\widehat{\mu}_j(y)$ удовлетворяют уравнению 10.1(i). Положим $\nu_j=\mu_j*\bar{\mu}_j$. Из 2.7(c) и 2.7(d) вытекает, что $\widehat{\nu}_j(y)=|\widehat{\mu}_j(y)|^2\geq 0$, $y\in Y$. Очевидно, что характеристические функции $\widehat{\nu}_j(y)$ также удовлетворяют уравнению 10.1(i). Поскольку группа X не содержит подгруппы, топологически изоморфной группе $\mathbb{T}$, то по теореме 4.6 из того, что $\nu_j\in\Gamma(X)$ следует, что $\mu_j\in\Gamma(X)$. Это позволяет с самого начала доказывать теорему в предположении, что $\widehat{\mu}_j(y)\geq 0$.

Легко видеть, что $b_X=\Delta_2\times\mathbb{Z}(2^\infty)\times b_D$. Учитывая замечание 13.12, можно доказывать теорему, предполагая с самого начала, что группа D периодическая.

Очевидно, что $Y\cong\mathbb{R}^m\times\mathbb{Z}(2^\infty)\times\Delta_2\times L$, где $L=D^*$. Чтобы не вводить дополнительных обозначений, будем считать, что $Y=\mathbb{R}^m\times\mathbb{Z}(2^\infty)\times\Delta_2\times L$. Подгруппа $\mathbb{Z}(2^\infty)\times D$ в X, очевидно, замкнута и является характеристической, так как состоит из всех элементов конечного порядка группы X. По следствию 13.4 ее аннулятор $A(Y,\mathbb{Z}(2^\infty)\times D)=\mathbb{R}^m\times\mathbb{Z}(2^\infty)$ — характеристическая подгруппа группы Y. Следовательно, $\mathbb{Z}(2^\infty)$ — также характеристическая подгруппа группы Y. Рассмотрим ограничение уравнения 10.1(i) на подгруппу $\mathbb{Z}(2^\infty)$. Как вытекает из следствия 14.10,

$\widehat{\mu}_j(y) = 1$ при $y \in \mathbb{Z}(2^\infty)$. Значит, по предложению 2.13 все $\sigma(\mu_j) \subset A(X, \mathbb{Z}(2^\infty)) = K$, где

$$K = \mathbb{R}^m \times \mathbb{Z}(2^\infty) \times D. \tag{14.21}$$

Поскольку $\mathbb{Z}(2^\infty)$ — характеристическая подгруппа группы Y, то по следствию 13.4 K — характеристическая подгруппа группы X. Поэтому можно доказывать теорему, предполагая, что X имеет вид (14.21). Следовательно, $Y \cong \mathbb{R}^m \times \Delta_2 \times L$. Чтобы не вводить дополнительных обозначений, будем считать, что $Y = \mathbb{R}^m \times \Delta_2 \times L$. Подгруппа $b_Y = \Delta_2 \times L$ — характеристическая. Рассмотрим ограничение уравнения 10.1(i) на подгруппу $\Delta_2 \times L$. По следствию 14.17 все характеристические функции $\widehat{\mu}_j(y) = 1$ при $y \in \Delta_2 \times L$. Значит, по предложению 2.13 все $\sigma(\mu_j) \subset A(X, \Delta_2 \times L) = \mathbb{R}^m$. Поскольку $\mathbb{R}^m = c_X$, то $\mathbb{R}^m$ — характеристическая подгруппа группы X. Доказательство теоремы свелось, таким образом, к его доказательству для группы $X = \mathbb{R}^m$. Теорема вытекает теперь из теоремы Гурье–Олкина (см. замечание 13.10). □

§15. Теорема Скитовича–Дармуа на a-адических соленоидах $\Sigma_{\mathbf{a}}$

Согласно теореме 13.31 для любой связной компактной группе X существуют независимые случайные величины ξ_1 и ξ_2 со значениями в группе X и с распределениями $\mu_1, \mu_2 \notin \Gamma(X) * I(X)$ и автоморфизмы $\alpha_j, \beta_j \in \mathrm{Aut}(X)$ такие, что линейные формы $L_1 = \alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2$ и $L_2 = \beta_1\xi_1 + \beta_2\xi_2$ независимы. Целью настоящего параграфа является изучение следующего вопроса. Пусть ξ_1 и ξ_2 – независимые случайные величины со значениями в **a**-адическом соленоиде $X = \Sigma_{\mathbf{a}}$ и с распределениями μ_1 и μ_2. Пусть $\alpha_j, \beta_j \in \mathrm{Aut}(X)$ и линейные формы $L_1 = \alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2$ и $L_2 = \beta_1\xi_1 + \beta_2\xi_2$ независимы. Что в таком случае можно сказать о распределениях μ_1 и μ_2? Оказывается, что ответ зависит, как от вида **a**-адического соленоида $\Sigma_{\mathbf{a}}$, так и от топологических автоморфизмов α_j, β_j.

Прежде, чем мы перейдем к формулировке и доказательству основной теоремы, докажем ряд лемм.

15.1. Лемма. *Пусть Y – произвольная абелева группа, $q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$, $a(y)$ и $b(y)$ – функции на Y, удовлетворяющие уравнению*

(i) $$a(u + v)b(u + qv) = a(u)b(u)a(v)b(qv), \quad u, v \in Y,$$

и условиям

(ii) $$a(-y) = a(y), \quad b(-y) = b(y), \quad y \in Y.$$

Положим $s = 1 - q$. Если при некотором $y_0 \in Y^{(s)}$ выполнено $a(y_0)b(y_0) \neq 0$, то существует такая подгруппа $M \subset Y$, что $a(y)b(y) \neq 0$ при $y \in M$.

Доказательство. Полагая в (i) вначале $u = -qy,\ v = y$, затем $u = y,\ v = -y$ и учитывая (ii), получаем

$$a(sy) = a(qy)b^2(qy)a(y), \quad y \in Y, \tag{15.1}$$

$$b(sy) = a^2(y)b(y)b(qy), \quad y \in Y. \tag{15.2}$$

По условию $y_0 = sz_0,\ z_0 \in Y$. Подставляя $y = z_0$ в (15.1) и (15.2), находим

$$a(z_0) \neq 0, \quad a(qz_0) \neq 0, \quad b(z_0) \neq 0, \quad b(qz_0) \neq 0. \tag{15.3}$$

Из уравнения (i), полагая вначале $u = z_0,\ v = kz_0$, а затем $u = qz_0,\ v = kz_0,\ k \in \mathbb{Z}$, получаем

$$a((k+1)z_0))b((kq+1)z_0) = a(z_0))b(z_0)a(kz_0)b(kqz_0), \tag{15.4}$$

$$a((q+k)z_0))b((k+1)qz_0) = a(qz_0))b(qz_0)a(kz_0)b(kqz_0). \tag{15.5}$$

Учитывая (15.3), из (15.4) и (15.5) по индукции получаем, что $a(kz_0) \neq 0,\ b(kqz_0) \neq 0,\ k \in \mathbb{Z}$. Подгруппа $M = \{kqz_0\}_{k \in \mathbb{Z}}$ является искомой. $\square$

15.2. Лемма. *Пусть M – произвольная абелева группа, $a(y)$ и $b(y)$ – функции на M, удовлетворяющие уравнению* 15.1(i)*, условиям* 15.1(ii) *и условиям*

(i) $$0 < a(y) \leq 1, \quad 0 < b(y) \leq 1, \quad a(0) = b(0) = 1.$$

Положим $s = 1 - q$. Тогда на подгруппе $M^{(sq)}$ имеет место представление

(ii) $$a(y) = \exp\{-\varphi_1(y)\}, \quad b(y) = \exp\{-\varphi_2(y)\},$$

где $\varphi_j(y) \geq 0$ и каждая из функций $\varphi_j(y)$ удовлетворяет уравнению 2.16(ii).

Доказательство. Положим $\varphi_1(y) = -\log a(y),\ \varphi_2(y) = -\log b(y)$. Из 15.1$(i)$ получаем

$$\varphi_1(u+v) + \varphi_2(u+qv) = A(u) + B(v), \quad u, v \in M, \tag{15.6}$$

где $A(u) = \varphi_1(u) + \varphi_2(u),\ B(v) = \varphi_1(v) + \varphi_2(qv)$.

Применим для решения уравнения (15.6) метод конечных разностей. Пусть k – произвольный элемент группы M. Придадим u и v в (15.6) приращения $-qk$ и k соответственно. Вычитая уравнение (15.6) из полученного уравнения, находим

$$\varphi_1(u+v+sk) - \varphi_1(u+v) = \Delta_{-qk}A(u) + \Delta_k B(v), \quad u, v, k \in M. \tag{15.7}$$

Полагая в (15.7) $v = 0$ и вычитая из (15.7) полученное уравнение, имеем

$$\varphi_1(u+v+sk) - \varphi_1(u+v) - \varphi_1(u+sk) + \varphi_1(u) = \Delta_k B(v) - \Delta_k B(0). \tag{15.8}$$

Положим в (15.7) $v = sk$, получаем

$$\Delta_{sk}^2 \varphi_1(u) = d_1(k), \quad u, k \in M, \tag{15.9}$$

где $d_1(y)$ – некоторая функция на M. Применяя оператор Δ_{sk} к обеим частям (15.9), мы находим

$$\Delta_{sk}^3 \varphi_1(u) = 0, \quad u, k \in M. \tag{15.10}$$

Из (15.10) вытекает, что функция $\varphi_1(y)$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta_l^3 \varphi_1(u) = 0, \quad u,\ l \in M^{(s)}. \tag{15.11}$$

Из (i) следует, что $\varphi_1(y) \geq 0$. По лемме 10.11 функция $\varphi_1(y)$ удовлетворяет уравнению 2.16(ii).

Для функции $\varphi_2(y)$ рассуждаем аналогично. Пусть k – произвольный элемент группы M. Придадим u и v в (15.6) приращения $-k$ и k соответственно. Вычитая уравнение (15.6) из полученного уравнения, находим

$$\varphi_2(u+qv-sk) - \varphi_2(u+qv) = \Delta_{-k}A(u) + \Delta_k B(v), \quad u, v, k \in M. \tag{15.12}$$

Полагая в (15.12) $v = 0$ и вычитая из (15.12) полученное уравнение, имеем

$$\varphi_2(u + qv - sk) - \varphi_2(u + qv) - \varphi_2(u - sk) + \varphi_2(u) = \Delta_k B(v) - \Delta_k B(0), \quad u, v, k \in M. \tag{15.13}$$

Положим здесь $k = qt,\ v = -st,\ t \in M$, получаем

$$\Delta^2_{-sqt}\varphi_2(u) = d_2(t), \quad u, t \in M, \tag{15.14}$$

где $d_2(y)$ – некоторая функция на M. Применяя оператор Δ_{-sqt} к обеим частям (15.14), мы находим

$$\Delta^3_{-sqt}\varphi_2(u) = 0, \quad u, t \in M. \tag{15.15}$$

Из (15.15) вытекает, что функция $\varphi_2(y)$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta^3_l\varphi_2(u) = 0, \quad u, l \in M^{(sq)}. \tag{15.16}$$

Из (i) следует, что $\varphi_2(y) \geq 0$. По лемме 10.11 функция $\varphi_2(y)$ удовлетворяет уравнению 2.16(ii). $\square$

15.3. Следствие. *Пусть в условиях леммы* 15.2 M *– подгруппа в* $\mathbb{Q}$. *Тогда имеют место представления*

(i) $$a(y) = e^{-\sigma_1 y^2}, \quad b(y) = e^{-\sigma_2 y^2}, \quad \sigma_1 \geq 0, \quad \sigma_2 \geq 0, \quad y \in M^{(sq)}.$$

15.4. Лемма. *Пусть* $X = \Sigma_{\mathbf{a}}$, K *– компактная подгруппа в* X *такая, что аннулятор* $A(Y, K) \not\cong \mathbb{Z}$. *Пусть* $\mu \in \mathrm{M}^1(X)$ *и* $\nu = \mu * \bar{\mu}$. *Тогда, если* $\nu = \gamma * m_K$, *где* $\gamma \in \Gamma(X)$, *то* $\mu \in \Gamma(X) * I(X)$.

Доказательство. Пусть $p : X \mapsto X/K$ – естественный гомоморфизм. Обозначим $L = A(Y, K)$ и воспользуемся представлением 2.14(i) для характеристической функции $\widehat{m}_K(y)$. Поскольку по теореме 1.9.2 $(X/K)^* \cong L$, то по следствию 2.11 ограничение характеристической функции $\widehat{\nu}(y)$ на L является характеристической функцией гауссовского распределения $p(\nu)$ на фактор-группе X/K. Поскольку по условию $L \not\cong \mathbb{Z}$, то $X/K \not\cong \mathbb{T}$. Очевидно также, что фактор-группа X/K не может содержать подгруппы, топологически изоморфной $\mathbb{T}$. Имеем, $p(\nu) = p(\mu) * p(\bar{\mu})$. По теореме 4.6, примененной к фактор-группе X/K, тогда следует, что $p(\mu) \in \Gamma(X/K)$. Следовательно, ограничение характеристической функции $\widehat{\mu}(y)$ на L является характеристической функцией некоторого гауссовского распределения. Таким образом, мы имеем представление

$$\widehat{\mu}(y) = \begin{cases} ([x_0], y)\exp\{-\varphi(y)\}, & \text{если} \quad y \in L, \\ 0, & \text{если} \quad y \notin L, \end{cases} \tag{15.17}$$

где $[x_0] \in X/K$, а $\varphi(y) = \sigma y^2,\ \sigma \geq 0$. Функция $\varphi(y)$ естественным образом продолжается с L на Y. Обозначим через $\widetilde{\varphi}(y)$ продолженную функцию. Возьмем $x_0 \in [x_0]$ и рассмотрим распределение $\lambda \in \Gamma(X)$ с характеристической функцией

$$\widehat{\lambda}(y) = (x_0, y)\exp\{-\widetilde{\varphi}(y)\}, \quad y \in Y. \tag{15.18}$$

Из (15.18) и представления 2.14(i) для характеристической функции $\widehat{m}_K(y)$ следует, что $\widehat{\mu}(y) = \widehat{\lambda}(y)\widehat{m}_K(y)$. Из 2.7$(b)$ и 2.7(c) вытекает, что $\mu = \lambda * m_K$. $\square$

15.5. Лемма. *Пусть Y – подгруппа в $\mathbb{Q}$, F – подгруппа в Y. Рассмотрим $\mathbb{Q}$, как подгруппу $\mathbb{R}$, и предположим, что подгруппа F плотна в $\mathbb{R}$ в топологии $\mathbb{R}$, т.е. в топологии, индуцированной на F обычной топологией $\mathbb{R}$. Пусть $g(y)$ – положительно определенная функция на Y такая, что ее ограничение на F – непрерывная функция в топологии $\mathbb{R}$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(a) для любого $u \in Y$ ограничение функции $g(y)$ на класс смежности $u+F$ является равномерно непрерывной функцией в топологии $\mathbb{R}$;

(b) для любого $u \in Y$ существует предел

$$g_u = \lim_{y\to 0,\ y\in u+F} g(y);$$

(c) если при некотором $u \in Y$ выполнено $g_u = 1$, то функция $g(y)$ равномерно непрерывна в топологии $\mathbb{R}$ на подгруппе V, порожденной u и F.

Доказательство. Утверждение (a) следует из неравенства $2.7(g)$, справедливого в силу теоремы Бохнера для любой нормированной положительно определенной функции $g(y)$. Утверждение (b) непосредственно вытекает из (a). Для доказательства (c) воспользуемся неравенством (2.3), которое также справедливо для произвольной нормированной положительно определенной функции $g(y)$. Из (2.3) следует, что если $g_u = 1$, то $g_v = 1$ для любого $v \in V$. Поскольку фактор-группа V/F конечна, то равномерная непрерывность сужения функции $g(y)$ на V вытекает из $2.7(g)$. $\square$

15.6. Обозначения. Пусть $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \dots, a_n, \dots)$ — произвольная фиксированная последовательность целых чисел, больших 1, $X = \Sigma_\mathbf{a}$ – $\mathbf{a}$-адический соленоид. Группа характеров $Y = \Sigma_\mathbf{a}^*$ изоморфна подгруппе в $\mathbb{Q}$ вида $H_\mathbf{a}$, где $H_\mathbf{a} = \left\{\dfrac{m}{a_0 a_1 \cdots a_n} : n = 0, 1, \dots ; m \in \mathbb{Z}\right\}$. Чтобы не вводить дополнительных обозначений, будем считать, что $Y = H_\mathbf{a}$. Пусть ξ_1 и ξ_2 – независимые случайные величины со значениями в группе X и с распределениями μ_1 и μ_2. Рассмотрим линейные формы $L_1 = \alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2$ и $L_2 = \beta_1\xi_1 + \beta_2\xi_2$, где $\alpha_j,\ \beta_j \in \mathrm{Aut}(X)$. Предположим, что линейные формы L_1 и L_2 независимы. Вводя в рассмотрение новые случайные величины $\zeta_j = \alpha_j\xi_j,\ j = 1, 2$, можно считать, что $L_1 = \xi_1 + \xi_2$ и $L_2 = \delta_1\xi_1 + \delta_2\xi_2$, где $\delta_j \in \mathrm{Aut}(X)$. Согласно $1.14(d)$, любой топологический автоморфизм δ группы X имеет вид

$$\delta = f_p f_q^{-1}$$

при некоторых взаимно простых числах p и q, причем $f_p, f_q \in \mathrm{Aut}(X)$. Поскольку при любом $\delta \in \mathrm{Aut}(X)$ линейные формы L_1 и L_2 независимы тогда и только тогда, когда независимы L_1 и δL_2, то не ограничивая общности, можно с самого начала предполагать, что линейные формы L_1 и L_2 имеют вид $L_1 = \xi_1 + \xi_2, L_2 = p\xi_1 + q\xi_2$, где $p, q \in \mathbb{Z},\ pq \neq 0,\ pq \neq 1$ и p и q – взаимно просты. Введем следующие обозначения, которые сохраним на протяжении всего параграфа. Обозначим $s = p - q$, разложим $|s|$ на простые множители $|s| = s_1^{k_1} \cdots s_l^{k_l}$. Рассмотрим соответствующие гомоморфизмы $f_{s_j},\ j = 1, 2, \dots, l$. Пусть $f_{s_{j_1}}, \dots, f_{s_{j_r}}$ все гомоморфизмы, которые являются топологическими автоморфизмами X. Обозначим через H подгруппу в Y вида

$$H = \left\{\frac{m}{s_{j_1}^{n_1} \cdots s_{j_r}^{n_r}} : \quad m, n_j \in \mathbb{Z}\right\}$$

(в случае, если либо $|s| = 1$, либо все $f_{s_j} \notin \mathrm{Aut}(X)$, то считаем $H = \mathbb{Z}$). Положим $G = H^*$. Мы фиксируем обозначения f_{s_j}, H и G на протяжении этого параграфа.

Докажем теперь основную теорему этого параграфа.

15.7. Теорема. *Пусть $X = \Sigma_{\mathbf{a}}$. Пусть ξ_1 и ξ_2 – независимые случайные величины со значениями в группе X и с распределениями μ_1 и μ_2. Предположим, что $f_p, f_q \in \mathrm{Aut}(X)$, $pq \neq 1$ и p и q – взаимно просты. Обозначим $s = p - q$, разложим $|s|$ на простые множители $|s| = s_1^{k_1} \cdots s_l^{k_l}$ и рассмотрим соответствующие гомоморфизмы f_{s_j}, $j = 1, 2, \dots, l$. Если линейные формы $L_1 = \xi_1 + \xi_2$ и $L_2 = p\xi_1 + q\xi_2$ независимы, то возможные распределения μ_1 и μ_2 описываются в таблицах* 1 *и* 2

Таблица 1

<table>
<tr><td rowspan="2">pq – составное</td><td colspan="2">$pq = -1$</td></tr>
<tr><td>$f_2 \in \mathrm{Aut}(X)$</td><td>$f_2 \notin \mathrm{Aut}(X)$</td></tr>
<tr><td>существуют $\mu_1, \mu_2 \notin \Gamma(X) * I(X)$</td><td>$\mu_1, \mu_2 \in \Gamma(X) * I(X)$</td><td>существуют
$\mu_1, \mu_2 \notin \Gamma(X) * I(X)$</td></tr>
</table>

Таблица 2

<table>
<tr><td colspan="4">pq – простое</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$f_{s_j} \notin \mathrm{Aut}(X)$
хотя бы при одном
$s_j \neq 2$</td><td colspan="2">$f_{s_j} \in \mathrm{Aut}(X)$ при всех $s_j \neq 2$ и $f_2 \notin \mathrm{Aut}(X)$</td><td rowspan="2">$f_s \in \mathrm{Aut}(X)$</td></tr>
<tr><td>s делится на 4</td><td>s не делится на 4</td></tr>
<tr><td>существуют
$\mu_1, \mu_2 \notin \Gamma(X) * I(X)$</td><td>существуют
$\mu_1, \mu_2 \notin \Gamma(X) * I(X)$</td><td>по крайней мере одно
из $\mu_j \in \Gamma(X) * I(X)$</td><td>по крайней мере одно
из $\mu_j \in \Gamma(X) * I(X)$</td></tr>
</table>

Доказательство. По лемме 10.1 независимость линейных форм L_1 и L_2 равносильна тому, что характеристические функции $\widehat{\mu}_j(y)$ удовлетворяют уравнению 10.1(i), которое принимает вид

$$\widehat{\mu}_1(u + pv)\widehat{\mu}_2(u + qv) = \widehat{\mu}_1(u)\widehat{\mu}_2(u)\widehat{\mu}_1(pv)\widehat{\mu}_2(qv), \quad u, v \in Y. \tag{15.19}$$

Решения этого уравнения мы и будем изучать. Возможны три случая: pq – составное число, $pq = -1$ и pq – простое число.

1. pq – составное число. Докажем, что в этом случае существуют независимые случайные величины ξ_1 и ξ_2 со значениями в группе X и с распределениями $\mu_1, \mu_2 \notin \Gamma(X) * I(X)$ такие, что линейные формы L_1 и L_2 независимы. Очевидно, что не ограничивая общности, можно считать выполненным следующее условие: если $y = \frac{m}{n} \in Y$, $m, n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, то в разложении n на простые множители участвуют лишь те s_j из разложения $|s|$, для которых $f_{s_j} \in \mathrm{Aut}(X)$. Поэтому из $sy \in H$ следует, что $y \in H$. Имеется две возможности.

1.A. $|p| > 1$, $|q| > 1$. Поскольку p и s, а также q и s взаимно просты, то $H^{(p)} \neq H$ и $H^{(q)} \neq H$. Пусть $\lambda_j \in \mathrm{M}^1(G)$ и $\sigma(\lambda_1) \subset A(G, H^{(p)})$, $\sigma(\lambda_2) \subset A(G, H^{(q)})$. Тогда, очевидно, $\widehat{\lambda}_1(y) = 1$ при $y \in H^{(p)}$ и $\widehat{\lambda}_2(y) = 1$ при $y \in H^{(q)}$. Поэтому по предложению 2.13

$$\widehat{\lambda}_1(u + pv) = \widehat{\lambda}_1(u), \ \widehat{\lambda}_2(u + qv) = \widehat{\lambda}_2(u), \quad u, v \in H. \tag{15.20}$$

Рассмотрим функции $g_j(y)$ на группе Y

$$g_j(y) = \begin{cases} \widehat{\lambda}_j(y), & \text{если} \quad y \in H, \\ 0, & \text{если} \quad y \notin H. \end{cases} \tag{15.21}$$

По предложению 2.12 функции $g_j(y)$ являются положительно определенными на Y. По теореме Бохнера существуют такие распределения $\mu_j \in \mathrm{M}^1(X)$, что $\widehat{\mu}_j(y) = g_j(y)$, $j = 1, 2$. Проверим, что характеристические функции $\widehat{\mu}_j(y)$ удовлетворяют уравнению (15.19). Из (15.20) и (15.21) следует, что если $u, v \in H$, то уравнение (15.19) превращается в равенство. Пусть $u \notin H$. Тогда правая часть в (15.19) равна нулю. Если при этом левая часть в (15.19) отлична от нуля, то выполнено

$$\begin{cases} u + pv \in H, \\ u + qv \in H. \end{cases} \tag{15.22}$$

Из (15.22) тогда следует, что $sv \in H$. Значит, $v \in H$, и поэтому $u \in H$, что противоречит выбору u. Следовательно, и левая часть в (15.19) равна нулю. Пусть $v \notin H$. Если $pv, qv \in H$, то и $sv \in H$. Отсюда $v \in H$, что противоречит выбору v. Значит, либо $pv \notin H$, либо $qv \notin H$. Тогда правая часть в (15.19) равна нулю. Если при этом левая часть в (15.19) отлична от нуля, то выполнено (15.22), что влечет $v \in H$, вопреки выбору v. Значит, левая часть в (15.19) равна нулю.

Итак, характеристические функции $\widehat{\mu}_j(y)$ удовлетворяют уравнению (15.19). Если ξ_1 и ξ_2 – независимые случайные величины со значениями в группе X и с распределениями μ_1 и μ_2, то по лемме 10.1 линейные формы L_1 и L_2 независимы. Ясно, что λ_j можно выбрать таким образом, чтобы $\mu_1, \mu_2 \notin \Gamma(X) * I(X)$. Требуемое утверждение в случае **1.A** доказано.

1.B. Либо $|p| = 1$, либо $|q| = 1$. Пусть для определенности $|p| = 1$. Не ограничивая общности можно считать, что $p = 1$. Пусть $q = q_1 q_2$, где $|q_j| > 1$, $j = 1, 2$. Очевидно, что если $f_q \in \mathrm{Aut}(X)$, то и $f_{q_1}, f_{q_2} \in \mathrm{Aut}(X)$. Поэтому независимость линейных форм $L_1 = \xi_1 + \xi_2$ и $L_2 = \xi_1 + q\xi_2$ равносильна независимости $L_1 = \xi_1 + \xi_2$ и $L_2 = \frac{1}{q_1}\xi_1 + q_2\xi_2$. Делая замену $\zeta_1 = \frac{1}{q_1}\xi_1$, мы сводим задачу к случаю $L_1 = q_1\xi_1 + \xi_2$, $L_2 = \xi_1 + q_2\xi_2$. Уравнение 10.1(i) для характеристических функций $\widehat{\mu}_j(y)$ в этом случае имеет вид

$$\widehat{\mu}_1(q_1 u + v)\widehat{\mu}_2(u + q_2 v) = \widehat{\mu}_1(q_1 u)\widehat{\mu}_2(u)\widehat{\mu}_1(v)\widehat{\mu}_2(q_2 v), \quad u, v \in Y. \tag{15.23}$$

Пусть $\lambda_j \in \mathrm{M}^1(G)$ и $\sigma(\lambda_j) \subset A(G, H^{(q_j)})$, $j = 1, 2$. Тогда, очевидно, $\widehat{\lambda}_j(y) = 1$ при $y \in H^{(q_j)}$. Поэтому по предложению 2.13

$$\widehat{\lambda}_1(q_1 u + v) = \widehat{\lambda}_1(v), \quad \widehat{\lambda}_2(u + q_2 v) = \widehat{\lambda}_2(u) \quad u, v \in H. \tag{15.24}$$

Так же, как и в случае **1.A**, определяем по формулам (15.21) функции $g_j(y)$ и распределения $\mu_j \in \mathrm{M}^1(X)$. Проверим, что характеристические функции $\widehat{\mu}_j(y)$ удовлетворяют уравнению (15.23). Рассуждаем так же, как в случае **1.A**. Если $u, v \in H$, то в силу (15.24) уравнение (15.23) превращается в равенство. Пусть $u \notin H$. Тогда правая часть уравнения (15.23) равна нулю. Если при этом левая часть в (15.23) отлична от нуля, то выполнено

$$\begin{cases} q_1 u + v \in H, \\ u + q_2 v \in H. \end{cases}$$

Отсюда получаем $su \in H$, а значит, $u \in H$, что противоречит выбору u. Поэтому и левая часть в (15.23) равна нулю. Случай $v \notin H$ рассматривается аналогично. Итак, характеристические функции $\widehat{\mu}_j(y)$ удовлетворяют уравнению (15.23). Если ξ_1 и ξ_2 – независимые случайные величины со значениями в группе X и с распределениями μ_1 и μ_2, то по лемме 10.1 линейные формы L_1 и L_2 независимы. Поскольку распределения λ_j можно выбрать таким образом, чтобы $\mu_1, \mu_2 \notin \Gamma(X) * I(X)$, то требуемое утверждение в случае **1.B** доказано. Тем самым утверждение теоремы в случае **1** полностью доказано.

2. $pq = -1$. Пусть для определенности $p = 1$. Тогда $q = -1$ и линейные формы L_1 и L_2 имеют вид $L_1 = \xi_1 + \xi_2$, $L_1 = \xi_1 - \xi_2$. Как вытекает из теоремы 7.10, если $f_2 \in \mathrm{Aut}(X)$, то из независимости L_1 и L_2 следует, что $\mu_1, \mu_2 \in \Gamma(X) * I(X)$. Если же $f_2 \notin \mathrm{Aut}(X)$, то существуют независимые случайные величины ξ_1 и ξ_2 со значениями в группе X и с распределениями $\mu_1, \mu_2 \notin \Gamma(X) * I(X)$ такие, что линейные формы L_1 и L_2 независимы.

3. pq – простое число. Пусть для определенности $p = 1$ и q – простое число, т.е. $L_1 = \xi_1 + \xi_2$, $L_2 = \xi_1 + q\xi_2$. Уравнение 10.1(i) для характеристических функций $\widehat{\mu}_j(y)$ принимает вид

$$\widehat{\mu}_1(u + v)\widehat{\mu}_2(u + qv) = \widehat{\mu}_1(u)\widehat{\mu}_2(u)\widehat{\mu}_1(v)\widehat{\mu}_2(qv), \quad u, v \in Y. \tag{15.25}$$

Имеются следующие возможности.

3.A. Либо $f_{s_j} \notin \mathrm{Aut}(X)$ хотя бы при одном $s_j \neq 2$, либо $f_2 \notin \mathrm{Aut}(X)$ и s делится на 4. Докажем, что тогда существуют независимые случайные величины ξ_1 и ξ_2 со значениями в группе X и с распределениями $\mu_1, \mu_2 \notin \Gamma(X) * I(X)$ такие, что линейные формы L_1 и L_2 независимы. Пусть $f_{s_j} \notin \mathrm{Aut}(X)$ при некотором $s_j \neq 2$. Тогда $Y^{(s_j)} \neq Y$. Возьмем $y_0 \notin Y^{(s_j)}$ и рассмотрим на группе X функцию

$$\rho(x) = 1 + \mathrm{Re}(x, y_0).$$

Тогда $\rho(x) \geq 0$, $x \in X$, и

$$\int\limits_X \rho(x) dm_X(x) = 1.$$

Пусть $\mu \in \mathrm{M}^1(X)$ – распределение с плотностью $\rho(x)$ относительно распределения Хаара m_X. Тогда

$$\widehat{\mu}(y) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad y = 0, \\ \frac{1}{2}, & \text{если} \quad y = \pm y_0, \\ 0, & \text{если} \quad y \notin \{0, \ \pm y_0\}. \end{cases}$$

Пусть ξ_1 и ξ_2 – независимые одинаково распределенные случайные величины со значениями в группе X, имеющие распределение μ. Проверим, что характеристические функции случайных величин ξ_j удовлетворяют уравнению (15.25), которое принимает вид

$$\widehat{\mu}(u+v)\widehat{\mu}(u+qv) = \widehat{\mu}^2(u)\widehat{\mu}(v)\widehat{\mu}(qv), \quad u, v \in Y. \tag{15.26}$$

Очевидно, что достаточно проверить, что уравнение (15.26) превращается в равенство при $u \neq 0, \ v \neq 0$. В этом случае правая часть в (15.26) равна нулю. Если левая часть в (15.26) отлична от нуля, то выполнено

$$\begin{cases} u+v \in \{0, \ \pm y_0\}, \\ u+qv \in \{0, \ \pm y_0\}. \end{cases}$$

Отсюда следует, что

$$sv \in \{0, \ \pm y_0 \ \pm 2y_0\}. \tag{15.27}$$

Поскольку числа 2 и s_j взаимно просты и $y_0 \notin Y^{(s_j)}$, то $2y_0 \notin Y^{(s_j)}$. Следовательно, выполнение (15.27) невозможно. Значит, левая часть в (15.25) также равна нулю.

Если $f_2 \notin \mathrm{Aut}(X)$ и s делится на 4, то рассуждение совершенно аналогично. Нужно взять $y_0 \notin Y^{(2)}$, а невозможность выполнения (15.27) следует из того, что s делится на 4.

Итак, характеристические функции $\widehat{\mu}_j(y)$ удовлетворяют уравнению (15.25). Следовательно, по лемме 10.1 линейные формы L_1 и L_2 независимы. По построению $\mu_1, \mu_2 \notin \Gamma(X) * I(X)$. Тем самым, требуемое утверждение в случае **3.A** доказано.

3.B. $f_s \in \mathrm{Aut}(X)$. Докажем, что в этом случае по крайней мере одно из распределений $\mu_j \in \Gamma(X) * I(X)$. Положим $\nu_j = \mu_j * \bar{\mu}_j$. Из 2.7($c$) и 2.7($d$) вытекает, что $\widehat{\nu}_j(y) = |\widehat{\mu}_j(y)|^2 > 0, \ y \in Y$. Очевидно, что характеристические функции $\widehat{\nu}_j(y)$ также удовлетворяют уравнению (15.25). Обозначим $a(y) = \widehat{\nu}_1(y), \ b(y) = \widehat{\nu}_2(y)$. Очевидно, что функции $a(y)$ и $b(y)$ удовлетворяют уравнению 15.1(i) и условиям 15.1(ii). Из уравнения 15.1(i) вытекает, что функции $a(y)$ и $b(y)$ удовлетворяют уравнениям (15.1) и (15.2).

Предположим вначале, что при любом $y \in Y, \ y \neq 0$ выполнено $a(y)b(y) = 0$. Из (15.1) тогда следует, что $a(sy) = 0$ при любом $y \in Y, \ y \neq 0$. Поскольку $f_s \in \mathrm{Aut}(X)$, то $a(y) = 0$ при любом $y \in Y, \ y \neq 0$. Следовательно, $\nu_1 = m_X$, а значит и $\mu_1 = m_X$. Аналогично из (15.2) получаем, что $\mu_2 = m_X$.

Предположим теперь, что при некотором $y_0 \in Y, \ y_0 \neq 0$ выполнено $a(y_0)b(y_0) \neq 0$. Рассмотрим отдельно два случая: $q > 0$ и $q < 0$.

(i). $q > 0$. Поскольку $Y^{(s)} = Y$, мы можем применить лемму 15.1 и получить подгруппу $M \subset Y$, на которой $a(y)b(y) \neq 0$. Сужения характеристических функций $a(y)$ и $b(y)$ на подгруппу M удовлетворяют условиям следствия 15.3. Поэтому на $M^{(sq)}$ мы имеем представление 15.3(i). Подставляя представление 15.3(i) в 15.1(i), получаем $\sigma_1 + q\sigma_2 = 0$. Отсюда, $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$. Таким образом, на подгруппе $M^{(sq)}$ выполнено: $a(y) = b(y) = 1$. Обозначим $E = \{y \in Y : a(y) = b(y) = 1\}$. Тогда E – ненулевая подгруппа в Y и по предложению 2.13 справедливо равенство

$$a(y+h) = a(y), \quad b(y+h) = b(y), \quad y \in Y, \ h \in E.$$

Поэтому мы можем перейти от уравнения 15.1(i) на группе Y к индуцированному уравнению на фактор-группе $L = Y/E$, полагая $\widehat{a}([y]) = a(y), \ \widehat{b}([y]) = b(y), \ y \in [y]$.

Отметим, что

$$\{[y] \in L : \widehat{a}([y]) = \widehat{b}([y]) = 1\} = \{0\}. \tag{15.28}$$

Из (15.2) следует, что f_s – мономорфизм на L. Поскольку L – периодическая группа, то $f_s \in \mathrm{Aut}(L)$.

Учитывая, что $0 \leq \widehat{a}([y]) \leq 1, \ 0 \leq \widehat{b}([y]) \leq 1$, из (15.1) вытекает, что

$$\widehat{a}(s[y]) \leq \widehat{a}([y]), \quad [y] \in L. \tag{15.29}$$

Так как любой элемент группы L имеет конечный порядок, то для любого $[y] \in L$ выполнено $s^n[y] = [y]$ при некотором натуральном n, зависящим, вообще говоря, от $[y]$. Из (15.29) тогда следует, что

$$\widehat{a}([y]) = \widehat{a}(s^n[y]) \leq \cdots \leq \widehat{a}(s[y]) \leq \widehat{a}([y]), \quad [y] \in L.$$

Таким образом, на каждой орбите $\{[y], \ s[y], \dots, s^{n-1}[y]\}$ функция $\widehat{a}([y])$ принимает постоянное значение. Из (15.2) вытекает аналогичное утверждение для $\widehat{b}([y])$.

Предположим, что в некоторой точке $[y]_0 \in L, \ [y]_0 \neq 0$, выполнено $\widehat{a}([y]_0) \neq 0$. Тогда $\widehat{a}(s[y]_0) = \widehat{a}([y]_0) \neq 0$ и из (15.1) получаем

$$\widehat{a}(q[y]_0) = \widehat{b}(q[y]_0) = 1. \tag{15.30}$$

Из (15.28) и (15.30) следует, что $q[y]_0 = 0$. Аналогично, из (15.2) находим, что если $\widehat{b}([y]_0) \neq 0, \ [y]_0 \in L, \ [y]_0 \neq 0$, то $\widehat{a}([y]_0) = \widehat{b}(q[y]_0) = 1$, и значит, (15.30) также выполнено. Заметим теперь, что любая фактор-группа группы Y, в частности L, содержит не более, чем одну подгруппу $A \cong \mathbb{Z}(q)$. Пусть A – подгруппа в L, порожденная элементом $[y]_0$. Рассмотрим ограничение уравнения 15.1(i) на A. Учитывая, что $q[y] = 0$ для любого $[y] \in A$, получаем

$$\widehat{a}([u]+[v])\widehat{b}([u]) = \widehat{a}([u])\widehat{b}([u])\widehat{a}([v]), \quad [u],[v] \in A. \tag{15.31}$$

Если в некоторой точке $[u]_0 \in A, \ [u]_0 \neq 0$ выполнено $\widehat{b}([u]_0) \neq 0$, то из (15.31) следует, что

$$\widehat{a}([u]_0 + [v]) = \widehat{a}([u]_0)\widehat{a}([v]), \quad [v] \in A.$$

Полагая здесь $[v] = (q-1)[u]_0$, получаем $\widehat{a}([u]_0) = 1$, а поскольку q – простое число, то $\widehat{a}([y]) = 1$ при $[y] \in A$. Если же $\widehat{b}([y]) = 0$ при любом $[y] \in A, \ [y] \neq 0$, то, очевидно, функция $\widehat{a}([y])$ может быть произвольной. Тем самым, доказано, что либо

$$\widehat{a}([y]) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad [y] \in A, \\ 0, & \text{если} \quad [y] \notin A, \end{cases} \tag{15.32}$$

либо

$$\widehat{b}([y]) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad [y] = 0, \\ 0, & \text{если} \quad [y] \neq 0. \end{cases} \tag{15.33}$$

Возвращаясь от индуцированных функций $\widehat{a}([y])$ и $\widehat{b}([y])$ на L к функциям $a(y)$ и $b(y)$ на Y, получаем, что либо $\nu_1 \in I(X)$, либо $\nu_2 \in I(X)$, а значит, либо $\mu_1 \in I(X)$, либо $\mu_2 \in I(X)$.

Если же в любой точке $[y]_0 \in L,\ [y]_0 \neq 0$ выполнено $\widehat{a}([y]_0) = \widehat{b}([y]_0) = 0$, то справедливо представление (15.32) для функции $\widehat{a}([y])$, где $A = \{0\}$ и представление (15.33) для функции $\widehat{b}([y])$. В этом случае, очевидно, $\mu_1,\ \mu_2 \in I(X)$. Случай **3.B(i)** $q > 0$, таким образом, полностью исследован.

(ii). $q < 0$. Из (15.2) вытекает, что при любом натуральном m выполнено

$$a\left(\frac{y_0}{s^m}\right) b\left(\frac{y_0}{s^m}\right) \neq 0.$$

Из доказательства леммы 15.1 следует, что $a(y)b(y) \neq 0$ на подгруппе $y_0 H^{(q)}$, а тогда по следствию 15.3 на подгруппе $y_0 H^{(q^2)}$ имеет место представление 15.3(i). Пусть F – максимальная подгруппа в Y, содержащая $y_0 H^{(q^2)}$, на которой имеет место представление 15.3(i). Поскольку подгруппа F топологически не изоморфна $\mathbb{Z}$, то F плотна в $\mathbb{R}$ в топологии $\mathbb{R}$. Из 15.3(i) по лемме 15.5, примененной к функциям $a(y)$ и $b(y)$ следует, что для любого $u \in Y$ существуют пределы

$$a_u = \lim_{y \to 0,\ y \in u+F} a(y), \qquad b_u = \lim_{y \to 0,\ y \in u+F} b(y).$$

Заметим теперь, что полученные функции a_u и b_u по построению принимают постоянные значения на каждом классе смежности $u + F$ и определяют, поэтому, некоторые функции $a_{[u]}$ и $b_{[u]}$ на фактор-группе $L = Y/F$. Функции $a_{[u]}$ и $b_{[u]}$, очевидно, удовлетворяют уравнению 15.1(i) и условиям 15.1(ii), а значит, и уравнениям (15.1) и (15.2). Поскольку F – максимальная подгруппа в Y на которой имеет место представление 15.3(i), то в силу утверждения (c) леммы 15.5 выполнено

$$\{[u] \in L : a_{[u]} = b_{[u]} = 1\} = \{0\},$$

что является аналогом (15.28). Поскольку L – периодическая группа, то из (15.2) вытекает, что $f_s \in \mathrm{Aut}(L)$. Повторяя теперь доказательство для случая **3.B(i)**, мы получаем либо представление (15.32) для функции $a_{[u]}$, либо представление (15.33) для функции $b_{[u]}$.

Докажем теперь, что если $a_{[u]} = 0$ при любом $[u] \notin A$, то $a(y) = 0$ при любом $y \notin f_q^{-1}(F)$. Действительно, подставим в 15.1(i) $u \in F,\ v_0 \notin f_q^{-1}(F)$. Учитывая 15.3($i$), получаем

$$a(u + v_0)b(u + qv_0) = e^{-\sigma_1 u^2 - \sigma_2 q^2 u^2} a(v_0)b(qv_0).$$

Перейдем здесь к пределу при $u \to -v_0,\ u \in F$. Поскольку $[v_0] \notin A$, мы имеем

$$0 = e^{-\sigma_1 v_0^2 - \sigma_2 q^2 v_0^2} a(v_0)b(qv_0),$$

а значит, $a(v_0)b(qv_0) = 0$. Из (15.1) тогда следует, что $a(sv_0) = 0$. Заметим теперь, что $f_s \in \mathrm{Aut}(F)$. Действительно, из (15.1) по следствию 4.8 следует, что на подгруппе $f_s^{-1}(F)$ справедливо представление 15.3(i). Значит, $f_s^{-1}(F) = F$, поскольку F – максимальная подгруппа в Y, на которой справедливо 15.3(i). А тогда $f_s(F) = F$, что эквивалентно $f_s \in \mathrm{Aut}(F)$. Отсюда следует, что f_s взаимно однозначно отображает множество $f_q^{-1}(F)$ в себя. Поэтому из $a(sv) = 0$ при любом $v \notin f_q^{-1}(F)$ следует, что $a(v) = 0$ при любом $v \notin f_q^{-1}(F)$. В результате из представления (15.32) для функции $a_{[u]}$ получаем

$$a(y) = \begin{cases} e^{-\sigma_1 y^2}, & \text{если} \quad y \in f_q^{-1}(F), \\ 0, & \text{если} \quad y \notin f_q^{-1}(F). \end{cases} \tag{15.34}$$

Рассуждая аналогично, убеждаемся, что если $b_{[u]} = 0$ при любом $[u] \neq 0$, то $b(y) = 0$ при любом $y \notin F$. А тогда из представления (15.33) для функции $b_{[u]}$ следует представление

$$b(y) = \begin{cases} e^{-\sigma_2 y^2}, & \text{если} \quad y \in F, \\ 0, & \text{если} \quad y \notin F. \end{cases} \tag{15.35}$$

Таким образом, по крайней мере одно из распределений $\nu_j \in \Gamma(X) * I(X)$, а тогда по лемме 15.4 соответствующее распределение $\mu_j \in \Gamma(X) * I(X)$. Случай **3.B(ii)** $q < 0$, таким образом, также полностью исследован. Случай **3.B**, таким образом, полностью исследован.

3.C. $f_{s_j} \in \mathrm{Aut}(X)$ при всех $s_j \neq 2$, $f_2 \notin \mathrm{Aut}(X)$ и s не делится на 4. Докажем, что этом случае по крайней мере одно из распределений $\mu_j \in \Gamma(X)*I(X)$. Поскольку s делится на 2 и не делится на 4, то $q = 4k-1$, $k \in \mathbb{Z}$. Пусть, как и в случае **3.B**, $\nu_j = \mu_j * \bar{\mu}_j$, $j = 1, 2$, $a(y) = \widehat{\nu}_1(y)$, $b(y) = \widehat{\nu}_2(y)$. Имеются две возможности.

(**i**). Предположим, что выполнено

$$a(y)b(y) = 0, \quad y \in Y^{(2)}, \quad y \neq 0. \tag{15.36}$$

Полагая в 15.1(i) сначала $u = qy$, $v = y$, затем $u = v = y$ и учитывая (15.1) и (15.2), получаем

$$a(sy) = a((q+1)y)b(2qy), \quad y \in Y, \tag{15.37}$$

$$b(sy) = a(2y)b((q+1)y)), \quad y \in Y. \tag{15.38}$$

Поскольку $s = 2 - 4k$, то из (15.37) и (15.38) следует

$$a((1-2k)y) = a(2ky)b(qy), \quad y \in Y, \tag{15.39}$$

$$b((1-2k)y) = a(y)b(2ky), \quad y \in Y. \tag{15.40}$$

Перемножая (15.39) и (15.40), мы находим

$$a((1-2k)y)b((1-2k)y) = a(2ky)b(2ky)a(y)b(qy), \quad y \in Y. \tag{15.41}$$

Поскольку $1 - 2k$ – делитель s, то $f_{1-2k} \in \mathrm{Aut}(X)$ и из (15.41) и (15.36) следует, что $a(y)b(y) = 0$ при любом $y \in Y$, $y \neq 0$. Но тогда из (15.1) и (15.2) вытекает, что $a(y) = b(y) = 0$ при любом $y \in Y^{(2)}$, $y \neq 0$. Из (15.39) и (15.40) тогда следует, что $a(y) = b(y) = 0$ при любом $y \in Y$, $y \neq 0$. А это значит, что $\nu_1 = \nu_2 = m_X$, а значит, $\mu_1 = \mu_2 = m_X$. Случай **3.C(i)** полностью исследован.

(**ii**). Предположим, что условие (15.36) не выполнено, т.е. $a(y_0)b(y_0) \neq 0$ при некотором $y_0 \in Y^{(2)}$, $y_0 \neq 0$. При $q > 0$ без изменений проходит доказательство для случая **3.B(i)**, так как из равенства $Y^{(s)} = Y^{(2)}$ следует, что функции $a(y)$ и $b(y)$ удовлетворяют условиям леммы 15.1.

При $q < 0$ доказательство проводится по схеме доказательства для случая **3.B(ii)**, но требует некоторых пояснений, поскольку $f_s \notin \mathrm{Aut}(X)$. Мы сохраним обозначения, использованные при доказательстве случая **3.B(ii)**.

Для доказательства того, что существует подгруппа $W \not\cong \mathbb{Z}$, на которой справедливо представление 15.3(i), рассуждаем следующим образом. Пусть на подгруппе M, порожденной некоторым элементом ζ, выполнено $a(y)b(y) \neq 0$ (существование такой подгруппы гарантированно леммой 15.1). Подставим в 15.1(i)

$$u = \frac{l}{1-2k}\zeta, \quad v = \left(1 - \frac{l}{1-2k}\right)\zeta, \quad l \in \mathbb{Z}.$$

При этих u и v выполнено $u+v,\ u+qv \in M$. Следовательно, левая часть в 15.1(i) отлична от нуля. Значит,

$$a\left(\frac{l}{1-2k}\zeta\right) b\left(\frac{l}{1-2k}\zeta\right) \neq 0.$$

Поскольку $f_{1-2k} \in \mathrm{Aut}(X)$, то мы получаем, что на подгруппе $S = \zeta H$ выполнено $a(y)b(y) \neq 0$. Так как $q \neq -1$, то $H \ncong \mathbb{Z}$, а значит, и $S \ncong \mathbb{Z}$. Далее доказательство проводится без изменений так же, как и в случае **3.B** и получаем либо представление (15.32) для функции $a_{[u]}$, либо представление (15.33) для функции $b_{[u]}$.

Чтобы получить искомые представления, либо (15.34) для функции $a(y)$, либо (15.35) для функции $b(y)$, достаточно убедиться, что если $a(sy) = 0$ при всех $y \notin f_q^{-1}(F)$, то $a(y) = 0,\ y \notin f_q^{-1}(F)$, а также, что если $b(sy) = 0$ при всех $y \notin F$, то $b(y) = 0,\ y \notin F$.

Мы ограничимся рассуждением для функции $a(y)$. Для функции $b(y)$ доказательство аналогично. Пусть $y_0 \notin f_q^{-1}(F)$. Рассмотрим соответствующий класс смежности $y_0 + F$ и отметим, что $q[y_0] \neq 0$. Поскольку $f_s \in \mathrm{Aut}(L)$, то

$$s[y'] = [y_0] \tag{15.42}$$

при некотором $[y'] \in L$. Легко видеть, что $y' \notin f_q^{-1}(F)$, так как в противном случае было бы $q[y'] = 0$ и, учитывая (15.42), мы имели бы $[y'] = [y_0]$, что противоречит выбору y_0. Из (15.42) следует, что $sy' = y_0 + h,\ h \in F$. Но тогда при любом $h' \in F$ выполнено $s(y' + h') \in y_0 + F$. Поскольку $F \ncong \mathbb{Z}$, то множество $s(y'+F)$ плотно в y_0+F в топологии $\mathbb{R}$. Функция $a(y)$ равномерно непрерывна на $y_0 + F$ в топологии $\mathbb{R}$ и по условию $a(s(y' + h')) = 0$ при любом $h' \in F$. Значит $a(y) = 0$ при $y \in y_0 + F$, в частности $a(y_0) = 0$. Случай **3.C(ii)**, таким образом, также полностью исследован. Требуемое утверждение в случае **3.C** доказано, а значит и доказано утверждение теоремы в случае **3**. $\square$

15.8. Замечание. Рассуждение, проведенное при рассмотрении случая **3**, показывает, что в случаях **3.B** и **3.C** у уравнения (15.25) всегда существуют такие решения $\widehat{\mu}_j(y)$, где одно из распределений $\mu_j \notin \Gamma(X) * I(X)$. Следовательно, утверждение теоремы 15.7 в случаях **3.B** и **3.C** не может быть усилено.

15.9. Замечание. Пусть X – связная группа, ξ_1 и ξ_2 – независимые случайные величины со значениями в группе X и с распределениями μ_1 и μ_2. С учетом теоремы 1.9.6, из теоремы 7.10 следует, что, условие:

(i) $f_2 \in \mathrm{Aut}(X)$

является необходимым и достаточным для того, чтобы из независимости линейных форм $L_1 = \xi_1 + \xi_2$ и $L_2 = \xi_1 - \xi_2$ следовало, что $\mu_1,\ \mu_2 \in \Gamma(X) * I(X)$. Из теоремы 15.7 вытекает, что справедливы следующие утверждения:

(α) для $\mathbf{a}$-адического соленоида $X = \Sigma_{\mathbf{a}}$ условие (i) является необходимым для того, чтобы существовали автоморфизмы $\alpha_j, \beta_j \in \mathrm{Aut}(X)$ такие, что из независимости линейных форм $L_1 = \alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2$ и $L_2 = \beta_1\xi_1 + \beta_2\xi_2$ следовало, что $\mu_1,\ \mu_2 \in \Gamma(X) * I(X)$;

(β) если для $\mathbf{a}$-адического соленоида $X = \Sigma_{\mathbf{a}}$ условие (i) выполнено, то не существует линейных форм, отличных от $L_1 = \xi_1 + \xi_2$ и $L_2 = \xi_1 - \xi_2$, независимость которых влечет, что $\mu_1,\ \mu_2 \in \Gamma(X) * I(X)$.

Утверждения (α) и (β), вообще говоря, неверны для произвольных связных компактных абелевых групп. Для построения соответствующего контр-примера к утверждению (α) положим $X = X_1 \times X_2$, где $X_j = \Sigma_{\mathbf{a}_j},\ \mathbf{a}_1 = (2, 2, \dots),\ \mathbf{a}_2 = (3, 3, \dots)$. Очевидно, что группа X связна и $f_2 \notin \mathrm{Aut}(X)$. Пусть автоморфизм $\alpha \in \mathrm{Aut}(X)$ имеет вид $\alpha(x_1, x_2) = (-x_1, x_2),\ x_j \in X_j$. Пусть ξ_1 и ξ_2 – независимые случайные величины со значениями в группе X и с распределениями μ_1 и μ_2. Проверим, что если линейные формы $L_1 = \xi_1 + \xi_2$ и $L_2 = \xi_1 + \alpha\xi_2$ независимы, то $\mu_1,\ \mu_2 \in \Gamma(X) * I(X)$.

По лемме 10.1 независимость линейных форм L_1 и L_2 эквивалентна тому, что характеристические функции $\widehat{\mu}_j(y)$ удовлетворяют уравнению

$$\widehat{\mu}_1(u+v)\widehat{\mu}_2(u+\widetilde{\alpha}v) = \widehat{\mu}_1(u)\widehat{\mu}_2(u)\widehat{\mu}_1(v)\widehat{\mu}_2(\widetilde{\alpha}v), \quad u, v \in Y, \tag{15.43}$$

где $\widetilde{\alpha}(y_1, y_2) = (-y_1, y_2),\ y_j \in Y_j = X_j^*$. Положим $\nu_j = \mu_j * \bar{\mu}_j$. Из 2.7($c$) и 2.7($d$) вытекает, что $\widehat{\nu}_j(y) = |\widehat{\mu}_j(y)|^2 \geq 0$, $y \in Y$. Характеристические функции $\widehat{\nu}_j(y)$ также удовлетворяют уравнению (15.43). Рассмотрим ограничение уравнения (15.43) для функций $\widehat{\nu}_j(y)$ на подгруппу Y_2. Получаем

$$\widehat{\nu}_1(u+v)\widehat{\nu}_2(u+v) = \widehat{\nu}_1(u)\widehat{\nu}_2(u)\widehat{\nu}_1(v)\widehat{\nu}_2(v), \quad u, v \in Y_2. \tag{15.44}$$

Положим $g(y) = \widehat{\nu}_1(y)\widehat{\nu}_2(y)$. Из (15.44) тогда вытекает, что $g(y) = 1$ при $y \in Y_2$. Следовательно, и $\widehat{\nu}_j(y) = 1$ при $y \in Y_2,\ j = 1, 2$. По предложению 2.13 $\sigma(\nu_j) \subset A(X, Y_2) = X_1$. Применяя предложение 2.2, получаем, что распределения μ_j можно так заменить их сдвигами μ'_j, чтобы $\sigma(\mu'_j) \subset X_1$. Характеристические функции распределений μ'_j, очевидно, также удовлетворяют уравнению (15.43). Поскольку $\widehat{\mu}'_j(y+h) = \widehat{\mu}'_j(y)$ для любых $y \in Y,\ h \in Y_2$, то достаточно решить уравнение (15.43), считая, что $u, v \in Y_1$. Но на подгруппе Y_1 уравнение (15.43) принимает вид

$$\widehat{\mu}'_1(u+v)\widehat{\mu}'_2(u-v) = \widehat{\mu}'_1(u)\widehat{\mu}'_2(u)\widehat{\mu}'_1(v)\widehat{\mu}'_2(-v), \quad u, v \in Y_1. \tag{15.45}$$

Поскольку $f_2 \in \mathrm{Aut}(X_1)$, то из (15.45) по теореме 7.10, примененной к группе X_1, следует, что $\mu'_1, \mu'_2 \in \Gamma(X_1) * I(X_1)$. Отсюда вытекает, что и $\mu_1, \mu_2 \in \Gamma(X) * I(X)$.

Если в приведенном выше рассуждении в качестве X взять $X = X_1^2$, то мы получим контр-пример к утверждению (β).

Глава VI

Теорема Хейде для локально компактных абелевых групп

Пусть $\xi_j,\ j = 1, 2, \dots, n,\ n \geq 2,$ – независимые случайные величины, $\alpha_j,\ \beta_j$ – отличные от нуля вещественные числа. Предположим, что выполнено условие: $\beta_i\alpha_i^{-1} \pm \beta_j\alpha_j^{-1} \neq 0$ для всех $i \neq j$. Согласно теореме Хейде, если условное распределение линейной формы $L_2 = \beta_1\xi_1 + \dots + \beta_n\xi_n$ при фиксированной $L_1 = \alpha_1\xi_1 + \dots + \alpha_n\xi_n$ симметрично, то все случайные величины ξ_j – гауссовские. Пусть X – локально компактная абелева группа, удовлетворяющая второй аксиоме счетности, $\xi_j,\ j = 1, 2, \dots, n,\ n \geq 2,$ – независимые случайные величины со значениями в группе X и с распределениями μ_j. Эта глава посвящена групповым аналогам теоремы Хейде. Мы рассматриваем линейные формы от независимых случайных величин, принимающих значения в группе X. При этом коэффициентами линейных форм являются топологические автоморфизмы группы X. Вначале мы предполагаем, что характеристические функции рассматриваемых случайных величин не обращаются в нуль. Затем мы отказываемся от этого ограничения, но предполагаем, что случайные величины, принимают значения либо в конечной, либо в дискретной группе.

§16. Характеристические функции случайных величин не обращаются в нуль

Пусть X – локально компактная абелева группа, удовлетворяющая второй аксиоме счетности, Y – ее группа характеров. В этом параграфе мы описываем группы X, которые обладают следующим свойством: если $\xi_j,\ j = 1, 2, \dots, n,\ n \geq 2,$ – независимые случайные величины со значениями в группе X и с такими распределениями μ_j, что их характеристические функции не обращаются в нуль, $\alpha_j,\ \beta_j$ – топологические автоморфизмы группы X, удовлетворяющие условию: $\beta_i\alpha_i^{-1} \pm \beta_j\alpha_j^{-1} \in \mathrm{Aut}(X)$ для всех $i \neq j$, то из симметрии условного распределения линейной формы $L_2 = \beta_1\xi_1 + \dots + \beta_n\xi_n$ при фиксированной $L_1 = \alpha_1\xi_1 + \dots + \alpha_n\xi_n$ вытекает, что все $\mu_j \in \Gamma(X)$. Для того чтобы группа X обладала указанным свойством, необходимо и достаточно, чтобы группа X не содержала элементов порядка 2. Поэтому, если группа X содержит элементы порядка 2, то для таких групп возникает естественная задача описания возможных распределений μ_j независимых случайных величин ξ_j, в предположении, что условное распределение линейной формы L_2 при фиксированной L_1 симметрично. В начале мы решаем эту задачу для независимых случайных величин, принимающих значения в двумерном торе $\mathbb{T}^2$, а затем для независимых случайных величин, принимающих значения в группе, не содержащей подгруппы, топологически изоморфной $\mathbb{T}$.

16.1. Лемма. *Пусть $\xi_j,\ j = 1, 2, \dots, n,\ n \geq 2,$ – независимые случайные величины со значениями в группе X и с распределениями μ_j. Пусть $\alpha_j,\ \beta_j$ – топологические автоморфизмы группы X. Для того чтобы условное распределение линейной формы $L_2 = \beta_1\xi_1 + \dots + \beta_n\xi_n$ при фиксированной $L_1 = \alpha_1\xi_1 + \dots + \alpha_n\xi_n$ было симметричным, необходимо и достаточно, чтобы характеристические функции $\widehat{\mu}_j(y)$ удовлетворяли уравнению*

$$(i) \qquad \prod_{j=1}^{n} \widehat{\mu}_j(\widetilde{\alpha}_j u + \widetilde{\beta}_j v) = \prod_{j=1}^{n} \widehat{\mu}_j(\widetilde{\alpha}_j u - \widetilde{\beta}_j v), \quad u, v \in Y.$$

Доказательство. Принимая во внимание, что $\widehat{\mu}_j(y) = \mathbf{E}[(\xi_j, y)]$, и что случайные величины ξ_j независимы, мы имеем

$$(i) \iff \prod_{j=1}^{n} \mathbf{E}[(\xi_j, \widetilde{\alpha}_j u + \widetilde{\beta}_j v)] = \prod_{j=1}^{n} \mathbf{E}[(\xi_j, \widetilde{\alpha}_j u - \widetilde{\beta}_j v], \quad u, v \in Y, \iff$$

$$\mathbf{E}\Big[\prod_{j=1}^{n} (\xi_j, \widetilde{\alpha}_j u + \widetilde{\beta}_j v)\Big] = \mathbf{E}\Big[\prod_{j=1}^{n} (\xi_j, \widetilde{\alpha}_j u - \widetilde{\beta}_j v)\Big], \quad u, v \in Y, \iff$$

$$\mathbf{E}\Big[\prod_{j=1}^{n} (\xi_j, \widetilde{\alpha}_j u) \prod_{j=1}^{n} (\xi_j, \widetilde{\beta}_j v)\Big] = \mathbf{E}\Big[\prod_{j=1}^{n} (\xi_j, \widetilde{\alpha}_j u) \prod_{j=1}^{n} (\xi_j, -\widetilde{\beta}_j v)\Big], \quad u, v \in Y, \iff$$

$$\mathbf{E}\Big[\prod_{j=1}^{n} (\alpha_j \xi_j, u) \prod_{j=1}^{n} (\beta_j \xi_j, v)\Big] = \mathbf{E}\Big[\prod_{j=1}^{n} (\alpha_j \xi_j, u) \prod_{j=1}^{n} (-\beta_j \xi_j, v)\Big], \quad u, v \in Y, \iff$$

$$\mathbf{E}[(L_1, u)(L_2, v)] = \mathbf{E}[(L_1, u)(-L_2, v)], \quad u, v \in Y. \tag{16.1}$$

Пусть $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ – вероятностное пространство, где определены случайные величины ξ_j. Равенство (16.1) эквивалентно утверждению, что случайные величины (L_1, L_2) и $(L_1, -L_2)$ одинаково распределены, т.е.

$$\mathbf{P}\{\omega \in \Omega : L_1(\omega) \in A, \quad L_2(\omega) \in B\} = \mathbf{P}\{\omega \in \Omega : L_1(\omega) \in A, \quad L_2(\omega) \in -B\}$$

для любых $A, B \in \mathfrak{B}(X)$. В силу 2.21 полученное равенство эквивалентно симметрии условного распределения линейной формы $L_2 = \beta_1\xi_1 + \cdots + \beta_n\xi_n$ при фиксированной $L_1 = \alpha_1\xi_1 + \cdots + \alpha_n\xi_n$. $\square$

Уравнение 16.1(i) называется *функциональным уравнением Хейде.*

16.2. Теорема. *Пусть группа X не содержит элементов порядка 2. Пусть ξ_j, $j = 1, 2, \dots, n$, $n \geq 2$, – независимые случайные величины со значениями в группе X, имеющие распределения μ_j с необращающимися в нуль характеристическими функциями. Пусть α_j, β_j – топологические автоморфизмы группы X такие, что $\beta_i\alpha_i^{-1} \pm \beta_j\alpha_j^{-1} \in \mathrm{Aut}(X)$ для всех $i \neq j$. Если условное распределение линейной формы $L_2 = \beta_1\xi_1 + \cdots + \beta_n\xi_n$ при фиксированной $L_1 = \alpha_1\xi_1 + \cdots + \alpha_n\xi_n$ симметрично, то все распределения $\mu_j \in \Gamma(X)$.*

Доказательство. Переходя к новым случайным величинам $\zeta_j = \alpha_j\xi_j$, мы редуцируем доказательство теоремы к случаю, когда линейные формы L_1 и L_2 имеют вид $L_1 = \xi_1 + \cdots + \xi_n$ и $L_2 = \delta_1\xi_1 + \cdots + \delta_n\xi_n$, $\delta_j \in \mathrm{Aut}(X)$. Условие $\beta_i\alpha_i^{-1} \pm \beta_j\alpha_j^{-1} \in \mathrm{Aut}(X)$ для всех $i \neq j$ переходит в условие: $\delta_i \pm \delta_j \in \mathrm{Aut}(X)$ для всех $i \neq j$. По лемме 16.1 из симметрии условного распределение линейной формы $L_2 = \delta_1\xi_1 + \cdots + \delta_n\xi_n$ при фиксированной $L_1 = \xi_1 + \cdots + \xi_n$ следует, что характеристические функции $\widehat{\mu}_j(y)$ удовлетворяют уравнению 16.1(i), которое принимает вид

$$\prod_{j=1}^{n} \widehat{\mu}_j(u + \widetilde{\delta}_j v) = \prod_{j=1}^{n} \widehat{\mu}_j(u - \widetilde{\delta}_j v), \quad u, v \in Y. \tag{16.2}$$

Положим $\nu_j = \mu_j * \bar{\mu}_j$. Из 2.7$(c)$ и 2.7(d) вытекает, что $\widehat{\nu}_j(y) = |\widehat{\mu}_j(y)|^2 > 0$, $y \in Y$. Очевидно, что характеристические функции $\widehat{\nu}_j(y)$ также удовлетворяют уравнению (16.2).

Положим $\varphi_j(y) = -\log \widehat{\nu}_j(y)$. Из (16.2) следует, что функции $\varphi_j(y)$ удовлетворяют уравнению

$$\sum_{j=1}^{n}[\varphi_j(u+\widetilde{\delta}_j v) - \varphi_j(u-\widetilde{\delta}_j v)] = 0, \quad u, v \in Y. \tag{16.3}$$

Для решения уравнения (16.3) применим метод конечных разностей.

Пусть k_1 – произвольный элемент группы Y. Положим $h_1 = \widetilde{\delta}_n k_1$. Тогда $h_1 - \widetilde{\delta}_n k_1 = 0$. Придадим u и v в (16.3) приращения h_1 и k_1 соответственно и вычтем (16.3) из полученного уравнения. Получим

$$\sum_{j=1}^{n}\Delta_{l_{1,j}}\varphi_j(u+\widetilde{\delta}_j v) - \sum_{j=1}^{n-1}\Delta_{l_{1,j+n}}\varphi_j(u-\widetilde{\delta}_j v) = 0, \quad u, v \in Y, \tag{16.4}$$

где $l_{1,j} = h_1 + \widetilde{\delta}_j k_1 = (\widetilde{\delta}_n + \widetilde{\delta}_j)k_1,\ j = 1, 2, \dots, n,\ l_{1,j+n} = h_1 - \widetilde{\delta}_j k_1 = (\widetilde{\delta}_n - \widetilde{\delta}_j)k_1,\ j = 1, 2, \dots, n-1$. Пусть k_2 – произвольный элемент группы Y. Положим $h_2 = \widetilde{\delta}_{n-1}k_2$. Тогда $h_2 - \widetilde{\delta}_{n-1}k_2 = 0$. Придадим u и v в (16.4) приращения h_2 и k_2 соответственно. Вычитая (16.4) из полученного уравнения, находим

$$\sum_{j=1}^{n}\Delta_{l_{2,j}}\Delta_{l_{1,j}}\varphi_j(u+\widetilde{\delta}_j v) - \sum_{j=1}^{n-2}\Delta_{l_{2,j+n}}\Delta_{l_{1,j+n}}\varphi_j(u-\widetilde{\delta}_j v) = 0, \quad u, v \in Y, \tag{16.5}$$

где $l_{2,j} = h_2 + \widetilde{\delta}_j k_2 = (\widetilde{\delta}_n + \widetilde{\delta}_j)k_2,\ j = 1, 2, \dots, n,\ l_{2,j+n} = h_2 - \widetilde{\delta}_j k_2 = (\widetilde{\delta}_n - \widetilde{\delta}_j)k_2,\ j = 1, 2, \dots, n-2$. Рассуждая аналогично, через n шагов мы приходим к уравнению

$$\sum_{j=1}^{n}\Delta_{l_{n,j}}\Delta_{l_{n-1,j}}\dots\Delta_{l_{1,j}}\varphi_j(u+\widetilde{\delta}_j v) = 0, \quad u, v \in Y, \tag{16.6}$$

где $l_{p,j} = (\widetilde{\delta}_{n-p+1} + \widetilde{\delta}_j)k_p,\ p = 1, 2, \dots, n,\ j = 1, 2, \dots, n$. Пусть k_{n+1} произвольный элемент группы Y. Положим $h_{n+1} = -\widetilde{\delta}_n k_{n+1}$, следовательно, $h_{n+1} + \widetilde{\delta}_n k_{n+1} = 0$. Придадим u и v в (16.6) приращения h_{n+1} и k_{n+1} соответственно. Вычитая (16.6) из полученного уравнения, мы получаем

$$\sum_{j=1}^{n-1}\Delta_{l_{n+1,j}}\Delta_{l_{n,j}}\Delta_{l_{n-1,j}}\dots\Delta_{l_{1,j}}\varphi_j(u+\widetilde{\delta}_j v) = 0, \quad u, v \in Y, \tag{16.7}$$

где $l_{n+1,j} = h_{n+1} + \widetilde{\delta}_j k_{n+1} = (\widetilde{\delta}_j - \widetilde{\delta}_n)k_{n+1},\ j = 1, 2, \dots, n-1$. Уравнение (16.7) уже не содержит функции φ_n. Рассуждая аналогично, мы последовательно исключаем функции $\varphi_{n-1},\ \varphi_{n-2}, \dots, \varphi_2$ из уравнения (16.7). Окончательно получаем

$$\Delta_{l_{2n-1,1}}\Delta_{l_{2n-2,1}}\dots\Delta_{l_{1,1}}\varphi_1(u+\widetilde{\delta}_1 v) = 0, \quad u, v \in Y, \tag{16.8}$$

где $l_{p,1} = (\widetilde{\delta}_1 + \widetilde{\delta}_{n-p+1})k_p,\ p = 1, 2, \dots, n-1,\ l_{n,1} = 2\widetilde{\delta}_1 k_n,\ l_{n+p,1} = (\widetilde{\delta}_1 - \widetilde{\delta}_{n-p+1})k_{n+p},\ p = 1, 2, \dots, n-1$.

Поскольку k_p – произвольные элементы группы Y и $\widetilde{\delta}_i \pm \widetilde{\delta}_j \in \mathrm{Aut}(Y)$ при $i \neq j$, мы можем положить в (16.8) $l_{n,1} = 2k,\ l_{p,1} = h,\ p = 1, 2, \dots, n-1, n+1, \dots, 2n-1$, где k и h – произвольные элементы группы Y. Полагая $v = 0$ в полученном уравнении, мы находим

$$\Delta_{2k}\Delta_h^{2n-2}\varphi_1(u) = 0, \tag{16.9}$$

где u, k и h – произвольные элементы группы Y. Поскольку группа X не содержит элементов порядка 2, то по теореме 1.9.5 подгруппа $Y^{(2)}$ плотна в Y. Из (16.9) тогда следует, что

$$\Delta_h^{2n-1}\varphi_1(u) = 0, \quad u, h \in Y,$$

т.е. $\varphi_1(y)$ – непрерывный многочлен. Так как группа X не содержит элементов порядка 2, то X не содержит подгруппы, топологически изоморфной $\mathbb{T}$. По теореме 5.11 $\nu_1 \in \Gamma(X)$. Применяя теорему 4.6, получаем $\mu_1 \in \Gamma(X)$. Рассуждая аналогично, убеждаемся, что все $\mu_j \in \Gamma(X)$. □

16.3. Замечание. Утверждение теоремы 16.2 неверно, если группа X содержит элементы порядка 2. Чтобы доказать это, заметим, что если K – замкнутая подгруппа группы X, $\mu \in \mathrm{M}^1(X)$ и $\sigma(\mu) \subset K$, то $\widehat{\mu}(y + l) = \widehat{\mu}(y)$ при $y \in Y$, $l \in A(Y, K)$. Пусть $G = X_{(2)}$, т.е. G – замкнутая подгруппа в X, порожденная всеми элементами порядка 2. Принимая во внимание, что по теореме 1.9.5 $A(Y, G) = \overline{Y^{(2)}}$, мы видим, что если $\sigma(\mu) \subset G$, то $\widehat{\mu}(y + 2h) = \widehat{\mu}(y)$ и следовательно, $\widehat{\mu}(y+h) = \widehat{\mu}(y-h)$ для всех $y, h \in Y$. Отсюда следует, что если ξ_j – независимые случайные величины, принимающие значения в подгруппе $G \subset X$ и с распределениями μ_j, то характеристические функции $\widehat{\mu}_j(y)$ удовлетворяют уравнению 16.1(i). По лемме 16.1 условное распределение линейной формы $L_2 = \beta_1\xi_1 + \cdots + \beta_n\xi_n$ при фиксированной $L_1 = \alpha_1\xi_1 + \cdots + \alpha_n\xi_n$ симметрично. Очевидно, что если $G \neq \{0\}$, то распределения μ_j можно выбрать так, чтобы $\mu_j \notin \Gamma(X)$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

16.4. Замечание. Если мы откажемся от условия, что характеристические функции рассматриваемых распределений не обращаются в нуль, то утверждение теоремы 16.2, вообще говоря, неверно, даже если группа X не содержит элементов порядка 2. Чтобы построить соответствующий пример, рассмотрим $\mathbf{a}$-адический соленоид $X = \Sigma_{\mathbf{a}}$, где $\mathbf{a} = (2, 3, 4, \ldots)$. Тогда X – группа без кручения и $Y \cong \mathbb{Q}$. Чтобы не вводить дополнительных обозначений, будем считать, что $Y = \mathbb{Q}$.

Рассмотрим произвольные невырожденные распределения λ_1, $\lambda_2 \in \mathrm{M}^1(\mathbb{T})$ такие, что $\sigma(\lambda_1) \subset \mathbb{Z}(2)$, $\sigma(\lambda_2) \subset \mathbb{Z}(3)$. Отсюда следует, что

$$\widehat{\lambda}_1(u \pm 2v) = \widehat{\lambda}_1(u), \quad \widehat{\lambda}_2(u \pm 3v) = \widehat{\lambda}_2(u), \quad u,\ v \in \mathbb{Z}. \tag{16.10}$$

Рассмотрим на группе $\mathbb{Q}$ функции $f_j(y)$ вида

$$f_j(y) = \begin{cases} \widehat{\lambda}_j(y), & \text{если} \quad y \in \mathbb{Z}, \\ 0, & \text{если} \quad y \notin \mathbb{Z}. \end{cases} \tag{16.11}$$

Поскольку $\widehat{\lambda}_j(y)$ – положительно определенные функции на группе $\mathbb{Z}$, по теореме 2.12 $f_j(y)$ – положительно определенные функции на группе $\mathbb{Q}$. По теореме Бохнера существуют распределения $\mu_j \in \mathrm{M}^1(X)$ такие, что $\widehat{\mu}_j(y) = f_j(y)$, $j = 1, 2$. Очевидно, что $\mu_j \notin \Gamma(X)$, $j = 1, 2$.

Проверим, что характеристические функции $f_j(y)$ удовлетворяют уравнению

$$f_1(u + 2v)f_2(u + 3v) = f_1(u - 2v)f_2(u - 3v), \quad u, v \in \mathbb{Q}. \tag{16.12}$$

Если $u, v \in \mathbb{Z}$, то из (16.10) и (16.11) следует, что уравнение (16.12) превращается в равенство. Если $u \notin \mathbb{Z}$, $v \in \mathbb{Z}$, то $u \pm 2v \notin \mathbb{Z}$ и обе части уравнения (16.12) обращаются в нуль. Если $v \notin \mathbb{Z}$, то обе части уравнения (16.12) обращаются в нуль. Действительно, ели левая часть уравнения

(16.12) отлична от нуля, то $u+2v, u+3v \in \mathbb{Z}$. Отсюда следует, что $v \in \mathbb{Z}$, вопреки предположению. Аналогичное рассуждение доказывает, что и правая часть уравнения (16.12) равна нулю. Таким образом, характеристические функции $f_j(y)$ удовлетворяют уравнению (16.12).

Пусть ξ_1 и ξ_2 – независимые случайные величины со значениями в группе X и с распределениями μ_1 и μ_2. Из 1.14(d) вытекает, что умножение на любое ненулевое целое число есть топологический автоморфизм группы $X = \Sigma_{\mathbf{a}}$. Чтобы закончить рассуждение, заметим, что по лемме 16.1 условное распределение линейной формы $L_2 = 2\xi_1 + 3\xi_2$ при фиксированной $L_1 = \xi_1 + \xi_2$ симметрично.

Предположим, что группа X содержит элементы порядка 2. Как отмечено в замечании 16.3, тогда теорема 16.2 неверна. Поэтому для таких групп X возникает естественная задача описания возможных распределений независимых случайных величин ξ_j, имеющих не обращающиеся в нуль характеристические функции, в предположении, что условное распределение линейной формы $L_2 = \beta_1\xi_1 + \dots + \beta_n\xi_n$ при фиксированной $L_1 = \alpha_1\xi_1 + \dots + \alpha_n\xi_n$ симметрично. Мы решим сейчас эту задачу для двух независимых случайных величин, принимающих значения в двумерном торе $\mathbb{T}^2$. Нам понадобятся следующие леммы.

16.5. Лемма. *Пусть* $\varepsilon = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}^2)$. *Предположим, что* $|\det\varepsilon| = |\det(I \pm \varepsilon)| = 1$. *Рассмотрим уравнение*

$$(i) \qquad A + B\varepsilon = 0,$$

где $A = (a_{ij})_{i,j=1}^2$ *и* $B = (b_{ij})_{i,j=1}^2$ *— симметричные неотрицательно определенные матрицы. Тогда*

$$A = \sigma \begin{pmatrix} t_0^2 & t_0 \\ t_0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = kA,$$

где $\sigma \geq 0, \quad t_0 = \dfrac{a-d-\sqrt{5}}{2b}, \ k = \dfrac{\sqrt{5}+a+d}{2}$.

Доказательство. Полное описание решений уравнения (i) дано в лемме 11.2. Из $|\det\varepsilon| = |\det(I \pm \varepsilon)| = 1$ следует, что $\det\varepsilon = -1$ и $|a+d| = 1$. Мы находимся в условиях пункта **2A** доказательства леммы 11.2. Искомое представление получаем из описания решений уравнения (i), приведенных в п. **2.A**. $\square$

16.6. Лемма. *Пусть* $X = \mathbb{R}^m \times G$, *где* $m \geq 1$, *а группа* G *такова, что все ее ненулевые элементы имеют порядок 2. Предположим, что* $\mu \in \mathrm{M}^1(X)$, $\mu = \lambda * \omega$, *где* $\lambda \in \Gamma(\mathbb{R}^m)$, $\omega \in \mathrm{M}^1(G)$ *и характеристическая функция распределения* ω *не обращается в нуль. Тогда любой делитель* μ_1 *распределения* μ *представим в виде* $\mu_1 = \varpi * \rho$, *где* $\varpi \in \Gamma(\mathbb{R}^m)$ *и* $\rho \in \mathrm{M}^1(G)$

Доказательство. Мы ограничимся доказательством леммы для случая $m = 1$. Общий случай рассматривается аналогично. Обозначим $H = G^*$. Тогда по теореме 1.7.1 $Y \cong \mathbb{R} \times H$. Элементы группы Y будем обозначать через (s, h), $s \in \mathbb{R}$, $h \in H$. Не ограничивая общности можно предполагать, что $\widehat{\lambda}(s) = \exp\{-\sigma s^2\}$. Заметим, что характеристическая функция любого распределения на группе G принимает лишь вещественные значения. Поэтому характеристическая функция $\widehat{\omega}(h)$ может быть представлена в виде $\widehat{\omega}(h) = \exp\{-d(h) + i\pi k(h)\}$, $h \in H$, где $d(h) \geq 0$, $k(h) \in \mathbb{Z}$.

Мы имеем в силу 2.7(c)

$$\widehat{\mu}(s,h)=\exp\{-\sigma s^2-d(h)+i\pi k(h)\},\quad (s,h)\in Y.$$

Пусть μ_1 делитель μ, т.е. $\mu=\mu_1*\mu_2$, где $\mu_j\in \mathrm{M}^1(X),\ j=1,2$. Из 2.7($c$) следует, что

$$\widehat{\mu}(s,h)=\widehat{\mu}_1(s,h)\widehat{\mu}_2(s,h),\quad (s,h)\in Y. \tag{16.13}$$

Поскольку $\widehat{\mu}(s,0)$ – целая функция, то и $\widehat{\mu}_j(s,0)$ – также целые функции (см. [12, теорема 6.2.1]). По предложению 2.20 функции $\widehat{\mu}_j(s,h)$ при каждом фиксированном $h\in H$ также являются целыми функциями, и равенство (16.13) справедливо при любых $s\in\mathbb{C},\ h\in H$. Следовательно, мы можем представить функцию $\widehat{\mu}_1(s,h)$ в виде

$$\widehat{\mu}_1(s,h)=\exp\{f(s,h)\},\quad s\in\mathbb{C},\ h\in H,$$

где ветвь целой функции $\log\widehat{\mu}_1(s,h)$ выбрана таким образом, чтобы $f(s,h)=\overline{f(-s,h)}$. Полагая в (16.13) $h=0$ и применяя теорему Крамера, мы получаем

$$\widehat{\mu}_1(s,0)=\exp\{-as^2+ibs\}, \tag{16.14}$$

где $0\le a\le\sigma,\ b\in\mathbb{R}$. Заметим, что

$$\max_{|s|\le r,\ h\in H}|\widehat{\mu}_1(s,h)|=\max_{|s|\le r}|\widehat{\mu}_1(s,0)|=\exp\{ar^2+|b|r\}.$$

Следовательно, $\mathrm{Re}\, f(s,h)=O(r^2)$, а это значит, что $f(s,h)$ – многочлен степени ≤ 2. Мы имеем

$$\widehat{\mu}_1(s,h)=\exp\{a(h)s^2+b(h)s+c(h)\}. \tag{16.15}$$

Заметим, что если $\varrho\in\mathrm{M}^1(X)$ – произвольное распределение такое, что для каждого фиксированного $h\in H$ его характеристическая функция $\widehat{\varrho}(s,h)$ – целая функция, то функция

$$g_s(h;\varrho)=\frac{\widehat{\varrho}(is,h)}{\widehat{\varrho}(is,0)} \tag{16.16}$$

при каждом фиксированном $s\in\mathbb{R}$ является характеристической функцией некоторого распределения на G. Из (16.13) и (16.16) следует, что

$$g_s(h;\mu)=g_s(h;\mu_1)g_s(h;\mu_2).$$

Очевидно, что $g_s(h;\mu)=\widehat{\omega}(h)$. Таким образом, $g_s(h;\mu_1)=\widehat{\omega}_s(h)$, где ω_s – делитель ω. Характеристическая функция $\widehat{\omega}_s(h)$ может быть записана в виде

$$\widehat{\omega}_s(h)=\exp\{-d_s(h)+i\pi k_s(h)\}, \tag{16.17}$$

где $d_s(h)\ge 0,\ k_s(h)\in\mathbb{Z}$. Из (16.16) следует, что функции $d_s(h)$ и $k_s(h)$ непрерывно зависят от s. Поскольку функция $k_s(h)$ принимает лишь целые значения, то мы имеем $k_s(h)=k_0(h)$. Поэтому из (16.17) получаем

$$\widehat{\omega}_s(h)=\exp\{-d_s(h)+i\pi k_0(h)\}. \tag{16.18}$$

Из того, что ω_s – делитель ω, вытекает

$$0\le d_s(h)\le d(h). \tag{16.19}$$

Из (16.16) следует, что

$$\widehat{\mu}_1(is,h) = g_s(h;\mu_1)\widehat{\mu}_1(is,0). \tag{16.20}$$

Учитывая (16.14) и (16.18), из (16.20), получаем

$$\widehat{\mu}_1(is,h) = \exp\{as^2 - bs - d_s(h) + i\pi k_0(h)\}. \tag{16.21}$$

Из (16.15) и (16.21) находим

$$-a(h)s^2 + ib(h)s + c(h) = as^2 - bs - d_s(h) + i\pi k_0(h) + 2\pi i n(s,h), \tag{16.22}$$

где $n(s,h) \in \mathbb{Z}$. Поскольку функция $n(s,h)$ принимает лишь целые значения и непрерывно зависит от s, мы получаем $n(s,h) = n(h)$. Так как функция $d_s(h)$, как функция от s, в силу (16.19) ограничена, из (16.22) следует, что

$$a(h) = -a,\ b(h) = ib. \tag{16.23}$$

Из (16.15) вытекает, что $\widehat{\mu}_1(0,h) = \exp\{c(h)\}$. В результате из (16.23), (16.14) и (16.15) получаем

$$\widehat{\mu}_1(s,h) = \widehat{\mu}_1(s,0)\widehat{\mu}_1(0,h).$$

Рассмотрим распределение $\varpi \in \Gamma(\mathbb{R})$ с характеристической функцией $\widehat{\varpi}(s,h) = \widehat{\mu}_1(s,0)$ и распределение $\rho \in \mathrm{M}^1(G)$ с характеристической функцией $\widehat{\rho}(s,h) = \widehat{\mu}_1(0,h)$. Поскольку $\widehat{\mu}_1(s,h) = \widehat{\varpi}(s,h)\widehat{\rho}(s,h)$, то из 2.7($b$) и 2.7($c$) заключаем $\mu_1 = \varpi * \rho$. $\square$

16.7. Пусть $X = \mathbb{T}^2$. Элементы группы X будем обозначать через $x = (z,w),\ z,w \in \mathbb{T}$. Мы имеем $Y \cong \mathbb{Z}^2$. Элементы группы Y будем обозначать через $y = (m,n),\ m,n \in \mathbb{Z}$. Напомним, что согласно 1.14(e), каждый автоморфизм $\delta \in \mathrm{Aut}(\mathbb{T}^2)$ определяется целочисленной матрицей $\delta \longleftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, где $|ad - bc| = 1$, и δ действует на $\mathbb{T}^2$ следующим образом

$$\delta(z,w) = (z^a w^c, z^b w^d), \quad (z,w) \in \mathbb{T}^2.$$

Сопряженный автоморфизм $\varepsilon = \widetilde{\delta} \in \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}^2)$ имеет вид

$$\varepsilon(m,n) = (am + bn, cm + dn), \quad (m,n) \in \mathbb{Z}^2.$$

Мы будем отождествлять автоморфизмы δ и ε с матрицей $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Пусть ξ_1 и ξ_2 — независимые случайные величины со значениями в группе X и с распределениями μ_1 и μ_2. Пусть $\alpha_j,\ \beta_j \in \mathrm{Aut}(X)$. Переходя к новым случайным величинам $\zeta_j = \alpha_j\xi_j$, легко видеть, что изучение возможных распределений μ_j при условии, что условное распределение линейной формы $L_2 = \beta_1\xi_1 + \beta_2\xi_2$ при фиксированной $L_1 = \alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2$ симметрично, сводится к случаю, когда $L_1 = \xi_1 + \xi_2$ и $L_2 = \xi_1 + \delta\xi_2$, где $\delta \in \mathrm{Aut}(X)$.

16.8. Теорема. *Пусть $X = \mathbb{T}^2$. Пусть G – подгруппа в X, порожденная всеми элементами порядка 2. Пусть ξ_1 и ξ_2 – независимые случайные величины со значениями в группе X, имеющие распределения μ_1 и μ_2 с необращающимися в нуль характеристическими функциями. Пусть автоморфизм $\delta \in \mathrm{Aut}(X)$ удовлетворяет условию: $I \pm \delta \in \mathrm{Aut}(X)$. Предположим, что условное распределение линейной формы $L_2 = \xi_1 + \delta\xi_2$ при фиксированной $L_1 = \xi_1 + \xi_2$ симметрично. Тогда $\mu_j = \gamma_j * \rho_j$, где $\gamma_j \in \Gamma(X)$, $\sigma(\rho_j) \subset G$, $j = 1, 2$. При этом распределения γ_j сосредоточены на классах смежности одной и той же плотной в X однопараметрической подгруппе.*

Доказательство. Пусть автоморфизму δ соответствует матрица $\delta = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Обозначим $\varepsilon = \widetilde{\delta}$. По лемме 16.1 из симметрии условного распределение линейной формы $L_2 = \xi_1 + \delta\xi_2$ при фиксированной $L_1 = \xi_1 + \xi_2$ следует, что характеристические функции $\widehat{\mu}_j(y)$ удовлетворяют уравнению 16.1(i), которое принимает вид

$$\widehat{\mu}_1(u + v)\widehat{\mu}_2(u + \varepsilon v) = \widehat{\mu}_1(u - v)\widehat{\mu}_2(u - \varepsilon v), \quad u, v \in Y. \tag{16.24}$$

Положим $\nu_j = \mu_j * \bar{\mu}_j$. Из 2.7$(c)$ и 2.7(d) вытекает, что $\widehat{\nu}_j(y) = |\widehat{\mu}_j(y)|^2 > 0$, $y \in Y$. Очевидно, что характеристические функции $\widehat{\nu}_j(y)$ также удовлетворяют уравнению (16.24). Положим $\varphi_j(y) = -\log \widehat{\nu}_j(y)$. Тогда функции $\varphi_j(y)$ удовлетворяют уравнению

$$\varphi_1(u + v) + \varphi_2(u + \varepsilon v) - \varphi_1(u - v) - \varphi_2(u - \varepsilon v) = 0, \quad u, v \in Y. \tag{16.25}$$

Решая уравнение (16.25) методом конечных разностей, аналогично тому, как мы делали при доказательстве теоремы 16.2, мы приходим для функции $\varphi_1(y)$ к уравнению (16.9). Учитывая, что $n = 2$, мы получаем, что функция $\varphi_1(y)$ удовлетворяет уравнению 12.4(i).

Положим $H_0 = Y^{(2)}$. Пусть

$$Y = H_0 \cup H_1 \cup H_2 \cup H_3,$$

где $H_1 = (1, 0) + H_0$, $H_2 = (0, 1) + H_0$, $H_3 = (1, 1) + H_0$ – разложение группы Y по подгруппе H_0. Из леммы 12.4 вытекает, что

$$\varphi_1(y) = \langle Ay, y\rangle + r_j, \quad y \in H_j, \quad j = 0, 1, 2, 3, \tag{16.26}$$

где $r_0 = 0$. Аналогичное представление справедливо и для функции $\varphi_2(y)$

$$\varphi_2(y) = \langle By, y\rangle + r'_j, \quad y \in H_j, \quad j = 0, 1, 2, 3, \tag{16.27}$$

где $r'_0 = 0$. Подставляя (16.26) и (16.27) в (16.25) и беря $u, v \in H_0$, получаем, что матрицы A и B удовлетворяют уравнению

$$A + B\varepsilon = 0.$$

Применяя лемму 16.5, мы находим

$$A = \sigma \begin{pmatrix} t_0^2 & t_0 \\ t_0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = kA,$$

где $\sigma \geq 0$, $\quad t_0 = \dfrac{a - d - \sqrt{5}}{2b}$, $k = \dfrac{\sqrt{5} + a + d}{2}$. Отсюда вытекает представление

$$\langle Ay, y\rangle = \langle A(m, n), (m, n)\rangle = \sigma(t_0 m + n)^2, \quad y = (m, n) \in Y. \tag{16.28}$$

Из (16.26) и (16.28) следует, что

$$\widehat{\nu}_1(y) = \widehat{\nu}_1(m,n) = \exp\{-\sigma(t_0 m + n)^2 - r_j\}, \quad y = (m,n) \in H_j, \quad j = 0,1,2,3. \tag{16.29}$$

Рассмотрим на группе Y функцию

$$g(y) = g(m,n) = \exp\{-r_j\}, \quad y = (m,n) \in H_j, \quad j = 0,1,2,3.$$

Эта функция принимает постоянные значения на каждом классе смежности H_j. Отсюда следует, что существует такой заряд ω на группе X с носителем в $A(X, H_0)$, что

$$\widehat{\omega}(y) = g(y), \quad y \in Y. \tag{16.30}$$

Поскольку $H_0 = Y^{(2)}$, то по теореме 1.9.5 $A(X, H_0) = X_{(2)} = G$. Очевидно, что $G \cong (\mathbb{Z}(2))^2$. Обозначим через γ гауссовское распределение на группе X с характеристической функцией

$$\widehat{\gamma}(y) = \widehat{\gamma}(m,n) = \exp\{-\sigma(t_0 m + n)^2\}, \quad y = (m,n) \in Y. \tag{16.31}$$

Из (16.29)–(16.31) следует, что

$$\widehat{\nu}_1(y) = \widehat{\gamma}(y)\widehat{\omega}(y), \quad y \in Y.$$

Из 2.7(b) и 2.7(c) вытекает, что $\nu_1 = \gamma * \omega$. Мы проверим, что на самом деле заряд ω является распределением.

Рассмотрим гауссовское распределение λ на группе $\mathbb{R}$ с характеристической функцией $\widehat{\lambda}(s) = \exp\{-\sigma s^2\}$. Обозначим через $\tau : Y \mapsto \mathbb{R}$ гомоморфизм $\tau(m,n) = t_0 m + n$. Пусть $p = \widetilde{\tau} : \mathbb{R} \to X$ – сопряженный гомоморфизм. Из предложения 2.10 и 2.7(b) следует, что $\gamma = p(\lambda)$. Поскольку t_0 – иррациональное число, подгруппа $\tau(Y)$ плотна в $\mathbb{R}$. Из 1.13(b) тогда вытекает, что p – мономорфизм. Кроме того, поскольку τ – мономорфизм, то из 1.13(b) вытекает также, что образ $p(\mathbb{R})$ плотен в X. Обозначим через ζ_j, $j = 0,1,2,3$, элементы группы G. Тогда

$$\omega = \sum_{j=0}^{3} a_j E_{\zeta_j},$$

где $a_j \in \mathbb{R}$. Мы имеем

$$\nu_1 = \gamma * \omega = \sum_{j=0}^{3} a_j (\gamma * E_{\zeta_j}). \tag{16.32}$$

Распределение $\gamma * E_{\zeta_j}$ сосредоточено на борелевском множестве $p(\mathbb{R})\zeta_j$, а множества $p(\mathbb{R})\zeta_j$, очевидно, попарно не пересекаются. Поскольку $\nu_1 \in \mathrm{M}^1(X)$, то из (16.32) следует, что все $a_j \geq 0$, т.е. $\omega \in \mathrm{M}^1(X)$.

Докажем теперь, что распределение μ_1 имеет требуемое представление. Очевидно, что $p(\mathbb{R}) \cap G = \{0\}$. Продолжим p до мономорфизма $\widehat{p} : \mathbb{R} \times G \mapsto X$, полагая $\widehat{p}(t, \zeta_j) = p(t)\zeta_j$, $(t, \zeta_j) \in \mathbb{R} \times G$. По следствию 2.5 мономорфизм $\widehat{p}$ порождает изоморфизм полугрупп $\mathrm{M}^1(\mathbb{R} \times G)$ и $\mathrm{M}^1(p(\mathbb{R}) \times G)$. Пусть $\upsilon = \lambda * \omega \in \mathrm{M}^1(\mathbb{R} \times G)$. Следовательно, $\widehat{p}(\upsilon) = p(\lambda) * \omega = \gamma * \omega = \nu_1$. Очевидно, что распределение ν_1 сосредоточено на борелевской подгруппе $p(\mathbb{R}) \times G$ в X. Принимая во внимание, что μ_1 – делитель ν_1, по предложению 2.2 мы можем заменить распределение μ_1 его сдвигом μ_1' так, чтобы распределение μ_1' было также сосредоточено на подгруппе $p(\mathbb{R}) \times G$ и $\nu_1 = \mu_1' * \bar{\mu}_1'$. Отсюда следует, что $\upsilon = \widehat{p}^{-1}(\nu_1) = \widehat{p}^{-1}(\mu_1') * \widehat{p}^{-1}(\bar{\mu}_1')$. Обозначим $\upsilon_1 = \widehat{p}^{-1}(\mu_1)$. Тогда $\upsilon_1 \in$

$\mathrm{M}^1(\mathbb{R}\times G)$. По лемме 16.6 распределение v_1, как делитель v, имеет вид $v_1 = \varpi * \rho$, где $\varpi \in \Gamma(\mathbb{R}),\ \rho \in \mathrm{M}^1(G)$. Отсюда следует, что $\mu_1' = \widehat{p}(v_1) = p(\varpi) * \rho = \gamma_1 * \rho$, где $\gamma_1 = p(\varpi) \in \Gamma(X)$. Отсюда следует требуемое представление и для распределения μ_1. Для распределения μ_2 рассуждаем аналогично. $\square$

16.9. Замечание. Пусть $X = \mathbb{T}^2$. Отметим, что на группе X не существует трех автоморфизмов $\delta_j \in \mathrm{Aut}(X),\ j = 1, 2, 3$, таких, что $\delta_i \pm \delta_j \in \mathrm{Aut}(X)$ при $i \neq j$. Действительно, не ограничивая общности, можно считать, что $\delta_1 = I,\ \delta_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\ \delta_3 = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$. Как отмечено при доказательстве леммы 16.5, если $|\det \delta_j| = |\det(I \pm \delta_j)| = 1$ при $j = 2, 3$, то $ad - bc = -1$ и $a'd' - b'c' = -1$. С другой стороны, поскольку $\delta_2 \pm \delta_3 \in \mathrm{Aut}(X)$, то $|\det(\delta_2 \pm \delta_3)| = 1$. Отсюда следует, что $|2 + k| = |2 - k| = 1$, где $k = ad' + da' - bc' - cb'$, что невозможно. Поэтому теорему 16.8 можно формулировать, как утверждение об n независимых случайных величинах $\xi_j,\ j = 1, 2, \ldots, n,\ n \geq 2$, принимающих значения в двумерном торе $X = \mathbb{T}^2$, где автоморфизмы $\alpha_j, \beta_j \in \mathrm{Aut}(X)$ удовлетворяют условию: $\beta_i\alpha_i^{-1} \pm \beta_j\alpha_j^{-1} \in \mathrm{Aut}(X)$ для всех $i \neq j$. Из замечания вытекает, что тогда $n = 2$.

16.10. Замечание. Пусть $X = \mathbb{T}^2$. Теорема 16.8 неверна, если характеристические функции рассматриваемых распределений могут обращаться в нуль. Чтобы доказать это, рассмотрим автоморфизм $\delta \in \mathrm{Aut}(X)$ вида

$$\delta = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда $I \pm \delta \in \mathrm{Aut}(X)$. Обозначим $K = X_{(4)}$. Тогда $K \cong (\mathbb{Z}(4))^2$. Обозначим через $(e^{\frac{\pi i m}{2}},\ e^{\frac{\pi i n}{2}}),\ m, n \in \{0, 1, 2, 3\}$ элементы K. Автоморфизм δ действует на K следующим образом

$$\delta(e^{\frac{\pi i m}{2}},\ e^{\frac{\pi i n}{2}}) = (e^{\frac{\pi i(m+n)}{2}},\ e^{\frac{\pi i m}{2}}).$$

Рассмотрим подгруппы в K вида

$$K_1 = \{(1, 1),\ (1, -1)\},\ K_2 = \{(1, 1),\ (-1, -1)\},$$

$$F = \{(1, 1),\ (1, -1),\ (-1, 1),\ (-1, -1),\ (i, 1),\ (-i, 1),\ (i, -1),\ (-i, -1)\}.$$

Пусть ξ_1 и ξ_2 – независимые случайные величины со значениями в группе X и с распределениями $\mu_1 = am_{K_1} + (1-a)m_F$ и $\mu_2 = am_{K_2} + (1-a)m_F$, где $0 < a < 1$. Обозначим $\varepsilon = \widetilde{\delta}$. Как будет доказано ниже (лемма 17.11), характеристические функции $\widehat{\mu}_j(y)$ удовлетворяют уравнению (16.24). По лемме 16.1 условное распределение линейной формы $L_2 = \xi_1 + \delta\xi_2$ при фиксированной $L_1 = \xi_1 + \xi_2$ симметрично. С другой стороны, очевидно, что распределения μ_j не могут быть представлены в виде $\mu_j = \gamma_j * \rho_j$, где $\gamma_j \in \Gamma(X),\ \rho_j \in \mathrm{M}^1(G)$.

Перейдем теперь к описанию возможных распределений независимых случайных величин ξ_j, имеющих не обращающиеся в нуль характеристические функции, в предположении, что условное распределение линейной формы $L_2 = \beta_1\xi_1 + \cdots + \beta_n\xi_n$ при фиксированной $L_1 = \alpha_1\xi_1 + \cdots + \alpha_n\xi_n$ симметрично, для групп, не содержащих подгруппы, топологически изоморфной $\mathbb{T}$. Оказывается, что ответ здесь такой же, как и в теореме 16.8. Нам понадобятся следующие леммы.

16.11. Лемма. *Пусть n – натуральное число, а группа X удовлетворяет условию $X^{(n)} = c_X$. Тогда*

$$X = c_X \times \widetilde{X},$$

где $\widetilde{X}$ – подгруппа в X такая, что $\widetilde{X}^{(n)} = \{0\}$.

Доказательство. Предположим вначале, что группа X компактна. Тогда по теореме 1.6.1 Y – дискретная группа. Обозначим $L = X/c_X$. Из условия леммы вытекает, что $L^{(n)} = \{0\}$. Тогда и $(L^*)^{(n)} = \{0\}$. Принимая во внимание, что по теоремам 1.9.2 и 1.9.3 $L^* \cong A(Y, c_X) = b_Y$, мы получаем, что b_Y – ограниченная подгруппа в Y. Поскольку b_Y – сервантная подгруппа в Y, то по теореме Куликова (см. [79, §27]) b_Y – прямой сомножитель в Y, т.е.

$$Y = D \times b_Y, \tag{16.33}$$

где $D \cong Y/b_Y$. Снова применяя теоремы 1.9.2 и 1.9.3, получаем $D^* \cong (Y/b_Y)^* \cong A(X, b_Y) = c_X$. Из (16.33) по теореме 1.7.1 тогда следует, что $X = c_X \times \widetilde{X}$, где $\widetilde{X} \cong (b_Y)^*$. Поскольку $(b_Y)^{(n)} = \{0\}$, то и $\widetilde{X}^{(n)} = \{0\}$. Таким образом, утверждение леммы доказано для компактной группы X.

Пусть X – произвольная локально компактная абелева группа. По теореме 1.11.1 $X \cong \mathbb{R}^m \times G$, где $m \geq 0$, а группа G содержит компактную открытую подгруппу. Чтобы не вводить дополнительных обозначений, будем считать, что $X = \mathbb{R}^m \times G$. Отсюда вытекает, что $c_X = \mathbb{R}^m \times c_G$. Пусть K – компактная открытая подгруппа в G. Очевидно, что $c_K = c_G$ и $K^{(n)} = c_K$. Как было доказано выше, $K = c_K \times \widetilde{K}$, где $\widetilde{K}^{(n)} = \{0\}$. Пусть π – непрерывный гомоморфизм $\pi : K \to c_K$ такой, что ограничение π на c_K – тождественный автоморфизм. Поскольку группа c_K делима, то гомоморфизм π может быть продолжен до гомоморфизма $\widehat{\pi} : G \mapsto c_K = c_G$ (см. [85, §A.7]). Принимая во внимание, что гомоморфизм $\widehat{\pi}$ непрерывен на открытой подгруппе K, мы заключаем, что гомоморфизм $\widehat{\pi}$ непрерывен на G, а тогда $G = c_G \times \widetilde{G}$ ([85, §6.22]). Следовательно, $X = \mathbb{R}^m \times c_G \times \widetilde{G} = c_X \times \widetilde{X}$. $\square$

16.12. Предложение. *Пусть ξ_j, $j = 1, 2, \dots, n$, $n \geq 2$, – независимые случайные величины со значениями в группе X, имеющие распределения μ_j с необращающимися в нуль характеристическими функциями. Пусть α_j, β_j – топологические автоморфизмы группы X такие, что $\beta_i\alpha_i^{-1} \pm \beta_j\alpha_j^{-1} \in \mathrm{Aut}(X)$ для всех $i \neq j$. Предположим, что условное распределение линейной формы $L_2 = \beta_1\xi_1 + \dots + \beta_n\xi_n$ при фиксированной $L_1 = \alpha_1\xi_1 + \dots + \alpha_n\xi_n$ симметрично. Тогда существуют элементы $x'_j \in X$, $j = 1, 2, \dots, n$ такие, что условное распределение линейной формы $L'_2 = \beta_1\xi'_1 + \dots + \beta_n\xi'_n$ при фиксированной $L'_1 = \alpha_1\xi'_1 + \dots + \alpha_n\xi'_n$, где $\xi'_j = \xi_j - x'_j$, симметрично, а носители распределений μ'_j всех случайных величин ξ'_j содержатся в подгруппе $\{x \in X : 2x \in c_X\}$.*

Доказательство. Переходя к новым случайным величинам $\zeta_j = \alpha_j\xi_j$, мы редуцируем доказательство теоремы к случаю, когда линейные формы L_1 и L_2 имеют вид $L_1 = \xi_1 + \dots + \xi_n$ и $L_2 = \delta_1\xi_1 + \dots + \delta_n\xi_n$, $\delta_j \in \mathrm{Aut}(X)$. Условие $\beta_i\alpha_i^{-1} \pm \beta_j\alpha_j^{-1} \in \mathrm{Aut}(X)$ для всех $i \neq j$ переходит в условие: $\delta_i \pm \delta_j \in \mathrm{Aut}(X)$ для всех $i \neq j$. По лемме 16.1 из симметрии условного распределение линейной формы $L_2 = \delta_1\xi_1 + \dots + \delta_n\xi_n$ при фиксированной $L_1 = \xi_1 + \dots + \xi_n$ следует, что характеристические функции $\widehat{\mu}_j(y)$ удовлетворяют уравнению (16.2). Положим $\nu_j = \mu_j * \bar{\mu}_j$. Из 2.7($c$) и 2.7($d$) вытекает, что $\widehat{\nu}_j(y) = |\widehat{\mu}_j(y)|^2 > 0$, $y \in Y$. Очевидно, что характеристические функции $\widehat{\nu}_j(y)$ также удовлетворяют уравнению (16.2).

Положим $\psi_j(y) = -\log\widehat{\nu}_j(y)$. Как установлено при доказательстве теоремы 16.2, каждая из функций $\psi_j(y)$ удовлетворяют уравнению (16.9). Отсюда следует, что каждая из функций $\psi_j(y)$ – непрерывный многочлен на подгруппе $\overline{Y^{(2)}}$. В частности, каждая из функций $\psi_j(y)$ – непрерывный многочлен на подгруппе $b_{\overline{Y^{(2)}}}$. По предложению 5.7 $\psi_j(y) = \psi_j(0) = 0$ при $y \in b_{\overline{Y^{(2)}}},\ j = 1, 2, \ldots, n$. Следовательно, для всех характеристических функций $\widehat{\nu}_j(y)$ выполнено $\widehat{\nu}_j(y) = 1$ при $y \in b_{\overline{Y^{(2)}}}$. Отсюда по предложению 2.13 $\sigma(\nu_j) \subset A(X, b_{\overline{Y^{(2)}}}),\ j = 1, 2, \ldots, n$. Обозначим $K = A(X, b_{\overline{Y^{(2)}}})$. Заметим, что по теореме 1.9.3 $c_X = A(X, b_Y)$. Следовательно, мы имеем $K = \{x \in X : (x, 2y) = 1$ для всех $y \in b_Y\} = \{x \in X : (2x, y) = 1$ для всех $y \in b_Y\} = \{x \in X : 2x \in c_X\}$. Поскольку $|\widehat{\mu}_j(y)| = 1$ при $y \in b_{\overline{Y^{(2)}}}$, то из 2.7(*e*) следует, что существуют элементы $x_j \in X$ такие, что $\widehat{\mu}_j(y) = (x_j, y),\ j = 1, 2, \ldots, n$, при $y \in b_{\overline{Y^{(2)}}}$. Положим

$$\widetilde{x}_1 = -\delta_1^{-1}\sum_{j=2}^{n}\delta_j x_j, \quad \widetilde{x}_j = x_j, \quad j = 2, 3, \ldots, n.$$

Поскольку $\sum_{j=1}^n \delta_j\widetilde{x}_j = 0$, то функции $f_j(y) = (\widetilde{x}_j, y)$ удовлетворяют уравнению (16.2) на группе Y. Положим $\widehat{\lambda}_j(y) = \widehat{\mu}_j(y)\overline{(\widetilde{x}_j, y)},\ j = 1, 2, \ldots, n$. Очевидно, что характеристические функции $\widehat{\lambda}_j(y)$ обладают следующими свойствами:

(*i*) характеристические функции $\widehat{\lambda}_j(y)$ удовлетворяют уравнению (16.2) на группе Y;

(*ii*) при $j = 2, 3, \ldots, n$ выполнено $\widehat{\lambda}_j(y) = 1$ при $y \in b_{\overline{Y^{(2)}}}$, а значит, $\sigma(\lambda_j) \subset K$ в силу предложения 2.13;

(*iii*) $\widehat{\lambda}_1(y) = (c, y)$, где $c = x_1 - \widetilde{x}_1$, при $y \in b_{\overline{Y^{(2)}}}$.

Поскольку $b_{\overline{Y^{(2)}}}$ – характеристическая подгруппа группы Y, из (*i*) и (*ii*) следует, что ограничение уравнения (16.2) на подгруппу $b_{\overline{Y^{(2)}}}$ принимает вид

$$\widehat{\lambda}_1(u + \widetilde{\delta}_1 v) = \widehat{\lambda}_1(u - \widetilde{\delta}_1 v), \quad u, v \in b_{\overline{Y^{(2)}}}.$$

Полагая здесь $u = \widetilde{\delta}_1 v$, мы видим, что $\widehat{\lambda}_1(y) = 1$ при $y \in b_{\overline{Y^{(4)}}}$. В силу предложения 2.13 отсюда следует, что

$$\sigma(\lambda_1) \subset A(X, b_{\overline{Y^{(4)}}}) = \{x \in X : 4x \in c_X\}. \tag{16.34}$$

Обозначим $F = A(X, b_{\overline{Y^{(4)}}})$. Заметим, что $K \subset F$, и F – характеристическая подгруппа группы X. Поэтому, учитывая лемму 16.1, (*i*), (*ii*) и (16.34), мы можем предполагать с самого начала, что группа X удовлетворяет условию $X^{(4)} = c_X$. По лемме 16.11 $X = c_X \times \widetilde{X}$, где $\widetilde{X}^{(4)} = \{0\}$. Представим элемент c в виде $c = a + b$, где $a \in c_X,\ b \in \widetilde{X}$. Тогда $(c, y) = (b, y)$ при $y \in b_Y$. Положим $g_1(y) = \overline{(b, y)},\ g_j(y) = 1,\ y \in Y,\ j = 2, 3, \ldots, n$, и $\xi'_j = \xi_j - x'_j$, где $x'_1 = \widetilde{x}_1 + b,\ x'_j = x_j,\ j = 2, 3, \ldots, n$. Пусть μ'_j – распределения случайных величин ξ'_j. Тогда $\widehat{\mu}'_j(y) = \widehat{\lambda}_j(y)g_j(y),\ j = 1, 2, \ldots, n$. Из (*iii*) вытекает, что $\widehat{\mu}'_1(y) = 1$ при $y \in b_{\overline{Y^{(2)}}}$. Кроме того $\widehat{\mu}'_j(y) = 1$ при $y \in b_{\overline{Y^{(2)}}},\ j = 2, 3, \ldots, n$, и следовательно, в силу предложения 2.13 $\sigma(\mu'_j) \subset A(X, b_{\overline{Y^{(2)}}}) = K,\ j = 1, 2, \ldots, n$.

Проверим теперь, что условное распределение линейной формы $L'_2 = \beta_1\xi'_1 + \cdots + \beta_n\xi'_n$ при фиксированной $L'_1 = \alpha_1\xi'_1 + \cdots + \alpha_n\xi'_n$ симметрично. Так как $\widehat{\mu}'_j(y) = 1$ при $y \in b_{\overline{Y^{(2)}}}\ j = 1, 2, \ldots, n$, то в силу предложения 2.13 выполнено $\widehat{\mu}'_j(y + h) = \widehat{\mu}'_j(y)$ при любых $y \in b_Y,\ h \in b_{\overline{Y^{(2)}}}$. Значит $\widehat{\mu}'_j(y + h) = \widehat{\mu}'_j(y)$ при любых $y \in b_Y,\ h \in (b_Y)^{(2)}$. Отсюда следует, что характеристические функции $\widehat{\mu}'_j(y)$ удовлетворяют уравнению (16.2) на подгруппе b_Y. Принимая во внимание, что характеристические функции $\lambda_j(y)$ также удовлетворяют уравнению (16.2) на подгруппе b_Y, мы делаем вывод, что функции $g_j(y)$ также удовлетворяют уравнению (16.2) на подгруппе b_Y. Отсюда вытекает, что

$$(b, u + \widetilde{\delta}_1 v) = (b, u - \widetilde{\delta}_1 v), \quad u, v \in b_Y. \tag{16.35}$$

Из (16.35) вытекает, что $2b \in c_X$, а значит $2b = 0$. Поэтому выполнено

$$2\sum_{j=1}^{n} \delta_j x'_j = 0.$$

Это влечет, что характеристические функции $\widehat{\mu}'_j(y)$ удовлетворяют уравнению (16.2) на группе Y. По лемме 16.1 отсюда вытекает, что условное распределение линейной формы $L'_2 = \beta_1\xi'_1 + \cdots + \beta_n\xi'_n$ при фиксированной $L'_1 = \alpha_1\xi'_1 + \cdots + \alpha_n\xi'_n$ симметрично. $\square$

16.13. Замечание (ср. с замечанием 10.6). Пусть ξ_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, $n \geq 2$, – независимые случайные величины со значениями в группе X, имеющие распределения μ_j с необращающимися в нуль характеристическими функциями. Пусть α_j, β_j – топологические автоморфизмы группы X такие, что $\beta_i\alpha_i^{-1} \pm \beta_j\alpha_j^{-1} \in \mathrm{Aut}(X)$ для всех $i \neq j$. Предположим, что условное распределение линейной формы $L_2 = \beta_1\xi_1 + \cdots + \beta_n\xi_n$ при фиксированной $L_1 = \alpha_1\xi_1 + \cdots + \alpha_n\xi_n$ симметрично. Принимая во внимание, что $K = \{x \in X : 2x \in c_X\}$ – характеристическая подгруппа группы X, из предложения 16.12 вытекает, что изучая возможные распределения μ_j, не ограничивая общности, можно предполагать, что группа X такова, что $X^{(2)} = c_X$.

16.14. Теорема. *Пусть группа X не содержит подгруппы, топологически изоморфной $\mathbb{T}$. Пусть G – подгруппа в X, порожденная всеми элементами порядка 2. Пусть ξ_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, $n \geq 2$, – независимые случайные величины со значениями в группе X, имеющие распределения μ_j с необращающимися в нуль характеристическими функциями. Пусть α_j, β_j – топологические автоморфизмы группы X такие, что $\beta_i\alpha_i^{-1} \pm \beta_j\alpha_j^{-1} \in \mathrm{Aut}(X)$ для всех $i \neq j$. Если условное распределение линейной формы $L_2 = \beta_1\xi_1 + \cdots + \beta_n\xi_n$ при фиксированной $L_1 = \alpha_1\xi_1 + \cdots + \alpha_n\xi_n$ симметрично, то все распределения $\mu_j = \gamma_j * \rho_j$, где $\gamma_j \in \Gamma(X)$, $\sigma(\rho_j) \subset G$.*

Доказательство. Переходя к новым случайным величинам $\zeta_j = \alpha_j\xi_j$, мы редуцируем доказательство теоремы к случаю, когда линейные формы L_1 и L_2 имеют вид $L_1 = \xi_1 + \cdots + \xi_n$ и $L_2 = \delta_1\xi_1 + \cdots + \delta_n\xi_n$, $\delta_j \in \mathrm{Aut}(X)$. Условие $\beta_i\alpha_i^{-1} \pm \beta_j\alpha_j^{-1} \in \mathrm{Aut}(X)$ для всех $i \neq j$ переходит в условие: $\delta_i \pm \delta_j \in \mathrm{Aut}(X)$ для всех $i \neq j$. По лемме 16.1 из симметрии условного распределение линейной формы $L_2 = \delta_1\xi_1 + \cdots + \delta_n\xi_n$ при фиксированной $L_1 = \xi_1 + \cdots + \xi_n$ следует, что характеристические функции $\widehat{\mu}_j(y)$ удовлетворяют уравнению (16.2). Положим $\nu_j = \mu_j * \bar{\mu}_j$. Из 2.7($c$) и 2.7($d$) вытекает, что $\widehat{\nu}_j(y) = |\widehat{\mu}_j(y)|^2 > 0$, $y \in Y$. Очевидно, что характеристические функции $\widehat{\nu}_j(y)$ также удовлетворяют уравнению (16.2). Положим $\psi_j(y) = -\log\widehat{\nu}_j(y)$. Как установлено при доказательстве теоремы 16.2, каждая из функций $\psi_j(y)$ удовлетворяют уравнению (16.9). Отсюда следует, что каждая из функций $\psi_j(y)$ – непрерывный многочлен на подгруппе $\overline{Y^{(2)}}$.

Мы докажем вначале, что каждое из распределений ν_j представимо в виде свертки гауссовского распределения и распределения с носителем в G. Учитывая замечание 16.13, мы можем предполагать, что группа X обладает свойством:

$$X^{(2)} = c_X, \tag{16.36}$$

т.е. отображение $\pi : X \mapsto c_X,\ \pi x = 2x$ – эпиморфизм, $\operatorname{Ker}\pi = G$ и $c_X \cong X/G$. Из теорем 1.9.2 и 1.9.5 следует, что

$$(c_X)^* \cong A(Y, G) = \overline{Y^{(2)}}. \tag{16.37}$$

Будем предполагать, что $c_X \neq \{0\}$, поскольку в противном случае утверждение теоремы вытекает из леммы 16.12. Принимая во внимание, что группа c_X не содержит подгруппы, топологически изоморфной $\mathbb{T}$, и (16.37), мы можем применить теорему 5.13 к ограничению функции $\exp\{-\psi_j(y)\}$ на подгруппу $\overline{Y^{(2)}}$. Мы получаем, что это ограничение – характеристическая функция некоторого гауссовского распределения. Отсюда следует, что ограничение функции $\psi_j(y)$ на подгруппу $\overline{Y^{(2)}}$ удовлетворяет уравнению 2.16(ii). Если $\psi_j(y) = 0$ при $y \in \overline{Y^{(2)}}$, то по предложению 2.13 $\sigma(\nu_j) \subset A(X, \overline{Y^{(2)}}) = G$, и утверждение теоремы вытекает из предложения 2.2. Поэтому будем предполагать, что $\psi_j(y) \not\equiv 0$ на $\overline{Y^{(2)}}$. А это значит, что ограничение функции $\psi_j(y)$ на подгруппу $\overline{Y^{(2)}}$ – непрерывный многочлен степени 2. Следовательно, для любого фиксированного $k \in Y$ ограничение функции $\Delta_{2k}\psi_j(y)$ на подгруппу $\overline{Y^{(2)}}$ – непрерывный многочлен степени 1. С другой стороны, из (16.9) следует, что функция $\Delta_{2k}\psi_j(y)$ – непрерывный многочлен на Y. Из теоремы 5.5 тогда следует, что $\Delta_{2k}\psi_j(y)$ – непрерывный многочлен степени 1 на Y. Таким образом, функция $\psi_j(y)$ удовлетворяет уравнению 12.4(i). Применяя лемму 12.4, мы получаем представление 12.4(ii) для функции $\psi_j(y)$.

Дальнейшее рассуждение мы проведем для фиксированной функции $\psi_j(y)$. Поэтому, хотя в представлении 12.4(ii) функции $\varphi(y)$ и r_α зависят от $\psi_j(y)$, мы не будем отражать этого в обозначениях. Другими словами, мы будем считать, что

$$\psi_j(y) = \varphi(y) + r_\alpha, \quad y \in y_\alpha + \overline{Y^{(2)}}.$$

Пусть γ – гауссовское распределение на группе X с характеристической функцией

$$\widehat{\gamma}(y) = \exp\{-\varphi(y)\}, \quad y \in Y. \tag{16.38}$$

Рассмотрим на группе Y функцию

$$g(y) = \exp\{-r_\alpha\}, \quad y \in y_\alpha + \overline{Y^{(2)}}. \tag{16.39}$$

Поскольку $g(y) = \widehat{\nu}_j(y)/\widehat{\gamma}(y)$, то функция $g(y)$ непрерывна. Заметим также, что функция $g(y)$ инвариантна относительно подгруппы $\overline{Y^{(2)}}$. Проверим, что $g(y)$ – положительно определенная функция. Для этого возьмем произвольные элементы $t_1, \dots, t_n \in Y$ такие, что $t_j \in y_{\alpha_j} + \overline{Y^{(2)}}$ и проверим, что для произвольных чисел $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ выполнено неравенство

$$\sum_{i,j=1}^{n} g(t_i - t_j) z_i \bar{z}_j \geq 0. \tag{16.40}$$

Рассмотрим подгруппу H в Y, порожденную классами смежности $y_{\alpha_j} + \overline{Y^{(2)}},\ j = 1, \dots, n$. Из теорем 1.9.2 и 1.9.5 вытекает, что $Y/\overline{Y^{(2)}} \cong (A(X, \overline{Y^{(2)}}))^* = G^*$. Отсюда следует, что H состоит из конечного числа классов смежности. Обозначим $K = H^*,\ L = A(X, H)$. Тогда по теореме 1.9.2 $K \cong X/L$. Кроме того, $L \subset G$. Рассмотрим ограничение функции $g(y)$ на H. Это ограничение инвариантно относительно подгруппы $\overline{Y^{(2)}}$ и поэтому определяет некоторую функцию на фактор-группе $H/\overline{Y^{(2)}}$. Заметим, что фактор-группа $H/\overline{Y^{(2)}}$ конечна, и все ее ненулевые элементы имеют порядок 2. Отсюда следует, что любая вещественнозначная функция на фактор-группе $H/\overline{Y^{(2)}}$ является характеристической функцией некоторого заряда. В частности, ограничение функции $g(y)$ на H является характеристической функцией некоторого заряда β. Поскольку по теореме 1.9.2 $(H/\overline{Y^{(2)}})^* \cong A(K,\ \overline{Y^{(2)}})$, то β можно рассматривать, как заряд на конечной подгруппе $F = A(K,\ \overline{Y^{(2)}})$. Из 12.4$(ii)$, (16.38) и (16.39) следует, что ограничение функции $\widehat{\nu}_j(y)$ на H является характеристической функцией свертки некоторого гауссовского распределения α на K и заряда β на F. Мы проверим, что β является распределением, и тем самым, (16.40) будет доказано.

Так как $c_X \cong X/G$, то $c_X \cong (X/L)/(G/L) \cong K/(G/L)$. Отсюда следует, что поскольку группа c_X не содержит подгруппы, топологически изоморфной $\mathbb{T}$, то группа K также не содержит подгруппы, топологически изоморфной $\mathbb{T}$. Пусть либо $E = \mathbb{R}^l$, где l – натуральное число, либо $E = \mathbb{R}^{\aleph_0}$. По лемме 4.7, примененной к группе K, существует симметричное гауссовское распределение μ на E и непрерывный мономорфизм $p : E \mapsto K$ такой, что $\alpha = p(\mu)$. Значит, гауссовское распределение α сосредоточено на борелевской подгруппе $p(E)$ группы K. Заметим, что все ненулевые элементы подгруппы F имеют порядок 2, а следовательно,

$$p(E)\bigcap F = \{0\}. \tag{16.41}$$

Поскольку свертка $\alpha * \beta$ – распределение, то в силу (16.41) β – также распределение. Мы доказали таким образом, что $g(y)$ – непрерывная положительно определенная функция. По теореме Бохнера существует распределение $\omega \in M^1(X)$ такое, что $\widehat{\omega}(y) = g(y)$. Поскольку $g(y) = 1$ при $y \in \overline{Y^{(2)}}$, то по предложению 2.13 отсюда следует, что $\sigma(\omega) \subset A(X, \overline{Y^{(2)}}) = G$. Поскольку $\widehat{\nu}_j(y) = \widehat{\gamma}(y)g(y)$, то в силу 2.7$(b)$ и 2.7(c)

$$\nu_j = \gamma * \omega,$$

где $\gamma \in \Gamma(X),\ \sigma(\omega) \subset G$.

Докажем теперь, что распределение μ_j имеет требуемое представление. Поскольку группа X не содержит подгруппы, топологически изоморфной $\mathbb{T}$, то по следствию 4.7 существуют непрерывный мономорфизм $p : E \mapsto X$, где либо $E = \mathbb{R}^l$, где l – натуральное число, либо $E = \mathbb{R}^{\aleph_0}$, и симметричное гауссовское распределение λ на E такие, что $\gamma = p(\lambda)$. Поскольку $p(E)\bigcap G = \{0\}$, мономорфизм p может быть продолжен до мономорфизма $\widehat{p} : E \times G \mapsto X$ по формуле $\widehat{p}(t,\zeta) = p(t)+\zeta,\ t \in E,\ \zeta \in G$. По следствию 2.5 мономорфизм $\widehat{p}$ порождает изоморфизм полугрупп $\mathrm{M}^1(E \times G)$ и $\mathrm{M}^1(p(E) + G)$. Пусть $\upsilon = \lambda * \omega \in \mathrm{M}^1(E \times G)$. Тогда $\widehat{p}(\upsilon) = \nu_j$, и следовательно распределение ν_j сосредоточено на борелевской подгруппе $p(E)+G$ в X. Заключительная часть доказательства аналогична заключительной части доказательства теоремы 16.8. □

16.15. Замечание. Поскольку группа X, не содержащая элементов порядка 2, не содержит подгруппы, топологически изоморфной $\mathbb{T}$, то теорема 16.2 вытекает из теоремы 16.14.

Отметим, что следующий результат вытекает из леммы 12.4 и доказательства теоремы 16.14.

16.16. Предложение. *Пусть группа X не содержит подгруппы, топологически изоморфной $\mathbb{T}$. Пусть G – подгруппа в X, порожденная всеми элементами порядка 2. Пусть $\mu \in M^1(X),\ \nu =$*

$\mu * \bar{\mu}$, и характеристическая функция распределения ν представима в виде

$$\widehat{\nu}(y) = \exp\{-\psi(y)\},$$

где функция $\psi(y)$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta_{2k}\Delta_h^m \psi(y) = 0, \quad y, k, h \in Y.$$

Тогда $\mu = \gamma * \rho$, где $\gamma \in \Gamma(X)$, и $\sigma(\rho) \subset G$.

Это предложение можно рассматривать, как еще один групповой аналог теоремы Марцинкевича (ср. с теоремой 5.11).

§17. Теорема Хейде на конечных и дискретных абелевых группах

В этом параграфе мы продолжим изучение групповых аналогов теоремы Хейде. Пусть X – счетная дискретная абелева группа. Пусть ξ_j, $j = 1, 2, \dots, n$, $n \geq 2$, – независимые случайные величины со значениями в группе X и с распределениями μ_j. Пусть α_j, β_j – автоморфизмы группы X, удовлетворяющие условию: $\beta_i\alpha_i^{-1} \pm \beta_j\alpha_j^{-1} \in \mathrm{Aut}(X)$ для всех $i \neq j$. Основное внимание будет уделено следующей задаче. Для каких групп X из симметрии условного распределения линейной формы $L_2 = \beta_1\xi_1 + \dots + \beta_n\xi_n$ при фиксированной $L_1 = \alpha_1\xi_1 + \dots + \alpha_n\xi_n$ вытекает, что все μ_j идемпотентные распределения? В отличие от §16, мы не будем предполагать, что характеристические функции $\widehat{\mu}_j(y)$ не обращаются в нуль. Рассмотрим вначале случай конечной группы и двух независимых случайных величин.

17.1. Теорема. *Пусть X – конечная группа, не содержащая элементов порядка 2. Пусть ξ_1 и ξ_2 – независимые случайные величины со значениями в группе X и с распределениями μ_1 и μ_2. Пусть α_j, β_j – автоморфизмы группы X такие, что $\beta_1\alpha_1^{-1} \pm \beta_2\alpha_2^{-1} \in \mathrm{Aut}(X)$. Если условное распределение линейной формы $L_2 = \beta_1\xi_1 + \beta_2\xi_2$ при фиксированной $L_1 = \alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2$ симметрично, то $\mu_1, \mu_2 \in I(X)$.*

Доказательство. Переходя к новым случайным величинам $\zeta_j = \alpha_j\xi_j$, мы редуцируем доказательство теоремы к случаю, когда линейные формы L_1 и L_2 имеют вид $L_1 = \xi_1 + \xi_2$ и $L_2 = \delta_1\xi_1 + \delta_2\xi_2$, где $\delta_j \in \mathrm{Aut}(X)$. Условие $\beta_1\alpha_1^{-1} \pm \beta_2\alpha_2^{-1} \in \mathrm{Aut}(X)$ переходит в условие: $\delta_1 \pm \delta_2 \in \mathrm{Aut}(X)$. Очевидно также, что можно предполагать, что линейная форма L_2 имеет вид $L_2 = \xi_1 + \delta\xi_2$, где $\delta, I \pm \delta \in \mathrm{Aut}(X)$. Обозначим $\varepsilon = \widetilde{\delta}$. По лемме 16.1 из симметрии условного распределение линейной формы L_2 при фиксированной L_1 следует, что характеристические функции $\widehat{\mu}_j(y)$ удовлетворяют уравнению (16.24). Обозначим $f(y) = \widehat{\mu}_1(y)$, $g(y) = \widehat{\mu}_2(y)$ и перепишем уравнение (16.24), используя эти обозначения. Мы получаем

$$f(u+v)g(u+\varepsilon v) = f(u-v)g(u-\varepsilon v), \quad u, v \in Y. \tag{17.1}$$

Положим $\nu_j = \mu_j * \bar{\mu}_j$. Из 2.7($c$) и 2.7($d$) вытекает, что $\widehat{\nu}_j(y) = |\widehat{\mu}_j(y)|^2 \geq 0$, $y \in Y$. Очевидно, что характеристические функции $\widehat{\nu}_j(y)$ также удовлетворяют уравнению (16.24). Если мы докажем, что $\nu_j \in I(X)$, то из 2.7(b) и 2.7(e) будет следовать, что и $\mu_j \in I(X)$. Это дает нам возможность решать уравнение (17.1) в предположении, что $f(y) \geq 0$, $g(y) \geq 0$, $f(-y) = f(y)$, $g(-y) = g(y)$.

Мы докажем, что в этом случае $f(y) = g(y) = \widehat{m}_K(y)$, где K – некоторая подгруппа группы X. Отсюда будет следовать утверждение теоремы.

Положим $\alpha = I + \varepsilon,\ \beta = I - \varepsilon$. Из условия теоремы следует, что $\alpha, \beta \in \mathrm{Aut}(Y)$. Обозначим $\kappa = \beta\alpha^{-1}$. Полагая в (17.1) $v = -u$, мы получаем

$$g(\beta u) = f(2u)g(\alpha u), \quad u \in Y,$$

и следовательно,

$$g(\kappa u) = f(2\alpha^{-1}u)g(u), \quad u \in Y. \tag{17.2}$$

Поскольку $0 \le f(y) \le 1,\ 0 \le g(y) \le 1$, то из (17.2) вытекает, что

$$g(\kappa u) \le g(u), \quad u \in Y.$$

Так как $Y \cong X$, то Y – конечная группа, и ее группа автоморфизмов $\mathrm{Aut}(Y)$ также конечна. Отсюда следует, что $\kappa^n = I$ для некоторого натурального n. Мы будем предполагать, что n выбрано наименьшим из возможных. Мы имеем

$$g(y) = g(\kappa^n y) \le \cdots \le g(\kappa y) \le g(y), \quad y \in Y.$$

Отсюда следует, что

$$g(y) = g(\kappa y) = \cdots = g(\kappa^{n-1}y), \quad y \in Y. \tag{17.3}$$

Полагая в (17.1) $u = -\varepsilon v$ и принимая во внимание, что $f(-y) = f(y),\ g(-y) = g(y)$, мы получаем

$$f(\beta v) = f(\alpha v)g(2\varepsilon v),\ v \in Y,$$

и следовательно,

$$f(\kappa v) = f(v)g(2\varepsilon\alpha^{-1}v), \quad v \in Y. \tag{17.4}$$

Рассуждая аналогично, мы приходим к равенству

$$f(y) = f(\kappa y) = \cdots = f(\kappa^{n-1}y), \quad y \in Y. \tag{17.5}$$

Таким образом, на каждой из орбит $\{y, \kappa y, \dots, \kappa^{n-1}y\}$ функции $f(y)$ и $g(y)$ принимают постоянное значение, зависящее, вообще говоря, от y. Отметим, что при доказательстве (17.3) и (17.5) мы не использовали того, что группа не содержит элементов порядка 2.

Обозначим

$$N_f = \{y \in Y : f(y) \ne 0\}, \quad E_f = \{y \in Y : f(y) = 1\}.$$

Аналогично введем обозначения N_g и E_g. Поскольку $X \cong Y$ и по условию $X_{(2)} = \{0\}$, то и $Y_{(2)} = \{0\}$. Отсюда следует, что $f_2 \in \mathrm{Aut}(Y)$. Напомним, что для конечного множества F через $|F|$ мы обозначаем число элементов F. Из (17.2) и (17.3) следует, что если $y \in N_g$, то

$$f(2\alpha^{-1}y) = 1. \tag{17.6}$$

Из (17.6) следует, что $|N_g| \le |E_f|$. Аналогично, из (17.4) и (17.5) получаем, что если $y \in N_f$, то $g(2\varepsilon\alpha^{-1}y) = 1$. Отсюда вытекает неравенство $|N_f| \le |E_g|$. В результате получаем

$$|N_g| \le |E_f| \le |N_f|, \quad |N_f| \le |E_g| \le |N_g|.$$

Отсюда следует, что
$$|N_f| = |E_f|, \quad |N_g| = |E_g|. \tag{17.7}$$
Из (17.7) следует, что,
$$N_f = E_f, \quad N_g = E_g. \tag{17.8}$$
Из того, что $f_2 \in \mathrm{Aut}(Y)$ следует, что
$$I + \kappa = f_2\alpha^{-1} \in \mathrm{Aut}(Y). \tag{17.9}$$
Из (17.3) и (17.8) следует, что $\kappa(E_g) = E_g$. Отсюда, учитывая (17.9), получаем
$$\alpha(E_g) = E_g. \tag{17.10}$$
Из (17.6) следует, что $N_g = E_g \subset E_f$. Поэтому $E_f = E_g = E$. Итак, мы доказали, что,
$$f(y) = g(y) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad y \in E, \\ 0, & \text{если} \quad y \notin E. \end{cases}$$
Положим $K = A(X, E)$. Тогда по теореме 1.9.1 $E = A(Y, K)$ и из 2.14(i) и 2.7(b) получаем, что $\mu_1 = \mu_2 = m_K$. Отметим также, что так как $\varepsilon = \alpha - I$, то из (17.10) следует, что $\varepsilon(E) = E$. □

Из доказательства теоремы 17.1 и леммы 13.3 непосредственно вытекает следующее утверждение.

17.2. Следствие. *Пусть X – конечная группа, не содержащая элементов порядка 2. Пусть ξ_1 и ξ_2 – независимые случайные величины со значениями в группе X и с распределениями μ_1 и μ_2. Пусть δ – автоморфизм группы X такой, что $I \pm \delta \in \mathrm{Aut}(X)$. Если условное распределение линейной формы $L_2 = \xi_1 + \delta\xi_2$ при фиксированной $L_1 = \xi_1 + \xi_2$ симметрично, то $\mu_j = m_K * E_{x_j}$, где K – некоторая подгруппа группы X, а $x_j \in X$, $j = 1, 2$. Кроме того, $\delta(K) = K$.*

Для дальнейшего нам понадобится также следующее утверждение, вытекающее из доказательства теоремы 17.1.

17.3. Следствие. *Пусть Y — конечная группа, ε – автоморфизм группы Y такой, что $I \pm \varepsilon \in \mathrm{Aut}(Y)$. Положим $\kappa = (I - \varepsilon)(I + \varepsilon)^{-1}$. Если характеристические функции $f(y)$ и $g(y)$ удовлетворяют уравнению* (17.1), *то для любого $y \in Y$ выполнено: $|f(y)| = |f(\kappa y)|$, $\quad |g(y)| = |g(\kappa y)|$.*

17.4. Замечание. Рассуждение, проведенное в замечании 16.3, показывает, что утверждение теоремы 17.1 неверно, если группа X содержит элементы порядка 2.

17.5. Замечание. Условие
$$\beta_1\alpha_1^{-1} - \beta_2\alpha_2^{-1} \in \mathrm{Aut}(X) \tag{17.11}$$
в теореме 17.1 может быть опущено. Проверим это. Будем считать, что линейные формы L_1 и L_2 имеют вид $L_1 = \xi_1 + \xi_2$, $L_2 = \xi_1 + \delta\xi_2$. Тогда условие (17.11) переходит в условие: $I - \delta \in \mathrm{Aut}(X)$, которое равносильно условию $\beta \in \mathrm{Aut}(Y)$. Предположим, что $\beta \notin \mathrm{Aut}(Y)$. Поскольку группа Y

конечна, это означает, что $L = \operatorname{Ker}\beta \neq \{0\}$. Тогда при $u \in L$ мы имеем $\varepsilon u = u$ и $\alpha u = 2u$. Полагая в (17.1) $u = v \in L$, получаем

$$f(2u)g(2u) = 1, \quad u \in L. \tag{17.12}$$

Так как $f_2 \in \operatorname{Aut}(Y)$, то из (17.12) тогда следует, что $f(y) = g(y) = 1$ при всех $y \in L$. По предложению 2.13 функции $f(y)$ и $g(y)$ L-инвариантны. А значит, они индуцируют функции $\widetilde{f}([y])$ и $\widetilde{g}([y])$ на фактор-группе Y/L, а именно $\widetilde{f}([y]) = f(y),\ \widetilde{g}([y]) = g(y),\ y \in [y]$. Автоморфизм ε также индуцирует автоморфизм $\widehat{\varepsilon}$ на фактор-группе Y/L по формуле $\widehat{\varepsilon}[y] = [\varepsilon y],\ y \in [y]$. Таким образом, мы можем рассмотреть уравнение (17.1) на фактор-группе Y/L. Если индуцированный автоморфизм $\widehat{\varepsilon}$ снова удовлетворяет условию $\widehat{\beta} \notin \operatorname{Aut}(Y/L)$, мы повторим эту процедуру, пока не получим автоморфизм $\widehat{\varepsilon}$ для которого $\widehat{\beta} \in \operatorname{Aut}(Y/L)$. После чего мы можем применить теорему 17.1 и вернуться к исходным распределениям.

Нам понадобится также следующее утверждение, относящееся к произвольным группам X.

17.6. Предложение. *Пусть ξ_1 и ξ_2 – независимые одинаково распределенные случайные величины со значениями в группе X, имеющие распределение m_K, где K – компактная подгруппа группы X. Пусть δ – топологический автоморфизм группы X такой, что $I \pm \delta \in \operatorname{Aut}(X)$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(i) условное распределение линейной формы $L_2 = \xi_1 + \delta\xi_2$ при фиксированной $L_1 = \xi_1 + \xi_2$ симметрично;

(ii) $\gamma(K) \supset K$, где $\gamma = (I + \delta)^{-1}(I - \delta)$.

Доказательство. Мы сохраним обозначения, использованные при доказательстве теоремы 17.1. Положим $L = A(Y, K)$. Заметим, что $\kappa = \widetilde{\gamma}$.

$(i) \Rightarrow (ii)$. По лемме 16.1 условное распределение линейной формы L_2 при фиксированной L_1 симметрично тогда и только тогда, когда характеристическая функция $f(y) = \widehat{m}_K(y)$ удовлетворяет уравнению (16.24), которое принимает вид

$$f(u + v)f(u + \varepsilon v) = f(u - v)f(u - \varepsilon v), \quad u, v \in Y. \tag{17.13}$$

Полагая в (17.13) $u = v$, получаем, что $f(2u)f(\alpha u) = f(\beta u),\ u \in Y$. Отсюда вытекает, что

$$f(\kappa u) = f(2\alpha^{-1}u)f(u), \quad u \in Y. \tag{17.14}$$

Поэтому, если $\kappa y \in L$, то $y \in L$. Тогда по лемме 13.2 $\gamma(K) \supset K$, т.е. выполнено (ii).

$(ii) \Rightarrow (i)$. Проверим, что характеристическая функция $f(y)$ удовлетворяет уравнению (17.13). Пусть при некоторых $u, v \in Y$ левая часть уравнения (17.13) равна 1. Отсюда следует, что

$$u + v \in L, \quad u + \varepsilon v \in L, \tag{17.15}$$

и поэтому $\beta v = (I - \varepsilon)v \in L$. Поскольку $\beta v = \kappa\alpha v$, то по лемме 13.2

$$\alpha v = (I + \varepsilon)v \in L. \tag{17.16}$$

Из (17.15) и (17.16) вытекает, что $u - v \in L,\ u - \varepsilon v \in L$. Следовательно, правая часть уравнения (17.13) также равна 1. Аналогично проверяем, что если правая часть уравнения (17.13) равна 1 для некоторых $u, v \in Y$, то и левая часть уравнения (17.13) равна 1. Таким образом, мы доказали, что характеристическая функция $f(y) = \widehat{m}_K(y)$ удовлетворяет уравнению (17.13). Следовательно, по лемме 16.1 условное распределение линейной формы L_2 при фиксированной L_1 симетрично. $\square$

Заметим, что в доказательстве теоремы 17.1 мы предполагали, что существуют автоморфизмы $\alpha_j, \beta_j,\ j = 1, 2$, группы X такие, что $\beta_1\alpha_1^{-1} \pm \beta_2\alpha_2^{-1} \in \mathrm{Aut}(X)$. Опишем сейчас конечные группы, обладающие этим свойством. Мы используем затем полученное описание при доказательстве теоремы Хейде для произвольного числа случайных величин. Ясно, что достаточно выяснить, когда существует автоморфизм $\delta \in \mathrm{Aut}(X)$ такой, что $I \pm \delta \in \mathrm{Aut}(X)$.

17.7. Предложение. *Пусть X – конечная группа. Представим X в виде прямого произведения своих p-компонент:*

$$X = \mathop{\mathbf{P}}_{p\in\mathcal{P}} X_p.$$

Тогда следующие утверждения эквивалентны:

(i) существует автоморфизм $\delta \in \mathrm{Aut}(X)$ такой, что $I \pm \delta \in \mathrm{Aut}(X)$;

(ii) при $p = 2$ и при $p = 3$ либо $X_p = \{0\}$, либо разложение X_p в прямое произведение циклических подгрупп содержит каждый циклический множитель с кратностью не меньше, чем два.

Доказательство. Заметим, что каждая p-компонента X_p является характеристической подгруппой группы X. Ясно, что (i) выполнено тогда и только тогда, когда для каждого простого p такого, что $X_p \neq \{0\}$, существует автоморфизм $\delta \in \mathrm{Aut}(X_p)$ такой, что

$$I \pm \delta \in \mathrm{Aut}(X_p). \tag{17.17}$$

Если $X_p \neq \{0\}$ и $p > 3$, то положим $\delta = f_2$. Тогда $\delta,\ I \pm \delta \in \mathrm{Aut}(X_p)$. Таким образом, нужно доказать эквивалентность (i) и (ii) для групп X_p при $p = 2,\ p = 3$. Мы ограничимся рассмотрением группы X_3. Рассуждения для группы X_2 аналогичны.

$(i) \Rightarrow (ii)$. Обозначим $K = X_3$. По теореме 1.20.4 имеет место изоморфизм

$$K \cong \mathop{\mathbf{P}}_{j} (\mathbb{Z}(3^{k_j}))^{n_j}, \quad k_j < k_{j+1}. \tag{17.18}$$

При этом числа k_j и n_j однозначно определяются группой K. Мы докажем, что существует автоморфизм $\delta \in \mathrm{Aut}(K)$ такой, что $I \pm \delta \in \mathrm{Aut}(K)$, тогда и только тогда, когда в (17.18) все $n_j \geq 2$. Заметим, что для любого натурального n подгруппы $K_{(n)}$ и $K^{(n)}$ характеристические. Следовательно, подгруппы $H_j = K^{(3^{k_j-1})} \cap K_{(3)}$ – также характеристические. Поэтому любой автоморфизм $\alpha \in \mathrm{Aut}(K)$ индуцирует некоторый автоморфизм $\widehat{\alpha}$ на фактор-группе H_{j_0}/H_{j_0+1}. Предположим, что $n_{j_0} = 1$ при некотором j_0. Тогда, как легко видеть, фактор-группа $H_{j_0}/H_{j_0+1} \cong \mathbb{Z}(3)$. Поэтому, если $\delta, I \pm \delta \in \mathrm{Aut}(K)$, то $\widehat{\delta},\ I \pm \widehat{\delta} \in \mathrm{Aut}(H_{j_0}/H_{j_0+1})$. Учитывая, что на группе $\mathbb{Z}(3)$ есть лишь два автоморфизма $\pm I$, мы получаем противоречие. Мы доказали, таким образом, что из (i) следует (ii).

$(ii) \Rightarrow (i)$. Обозначим $G_1 = (\mathbb{Z}(3^r))^2$ и положим

$$\delta_1(k, l) = (k + l, k),\ k, l \in \mathbb{Z}(3^r).$$

Очевидно, что δ_1 автоморфизм группы G_1 и $I \pm \delta_1 \in \mathrm{Aut}(G_1)$. Для группы $G_2 = (Z(3^r))^3$ мы положим

$$\delta_2(k,l,m) = (k+l+m, k+l, k), \ k,l,m \in \mathbb{Z}(3^r).$$

Тогда $\delta_2, \ I \pm \delta_2 \in \mathrm{Aut}(G_2)$. Если в (17.18) все $n_j \geq 2$, то группа K есть конечное прямое произведение групп, каждая из которых либо изоморфна G_1, либо изоморфна G_2. Автоморфизм $\delta \in \mathrm{Aut}(X)$ может быть построен тогда, как конечное прямое произведение автоморфизмов δ_1 и δ_2. $\square$

Предположим теперь, что конечная группа X содержит элементы порядка 2 и опишем распределения, которые характеризуются симметрией условного распределения одной линейной формы при фиксированной другой.

17.8. Теорема. *Пусть X – конечная группа, X_2 – 2-компонента группы X. Пусть ξ_1 и ξ_2 – независимые случайные величины со значениями в группе X и с распределениями μ_1 и μ_2. Пусть α_j, β_j – автоморфизмы группы X такие, что $\beta_1\alpha_1^{-1} \pm \beta_2\alpha_2^{-1} \in \mathrm{Aut}(X)$. Если условное распределение линейной формы $L_2 = \beta_1\xi_1 + \beta_2\xi_2$ при фиксированной $L_1 = \alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2$ симметрично, то $\mu_j = \rho_j * \pi_j$, где $\sigma(\rho_j) \subset X_2, \ \pi_j \in I(X), \ j = 1, 2$.*

Доказательство. Рассуждая так же, как при доказательстве теоремы 17.1, мы сводим доказательство теоремы к случаю, когда линейные формы L_1 и L_2 имеют вид $L_1 = \xi_1+\xi_2, \ L_2 = \xi_1+\delta\xi_2$, где $\delta, I \pm \delta \in \mathrm{Aut}(X)$. По лемме 16.1 из симметрии условного распределение линейной формы L_2 при фиксированной L_1 следует, что характеристические функции $\widehat{\mu}_j(y)$ удовлетворяют уравнению 16.1(i).

Разложим группу X в прямое произведение своих p-компонент:

$$X = \mathop{\mathbf{P}}_{p\in\mathcal{P}} X_p.$$

Обозначим

$$G = X_2, \quad K = \mathop{\mathbf{P}}_{p\in\mathcal{P}, \ p>2} X_p.$$

Тогда $X = G \times K$. Если $G = \{0\}$, то утверждение теоремы следует из теоремы 17.1. Предположим, что $G \neq \{0\}$. По теореме 1.7.1 $Y \cong H \times L$, где $H = G^*, \ L = K^*$. Чтобы не вводить дополнительных обозначений, будем считать, что $Y = H \times L$. Обозначим через $y = (h, l), \ h \in H, \ l \in L$, элементы группы Y. Так как подгруппы H и L, очевидно, характеристические, то ограничение любого автоморфизма $\tau \in \mathrm{Aut(Y)}$ на каждую из подгрупп H и L является автоморфизмом этой подгруппы. Обозначим эти автоморфизмы через τ_H и τ_L соответственно. Тогда автоморфизм τ может быть записан в виде $\tau(h,l) = (\tau_H h, \tau_L l), \ (h,l) \in Y$.

Обозначим $\widetilde{\delta} = \varepsilon, \ \alpha = I + \varepsilon, \ \ \beta = I - \varepsilon, \ \widehat{\mu}_1(y) = f(y), \ \widehat{\mu}_2(y) = g(y)$ и перепишем уравнение 16.1(i) в виде:

$$f(h+h', l+l')g(h+\varepsilon_H h', l+\varepsilon_L l')$$
$$= f(h-h', l-l')g(h-\varepsilon_H h', l-\varepsilon_L l'), \quad (h,l),(h',l') \in Y. \qquad (17.19)$$

Подставляя в (17.19) $h = h' = 0$, получаем

$$f(0, l+l')g(0, l+\varepsilon_L l') = f(0, l-l')g(0, l-\varepsilon_L l'), \quad l,l' \in L. \qquad (17.20)$$

Так как группа K не содержит элементов порядка 2, то по следствию 17.2 каждое решение уравнения (17.20) имеет вид

$$f(0,l) = (k_1, l)\widehat{m}_F(l), \quad g(0,l) = (k_2, l)\widehat{m}_F(l), \quad l \in L, \tag{17.21}$$

где F — подгруппа группы K, и $k_j \in K$. Обозначим $E = A(L, F)$. Подставляя (17.21) в (17.20), получаем, что $2(k_1 + \delta k_2) \in F$, а поскольку $K_{(2)} = \{0\}$, то и $k_1 + \delta k_2 \in F$. Положим $k = k_1 + \delta k_2$. Ясно, что представление (17.21) не изменится, если в (17.21) вместо k_1 положить $k_1' = k_1 - k$. Но тогда $k_1' + \delta k_2 = 0$. В таком случае, как легко видеть, характеристические функции $(-k_1', l)$ и $(-k_2, l)$ удовлетворяют уравнению (17.20). Рассмотрим распределения $\mu_1' = \mu_1 * E_{-k_1'}$ и $\mu_2' = \mu_2 * E_{-k_2}$. Обозначим $f'(y) = \widehat{\mu}_1'(y)$, $g'(y) = \widehat{\mu}_2'(y)$. Из 2.7$(c)$ вытекает, что характеристические функции $f'(y)$ и $g'(y)$ также удовлетворяют уравнению (17.19).

Обозначим $B = L/E$. Мы имеем $Y/E \cong H \times B$. Чтобы не вводить дополнительных обозначений, мы будем считать, что $Y/E = H \times B$ и обозначать элементы фактор-группы Y/E через (h, b), $h \in H$, $b \in B$.

По теореме 1.9.2 $F^* \cong B$, а тогда $(G \times F)^* \cong Y/E$. Учитывая 2.14(i) и 2.7(c), из (17.21) получаем

$$f'(0,h) = g'(0,h) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad l \in E, \\ 0, & \text{если} \quad l \notin E. \end{cases} \tag{17.22}$$

По предложению 2.13 из (17.22) следует, что характеристические функции $f'(y)$ и $g'(y)$ E-инвариантны. Очевидно, что подгруппа K характеристическая. Рассмотрим независимые случайные величины ζ_1 и ζ_2, со значениями в группе K и с распределениями $m_F * E_{k_1}$ и $m_F * E_{k_2}$. По лемме 16.1 из (17.20) следует, что условное распределение линейной формы $L_2 = \zeta_1 + \delta\zeta_2$ при фиксированной $L_1 = \zeta_1 + \zeta_2$ симметрично. Поскольку $f_2 \in \mathrm{Aut}(K)$, то из леммы 13.3 и следствия 17.2, примененных к группе K, вытекает, что выполнено $\varepsilon(E) = E$. Это позволяет перейти от уравнения (17.19) для функций $f'(y)$ и $g'(y)$ на группе Y к индуцированному уравнению на фактор-группе Y/E, полагая $\widetilde{f}([y]) = f'(y)$, $\widetilde{g}([y]) = g'(y)$, $\widehat{\varepsilon}[y] = [\varepsilon y]$. При этом $\widehat{\varepsilon} \in \mathrm{Aut}(Y/E)$. Очевидно, что ограничение автоморфизма $\widehat{\varepsilon} \in \mathrm{Aut}(Y/E)$ на B является автоморфизмом группы B. Обозначим это ограничение через $\widehat{\varepsilon}_B$. Очевидно, что, автоморфизм $\widehat{\varepsilon} \in \mathrm{Aut}(Y/E)$ имеет вид $\widehat{\varepsilon}(h, b) = (\varepsilon_H h, \widehat{\varepsilon}_B b)$. Сказанное означает, что мы переходим от рассмотрения случайных величин со значениями в группе $X = G \times K$ к случайным величинам со значениями в подгруппе $G \times F$. Отметим, что для решений индуцированного уравнения выполнено

$$\{b \in B : \widetilde{f}(0, b) = 1\} = \{b \in B : \widetilde{g}(0, b) = 1\} = \{0\}.$$

Мы имеем

$$\widetilde{f}(0,b) = \widetilde{g}(0,b) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad b = 0, \\ 0, & \text{если} \quad b \neq 0. \end{cases} \tag{17.23}$$

Рассмотрим уравнение (17.19) для характеристических функций $\widetilde{f}(s, b)$ и $\widetilde{g}(s, b)$ на фактор-группе $Y/E \cong H \times B$. Имеем

$$\widetilde{f}(h + h', b + b')\widetilde{g}(h + \varepsilon_H h', b + \widehat{\varepsilon}_B b')$$
$$= \widetilde{f}(h - h', b - b')\widetilde{g}(h - \varepsilon_H h', b - \widehat{\varepsilon}_B b'), \quad (h, b), (h', b') \in H \times B. \tag{17.24}$$

Заметим также, что из $\varepsilon(E) = E$ следует, что $\alpha(E) \subset E$. Поскольку $\alpha \in \mathrm{Aut}(Y)$ и группа E конечна, то $\alpha(E) = E$. Отсюда, $\widehat{\alpha} \in \mathrm{Aut}(Y/E)$. Полагая в (17.24) $h = \widehat{\alpha}^{-1}u,\ h' = -\widehat{\alpha}^{-1}u,\ b = \widehat{\alpha}^{-1}v,\ b' = -\widehat{\alpha}^{-1}v$, где $u \in H, v \in B$, получим

$$\widetilde{g}(\kappa u, \kappa v) = \widetilde{f}(2\widehat{\alpha}^{-1}u, 2\widehat{\alpha}^{-1}v)\widetilde{g}(u, v), \tag{17.25}$$

где $\kappa = \widehat{\beta}\widehat{\alpha}^{-1}$. Предположим, что существует элемент $(h_0, b_0) \in H \times B,\ b_0 \neq 0$, такой, что $\widetilde{g}(h_0, b_0) \neq 0$. Тогда по следствию 17.3 $|\widetilde{g}(\kappa h_0, \kappa b_0)| = |\widetilde{g}(h_0, b_0)| \neq 0$, и из (17.25) следует, что

$$|\widetilde{f}(2\widehat{\alpha}^{-1}h_0, 2\widehat{\alpha}^{-1}b_0)| = 1. \tag{17.26}$$

Из предложения 2.13 следует, что подмножество в Y, на котором модуль характеристической функции равен 1, является подгруппой. Учитывая это, из (17.26) следует, что при любом натуральном k выполнено $|\widetilde{f}(2^k\widehat{\alpha}^{-1}h_0, 2^k\widehat{\alpha}^{-1}b_0)| = 1$. Поскольку G – 2-примарная группа, то и H – 2-примарная группа. Заметим теперь, что если h_0 — элемент порядка 2^m, то $2^m\widehat{\alpha}^{-1}h_0 = 0$. Следовательно,

$$|\widetilde{f}(0, 2^m\widehat{\alpha}^{-1}b_0)| = 1.$$

С другой стороны , так как подгруппа B не содержит элементов порядка 2, а $\widehat{\alpha}^{-1} \in \mathrm{Aut}(Y/E)$, то $2^m\alpha^{-1}b_0 \neq 0$, что противоречит (17.23). Таким образом, мы доказали, что $\widetilde{g}(h, b) = 0$, если $b \neq 0$. Следовательно, характеристическая функция $\widetilde{g}(h, b)$ представима в виде

$$\widetilde{g}(h, b) = \begin{cases} g_0(h), & \text{если} \quad b = 0, \\ 0, & \text{если} \quad b \neq 0, \end{cases}$$

где $g_0(h) = \widetilde{g}(h, 0)$. Следовательно, $\widetilde{g}(h, b) = g_0(h)\widehat{m}_F(b),\ (h, b) \in H \times B$. Функция $g_0(h)$ является характеристической функцией некоторого распределения ρ_2 такого, что $\sigma(\rho_2) \subset G$. Из 2.7(b) и 2.7(c) вытекает, что $\mu_2' = \rho_2 * m_F$. Отсюда, $\mu_2 = \rho_2 * \pi_2 * E_{k_2}$. Аналогично рассуждаем для распределения μ_1. □

Из доказательства теоремы 17.8 вытекает следующее утверждение.

17.9. Следствие. *Пусть X – конечная группа, X_p – p-компонента группы X. Положим*

$$G = X_2, \quad K = \mathop{\mathbf{P}}_{p \in \mathcal{P},\ p>2} X_p.$$

Пусть ξ_1 и ξ_2 – независимые случайные величины со значениями в группе X и с распределениями μ_1 и μ_2. Пусть δ – автоморфизм группы X такой, что $I \pm \delta \in \mathrm{Aut}(X)$. Если условное распределение линейной формы $L_2 = \xi_1 + \delta\xi_2$ при фиксированной $L_1 = \xi_1 + \xi_2$ симметрично, то $\mu_j = \rho_j * m_F * E_{x_j}$, где $\sigma(\rho_j) \subset G,\ F$ – подгруппа в $K,\ x_j \in K,\ j = 1, 2$. При этом характеристические функции распределений $\mu_j' = \mu_j * E_{-x_j}$ также удовлетворяют уравнению (16.24).

17.10. Пусть X — конечная 2-примарная группа. Пусть δ – автоморфизм группы X такой, что $I \pm \delta \in \mathrm{Aut}(X)$. Обозначим $\varepsilon = \widetilde{\delta}$. Обсудим следующую задачу. Какими могут быть возможные распределения μ_1 и μ_2 независимых случайных величин ξ_1 и ξ_2 со значениями в группе X в предположении, что условное распределение линейной формы $L_2 = \xi_1 + \delta\xi_2$ при фиксированной

$L_1 = \xi_1 + \xi_2$ симметрично? Учитывая лемму 16.1, этот вопрос можно переформулировать следующим образом. Для каких распределений μ_j их характеристические функции $\widehat{\mu}_j(y)$ удовлетворяют уравнению (16.24)?

Соответствующие идемпотентные распределения μ_j, при условии $\mu_1 = \mu_2 = m_K$, описаны в предложении 17.6. Кроме того, как отмечено в замечании 16.3, если μ_j – произвольные распределения, такие что $\sigma(\mu_j) \subset X_{(2)}$, то распределения μ_j также являются решением этой задачи. В предположении, что $X_2 \neq X_{(2)}$, можно указать еще один класс распределений μ_j таких, что характеристические функции $\widehat{\mu}_j(y)$ удовлетворяют уравнению (16.24). Это распределения μ_j, инвариантные относительно сдвигов на элементы подгруппы $X^{(2)}$. Проверим это. Учитывая теорему 1.9.5, легко видеть, что характеристические функции $\widehat{\mu}_j(y)$ таких распределений имеют вид:

$$\widehat{\mu}_1(y) = \begin{cases} f_0(y), & \text{если} \ \ y \in Y_{(2)}, \\ 0, & \text{если} \ \ y \notin Y_{(2)}, \end{cases} \qquad \widehat{\mu}_2(y) = \begin{cases} g_0(y), & \text{если} \ \ y \in Y_{(2)}, \\ 0, & \text{если} \ \ y \notin Y_{(2)}, \end{cases}$$

где $f_0(y)$ и $g_0(y)$ — произвольные характеристические функции на подгруппе $Y_{(2)}$. Проверим, что характеристические функции $\widehat{\mu}_j(y)$ удовлетворяют уравнению (16.24).

Пусть $u, v \in Y_{(2)}$. Тогда $u + v = u - v$, $u + \varepsilon v = u - \varepsilon v$. Следовательно, $\widehat{\mu}_1(u+v) = \widehat{\mu}_1(u-v)$, $\widehat{\mu}_2(u+\varepsilon v) = \widehat{\mu}_2(u-\varepsilon v)$, и уравнение (16.24) превращается в равенство. Пусть либо $u \in Y_{(2)}$, $v \notin Y_{(2)}$, либо $u \notin Y_{(2)}$, $v \in Y_{(2)}$. Тогда $u \pm v \notin Y_{(2)}$. Поэтому $\widehat{\mu}_1(u \pm v) = 0$, и обе части уравнения (16.24) равны нулю. Если $u, v \notin Y_{(2)}$, то левая часть уравнения (16.24) может не обращаться в нуль лишь при условии, что $u+v \in Y_{(2)}, u+\varepsilon v \in Y_{(2)}$. Отсюда следует, что $(I-\varepsilon)v \in Y_{(2)}$, а значит и $v \in Y_{(2)}$, что противоречит предположению. Значит, левая часть уравнения (16.24) обращается в нуль при $u, v \notin Y_{(2)}$. Аналогично проверяем, что правая часть уравнения (16.24) также обращается в нуль при $u, v \notin Y_{(2)}$. Таким образом, характеристические функции $\widehat{\mu}_j(y)$ удовлетворяют уравнению (16.24).

Итак, если $X_2 \neq X_{(2)}$, то существует три различных класса распределений μ_j таких, что характеристические функции $\widehat{\mu}_j(y)$ удовлетворяют уравнению (16.24):

(I) идемпотентные распределения;

(II) распределения с носителем в $X_{(2)}$;

(III) распределения, инвариантные относительно сдвигов на элементы $X^{(2)}$.

Очевидно, что, если характеристические функции распределений μ_1 и μ_2 удовлетворяют уравнению (16.24) и характеристические функции распределений ν_1 и ν_2 также обладают этим свойством, то в силу 2.7(c), распределения $\gamma_1 = \mu_1 * \nu_1$ и $\gamma_2 = \mu_2 * \nu_2$ также обладают этим свойством. Оказывается, что если $X_2 \neq X_{(2)}$, то на X существуют распределения μ_1, μ_2, не принадлежащие ни к одному из классов (I)–(III), не являющиеся свертками распределений из этих классов, но характеристические функции которых удовлетворяют уравнению (16.24). Эта ситуация противоположна случаю, когда $X_2 = \{0\}$, поскольку на таких группах лишь характеристические функции идемпотентных распределений удовлетворяют уравнению (16.24) (см. теорему 17.1). Нам понадобится следующая лемма.

17.11. Лемма. *Для каждой из групп $X = (\mathbb{Z}(4))^2$ и $X = (\mathbb{Z}(4))^3$ существуют независимые случайные величины ξ_1 и ξ_2 со значениями в группе X и с распределениями μ_1 и μ_2 и автоморфизм $\delta \in \mathrm{Aut}(X)$, обладающие тем свойством, что $I \pm \delta \in \mathrm{Aut}(X)$ и условное распределение* *линейной формы $L_2 = \xi_1 + \delta\xi_2$ при фиксированной $L_1 = \xi_1 + \xi_2$ симметрично, а распределения μ_j не могут быть представлены в виде сверток распределений из классов (I)–(III), определенных в* 17.10.

Доказательство. Пусть $X = (\mathbb{Z}(4))^2$. Тогда $Y \cong (\mathbb{Z}(4))^2$. Обозначим через $x = (m, n)$ элементы группы X, а через $y = (k, l)$ элементы группы Y, где $m, n, k, l \in \mathbb{Z}(4)$. Пусть автоморфизм $\delta \in \mathrm{Aut}(X)$ имеет вид $\delta(m, n) = (m + n, m)$. Положим $\varepsilon = \widetilde{\delta}$. Тогда $\varepsilon(k, l) = (k + l, k)$. Очевидно, что $I \pm \delta \in \mathrm{Aut}(X)$. Пусть ξ_1 и ξ_2 — независимые случайные величины со значениями в группе X и с распределениями

$$\mu_1 = am_{K_1} + (1 - a)m_F, \quad \mu_2 = am_{K_2} + (1 - a)m_F,$$

где $K_1 = \{(0, 0), (0, 2)\}$, $K_2 = \{(0, 0), (2, 2)\}$, $F = \{X_{(2)}, (1, 0) + X_{(2)}\}$, а $0 < a < 1$. Легко видеть, что

$$A(Y, K_1) = \{Y_{(2)}, (1, 0) + Y_{(2)}\}, \quad A(Y, K_2) = \{Y_{(2)}, (1, 1) + Y_{(2)}\}, \quad A(Y, F) = \{(0, 0), (0, 2)\},$$

а следовательно, характеристические функции $f(y) = \widehat{\mu}_1(y)$, $g(y) = \widehat{\mu}_2(y)$ имеют вид

$$f(y) = \begin{cases} 1, \text{ если } y \in \{(0, 0), (0, 2)\}, \\ a, \text{ если } y \in \{(2, 0), (2, 2), (1, 0) + Y_{(2)}\}, \\ 0, \text{ если } y \in \{(1, 1) + Y_{(2)}, (0, 1) + Y_{(2)}\}, \end{cases}$$

$$g(y) = \begin{cases} 1, \text{ если } y \in \{(0, 0), (0, 2)\}, \\ a, \text{ если } y \in \{(2, 0), (2, 2), (1, 1) + Y_{(2)}\}, \\ 0, \text{ если } y \in \{(1, 0) + Y_{(2)}, (0, 1) + Y_{(2)}\}. \end{cases}$$

Проверим, что характеристические функции $f(y)$ и $g(y)$ удовлетворяют уравнению (17.1). Легко видеть, что для любых $u, v \in Y$ либо $u \pm v \in Y_{(2)}$, либо $u \pm v \notin Y_{(2)}$. Поэтому возможны следующие случаи:

1. $u \pm v$, $u \pm \varepsilon v \in Y_{(2)}$. Отсюда следует, что $(I - \varepsilon)v \in Y_{(2)}$, а значит и $u, v \in Y_{(2)}$. Тогда $u + v = u - v$, $u + \varepsilon v = u - \varepsilon v$, и уравнение (17.1) превращается в равенство.

2. $u \pm v \in Y_{(2)}$, $u \pm \varepsilon v \notin Y_{(2)}$. Так как $u \pm v \in Y_{(2)}$, то возможны следующие случаи:

A. $u, v \in (1, 0) + Y_{(2)}$. Тогда $\varepsilon v \in (1, 1) + Y_{(2)}$, и $g(u \pm \varepsilon v) = 0$. Следовательно, обе части уравнения (17.1) равны нулю.

B. $u, v \in (1, 1) + Y_{(2)}$. Тогда $\varepsilon v \in (0, 1) + Y_{(2)}$, и $g(u \pm \varepsilon v) = 0$. Следовательно, обе части уравнения (17.1) равны нулю.

C. $u, v \in (0, 1) + Y_{(2)}$. Тогда $\varepsilon v \in (1, 0) + Y_{(2)}$, и $g(u + \varepsilon v) = g(u - \varepsilon v) = a \neq 0$. Поэтому левая часть уравнения (17.1) будет не равна правой, если либо $u + v \in \{(0, 0), (0, 2)\}$, $u - v \in \{(2, 0), (2, 2)\}$, либо $u - v \in \{(0, 0), (0, 2)\}$, $u + v \in \{(2, 0), (2, 2)\}$. В каждом из этих случаев $2u \in \{(2, 0), (2, 2)\}$, а значит, $u \in \{(1, 0) + Y_{(2)}, (1, 1) + Y_{(2)}\}$, что противоречит предположению. Таким образом, левая и правая части уравнения (17.1) равны.

3. $u \pm v \notin Y_{(2)}$, $u \pm \varepsilon v \in Y_{(2)}$. Так как $u \pm \varepsilon v \in Y_{(2)}$, то возможны следующие случаи:

A. $u \in (1, 0) + Y_{(2)}$, $v \in (0, 1) + Y_{(2)}$. Тогда $f(u \pm v) = 0$. Следовательно, обе части уравнения (17.1) равны нулю.

B. $u \in (1,1)+Y_{(2)},\ v \in (1,0)+Y_{(2)}$. Тогда $f(u \pm v) = 0$. Следовательно, обе части уравнения (17.1) равны нулю.

C. $u \in (0,1)+Y_{(2)}, v \in (1,1)+Y_{(2)}$. Тогда $f(u+v) = f(u-v) = a \neq 0$. Поэтому левая часть уравнения (17.1) будет не равна правой, если либо $u+\varepsilon v \in \{(0,0),(0,2)\},\ u-\varepsilon v \in \{(2,0),(2,2)\}$, либо $u-\varepsilon v \in \{(0,0),(0,2)\},\ u+\varepsilon v \in \{(2,0),(2,2)\}$. В каждом из этих случаев $2u \in \{(2,0),(2,2)\}$, а значит, $u \in \{(1,0)+Y_{(2)},(1,1)+Y_{(2)}\}$, что противоречит предположению. Таким образом, левая и правая части уравнения (17.1) равны.

4. $u \pm v \notin Y_{(2)},\ u \pm \varepsilon v \notin Y_{(2)}$. Поскольку $u+v = u-v+2v$, то элементы $u+v$ и $u-v$ одновременно принадлежат или классу смежности $(1,0)+Y_{(2)}$, или классу смежности $(0,1)+Y_{(2)}$, или классу смежности $(1,1)+Y_{(2)}$. Следовательно, $f(u+v) = f(u-v),\ g(u+\varepsilon v) = g(u-\varepsilon v)$, и уравнение (17.1) превращается в равенство.

Проверим, что функции $f(y)$ и $g(y)$ нельзя представить в виде произведения характеристических функций распределений из классов (I)–(III). Покажем это для функции $f(y)$. Предположим, что $f(y) = f_1(y)f_2(y)f_3(y)$, где $f_j(y)$ — характеристическая функция соответствующего распределения. Множитель $f_3(y)$ в этом произведении должен отсутствовать, так как существуют элементы $y \notin Y_{(2)}$ такие, что $f(y) \neq 0$. Итак, $f(y) = f_1(y)f_2(y)$. Предположим, что в этом представлении присутствуют оба множителя. Если $y \in Y^{(2)}$, то $f_2(y) = 1$. Но функция $f_1(y)$ равна по модулю либо 0, либо 1. Значит при любом $y \in Y^{(2)}$ функция $f(y)$ равна по модулю либо 0, либо 1. Но это не так. Значит, либо $f(y) = f_1(y)$, либо $f(y) = f_2(y)$, что, очевидно, невозможно. Аналогично проводим доказательство для функции $g(y)$. Учитывая лемму 16.1, лемма для группы $X = (\mathbb{Z}(4))^2$ доказана.

Пусть $X = (\mathbb{Z}(4))^3$. Обозначим через (m,n,p) элементы группы X, $m,n,p \in \mathbb{Z}(4)$. Пусть автоморфизм $\delta \in \mathrm{Aut}(X)$ имеет вид $\delta(m,n,p) = (m+n+p, m+n, m)$. Очевидно, что $I \pm \delta \in \mathrm{Aut}(X)$. Пусть ξ_1 и ξ_2 — независимые случайные величины со значениями в группе X и с распределениями

$$\mu_1 = am_{K_1} + (1-a)m_F, \quad \mu_2 = am_{K_2} + (1-a)m_F,$$

где $K_1 = \{(0,0,0),(0,2,2)\}$, $K_2 = \{(0,0,0),(2,0,0)\}$, $F = \{Y_{(2)},(0,0,1)+Y_{(2)}\}$, а $0 < a < 1$. Дальнейшие рассуждения следуют схеме доказательства леммы для группы $X = (\mathbb{Z}(4))^2$, но требует рассмотрения большего числа случаев, и мы его опустим. □

17.12. Теорема. *Пусть X — конечная 2-примарная группа, удовлетворяющая условиям:*

(i) $X \neq X_{(2)}$;

(ii) *разложение группы X в прямое произведение циклических подгрупп содержит каждый циклический множитель с кратностью не меньше, чем два.*

Тогда существуют автоморфизм $\bar{\delta} \in \mathrm{Aut}(X)$ такой, что $I \pm \bar{\delta} \in \mathrm{Aut}(X)$, и независимые случайные величины ξ_1 и ξ_2 со значениями в группе X и с распределениями μ_1 и μ_2 такие, что условное распределение линейной формы $L_2 = \xi_1 + \bar{\delta}\xi_2$ при фиксированной $L_1 = \xi_1 + \xi_2$ симметрично, а распределения μ_j не могут быть представлены в виде сверток распределений классов (I) – (III), *определенных в* 17.10.

Доказательство. Поскольку группа $X \neq X_{(2)}$ и X удовлетворяет условию (ii), то группу X можно представит в виде $X = G \times K$, где $G \cong (\mathbb{Z}(2^l))^r,\ l \geq 2$, причем либо $r = 2$, либо $r = 3$, а подгруппа K также удовлетворяет условию (ii). Пусть для определенности $r = 2$. Обозначим через $(m,n),\ m,n\in\mathbb{Z}(2^l)$, элементы подгруппы G. Пусть автоморфизм $\delta\in\mathrm{Aut}(G)$ имеет вид $\delta(m,n)=(m+n,m)$. Тогда $I\pm\delta\in\mathrm{Aut}(G)$. Пусть F – подгруппа в G такая, что $F\cong(\mathbb{Z}(4))^2$. Очевидно, что ограничение δ на F – автоморфизм F. Как доказано в лемме 17.11, для так заданного автоморфизма δ на F существуют независимые случайные величины ξ_1 и ξ_2 со значениями в F и с распределениями μ_1 и μ_2 такие, что условное распределение линейной формы $L_2=\xi_1+\delta\xi_2$ при фиксированной $L_1=\xi_1+\xi_2$ симметрично, а распределения μ_j не могут быть представлены в виде сверток распределений из классов (I)–(III), определенных в 17.10. Продолжим автоморфизм δ до автоморфизма $\bar\delta\in\mathrm{Aut}(X)$ таким образом, чтобы $I\pm\bar\delta\in\mathrm{Aut}(X)$. Это можно сделать, потому что подгруппа K также удовлетворяет условию (ii). Тогда случайные величины ξ_1 и ξ_2 можно считать принимающими значения во всей группе X. Очевидно, что условное распределение линейной формы $L_2=\xi_1+\bar\delta\xi_2$ при фиксированной $L_1=\xi_1+\xi_2$ симметрично, а распределения μ_j не могут быть представлены в виде сверток распределений классов (I) – (III).

Аналогично рассуждаем, когда $G\cong(\mathbb{Z}(2^l))^3$. В этом случае полагаем $\delta(m,n,p)=(m+n+p,m+n,m),\ m,n,p\in\mathbb{Z}(2^l)$. $\square$

Пусть $X=\mathbb{R}\times N$, где N — конечная абелева группа. Опишем для этой группы распределения, которые характеризуются симметрией условного распределения одной линейной формы при фиксированной другой. Нам понадобится следующая лемма.

17.13. Лемма. *Пусть $X=\mathbb{R}\times G$, где G — конечная 2-примарная группа. Пусть ξ_1 и ξ_2 — независимые случайные величины со значениями в группе X и с распределениями μ_1 и μ_2. Пусть α_j,β_j – топологические автоморфизмы группы X такие, что $\beta_1\alpha_1^{-1}\pm\beta_2\alpha_2^{-1}\in\mathrm{Aut}(X)$. Если условное распределение линейной формы $L_2=\beta_1\xi_1+\beta_2\xi_2$ при фиксированной $L_1=\alpha_1\xi_1+\alpha_2\xi_2$ симметрично, то $\mu_j=\gamma_j*\rho_j$, где $\gamma_j\in\Gamma(\mathbb{R}),\ \sigma(\rho_j)\subset G,\ j=1,2$.*

Доказательство. Имеем $Y\cong\mathbb{R}\times H$, где $H=G^*$. Чтобы не вводить дополнительных обозначений, будем считать, что $Y=\mathbb{R}\times H$. Обозначим через $y=(s,h),\ s\in\mathbb{R},\ h\in H$, элементы группы Y. Так как $c_Y=\mathbb{R}$ и $b_Y=H$, то подгруппы $\mathbb{R}$ и H в Y являются характеристическими. Поэтому ограничение любого автоморфизма $\tau\in\mathrm{Aut(Y)}$ на каждую из подгрупп $\mathbb{R}$ и H является топологическим автоморфизмом этой подгруппы. Обозначим эти автоморфизмы через $\tau_\mathbb{R}$ и τ_H соответственно. Тогда автоморфизм τ может быть записан в виде $\tau(s,h)=(\tau_\mathbb{R}s,\tau_H h),\ (s,h)\in Y$. Рассуждая так же, как при доказательстве теоремы 17.1, сведем доказательство леммы к случаю, когда $L_1=\xi_1+\xi_2$ и $L_2=\xi_1+\delta\xi_2$, где $\delta,\ I\pm\delta\in\mathrm{Aut}(X)$. Обозначим $f(y)=\widehat\mu_1(y),\ g(y)=\widehat\mu_2(y),\ \varepsilon=\widetilde\delta$. По лемме 16.1 из симметрии условного распределения линейной формы $L_2=\xi_1+\delta\xi_2$ при фиксированной $L_1=\xi_1+\xi_2$ вытекает, что характеристические функции $f(y)$ и $g(y)$ удовлетворяют уравнению (17.1), которое принимает вид

$$\begin{aligned}&f(s+s',h+h')g(s+\varepsilon_\mathbb{R}s',h+\varepsilon_H h')\\&=f(s-s',h-h')g(s-\varepsilon_\mathbb{R}s',h-\varepsilon_H h'),\qquad (s,h),\ (s',h')\in Y.\end{aligned}\tag{17.27}$$

Полагая в (17.27) $h=h'=0$, получим следующее уравнение

$$f(s+s',0)g(s+\varepsilon_\mathbb{R}s',0)=f(s-s',0)g(s-\varepsilon_\mathbb{R}s',0),\qquad s,\ s'\in\mathbb{R}.$$

Отсюда по теореме Хейде находим

$$f(s,0)=\exp\{-\sigma_1s^2+it_1s\},\qquad g(s,0)=\exp\{-\sigma_2s^2+it_2s\},\qquad s\in\mathbb{R},\tag{17.28}$$

где $\sigma_j \geq 0,\ t_j \in \mathbb{R},\ j = 1, 2$.

Покажем индукцией по k, где 2^k — порядок элемента h, что справедливо представление

$$f(s,h) = F_1(s)F_2(h), \qquad g(s,h) = G_1(s)G_2(h), \tag{17.29}$$

где $F_j(0) = G_j(0) = 1,\ j = 1, 2$.

Полагая в (17.27) $s = -\varepsilon_{\mathbb{R}} s',\ h' = h$, получаем уравнение

$$f(\beta_{\mathbb{R}} s', 2h)g(0, \alpha_H h) = f(-\alpha_{\mathbb{R}} s', 0)g(-2\varepsilon_{\mathbb{R}} s', \beta_H h), \qquad (s,h),(s',h') \in Y, \tag{17.30}$$

где $\alpha = I + \varepsilon,\ \beta = I - \varepsilon$. Пусть $k = 1$, т.е. $2h = 0$. Тогда уравнение (17.30) принимает вид

$$f(\beta_{\mathbb{R}} s', 0)g(0, \alpha_H h) = f(-\alpha_{\mathbb{R}} s', 0)g(-2\varepsilon_{\mathbb{R}} s', \beta_H h), \qquad (s,h),(s',h') \in Y. \tag{17.31}$$

Из (17.28) следует, что $f(-\alpha_{\mathbb{R}} s', 0) \neq 0$. Поскольку $-2\varepsilon_{\mathbb{R}} \in \mathrm{Aut}(\mathbb{R})$, а $\beta_H \in \mathrm{Aut}(H)$, то из (17.31) вытекает требуемое представление для функции $g(s,h)$.

Аналогично, подставляя в (17.27) $s' = -s, h = \varepsilon_H h'$, получаем уравнение

$$f(0, \alpha_H h)g(\beta_{\mathbb{R}} s, 2\varepsilon_H h') = f(2s, -\beta_H h')g(\alpha_{\mathbb{R}} s, 0), \qquad (s,h),(s',h') \in Y, \tag{17.32}$$

из которого при $k = 1$, т.е. когда $2h' = 0$, следует нужное представление для функции $f(s,h)$. Итак, при $k = 1$ утверждение доказано.

Предположим, что если элемент h имеет порядок 2^k, то представление (17.29) имеет место. Пусть элемент h имеет порядок 2^{k+1}. Тогда элемент $2h$ имеет порядок 2^k, и в (17.30) по предположению индукции $f(\beta_{\mathbb{R}} s', 2h) = F_1(\beta_{\mathbb{R}} s')F_2(2h)$. Рассуждая далее так же, как и в случае, когда $k = 1$, из (17.30) получаем требуемое представление для $g(s,h)$. Аналогично, из (17.32) следует требуемое представление для $f(s,h)$.

Из (17.29) вытекает, что

$$f(s,h) = f(s,0)f(0,h),\ g(s,h) = g(s,0)g(0,h). \tag{17.33}$$

Функции $f(0,h)$ и $g(0,h)$ являются характеристическими функциями некоторых распределений ρ_1 и ρ_2 таких, что $\sigma(\rho_j) \in G,\ j = 1, 2$. Принимая во внимание 2.7(b) и 2.7(c), утверждение леммы вытекает теперь из (17.28) и (17.33). $\square$

Следующий результат является обобщением теоремы 17.8.

17.14. Теорема. *Пусть $X = \mathbb{R} \times N$, где N — конечная группа, N_2 – 2-компонента группы N. Пусть ξ_1 и ξ_2 — независимые случайные величины со значениями в группе X и с распределениями μ_1 и μ_2. Пусть α_j, β_j – топологические автоморфизмы группы X такие, что $\beta_1\alpha_1^{-1} \pm \beta_2\alpha_2^{-1} \in \mathrm{Aut}(X)$. Если условное распределение линейной формы $L_2 = \beta_1\xi_1 + \beta_2\xi_2$ при фиксированной $L_1 = \alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2$ симметрично, то $\mu_j = \gamma_j * \rho_j * \lambda_j$, где $\gamma_j \in \Gamma(\mathbb{R}),\ \sigma(\rho_j) \subset N_2,\ \lambda_j \in I(X),\ j = 1, 2$.*

Доказательство. Разложим группу N в прямое произведение своих p-компонент:

$$N = \mathop{\mathbf{P}}_{p \in \mathcal{P}} N_p.$$

Обозначим
$$G=N_2,\quad K=\mathop{\mathbf{P}}_{p\in\mathcal{P},\ p>2}N_p.$$
Тогда $X=\mathbb{R}\times G\times K$, а $Y\cong\mathbb{R}\times H\times L$, где $H=G^*,\ L=K^*$. Чтобы не вводить дополнительных обозначений, будем считать, что $Y=\mathbb{R}\times H\times L$. Обозначим через $y=(s,h,l),\ s\in\mathbb{R},\ h\in H,\ l\in L$, элементы группы Y. Поскольку $\mathbb{R},\ H$ и L — характеристические подгруппы группы Y, то ограничение любого автоморфизма $\tau\in\mathrm{Aut(Y)}$ на каждую из подгрупп $\mathbb{R},\ H$ и L является топологическим автоморфизмом этой подгруппы. Обозначим эти автоморфизмы через $\tau_{\mathbb{R}}$, τ_H и τ_L соответственно. Тогда автоморфизм τ может быть записан в виде $\tau(s,h,l)=(\tau_{\mathbb{R}}s,\tau_Hh,\tau_Ll),\ (s,h,l)\in Y$. Рассуждая так же, как при доказательстве теоремы 17.1, сведем доказательство теоремы к случаю, когда $L_1=\xi_1+\xi_2$ и $L_2=\xi_1+\delta\xi_2$, где $\delta,\ I\pm\delta\in\mathrm{Aut}(X)$. Обозначим $f(y)=\widehat{\mu}_1(y),\ g(y)=\widehat{\mu}_2(y),\ \varepsilon=\widetilde{\delta}$. По лемме 16.1 из симметрии условного распределения линейной формы $L_2=\xi_1+\delta\xi_2$ при фиксированной $L_1=\xi_1+\xi_2$ вытекает, что характеристические функции $f(y)$ и $g(y)$ удовлетворяют уравнению (17.1), которое принимает вид
$$f(s+s',h+h',l+l')g(s+\varepsilon_{\mathbb{R}}s',h+\varepsilon_Hh',l+\varepsilon_Ll')=$$
$$=f(s-s',h-h',l-l')g(s-\varepsilon_{\mathbb{R}}s',h-\varepsilon_Hh',l-\varepsilon_Ll'),\qquad (s,h,l),\ (s',h',l')\in Y. \tag{17.34}$$
Полагая в (17.34) $s=s'=0$, получаем
$$f(0,h+h',l+l')g(0,h+\varepsilon_Hh',l+\varepsilon_Ll')=f(0,h-h',l-l')g(0,h-\varepsilon_Hh',l-\varepsilon_Ll').$$
Учитывая следствие 17.9, можно с самого начала считать, что имеет место представление:
$$f(0,h,l)=\begin{cases}f_0(h), & \text{если}\ \ l=0,\\ 0, & \text{если}\ \ l\neq0,\end{cases}\qquad g(0,h,l)=\begin{cases}g_0(h), & \text{если}\ \ l=0,\\ 0, & \text{если}\ \ l\neq0,\end{cases} \tag{17.35}$$
где $f_0(h)$ и $g_0(h)$ — некоторые характеристические функции на H. Обозначим $\alpha=I+\varepsilon,\ \beta=I-\varepsilon$. Полагая в (17.34) $s'=s,\ h'=-h,\ l'=-l$, получим
$$f(2s,0,0)g(\alpha_{\mathbb{R}}s,\beta_Hh,\beta_Ll)=f(0,2h,2l)g(\beta_{\mathbb{R}}s,\alpha_Hh,\alpha_Ll),\qquad (s,h,l)\in Y.$$
Из (17.35) вытекает, что $f(0,2h,2l)=0$ при $l\neq0$. Значит,
$$f(2s,0,0)g(\alpha_{\mathbb{R}}s,\beta_Hh,\beta_Ll)=0,\quad l\neq0. \tag{17.36}$$
Поскольку для функции $f(s,0,0)$ по теореме Хейде справедливо представление (17.28), то $f(2s,0,0)\neq0$. Следовательно, из (17.36) получаем
$$g(\alpha_{\mathbb{R}}s,\beta_Hh,\beta_Ll)=0,\quad l\neq0. \tag{17.37}$$
Так как $\alpha_{\mathbb{R}}\in\mathrm{Aut}(\mathbb{R})$, $\beta_H\in\mathrm{Aut}(H)$ и $\beta_L\in\mathrm{Aut}(L)$, то из (17.37) вытекает
$$g(s,h,l)=0,\quad l\neq0. \tag{17.38}$$
Аналогично убеждаемся, что
$$f(s,h,l)=0,\quad l\neq0. \tag{17.39}$$

Положим в (17.34) $l = l' = 0$. Из леммы 17.13 вытекает представление

$$f(s,h,0) = \exp\{-\sigma_1 s^2 + it_1 s\}A(h), \quad g(s,h,0) = \exp\{-\sigma_2 s^2 + it_2 s\}B(h), \tag{17.40}$$

где $\sigma_j \geq 0,\ t_j \in \mathbb{R},\ j = 1, 2$, а $A(h)$ и $B(h)$ – характеристические функции некоторых распределений на G.

Из (17.38)–(17.40) следует

$$f(s,h,l) = \begin{cases} \exp\{-\sigma_1 s^2 + it_1 s\}A(h), & \text{если } \ l = 0, \\ 0, & \text{если } \ l \neq 0, \end{cases} \tag{17.41}$$

$$g(s,h,l) = \begin{cases} \exp\{-\sigma_2 s^2 + it_2 s\}B(h), & \text{если } \ l = 0, \\ 0, & \text{если } \ l \neq 0. \end{cases} \tag{17.42}$$

Утверждение теоремы, как легко видеть, вытекает из 2.7(b) и 2.7(c) и представлений (17.41) и (17.42). $\Box$

Обсудим теперь групповой аналог теоремы Хейде для произвольного числа n независимых случайных величин, принимающих значения в конечной группе X. Нам понадобятся две леммы.

17.15. Лемма. *Пусть X — конечная 5-примарная группа, удовлетворяющая условию:*

(i) *разложение группы X в прямое произведение своих циклических подгрупп содержит по крайней мере один циклический сомножитель с кратностью* 1.

Тогда не существует автоморфизмов $\alpha, \beta \in \mathrm{Aut}(X)$ таких, что

(ii) $$I \pm \alpha,\ I \pm \beta,\ \alpha \pm \beta\ \in \mathrm{Aut}(X).$$

Доказательство. По теореме 1.20.4 имеет место изоморфизм

$$X \cong \mathop{\mathbf{P}}_{j}\ (\mathbb{Z}(5^{k_j}))^{n_j}, \quad k_j < k_{j+1}.$$

При этом числа k_j и n_j однозначно определяются группой X. По условию $n_{j_0} = 1$ при некотором j_0. Положим $G_1 = X^{(5^{k_{j_0}-1})} \bigcap X_{(5)}$, $G_2 = X^{(5^{k_{j_0}})} \bigcap X_{(5)}$. Тогда, как легко видеть, фактор-группа $G = G_1/G_2 \cong \mathbb{Z}(5)$. Так как подгруппы $X^{(5^l)}$ и $X_{(5)}$ — характеристические, то и подгруппы G_1 и G_2 — также характеристические. Поэтому любой автоморфизм $\delta \in \mathrm{Aut}(X)$ индуцирует автоморфизм $\widehat{\delta}$ на фактор-группе G. Заметим теперь, что любой автоморфизм $\widehat{\delta} \in \mathrm{Aut}(G)$ имеет вид $\widehat{\delta}g = kg$, где $g \in G$, а $k = 1, 2, 3, 4$. Поскольку, очевидно, что не существуют автоморфизмов $\widehat{\alpha},\ \widehat{\beta} \in \mathrm{Aut}(G)$, удовлетворяющих условию (ii), то не существуют и автоморфизмов $\alpha,\ \beta \in \mathrm{Aut}(X)$, удовлетворяющих условию (ii). $\Box$

17.16. Лемма. *Для каждой из групп $X = (\mathbb{Z}(p^r))^2$, $X = (\mathbb{Z}(p^r))^3$, где $p = 3$, $p = 5$, и $X = \mathbb{Z}(p^r)$, где p – простое число, $p \geq 7$, $r \in \mathbb{N}$, существуют независимые одинаково распределенные случайные величины ξ_j, $j = 1, 2, 3$, со значениями в группе X и с распределением $\mu \notin I(X)$ и автоморфизмы $\alpha, \beta \in \mathrm{Aut}(X)$, удовлетворяющие условиям 17.15(ii) такие, что условное распределение линейной формы $L_2 = \xi_1 + \alpha\xi_2 + \beta\xi_3$ при фиксированной $L_1 = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3$ симметрично.*

Доказательство. Заметим, что $Y \cong X$. Пусть $X = (\mathbb{Z}(p^r))^2$, где либо $p = 3$, либо $p = 5$. Обозначим через $(k,l),\ k,l \in \mathbb{Z}(p^r)$, элементы групп X и Y. Пусть автоморфизмы $\alpha, \beta \in \mathrm{Aut}(X)$ имеют вид

$$\alpha(k,l) = (k+2l,\ 2k+2l), \quad \beta(k,l) = (2k+2l,\ 2k+l), \quad k,l \in \mathbb{Z}(p^r).$$

Очевидно, что условия 17.15(ii) выполнены. Заметим, что

$$\widetilde{\alpha}(k,l) = (k+2l,\ 2k+2l), \quad \widetilde{\beta}(k,l) = (2k+2l,\ 2k+l), \quad k,l \in \mathbb{Z}(p^r). \tag{17.43}$$

Обозначим $\widetilde{y} = (1,0) \in Y$. Пусть μ – распределение на группе X такое, как в лемме 13.21. Тогда характеристическая функция $f(y) = \widehat{\mu}(y)$ определяется формулой (13.31). Очевидно, что $\mu \notin I(X)$. Пусть $\xi_j,\ j = 1,2,3,$ – независимые одинаково распределенные случайные величины со значениями в группе X и с распределением μ.

По лемме 16.1 условное распределение линейной формы $L_2 = \xi_1 + \alpha\xi_2 + \beta\xi_3$ при фиксированной $L_1 = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3$ симметрично тогда и только тогда, когда характеристические функции случайных величин ξ_j удовлетворяют уравнению 16.1(i) , которое принимает вид

$$f(u+v)f(u+\widetilde{\alpha}v)f(u+\widetilde{\beta}v) = f(u-v)f(u-\widetilde{\alpha}v)f(u-\widetilde{\beta}v), \quad u,v \in Y. \tag{17.44}$$

Очевидно, что уравнение (17.44) превращается в равенство, если $v = 0$. Пусть $u = (k,l),\ v = (k',l') \neq 0$. Проверим, что левая часть в (17.44) равна нулю. Действительно, учитывая (17.43), в противном случае мы бы имели

$$\begin{cases} l + l' = 0 \pmod{p^r}, \\ l + 2k' + 2l' = 0 \pmod{p^r}, \\ l + 2k' + l' = 0 \pmod{p^r}. \end{cases}$$

Отсюда вытекает, что $k' = l' = 0$, т.е. $v = 0$ вопреки предположению. Мы проверяем аналогично, что при $v \neq 0$ правая часть в (17.44) равна нулю. Таким образом, функция $f(y)$ удовлетворяет уравнению (17.44). Тем самым для групп $X = (\mathbb{Z}(p^r))^2,\ p = 3,5$, лемма доказана. Для остальных групп мы ограничимся указанием автоморфизмов $\alpha, \beta \in \mathrm{Aut}(X)$ и распределения $\mu \in \mathrm{M}^1(X)$.

Пусть $X = (\mathbb{Z}(p^r))^3,\ p = 3,5$. Обозначим через $(k,l,m),\ k,l,m \in \mathbb{Z}(p^r)$ элементы групп X и Y. Положим

$$\alpha(k,l,m) = (k+l+m, k+l, k), \quad \beta(k,l,m) = (2k+l+m, k+2l, k+m), \quad k,l,m \in \mathbb{Z}(p^r).$$

Пусть $\widetilde{y} = (1,0,0) \in Y$, а μ – распределение на группе X такое, как в лемме 13.21.

Пусть $X = \mathbb{Z}(p^r)$, где p – простое число, $p \geq 7$. Положим

$$\alpha x = 2x, \quad \beta x = 4x, \quad x \in X.$$

Пусть $\widetilde{y}$ – элемент порядка p^r в Y, а μ – распределение на группе X такое, как в лемме 13.21. □

17.17. Теорема. *Пусть X – конечная группа, X_p – p-компонента группы X. Предположим, что группа X удовлетворяет условию* 17.7(ii). *Тогда справедливы следующие утверждения.*

(I) *Пусть группа X удовлетворяет условиям:*

(i) $X_{(2)} = \{0\}$;

(ii) разложение группы X_5 в прямую сумму своих циклических подгрупп содержит по крайней мере одно циклическое слагаемое с кратностью 1.

Пусть $\xi_j,\ j = 1, 2, \dots, n,\ n \geq 2,$ – независимые случайные величины со значениями в группе X и с распределениями μ_j. Пусть $\alpha_j,\ \beta_j$ – автоморфизмы группы X такие, что $\beta_i\alpha_i^{-1} \pm \beta_j\alpha_j^{-1} \in \mathrm{Aut}(X)$ для всех $i \neq j$. Если условное распределение линейной формы $L_2 = \beta_1\xi_1 + \cdots + \beta_n\xi_n$ при фиксированной $L_1 = \alpha_1\xi_1 + \cdots + \alpha_n\xi_n$ симметрично, то все $\mu_j \in I(X)$.

(II) Если $X_{(2)} \neq \{0\}$, то существуют независимые случайные величины ξ_1 и ξ_2 со значениями в группе X и с распределениями $\mu_1, \mu_2 \notin I(X)$ и автоморфизм $\delta \in \mathrm{Aut}(X)$, обладающие тем свойством, что $I \pm \delta \in \mathrm{Aut}(X)$ и условное распределение линейной формы $L_2 = \xi_1 + \delta\xi_2$ при фиксированной $L_1 = \xi_1 + \xi_2$ симметрично. Если $X_{(2)} = \{0\}$ и условие (ii) не выполнено, то существуют независимые случайные величины $\xi_j,\ j = 1, 2, 3,$ со значениями в группе X и с распределениями $\mu_j \notin I(X)$ и автоморфизмы $\alpha, \beta \in \mathrm{Aut}(X)$, удовлетворяющие условиям 17.15(ii) такие, что условное распределение линейной формы $L_2 = \xi_1 + \alpha\xi_2 + \beta\xi_3$ при фиксированной $L_1 = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3$ симметрично.

Доказательство. (I). По лемме 17.15 из условия (ii) вытекает, что $n = 2$. Поскольку выполнено условие (i), то утверждение теоремы вытекает из теоремы 17.1.

(II). Пусть $X_{(2)} \neq \{0\}$. Поскольку группа X удовлетворяет условию 17.7(ii), то по предложению 17.7 существует автоморфизм $\delta \in \mathrm{Aut}(X)$ такой, что $I \pm \delta \in \mathrm{Aut}(X)$. Рассмотрим произвольные независимые случайные величины ξ_1 и ξ_2 принимающие значения в $X_{(2)}$ и с распределениями $\mu_1, \mu_2 \notin I(X_{(2)})$. Принимая во внимание замечание 16.3, мы видим, что условное распределение линейной формы $L_2 = \xi_1 + \delta\xi_2$ при фиксированной $L_1 = \xi_1 + \xi_2$ симметрично.

Пусть $X_{(2)} = \{0\}$ и условие (ii) не выполнено. Так как группа X удовлетворяет условию 17.7(ii), то очевидно, что группа X разлагается в прямое произведение групп, каждая из которых изоморфна одной из групп, перечисленных в лемме 17.16. Пусть G – одна из таких групп. По лемме 17.16 существуют автоморфизмы $\alpha_G,\ \beta_G \in \mathrm{Aut}(G)$ и независимые одинаково распределенные случайные величины $\xi_j,\ j = 1, 2, 3,$ принимающие значения в $G \subset X$ с распределением $\mu \notin I(G)$ такие, что условное распределение линейной формы $L_2 = \xi_1 + \alpha_G\xi_2 + \beta_G\xi_3$ при фиксированной $L_1 = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3$ симметрично. Продолжим автоморфизмы α_G и β_G до автоморфизмов α и β группы X таким образом, чтобы продолженные автоморфизмы также удовлетворяли условиям 17.15(ii). Это можно сделать по лемме 17.16. Случайные величины ξ_j можно считать принимающими значения в группе X. Очевидно, что условное распределение линейной формы $L_2 = \xi_1 + \alpha\xi_2 + \beta\xi_3$ при фиксированной $L_1 = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3$ симметрично. □

17.18. Замечание. Пусть X – конечная группа такая, что $X_{(2)} \neq \{0\}$, и удовлетворяющая условию 17.7(ii). Пусть X_2 – 2-компонента группы X.

Если группа X удовлетворяет условию 17.17(ii), то по лемме 17.15 $n = 2$, и из теоремы 17.8 следует, что $\mu_j = \rho_j * \pi_j$, где $\sigma(\rho_j) \subset X_2,\ \pi_j \in I(X),\ j = 1, 2$.

Если группа X не удовлетворяет условию 17.17(ii), то существуют независимые случайные величины $\xi_j,\ j = 1, 2, 3,$ со значениями в группе X и с распределениями μ_j и автоморфизмы $\alpha, \beta \in \mathrm{Aut}(X)$, удовлетворяющие условиям 17.15(ii) такие, что условное распределение линейной формы $L_2 = \xi_1 + \alpha\xi_2 + \beta\xi_3$ при фиксированной $L_1 = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3$ симметрично, но ни одно из распределений μ_j не представимо в виде $\mu_j = \rho_j * \pi_j$, где $\sigma(\rho_j) \subset X_2$, $\pi_j \in I(X)$. Действительно, представим группу X в виде прямого произведения $X = M \times N$, где M изоморфна одной из групп, перечисленных в лемме 17.16, а группа N также удовлетворяет условию 17.7(ii) и не удовлетворяет условию 17.17(ii). Далее рассуждаем так же, как и при доказательстве теоремы 17.17. Единственное отличие состоит в построении автоморфизмов $\alpha, \beta \in \mathrm{Aut}(N_2)$, где N_2 – 2-компонента группы N, удовлетворяющих условиям 17.15(ii).

Поскольку группа X удовлетворяет условию 17.7(ii), то подгруппа N_2 является прямым произведением сомножителей, изоморфных группам вида $(\mathbb{Z}(2^r))^2$ и вида $(\mathbb{Z}(2^r))^3$. Для сомножителя, изоморфного $(\mathbb{Z}(2^r))^2$ положим $\alpha(k,l) = (l, k+l)$, $\beta(k,l) = (k+l, k)$ $k, l \in \mathbb{Z}(2^r)$, а для сомножителя, изоморфного $(\mathbb{Z}(2^r))^3$ положим $\alpha(k,l,m) = (k+l+m, k+l, k)$, $\beta(k,l,m) = (l+m, k, k+m)$, $k, l, m \in \mathbb{Z}(2^r)$. Легко видеть, что α и β – автоморфизмы, удовлетворяющие условиям 17.15(ii).

Перейдем теперь к изучению теоремы Хейде для дискретных групп. Докажем вначале одно утверждение, относящееся к произвольному числу независимых случайных величин. Это утверждение можно рассматривать, как аналог теоремы Хейде для дискретных групп без кручения.

17.19. Теорема. *Пусть X – дискретная группа без кручения. Пусть ξ_j, $j = 1, 2, \dots, n$, $n \geq 2$, – независимые случайные величины со значениями в группе X и с распределениями μ_j. Пусть α_j, β_j – автоморфизмы группы X такие, что $\beta_i\alpha_i^{-1} \pm \beta_j\alpha_j^{-1} \in \mathrm{Aut}(X)$ для всех $i \neq j$. Если условное распределение линейной формы $L_2 = \beta_1\xi_1 + \dots + \beta_n\xi_n$ при фиксированной $L_1 = \alpha_1\xi_1 + \dots + \alpha_n\xi_n$ симметрично, то все μ_j – вырожденные распределения.*

Доказательство. Переходя к новым случайным величинам $\zeta_j = \alpha_j\xi_j$, мы редуцируем доказательство теоремы к случаю, когда линейные формы L_1 и L_2 имеют вид $L_1 = \xi_1 + \dots + \xi_n$ и $L_2 = \delta_1\xi_1 + \dots + \delta_n\xi_n$, $\delta_j \in \mathrm{Aut}(X)$. Условие $\beta_i\alpha_i^{-1} \pm \beta_j\alpha_j^{-1} \in \mathrm{Aut}(X)$ для всех $i \neq j$ переходит в условие: $\delta_i \pm \delta_j \in \mathrm{Aut}(X)$ для всех $i \neq j$. По лемме 16.1 из симметрии условного распределение линейной формы $L_2 = \delta_1\xi_1 + \dots + \delta_n\xi_n$ при фиксированной $L_1 = \xi_1 + \dots + \xi_n$ следует, что характеристические функции $\widehat{\mu}_j(y)$ удовлетворяют уравнению (16.2). Положим $\nu_j = \mu_j * \bar{\mu}_j$. Из 2.7$(c)$ и 2.7(d) вытекает, что $\widehat{\nu}_j(y) = |\widehat{\mu}_j(y)|^2 \geq 0$, $y \in Y$. Очевидно, что характеристические функции $\widehat{\nu}_j(y)$ также удовлетворяют уравнению(16.2). Пусть U такая окрестность нуля в Y, что все характеристические функции $\nu_j(y) > 0$ при $y \in U$. Положим $\varphi_j(y) = -\log\widehat{\nu}_j(y)$, $y \in U$. Дальнейшее рассуждение мы проведем в предположении, что $n = 2$. Случай произвольного n рассматривается аналогично. Пусть V – симметричная окрестность нуля группы Y такая, что для любых автоморфизмов $\lambda_j \in \{I, \widetilde{\delta}_1, \widetilde{\delta}_2\}$ выполнено включение

$$\sum_{j=1}^{8} \lambda_j(V) \subset U. \tag{17.45}$$

Из (16.2) следует, что функции $\varphi_j(y)$ удовлетворяют уравнению

$$\varphi_1(u + \widetilde{\delta}_1 v) + \varphi_2(u + \widetilde{\delta}_2 v) - \varphi_1(u - \widetilde{\delta}_1 v) - \varphi_2(u - \widetilde{\delta}_2 v) = 0, \quad u,\ v \in V. \tag{17.46}$$

Применим для решения этого уравнения метод конечных разностей. Пусть k_1 произвольный элемент V. Положим $h_1 = \widetilde{\delta}_2 k_1$. Следовательно, $h_1 - \widetilde{\delta}_2 k_1 = 0$. Придадим в (17.46) u и v приращения

h_1 и k_1 соответственно. Вычитая из полученного уравнения уравнение (17.46), находим

$$\Delta_{l_{11}}\varphi_1(u+\widetilde{\delta}_1 v)+\Delta_{l_{12}}\varphi_2(u+\widetilde{\delta}_2 v)-\Delta_{l_{13}}\varphi_1(u-\widetilde{\delta}_1 v)=0, \quad u,v\in V, \tag{17.47}$$

где $l_{11}=(\widetilde{\delta}_1+\widetilde{\delta}_2)k_1,\ l_{12}=2\widetilde{\delta}_2k_1,\ l_{13}=(\widetilde{\delta}_2-\widetilde{\delta}_1)k_1$. Пусть k_2 произвольный элемент V. Положим $h_2=\widetilde{\delta}_1k_2$. Следовательно, $h_2-\widetilde{\delta}_1k_2=0$. Придадим в (17.47) u и v приращения h_2 и k_2 соответственно. Вычитая из полученного уравнения уравнение (17.47), находим

$$\Delta_{l_{21}}\Delta_{l_{11}}\varphi_1(u+\widetilde{\delta}_1 v)+\Delta_{l_{22}}\Delta_{l_{12}}\varphi_2(u+\widetilde{\delta}_2 v)=0, \quad u,v\in V, \tag{17.48}$$

где $l_{21}=2\widetilde{\delta}_1k_2,\ l_{22}=(\widetilde{\delta}_1+\widetilde{\delta}_2)k_2$. Пусть k_3 произвольный элемент группы V. Положим $h_3=-\widetilde{\delta}_2k_3$. Следовательно, $h_3+\widetilde{\delta}_2k_3=0$. Придадим в (17.48) u и v приращения h_3 и k_3 соответственно. Вычитая из полученного уравнения уравнение (17.48), получаем

$$\Delta_{l_{31}}\Delta_{l_{21}}\Delta_{l_{11}}\varphi_1(u+\widetilde{\delta}_1 v)=0 \quad u,v\in V, \tag{17.49}$$

где $l_{31}=(\widetilde{\delta}_1-\widetilde{\delta}_2)k_3$. Полагая в (17.49) $v=0$, мы находим

$$\Delta_{l_{31}}\Delta_{l_{21}}\Delta_{l_{11}}\varphi_1(u)=0 \quad u\in V. \tag{17.50}$$

Поскольку X – дискретная группа без кручения, то по теоремам 1.6.1 и 1.6.2 Y – связная компактная группа. Тогда по теореме 1.9.6 имеем $Y^{(2)}=Y$. Поэтому гомоморфизм $f_2: Y\mapsto Y$ открыт ([85, (5.9)]). Из 1.13(c) и условия теоремы следует, что $\widetilde{\delta}_1\pm\widetilde{\delta}_2\in \mathrm{Aut}(Y)$. Тогда из (17.50) и выражений для $l_{11},\ l_{21}, l_{31}$ вытекает, что существует такая окрестность нуля W группы Y, в которой выполнено

$$\Delta_h^3\varphi_1(y)=0, \quad y,h\in W. \tag{17.51}$$

Поскольку Y – компактная группа, то по теореме 1.12.2 для любой ее окрестности нуля W существует такая компактная подгруппа H в Y, что $H\subset W$ и фактор-группа $Y/H\cong\mathbb{T}^m\times F$, где $m\ge 0$, а F – конечная группа. Так как группа Y связна, то $F=\{0\}$, т.е. $Y/H\cong\mathbb{T}^m$. Пусть $p_1: Y\mapsto Y/H$ – естественный гомоморфизм, а $p_2: Y/H\mapsto\mathbb{T}^m$ – упомянутый выше изоморфизм. Рассмотрим гомоморфизм $p: Y\mapsto\mathbb{T}^m$, определяемый формулой $p=p_2p_1$. Поскольку p – открытый гомоморфизм, то $p(W)$ – окрестность нуля в $\mathbb{T}^m$. Нам удобно представлять группу $\mathbb{T}^m$, как множество точек $t=(t_1,\dots,t_m)$, где $-\pi\le t_j<\pi$, а операцию в $\mathbb{T}^m$ – покоординатное сложение по модулю 2π. Рассмотрим ограничение уравнения (17.51) на подгруппу H. Функция $\varphi_1(y)$ – непрерывный многочлен на группе H. Поскольку группа H компактна, то по предложению 5.7 $\varphi_1(y)=const$ при $y\in H$, а следовательно, $\varphi_1(y)=0$ при $y\in H$. Значит, $\widehat{\nu}_1(y)=1$ при $y\in H$. По предложению 2.13 отсюда следует, что $\widehat{\nu}_1(y+h)=\widehat{\nu}_1(y),\ y\in Y,\ h\in H$. Поэтому функция $\widehat{\nu}_1(y)$ индуцирует некоторую положительно определенную функцию $f_1(t)$ на $\mathbb{T}^m$ по формуле $f_1(t)=\widehat{\nu}_1(y),\ t=py$. Так как $\mathbb{T}^m\cong(\mathbb{Z}^m)^*$, то по теореме Бохнера существует такое распределение $\gamma_1\in \mathrm{M}^1(\mathbb{Z}^k)$, что $\widehat{\gamma}_1(t)=f_1(t),\ t\in\mathbb{T}^m$. Кроме того, в окрестности нуля $p(W)$ группы $\mathbb{T}^m$ справедливо представление

$$f_1(t)=e^{-\widetilde{\varphi}_1(t)}, \qquad t\in p(W), \tag{17.52}$$

где $\widetilde{\varphi}_1(t)=\varphi_1(y),\ t=py$. Из (17.51) следует, что $\widetilde{\varphi}_1(t)$ – обычный многочлен от m переменных $t_1,\dots,t_m$. Поскольку $\mathbb{Z}^m\subset\mathbb{R}^m$, мы можем рассматривать γ_1, как распределение в $\mathbb{R}^m$ с носителем в $\mathbb{Z}^m$, т.е. считать, что функция $f_1(t)$ определена в $\mathbb{R}^m$ и 2π-периодическая по каждой переменной. Из (17.52) следует, что мы находимся в условиях применимости теоремы 2.19, где $F(t) = f_1(t)$, а $\Phi(t) = e^{-\widetilde{\varphi}_1(t)}$. По теореме 2.19 левая часть в (17.52) – целая функция, а представление (17.52) справедливо при любом $t \in \mathbb{R}^m$. Поскольку $\widetilde{\varphi}_1(t)$ – непрерывный многочлен и $\widetilde{\varphi}_1(t)$ – 2π-периодическая функция по каждой переменной, получаем, что $\widetilde{\varphi}_1(t) = const,\ t \in \mathbb{R}^m$, а следовательно, $\widetilde{\varphi}_1(t) = 0,\ t \in \mathbb{R}^m$. Отсюда $f_1(t) = 1$ при $t \in \mathbb{R}^m$, а значит, $\widehat{\nu}_1(y) \equiv 1$ на Y. Таким образом, $\nu_1 = E_0$. Следовательно, μ_1 – также вырожденное распределение. Аналогичное рассуждение доказывает, что и μ_2 – вырожденное распределение. Доказательство в случае произвольного n проводится по этой же схеме. □

Из теоремы 1.6.2, леммы 16.1 и теоремы 17.19 непосредственно вытекает следующее утверждение.

17.20. Следствие. *Пусть Y – связная компактная группа, $\widetilde{\alpha}_j,\ \widetilde{\beta}_j,\ j = 1, 2, \dots, n,\ n \geq 2,$ – топологические автоморфизмы группы Y такие, что $\widetilde{\beta}_i\widetilde{\alpha}_i^{-1} \pm \widetilde{\beta}_j\widetilde{\alpha}_j^{-1} \in \mathrm{Aut}(Y)$ для всех $i \neq j$. Пусть $\widehat{\mu}_j(y)$ – характеристические функции на группе Y, удовлетворяющие уравнению 16.1(i). Тогда характеристические функции $\widehat{\mu}_j(y)$ имеют вид*

$$\widehat{\mu}_j(y) = (x_j, y), \quad x_j \in X,\ j = 1, 2, \dots, n.$$

Следующее утверждение можно рассматривать, как аналог теоремы Хейде для группы $X = \mathbb{R}^m$ при $m \geq 2$.

17.21. Теорема. *Пусть $X = \mathbb{R}^m$, где $m \geq 2$. Пусть $\xi_j,\ j = 1, 2, \dots, n,\ n \geq 2,$ – независимые случайные величины со значениями в группе X и с распределениями μ_j. Пусть $\alpha_j,\ \beta_j$ – топологические автоморфизмы группы X такие, что $\beta_i\alpha_i^{-1} \pm \beta_j\alpha_j^{-1} \in \mathrm{Aut}(X)$ для всех $i \neq j$. Если условное распределение линейной формы $L_2 = \beta_1\xi_1 + \dots + \beta_n\xi_n$ при фиксированной $L_1 = \alpha_1\xi_1 + \dots + \alpha_n\xi_n$ симметрично, то все μ_j – гауссовские распределения.*

Теорема доказывается рассуждением аналогичным рассуждению проведенному при доказательстве теоремы 17.19.

17.22. Замечание. Теорема 17.21 позволяет доказать лемму 17.13 для группы $X = \mathbb{R}^m \times G$, где $m \geq 2$, а G — конечная 2-примарная группа. После чего, основываясь на этом обобщении леммы 17.13, может быть доказана и теорема 17.14 для группы $X = \mathbb{R}^m \times N$, где $m \geq 2$, а N — конечная группа.

Мы используем следствие 17.20 для доказательства следующего общего утверждения.

17.23. Предложение. *Пусть $X = \mathbb{R}^m \times G$, где $m \geq 0$, а группа G содержит компактную открытую подгруппу. Пусть $\xi_j,\ j = 1, 2, \dots, n,\ n \geq 2,$ – независимые случайные величины со значениями в группе X и с распределениями μ_j. Пусть $\alpha_j,\ \beta_j$ – топологические автоморфизмы группы X такие, что $\beta_i\alpha_i^{-1} \pm \beta_j\alpha_j^{-1} \in \mathrm{Aut}(X)$ для всех $i \neq j$. Предположим, что условное распределение линейной формы $L_2 = \beta_1\xi_1 + \dots + \beta_n\xi_n$ при фиксированной $L_1 = \alpha_1\xi_1 + \dots + \alpha_n\xi_n$ симметрично. Тогда существуют элементы $x'_j \in X,\ \ j = 1, 2, \dots, n$ такие, что условное распределение линейной формы $L'_2 = \beta_1\xi'_1 + \dots + \beta_n\xi'_n$ при фиксированной $L'_1 = \alpha_1\xi'_1 + \dots + \alpha_n\xi'_n$, где*

$\xi_j' = \xi_j - x_j'$, *симметрично, а носители распределений* μ_j' *всех случайных величин* ξ_j' *содержатся в подгруппе* $\mathbb{R}^m \times b_G$.

Доказательство. Пусть c_Y – связная компонента нуля группы Y. По теореме 1.11.2 $c_Y = M \times L$, где $M \cong \mathbb{R}^m$, а L – связная компактная группа. По лемме 16.1 симметрия условного распределения линейной формы L_2 при фиксированной L_1 эквивалентна тому, что характеристические функции $\widehat{\mu}_j(y)$ удовлетворяют уравнению 16.1(i). Очевидно, что L – характеристическая подгруппа группы Y. Поэтому мы можем рассмотреть ограничение уравнения 16.1(i) на подгруппу L. По следствию 17.20, примененному к группе L, и теореме 1.9.2 мы имеем представление

$$\widehat{\mu}_j(y) = (x_j, y), \quad y \in L, \quad j = 1, 2, \dots, n. \tag{17.53}$$

Подставляя (17.53) в 16.1(i), заключаем, что

$$2\sum_{j=1}^{n} \beta_j x_j \in A(X, L). \tag{17.54}$$

Заметим, что $A(X, L) = \mathbb{R}^m \times b_G$. По теореме 1.9.6 $L^{(2)} = L$. Из (17.47) и предложения 7.4 тогда следует, что $x_0 = \sum\limits_{j=1}^{n} \beta_j x_j \in \mathbb{R}^m \times b_G$. Очевидно, что подгруппа $\mathbb{R}^m \times b_G$ характеристическая. Положим $x_1' = x_1 - \beta_1^{-1} x_0$, $x_j' = x_j$, $j = 2, \dots, n$. Пусть μ_j' – распределение на группе X с характеристической функцией $\widehat{\mu}_j'(y) = (-x_j', y)\widehat{\mu}_j(y)$, $j = 1, 2, \dots, n$. Так как $\beta_1^{-1} x_0 \in \mathbb{R}^m \times b_G = A(X, L)$, то

$$\widehat{\mu}_j(y) = (x_j', y), \quad y \in L, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Кроме того, $\sum\limits_{j=1}^{n} \beta_j x_j' = 0$. Отсюда следует, что характеристические функции $f_j(y) = (-x_j', y)$ удовлетворяют уравнению 16.1(i), а значит, и характеристические функции $\widehat{\mu}_j'(y)$ также удовлетворяют уравнению 16.1(i). Положим $\xi_j' = \xi_j - x_j'$. По лемме 16.1 условное распределение линейной формы $L_2' = \beta_1 \xi_1' + \dots + \beta_n \xi_n'$ при фиксированной $L_1' = \alpha_1 \xi_1' + \dots + \alpha_n \xi_n'$ симметрично. Поскольку

$$\widehat{\mu}_j'(y) = 1, \ y \in L, \ j = 1, 2, \dots, n,$$

то по предложению 2.13 $\sigma(\mu_j') \subset A(X, L) = \mathbb{R}^m \times b_G$. $\square$

17.24. Замечание (ср. с замечанием 13.12). Пусть $X = \mathbb{R}^m \times G$, где $m \geq 0$, а группа G содержит компактную открытую подгруппу. Пусть ξ_j, $j = 1, 2, \dots, n$, $n \geq 2$, – независимые случайные величины со значениями в группе X и с распределениями μ_j. Пусть α_j, β_j – топологические автоморфизмы группы X такие, что $\beta_i \alpha_i^{-1} \pm \beta_j \alpha_j^{-1} \in \mathrm{Aut}(X)$ для всех $i \neq j$. Предположим, что условное распределение линейной формы $L_2 = \beta_1 \xi_1 + \dots + \beta_n \xi_n$ при фиксированной $L_1 = \alpha_1 \xi_1 + \dots + \alpha_n \xi_n$ симметрично. Поскольку подгруппа $\mathbb{R}^m \times b_G$ является характеристической, то из предложения 17.23 вытекает, что изучая возможные распределения μ_j, можно предполагать, что группа X такова, что, $G = b_G$, т.е. группа G состоит из компактных элементов.

Предложение 17.23 может быть усилено, если группа X дискретна. Именно, справедливо следующее утверждение.

17.25. Предложение. *Пусть X – дискретная группа. Пусть ξ_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, $n \geq 2$, – независимые случайные величины со значениями в группе X и с распределениями μ_j. Пусть α_j, β_j – автоморфизмы группы X такие, что $\beta_i\alpha_i^{-1} \pm \beta_j\alpha_j^{-1} \in \mathrm{Aut}(X)$ для всех $i \neq j$. Предположим, что условное распределение линейной формы $L_2 = \beta_1\xi_1 + \cdots + \beta_n\xi_n$ при фиксированной $L_1 = \alpha_1\xi_1 + \cdots + \alpha_n\xi_n$ симметрично. Тогда существуют элементы $x'_j \in X$, $j = 1, 2, \ldots, n$, такие, что условное распределение линейной формы $L'_2 = \beta_1\xi'_1 + \cdots + \beta_n\xi'_n$, при фиксированной $L'_1 = \alpha_1\xi'_1 + \cdots + \alpha_n\xi'_n$, где $\xi'_j = \xi_j - x'_j$, симметрично, а носители распределений μ'_j всех случайных величин ξ'_j содержатся в подгруппе $X_{(k)}$ при некотором $k \geq 2$.*

Доказательство. Из предложения 17.23 вытекает, что мы можем доказывать предложение 17.25, предполагая с самого начала, что X – периодическая группа. Ограничимся также доказательством, считая что число независимых случайных величин $n = 2$. Случай произвольного n рассматривается аналогично.

Сохраняем обозначения, использованные при доказательстве теоремы 17.19. Рассуждаем так же, как в доказательстве теоремы 17.19. Пусть V – симметричная окрестность нуля группы Y такая, что выполнено включение (17.45). Поскольку X – дискретная группа, то по теореме 1.6.1 Y – компактная группа. Так как мы считаем группу X периодической, то по теореме 1.6.4 группа Y вполне несвязна. По теореме 1.12.1 существует такая открытая подгруппа M в Y, что $M \subset V$. Очевидно, что функция $\varphi_1(y)$ удовлетворяет уравнению (17.50) при $k_j, u \in M$. Учитывая, что элементы k_j произвольны и $\delta_1 \pm \delta_2 \in \mathrm{Aut}(X)$, из уравнения (17.50) и выражений для l_{11}, l_{21}, l_{31} вытекает, что на подгруппе

$$L = M \cap (\widetilde{\delta}_1 + \widetilde{\delta}_2)(M) \cap (\widetilde{\delta}_1 - \widetilde{\delta}_2)(M) \cap (\widetilde{\delta}_1(M))^{(2)} \tag{17.55}$$

функция $\varphi_1(y)$ удовлетворяет уравнению (17.51), т.е. является непрерывным многочленом на подгруппе L. Аналогично получаем, что функция $\varphi_2(y)$ также удовлетворяет уравнению (17.51).

Поскольку Y – компактная группа, а подгруппа M открыта, то она замкнута, а значит, компактна. Следовательно, подгруппа L также компактна. Отсюда, из предложения 5.7 и условия $\widehat{\mu_j}(0) = 1$ получаем, что $\varphi_j(y) = 0$ при $y \in L$. Следовательно, $\widehat{\nu}_j(y) = 1$ при $y \in L$, а значит по предложению 2.13 $\sigma(\nu_j) \subset A(X, L)$. Положим $G = A(X, L)$. Обозначим

$$N = M \cap (\widetilde{\delta}_1 + \widetilde{\delta}_2)(M) \cap (\widetilde{\delta}_1 - \widetilde{\delta}_2)(M).$$

Тогда N – открытая подгруппа в Y. Заметим, что по теореме 1.9.2 $(Y/N)^* \cong A(X, N)$. Так как Y – компактная группа, а подгруппа N открыта, то фактор-группа Y/N конечна. Следовательно, аннулятор $A(X, N)$ также конечная подгруппа.

Обозначим $P = \widetilde{\delta}_1(M))$ и рассмотрим аннулятор $A(X, P^{(2)})$. По теореме 1.9.2 $(Y/P^{(2)})^* \cong A(X, P^{(2)})$. Поскольку P – открытая подгруппа в Y, то фактор-группа Y/P конечна. Пусть m – число ее элементов. Отсюда легко следует, что $(Y/P^{(2)})^{(2m)} = \{0\}$, а значит и $((Y/P^{(2)})^*)^{(2m)} = \{0\}$. Мы доказали, таким образом, что аннулятор $A(X, P^{(2)})$ ограниченная группа. Из (17.55) следует, что G является наименьшей подгруппой, содержащей подгруппы $A(X, N)$ и $A(X, P^{(2)})$. Значит, и G также ограниченная группа.

Поскольку $\sigma(\nu_j) \subset G$, то по предложению 2.2 каждое из распределений μ_j сосредоточено на множестве $x_j + G$ при некотором $x_j \in X$. Так как группа X периодическая, то элемент x_j имеет конечный порядок. Следовательно, подгруппа, порожденная G и x_j, содержится в подгруппе вида

$X_{(k)}$, при некотором $k \geq 2$, а значит носители $\sigma(\mu_j) \subset X_{(k)}$, $j = 1, 2$. Отметим, что подгруппа $X_{(k)}$ характеристическая. $\square$

17.26. Замечание. Предложение 17.23 редуцирует задачу описания распределений, которые характеризуются симметрией условного распределения одной линейной формы при фиксированной другой, для дискретных групп к дискретным периодическим группам. Заметим, что строение счетных дискретных периодических абелевых групп достаточно сложное (см. 1.21). В то же время, предложение 17.25 редуцирует эту задачу к случаю дискретных периодических ограниченных групп. Строение таких групп достаточно простое. Согласно теореме Прюфера каждая такая группа есть слабое прямое произведение циклических групп.

17.27. Замечание. В условиях предложения 17.25 на самом деле можно утверждать несколько больше. Именно, из предложения 17.25 вытекает, что все носители $\sigma(\mu_j)$ содержатся в подгруппе, порожденной $X_{(2)}$ и некоторой конечной группой. Действительно, применяя предложение 17.25 , мы можем считать, что X – ограниченная группа. Тогда по теореме Прюфера X есть слабое прямое произведение циклических групп

$$X = \mathop{\mathbf{P}^*}_{j=1}^{\infty} X_j. \tag{17.56}$$

Отсюда, по теореме 1.7.2

$$Y = \mathop{\mathbf{P}}_{j=1}^{\infty} Y_j,$$

где $Y_j \cong X_j^*$. Следуем схеме доказательства предложения 17.25, предполагая, что X – группа вида (17.56). Из доказательства предложения 17.25 и (17.55) вытекает, что требуемое включение будет доказано, если мы проверим, что если P – открытая подгруппа в Y, то аннулятор $A(X, P^{(2)})$ содержится в подгруппе, порожденной $X_{(2)}$ и некоторой конечной группой. Из определения топологии в прямом произведении вытекает, что не ограничивая общности можно считать, что

$$P = \mathop{\mathbf{P}}_{j=l+1}^{\infty} Y_j$$

при некотором l. Легко видеть, что тогда $P^{(2)} = P \cap Y^{(2)}$. Поскольку по теореме 1.9.5 $A(X, Y^{(2)}) = X_{(2)}$, то аннулятор $A(X, P^{(2)})$ совпадает с подгруппой порожденной $X_{(2)}$ и конечной группой $\mathop{\mathbf{P}}_{j=1}^{l} X_j$. Отметим, что, вообще говоря, подгруппа, порожденная $X_{(2)}$ и конечной группой, не является характеристической.

Утверждение о том, что все носители $\sigma(\mu_j)$ содержатся в подгруппе, порожденной $X_{(2)}$ и некоторой конечной группой, не может быть усилено. Действительно, пусть X дискретная группа, порожденная $X_{(2)}$ и некоторой конечной группой. Предположим, что $\delta, I \pm \delta \in \mathrm{Aut}(X)$. Докажем, что существуют независимые одинаково распределенные случайные величины ξ_1 и ξ_2 со значениями в группе X и с распределением μ, такие что условное распределение линейной формы $L_2 = \xi_1 + \delta\xi_2$ при фиксированной $L_1 = \xi_1 + \xi_2$ симметрично, а $\sigma(\mu) = X$.

Очевидно, что группа X ограничена. Поэтому по теореме Прюфера X есть слабое прямое произведение циклических групп. Отсюда следует, что мы можем представить группу X в виде $X = G \times K$, где $G = G_{(2)}$, а K — конечная группа.

Пусть ξ_1 и ξ_2 — независимые одинаково распределенные случайные величины со значениями в группе X и с распределением $\mu = \rho * m_K$, где ρ — распределение на подгруппе $X_{(2)}$ такое, что $\sigma(\rho) = X_{(2)}$. Ясно, что $\sigma(\mu) = X$. Обозначим $f(y) = \widehat{\mu}(y)$. Проверим, что условное распределение линейной формы $L_2 = \xi_1 + \delta\xi_2$ при фиксированной $L_1 = \xi_1 + \xi_2$ симметрично. По лемме 16.1 для этого достаточно проверить, что характеристическая функция распределения μ удовлетворяет уравнению 16.1(i), которое принимает вид (17.13), где $\varepsilon = \widetilde{\delta}$. Так как по 2.7(c) $f(y) = \widehat{\rho}(y)\widehat{m}_K(y)$, то для проверки того, что функция $f(y)$ удовлетворяет уравнению (17.13), достаточно проверить, что каждый из сомножителей $\widehat{\rho}(y)$ и $\widehat{m}_K(y)$ удовлетворяет уравнению (17.13).

Из замечания 16.3 вытекает, что функция $\widehat{\rho}(y)$ удовлетворяет уравнению (17.13). Для проверки того функция $\widehat{m}_K(y)$ удовлетворяет уравнению (17.13), по предложению 17.6 достаточно проверить, что $\gamma(K) = K$, где $\gamma = (I + \delta)^{-1}(I - \delta)$. По лемме 13.3 проверка этого утверждения равносильна проверке того, что $\widetilde{\gamma}(A(Y, K)) = A(Y, K)$. Очевидно, что $A(Y, K) \cong G^*$. Так как $G = G_{(2)}$, то и $G^* = (G^*)_{(2)}$. Следовательно, $\widetilde{\gamma}$ действует на подгруппе $A(Y, K)$, как тождественный автоморфизм, а поэтому $\widetilde{\gamma}(A(Y, K)) = A(Y, K)$.

Для доказательства теоремы Хейде для дискретных групп и двух независимых случайных величин нам понадобятся следующие леммы.

17.28. Лемма. *Пусть X – дискретная периодическая группа, не содержащая элементов порядка 2. Пусть ξ_j, $j = 1, 2, \dots, n$, $n \geq 2$, – независимые случайные величины со значениями в группе X и с распределениями μ_j такими, что все характеристические функции $\widehat{\mu}_j(y) \geq 0$. Пусть α_j, β_j – автоморфизмы группы X такие, что $\beta_i\alpha_i^{-1} \pm \beta_j\alpha_j^{-1} \in \mathrm{Aut}(X)$ для всех $i \neq j$. Если условное распределение линейной формы $L_2 = \beta_1\xi_1 + \dots + \beta_n\xi_n$ при фиксированной $L_1 = \alpha_1\xi_1 + \dots + \alpha_n\xi_n$ симметрично, то все характеристические функции $\widehat{\mu}_j(y) \equiv 1$ на некоторой открытой подгруппе $B \subset Y$.*

Доказательство. Так как X – дискретная и периодическая группа, то по теоремам 1.6.1 и 1.6.4 группа Y компактна и вполне несвязна. Из компактности группы Y следует, что $\overline{Y^{(2)}} = Y^{(2)}$. Поскольку $X_{(2)} = \{0\}$, то по теореме 1.9.2 $\overline{Y^{(2)}} = Y$. Отсюда $Y^{(2)} = Y$ и, следовательно, гомоморфизм $f_2 : Y \to Y$ открыт. Рассуждая так же, как при доказательстве теоремы 17.19, и ограничиваясь случаем $n = 2$, мы приходим к уравнению (17.51) для функции $\varphi_1(y) = -\log\widehat{\mu}_1(y)$ в некоторой окрестности нуля W группы Y. По теореме 1.12.1 W содержит компактную открытую подгруппу B_1. Поскольку подгруппа B_1 открыта, то она замкнута, а значит, компактна. Поэтому по предложению 5.7 функция $\varphi_1(y) = 0$ на B_1. Отсюда следует, что $\widehat{\mu}_1(y) = 1$ при $y \in B_1$. Аналогично рассуждаем для распределения μ_2 и находим подгруппу B_2 такую, что $\widehat{\mu}_2(y) = 1$ при $y \in B_2$. Положим $B = B_1 \cap B_2$. $\square$

17.29. Лемма. *Пусть ξ_1 и ξ_2 – независимые случайные величины со значениями в группе X, имеющие распределения $\mu_1 = m_{K_1}$, $\mu_2 = m_{K_2}$, где K_1, K_2 – конечные подгруппы группы X. Пусть f_2, δ, $I \pm \delta \in \mathrm{Aut}(X)$. Тогда из симметрии условного распределения линейной формы $L_2 = \xi_1 + \delta\xi_2$ при фиксированной $L_1 = \xi_1 + \xi_2$ следует, что $K_1 = K_2 = K$ и $\delta(K) = K$.*

Доказательство. Положим $f(y) = \widehat{m}_{K_1}(y)$, $g(y) = \widehat{m}_{K_2}(y)$, $\varepsilon = \widetilde{\delta}$, $\alpha = I + \varepsilon$, $\beta = I - \varepsilon$, $\kappa = \beta\alpha^{-1}$. Тогда $\kappa = \widetilde{\gamma}$, где $\gamma = (I + \delta)^{-1}(I - \delta)$. По лемме 16.1 из симметрии условного распределения линейной формы L_2 при фиксированной L_1 следует, что характеристические функции $f(y)$ и $g(y)$

удовлетворяют уравнению (17.1). Из (17.1) вытекает (17.2). Обозначим $H_j = A(Y, K_j),\ j = 1, 2$. Из (17.2) следует, что если $\kappa y \in H_2$, то $y \in H_2$. Отсюда по лемме 13.2 $\gamma(K_2) \supset K_2$. Поскольку K_2 – конечная группа, то

$$\gamma(K_2) = K_2. \tag{17.57}$$

Заметим теперь, что $I + \gamma = f_2(I + \delta)^{-1},\ I - \gamma = f_2\delta(I + \delta)^{-1}$. Поскольку $f_2 \in \mathrm{Aut}(X)$, то $I \pm \gamma \in \mathrm{Aut}(X)$ и $\delta = (I - \gamma)(I + \gamma)^{-1}$. Из (17.57) тогда следует, что $\delta(K_2) = K_2$ и по лемме 13.3 $\varepsilon(H_2) = H_2$. Рассмотрим ограничение уравнения (17.1) на подгруппу H_2. Получаем

$$f(u + v) = f(u - v), \quad u, v \in H_2.$$

Следовательно,

$$f(2y) = 1, \quad y \in H_2. \tag{17.58}$$

Поскольку $f_2 \in \mathrm{Aut}(X)$, а K_2 – конечная группа, то $(K_2)^{(2)} = K_2$, и по лемме 13.3, $(H_2)^{(2)} = H_2$. Из (17.58) теперь вытекает, что $f(y) = 1$ при $y \in H_2$. Значит, $H_2 \subset H_1$. Аналогично, из (17.1) мы получаем, что $\varepsilon(H_1) = H_1$ и на H_1 выполнено

$$g(2\varepsilon y) = 1, \quad y \in H_1.$$

Отсюда вытекает, что $H_1 \subset H_2$. Итак, $H_1 = H_2 = H$, а следовательно $K_1 = K_2 = K$. Поскольку $\varepsilon(H) = H$, то по лемме 13.3 $\delta(K) = K$. □

17.30. Теорема. *Пусть X – дискретная группа, не содержащая элементов порядка 2. Пусть ξ_1 и ξ_2 – независимые случайные величины со значениями в группе X и с распределениями μ_1 и μ_2. Пусть α_j, β_j – автоморфизмы группы X такие, что $\beta_1\alpha_1^{-1} \pm \beta_2\alpha_2^{-1} \in \mathrm{Aut}(X)$. Если условное распределение линейной формы $L_2 = \beta_1\xi_1 + \beta_2\xi_2$ при фиксированной $L_1 = \alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2$ симметрично, то $\mu_1, \mu_2 \in I(X)$.*

Доказательство. Рассуждая так же, как при доказательстве теоремы 17.1, мы сводим доказательство теоремы к случаю, когда линейные формы L_1 и L_2 имеют вид $L_1 = \xi_1 + \xi_2,\ L_2 = \xi_1 + \delta\xi_2$, где $\delta,\ I \pm \delta \in \mathrm{Aut}(X)$. Обозначим $f(y) = \widehat{\mu}_1(y),\ g(y) = \widehat{\mu}_2(y),\ \varepsilon = \widetilde{\delta}$. По лемме 16.1 из симметрии условного распределение линейной формы L_2 при фиксированной L_1 следует, что характеристические функции $\widehat{\mu}_j(y)$ удовлетворяют уравнению (16.24), которое принимает вид (17.1). Положим $\nu_j = \mu_j * \bar{\mu}_j$. Из 2.7($c$) и 2.7($d$) вытекает, что $\widehat{\nu}_j(y) = |\widehat{\mu}_j(y)|^2 \geq 0,\ \ y \in Y$. Очевидно, что характеристические функции $\widehat{\nu}_j(y)$ также удовлетворяют уравнению (16.24). Если мы докажем, что $\nu_j \in I(X)$, то из 2.7(b) и 2.7(e) будет следовать, что и $\mu_j \in I(X)$. Это дает нам возможность решать уравнение (17.1) в предположении, что $f(y) \geq 0,\ g(y) \geq 0,\ f(-y) = f(y),\ g(-y) = g(y)$. Мы докажем, что в этом случае $f(y) = g(y) = \widehat{m}_K(y)$, где K – некоторая подгруппа группы X. Отсюда будет следовать утверждение теоремы.

Из замечания 17.22 вытекает, что мы можем с самого начала предполагать группу X периодической. Обозначим $E_f = \{y \in Y : f(y) = 1\},\ E_g = \{y \in Y : g(y) = 1\}$. Тогда по предложению 2.13 $\sigma(\mu_1) \subset A(X, E_f) = F,\ \sigma(\mu_2) \subset A(X, E_g) = G$. В силу леммы 17.28 существует такая открытая подгруппа B, что $B \subset E_f \cap E_g$. Обозначим $S = A(X, B)$. Тогда F и G – подгруппы в S. Поскольку подгруппа L открыта, то по теореме 1.9.4 S – компактная группа, а так как группа X дискретна, то S – конечная группа. Следовательно, F и G – также конечные группы.

Заметим теперь, что уравнению (17.1) при любом натуральном n удовлетворяют и характеристические функции $f^n(y)$ и $g^n(y)$, т.е.

$$f^n(u+v)g^n(u+\epsilon v) = f^n(u-v)g^n(u-\epsilon v), \quad u, v \in Y. \tag{17.59}$$

Очевидно, что существуют пределы

$$\bar{f}(y) = \lim_{n\to\infty} f^n(y) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad y \in E_f, \\ 0, & \text{если} \quad y \notin E_f, \end{cases} \qquad \bar{g}(y) = \lim_{n\to\infty} g^n(y) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad y \in E_g, \\ 0, & \text{если} \quad y \notin E_g. \end{cases}$$

Поскольку по теореме 1.9.1 $E_f = A(Y,F)$, $E_g = A(Y,G)$, то из 2.14(i) следует, что

$$\widehat{m}_F(y) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad y \in E_f, \\ 0, & \text{если} \quad y \notin E_f, \end{cases} \qquad \widehat{m}_G(y) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad y \in E_g, \\ 0, & \text{если} \quad y \notin E_g. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\widehat{m}_F(y) = \bar{f}(y), \quad \widehat{m}_G(y) = \bar{g}(y).$$

Пусть ζ_1 и ζ_2 – независимые случайные величины со значениями в группе X и с распределениями $\lambda_1 = m_F$ и $\lambda_2 = m_G$. Из (17.59) следует, что характеристические функции $\bar{f}(y)$ и $\bar{g}(y)$ также удовлетворяют уравнению (17.1). По лемме 16.1 отсюда следует, что условное распределение линейной формы $L_2 = \zeta_1 + \delta\zeta_2$ при фиксированной $L_1 = \zeta_1 + \zeta_2$ симметрично. Мы находимся в условиях применимости леммы 17.29. Из леммы 17.29 вытекает, что $F = G$ и $\delta(G) = G$.

Вернемся к случайным величинам ξ_1 и ξ_2 и линейным формам $L_1 = \xi_1 + \xi_2$ и $L_2 = \xi_1 + \delta\xi_2$. Так как $\sigma(\mu_j) \subset G$, то ξ_j принимают значения в конечной группе G. Поскольку $\delta(G) = G$, то мы находимся в условиях применимости следствия 17.2. По следствию 17.2 $\mu_j = m_K * E_{x_j}$, где K – некоторая конечная подгруппа группы X, а $x_j \in X$, $j = 1, 2$. $\square$

Из доказательства теоремы 17.30 вытекает следующее утверждение.

17.31. Следствие. *Пусть X – дискретная группа, не содержащая элементов порядка 2. Пусть ξ_1 и ξ_2 – независимые случайные величины со значениями в группе X и с распределениями μ_1 и μ_2. Пусть δ – автоморфизм группы X такой, что $I \pm \delta \in \mathrm{Aut}(X)$. Если условное распределение линейной формы $L_2 = \xi_1 + \delta\xi_2$ при фиксированной $L_1 = \xi_1 + \xi_2$ симметрично, то $\mu_j = m_K * E_{x_j}$, где K – некоторая подгруппа группы X, а $x_j \in X$, $j = 1, 2$. Кроме того, $\delta(K) = K$.*

17.32. Замечание. Из теоремы 17.30 и замечания 17.22 вытекает следующее утверждение. Пусть $X = \mathbb{R}^m \times N$, где $m \geq 0$, а N — дискретная группа, не содержащая элементов порядка 2. Пусть ξ_1 и ξ_2 — независимые случайные величины со значениями в группе X и с распределениями μ_1 и μ_2. Пусть α_j, β_j – топологические автоморфизмы группы X такие, что $\beta_1\alpha_1^{-1} \pm \beta_2\alpha_2^{-1} \in \mathrm{Aut}(X)$. Если условное распределение линейной формы $L_2 = \beta_1\xi_1 + \beta_2\xi_2$ при фиксированной $L_1 = \alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2$ симметрично, то $\mu_j = \gamma_j * \pi_j$, где $\gamma_j \in \Gamma(\mathbb{R}^m)$, $\pi_j \in I(X)$, $j = 1, 2$.

Предложение 17.25 позволяет обобщить теорему 17.8 на дискретные группы.

17.33. Теорема. *Пусть X – дискретная группа, G – подгруппа в X, состоящая из всех элементов, порядки которых являются степенями числа 2. Пусть ξ_1 и ξ_2 – независимые случайные величины со значениями в группе X и с распределениями μ_1 и μ_2. Пусть α_j, β_j – автоморфизмы группы X такие, что $\beta_1\alpha_1^{-1} \pm \beta_2\alpha_2^{-1} \in \mathrm{Aut}(X)$. Если условное распределение линейной формы $L_2 = \beta_1\xi_1 + \beta_2\xi_2$ при фиксированной $L_1 = \alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2$ симметрично, то $\mu_j = \rho_j * \pi_j$, где $\sigma(\rho_j) \subset G$, $\pi_j \in I(X)$, $j = 1, 2$.*

Доказательство. Учитывая предложение 17.25, мы можем доказывать теорему, считая что $X = X_{(k)}$ при некотором $k \geq 2$. Рассуждая так же, как при доказательстве теоремы 17.8, используя те же обозначения и следствие 17.31 вместо следствия 17.2, мы сводим доказательство теоремы к к решению уравнения (17.24) при условиях (17.23). При решении уравнения (17.24) при доказательстве теоремы 17.8 мы опирались на следствие 17.3, которое в свою очередь вытекает из конечности группы автоморфизмов конечной группы. Сейчас мы будем рассуждать по-другому.

Полагая в (17.24) $h' = h$, $b' = b$, получаем

$$\widetilde{f}(2(h,b))\widetilde{g}((I+\widehat{\varepsilon})(h,b)) = \widetilde{g}((I-\widehat{\varepsilon})(h,b)), \quad (h,b) \in H \times B. \tag{17.60}$$

Обозначим $A_m = H_{(2^m)} \times B$, при $m \geq 1$ и $A_0 = B$. Отметим, что A_m — характеристическая подгруппа группы $H \times B$ при любом $m \geq 0$. Из $X = X_{(k)}$ следует, что порядки элементов группы G ограничены. Поэтому существует такое l, что $G^{(2^l)} = \{0\}$. Значит $H_{(2^l)} = H$, а следовательно, $Y/E = A_l$.

Покажем индукцией по m, где 2^m — порядок элемента h, что $\widetilde{f}(h,b) = \widetilde{g}(h,b) = 0$ при $b \neq 0$. Из (17.23) следует, что на A_0 выполнено $\widetilde{f}(h,b) = \widetilde{g}(h,b) = 0$ при $b \neq 0$. Пусть $\widetilde{f}(h,b) = \widetilde{g}(h,b) = 0$ при $(h,b) \in A_m$, $b \neq 0$. Рассмотрим ограничение уравнения (17.60) на A_{m+1}. Тогда $2(h,b) \in A_m$. Значит $\widetilde{f}(2(h,b)) = 0$ при $b \neq 0$ по предположению индукции. Тогда из (17.60) вытекает, что $\widetilde{g}((I-\widehat{\varepsilon})(h,b)) = 0$ при $(h,b) \in A_{m+1}$, $b \neq 0$. Так как $I - \widehat{\varepsilon} \in \mathrm{Aut}(Y/E)$, то отсюда следует, что $\widetilde{g}(h,b) = 0$ при $(h,b) \in A_{m+1}$, $b \neq 0$. Аналогично проверяем, что $\widetilde{f}(h,b) = 0$ при $(h,b) \in A_{m+1}$, $b \neq 0$. Таким образом, мы получаем представление

$$\widetilde{f}(h,b) = \begin{cases} f_0(h), & \text{если} \quad b = 0, \\ 0, & \text{если} \quad b \neq 0, \end{cases} \qquad \widetilde{g}(h,b) = \begin{cases} g_0(h), & \text{если} \quad b = 0, \\ 0, & \text{если} \quad b \neq 0, \end{cases} \tag{17.61}$$

где $f_0(h) = \widetilde{f}(h,0)$, $g_0(h) = \widetilde{g}(h,0)$. Рассуждая далее так же, как и при доказательстве теоремы 17.8, из (17.61) получаем утверждение теоремы. □

Приложение A

Функциональные уравнения Каца–Бернштейна и Скитовича–Дармуа на локально компактных абелевых группах

Пусть X – локально компактная абелева группа, удовлетворяющая второй аксиоме счетности, Y – ее группа характеров. Рассмотрим функциональное уравнение Скитовича–Дармуа 10.1(i). Из теоремы 10.3 и замечания 10.4 вытекает, что эквивалентны следующие утверждения:

(i) для любых автоморфизмов $\widetilde{\alpha}_j,\ \widetilde{\beta}_j \in \mathrm{Aut}(Y)$ все решения уравнения 10.1(i) в классе не обращающихся в нуль непрерывных нормированных положительно определенных функций являются характеристическими функциями гауссовских распределений;

(ii) группа X не содержит подгруппы, топологически изоморфной $\mathbb{T}$.

В этом приложении мы опишем группы Y, для которых при $n = 2$ все решения уравнения Скитовича–Дармуа 10.1(i) в классе не обращающихся в нуль непрерывных нормированных эрмитовых функций являются функциями гауссовского типа. Затем мы решаем аналогичную задачу в классе измеримых относительно меры Хаара функций и рассматриваем также некоторые близкие вопросы.

A.1. Определения и обозначения. Мы будем предполагать, что X – локально компактная абелева группа, удовлетворяющая второй аксиоме счетности, а Y – ее группа характеров. Автоморфизм $\alpha \in \mathrm{Aut}(X)$ называется *регулярным*, если уравнение $\alpha x = x,\ x \in X$, имеет единственное решение $x = 0$. Группа X называется *регулярно полной* (см. [8]), если все ее топологические автоморфизмы, кроме тождественного, регулярны. Через bX обозначим *боровскую компактификацию* группы X. Обозначим через Y_d группу Y, рассматриваемую в дискретной топологии. Отметим, что $(bX)^* \cong Y_d$ ([85, (26.12)]). Если $x_1, \dots, x_k \in X$, то через $\langle x_1, \dots, x_k\rangle$ обозначим подгруппу группы X, порожденную элементами x_j, т.е. множество элементов вида $x = l_1x_1 + \dots + l_kx_k$, где $l_j \in \mathbb{Z}$. Функцию $f(y)$ будем называть *эрмитовой*, если

$$f(-y) = \overline{f(y)}, \quad y \in Y.$$

Из теоремы Бохнера и 2.7(d) следует, что любая положительно определенная функция является эрмитовой.

Мы обсудим вначале вопрос, когда не обращающиеся в нуль непрерывные нормированные эрмитовы решения функционального уравнения Каца–Бернштейна являются функциями гауссовского типа.

A.2. Предложение. *Следующие утверждения эквивалентны:*

(a) любые не обращающиеся в нуль непрерывные нормированные эрмитовы функции $f_j(y)$ на группе Y, удовлетворяющие уравнению

$$(i) \qquad f_1(u+v)f_2(u-v) = f_1(u)f_1(v)f_2(u)f_2(-v), \quad u, v \in Y,$$

представимы в виде

$$(ii) \qquad f_j(y) = (x_j, y)\exp\{\varphi(y)\}, \quad y \in Y,$$

где $x_j \in X$, *а* $\varphi(y)$ — *вещественнозначная непрерывная функция, удовлетворяющая уравнению* 2.14(ii);

(b) *группа* X *не содержит элементов порядка* 2.

Доказательство. $(a) \Rightarrow (b)$. Предположим, что группа X содержит элементы порядка 2. Пусть $x_0 \in X_{(2)}$, $x_0 \neq 0$. Тогда $G = \langle x_0 \rangle \cong \mathbb{Z}(2)$. Положим $H = A(Y, G)$. Отметим, что так как $G \subset X_{(2)}$, то по теоремам 1.9.1 и 1.9.5 $H \supset Y^{(2)}$. Пусть $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $a \neq \pm 1$. Рассмотрим на группе Y функции

$$f_1(y) = \begin{cases} 1, \text{ если } \ y \in H, \\ a, \text{ если } \ y \notin H, \end{cases} \qquad f_2(y) = \begin{cases} 1, \text{ если } \ y \in H, \\ 1/a, \text{ если } \ y \notin H. \end{cases}$$

Так как подгруппа H — аннулятор компактной подгруппы G, то по теореме 1.9.4 подгруппа H открыта в Y. Следовательно, $f_j(y)$ — непрерывные функции. Очевидно также, что функции $f_j(y)$ не обращаются в нуль, нормированы и эрмитовы. Проверим, что функции $f_j(y)$ удовлетворяют уравнению (i). Очевидно, что при любых $u, v \in Y$ правая часть уравнения (i) равна 1. Предположим, что существуют такие $u, v \in Y$, что левая часть уравнения (i) не равна 1. Тогда либо $u + v \in H$, $u - v \notin H$, либо $u + v \notin H$, $u - v \in H$. В каждом из этих случаев получаем, что $2u \notin H$, что невозможно, так как $H \supset Y^{(2)}$. Итак, функции $f_j(y)$ удовлетворяют уравнению (i) и, очевидно, не представимы в виде (ii).

$(b) \Rightarrow (a)$. Пусть $X_{(2)} = \{0\}$. Тогда по теореме 1.9.5

$$Y = \overline{Y^{(2)}}. \tag{A.1}$$

По замечанию 7.15 на подгруппе $\overline{Y^{(2)}}$ имеет место представление

$$f_j(y) = (x_j, y) \exp\{\varphi(y)\}, \quad y \in \overline{Y^{(2)}}, \tag{A.2}$$

где $x_j \in X$, а функция $\varphi(y)$ непрерывна и удовлетворяет уравнению 2.14(ii). Искомое представление вытекает из (A.1) и (A.2). □

A.3. Пусть в уравнении A.2(i) $f_1(y) = f_2(y) = f(y)$, т.е. функция $f(y)$ удовлетворяет уравнению

$$f(u + v) f(u - v) = f^2(u) f(v) f(-v), \quad u, v \in Y. \tag{A.3}$$

Обсудим теперь следующий вопрос. Для каких групп Y все не обращающиеся в нуль непрерывные нормированные эрмитовы решения уравнения (A.3) имеют вид

$$f(y) = (x, y) \exp\{\varphi(y)\}, \tag{A.4}$$

где $x \in X$, а $\varphi(y)$ — вещественнозначная непрерывная функция, удовлетворяющая уравнению 2.14(ii)? Оказывается, что соответствующий класс групп шире класса групп, описанного в предложении A.2.

A.4. Предложение. *Следующие утверждения эквивалентны:*

(a) *любая не обращающаяся в нуль непрерывная нормированная эрмитова функция* $f(y)$, *удовлетворяющая уравнению* (A.3), *представима в виде* (A.4);

(b) *группа X содержит не более одного элемента порядка* 2.

Доказательство. (a) $\Rightarrow$ (b). Предположим, что группа X содержит более одного элемента порядка 2. Возьмем $x_1, x_2 \in X_{(2)}$, $x_j \neq 0$, $x_1 \neq x_2$, и рассмотрим подгруппу $G = \langle x_1, \ x_2 \rangle$, порожденную элементами x_1 и x_2. Тогда $G \cong (\mathbb{Z}(2))^2$. Положим $H = A(Y, G)$ и заметим, что так как $G \subset X_{(2)}$, то по теоремам 1.9.1 и 1.9.5 $H \supset Y^{(2)}$. Рассмотрим на группе Y функцию

$$f(y) = \begin{cases} 1, & \text{если} \ \ y \in H, \\ -1, & \text{если} \ \ y \notin H. \end{cases}$$

Так как подгруппа H — аннулятор компактной подгруппы G, то по теореме 1.9.2 подгруппа H открыта в Y. Следовательно, $f(y)$ — непрерывная функция. Очевидно также, что функция $f(y)$ не обращается в нуль, нормирована и эрмитова. Проверка того, что функция $f(y)$ удовлетворяет уравнению (A.3) повторяет рассуждение в доказательстве необходимости в предложении A.2. По теореме 1.9.4 $G^* \cong Y/H$. Следовательно, $Y/H \cong (\mathbb{Z}(2))^2$. Отсюда вытекает, что функция $f(y)$ не является характером группы Y и поэтому не представима в виде (A.4).

(b) $\Rightarrow$ (a). Если группа содержит не более одного элемента порядка 2, то либо $X_{(2)} = \{0\}$, либо $X_{(2)} \cong \mathbb{Z}(2)$. Положим $\varphi(y) = \log|f(y)|$. Из эрмитовости функции $f(y)$ вытекает, что $|f(-y)| = |f(y)|$. Учитывая это, из уравнения (A.3) получаем, что $\varphi(y)$ – вещественнозначная непрерывная функция, удовлетворяющая уравнению 2.14(ii).

Положим $l(y) = f(y)/|f(y)|$. Очевидно, что функция $l(y)$ непрерывна, удовлетворяет уравнению 9.5(ii) и условиям: $l(-y) = \overline{l(y)}$, $|l(y)| = 1$, при всех $y \in Y$, $l(0) = 1$. Поэтому по следствию 9.13 $l(y)$ – характер группы Y. По теореме двойственности Понтрягина функция $l(y)$ представима в виде $l(y) = (x, y)$, где $x \in X$. Таким образом, функция $f(y)$ представима в виде (A.4). $\square$

Изучим теперь вопрос, когда не обращающиеся в нуль измеримые нормированные эрмитовы решения функционального уравнения Каца–Бернштейна A.2(i) являются функциями гауссовского типа. Нам понадобятся следующие хорошо известные утверждения.

A.5. Лемма. *Измеримая функция $\varphi(y)$ на группе Y, удовлетворяющая уравнению* 2.14(ii), *непрерывна.*

Доказательство. Очевидно, что любая функция $\varphi(y)$, удовлетворяющая уравнению 2.14(ii), является алгебраическим многочленом на группе Y. Поскольку $\varphi(y)$ — измеримая функция, а любой измеримый алгебраический многочлен на локально компактной абелевой группе непрерывен (см. например, [111], теорема 3.11), то функция $\varphi(y)$ — непрерывна. $\square$

A.6. Лемма ([85, (22.19)]). *Измеримая функция $l(y)$ на группе Y, удовлетворяющая уравнению*

$$(i) \qquad l(u+v) = l(u)l(v), \quad u, v \in Y,$$

непрерывна.

A.7. Предложение. *Следующие утверждения эквивалентны:*

(a) *любые не обращающиеся в нуль измеримые нормированные эрмитовы функции $f_j(y)$, удовлетворяющие уравнению* A.2(i), *представимы в виде* A.2(ii);

(b) *боровская компактификация bX группы X не содержит элементов порядка* 2.

Доказательство. $(a) \Rightarrow (b)$. Поскольку $(bX)^* \cong Y_d$, то по теореме 1.9.5 условие $(bX)_{(2)} = \{0\}$ равносильно условию $Y = Y^{(2)}$. Поэтому, если $(bX)_{(2)} \neq \{0\}$, то $Y \neq Y^{(2)}$. Пусть $a \in \mathbb{R},\ a \neq 0,\ a \neq \pm 1$. Рассмотрим на группе Y функции

$$f_1(y) = \begin{cases} 1, \text{ если } \ y \in Y^{(2)}, \\ a, \text{ если } \ y \notin Y^{(2)}, \end{cases} \qquad f_2(y) = \begin{cases} 1, \quad \text{ если } \ y \in Y^{(2)}, \\ 1/a, \text{ если } \ y \notin Y^{(2)}. \end{cases}$$

Поскольку группа Y удовлетворяет второй аксиоме счетности, подгруппа $Y^{(2)}$ измерима. Очевидно, что функции $f_j(y)$ измеримы, не обращаются в нуль, нормированы и эрмитовы. Проверка того, что функции $f_j(y)$ удовлетворяют уравнению A.2(i) проводится так же, как в доказательстве необходимости в предложении A.2. Очевидно, что функции $f_j(y)$ не представимы в виде A.2(ii). Отметим, что так как подгруппа $Y^{(2)}$ не обязательно открыта, то функции $f_j(y)$ могут быть разрывными.

$(b) \Rightarrow (a)$. Пусть $(bX)_{(2)} = \{0\}$. Как было отмечено выше, отсюда следует, что $Y = Y^{(2)}$. По замечанию 7.15 на подгруппе $Y^{(2)}$ имеет место представление

$$f_j(y) = l_j(y) \exp\{\varphi(y)\}, \quad y \in Y^{(2)}, \tag{A.5}$$

где каждая из функций $l_j(y)$ на подгруппе $Y^{(2)}$ удовлетворяет уравнению A.6(i). Поэтому представление (A.5) имеет место на всей группе Y. Поскольку $\varphi(y) = \log|f_j(y)|,\ j = 1, 2$, то функция $\varphi(y)$ измерима. Следовательно, по лемме A.5 функция $\varphi(y)$ непрерывна. Функции $l_j(y)$ по лемме A.6 также непрерывны, т.е. $l_j(y)$ – характеры группы Y, а следовательно, по теореме двойственности Понтрягина функции $l_j(y)$ представимы в виде $l_j(y) = (x_j, y)$, где $x_j \in X,\ j = 1, 2$. $\square$

A.8. Предложение. *Следующие утверждения эквивалентны:*

(a) *любая не обращающаяся в нуль измеримая нормированная эрмитова функция* $f(y)$, *удовлетворяющая уравнению* (A.3), *представима в виде* (A.4);

(b) *боровская компактификация* bX *группы* X *содержит не более одного элемента порядка* 2.

Доказательство. $(a) \Rightarrow (b)$. Предположим, что подгруппа $(bX)_{(2)}$ содержит более одного элемента порядка 2. Поскольку $(bX)^* \cong Y_d$, то по теоремам 1.9.2 и 1.9.5 $\left((bX)_{(2)}\right)^* \cong Y_d/(Y_d)^{(2)}$. Следовательно, разложение группы Y по подгруппе $Y^{(2)}$ содержит по крайней мере 4 класса смежности. Рассмотрим на группе Y функцию

$$f(y) = \begin{cases} 1, \quad \text{ если } \ y \in Y^{(2)}, \\ -1, \text{ если } \ y \notin Y^{(2)}. \end{cases}$$

Поскольку группа Y удовлетворяет второй аксиоме счетности, подгруппа $Y^{(2)}$ измерима. Очевидно, что функция $f(y)$ измерима, не обращается в нуль, нормирована и эрмитова. Проверка того, что функция $f(y)$ удовлетворяет уравнению (A.3) повторяет рассуждение в доказательстве необходимости в предложении A.2. Поскольку разложение группы Y по подгруппе $Y^{(2)}$ содержит по крайней мере 4 класса смежности, то легко видеть, что функция $f(y)$ не удовлетворяет уравнению A.6(i) и поэтому не представима в виде (A.4).

$(b) \Rightarrow (a)$. Представление $|f(y)| = \exp\{\varphi(y)\}$, где функция $\varphi(y)$ удовлетворяет уравнению 2.14(ii), вытекает из того, что функция $f(y)$ эрмитова и удовлетворяет уравнению $(A.3)$. Поскольку функция $\varphi(y)$ измерима, то по лемме A.5 функция $\varphi(y)$ непрерывна.

Положим $l(y) = f(y)/|f(y)|$. Воспользуемся замечанием 7.15, считая $f_1(y) = f_2(y) = f(y)$. По замечанию 7.15 имеет место представление (A.5).

Пусть $(bX)_{(2)} = \{0\}$. Поскольку $(bX)^* \cong Y_d$, то по теореме 1.9.5 условие $(bX)_{(2)} = \{0\}$ равносильно условию $Y = Y^{(2)}$. Следовательно, функция $l(y)$ на группе Y удовлетворяет уравнению A.6(i). По лемме A.6 функция $l(y)$ непрерывна. По теореме двойственности Понтрягина функция $l(y)$ представима в виде $l(y) = (x, y)$, где $x \in X$. Таким образом, функция $f(y)$ представима в виде (A.4). В этом случае предложение доказано.

Пусть $(bX)_{(2)} \cong \mathbb{Z}(2)$. Поскольку $(bX)^* \cong Y_d$, то по теоремам 1.9.2 и 1.9.5 условие $(bX)_{(2)} \cong \mathbb{Z}(2)$ равносильно тому, что разложение группы Y по подгруппе $Y^{(2)}$ состоит из двух классов смежности, т.е. $Y = Y^{(2)} \cup (y_0 + Y^{(2)})$. Поскольку группа Y удовлетворяет второй аксиоме счетности, то подгруппа $Y^{(2)}$ измерима. Мера Хаара подгруппы $Y^{(2)}$ не может равняться нулю, ибо тогда и мера Хаара группы Y равнялась бы нулю. Но если мера Хаара подгруппы $Y^{(2)}$ положительна, то $Y^{(2)}$ содержит некоторую окрестность нуля группы Y ([85, (20.17)]). Следовательно, подгруппа $Y^{(2)}$ открыта, а значит, замкнута и поэтому локально компактна. Функция $l(y)$ измерима и удовлетворяет уравнению A.6(i) на локально компактной абелевой группе $Y^{(2)}$. По лемме A.6 функция $l(y)$ непрерывна на подгруппе $Y^{(2)}$, а значит, является характером подгруппы $Y^{(2)}$. По теореме 1.9.2 существует такой элемент $x_0 \in X$, что $l(y) = (x_0, y)$ при $y \in Y^{(2)}$. Положим $m(y) = l(y)/(x_0, y)$. Дальнейшее рассуждение, доказывающее, что $m(y)$ — характер группы Y, а следовательно, и $l(y)$ — характер группы Y, совпадает с доказательством соответствующего утверждения в предложении 9.11. □

A.9. Замечание. Как вытекает из лемм 7.8 и 7.9, следующие классы групп Y совпадают:

(a) класс групп Y, для которых все не обращающиеся в нуль непрерывные нормированные положительно определенные функции $f_j(y)$, удовлетворяющие уравнению A.2(i), имеют вид A.2(ii);

(b) класс групп Y таких, что группа X не содержит подгруппы, топологически изоморфной $\mathbb{T}$.

Сравнивая этот результат с предложениями A.2 и A.7, мы видим, что с усилением ограничений на не обращающиеся в нуль нормированные эрмитовы решения уравнения A.2(i) (измеримые, непрерывные, непрерывные положительно определенные), расширяется класс групп, для которых эти решения имеют вид A.2(ii) (bX не содержит элементов порядка 2, X не содержит элементов порядка 2, X не содержит подгруппы, топологически изоморфной $\mathbb{T}$). Аналогично обстоит дело и с уравнением (A.3) (см. предложения A.3 и A.8), поскольку, как вытекает из лемм 9.7 и 9.9, следующие классы групп Y совпадают:

(a') класс групп Y, для которых любая не обращающаяся в нуль непрерывная нормированная положительно определенная функция $f(y)$, удовлетворяющая уравнению (A.3), имеет вид (A.4);

(b') класс групп Y таких, что группа X не содержит подгруппы, топологически изоморфной $\mathbb{T}^2$.

A.10. Перейдем теперь к изучению вопроса, когда при $n=2$ не обращающиеся в нуль непрерывные нормированные эрмитовы решения функционального уравнения Скитовича–Дармуа 10.1(i) являются функциями гауссовского типа. Легко видеть, что при $n=2$ изучение вопроса о представлениях решений уравнения 10.1(i) сводится к вопросу о представлениях решений уравнения (10.23), т.е. уравнения

$$f_1(u+v)f_2(u+\varepsilon v) = f_1(u)f_1(v)f_2(u)f_2(\varepsilon v), \quad u,\ v \in Y. \tag{A.6}$$

A.11. Теорема. *Пусть группа Y топологически не изоморфна группе $\mathbb{Z}(2)$. Пусть ε – произвольный топологический автоморфизм группы Y, $\varepsilon \neq I$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(a) *любые не обращающиеся в нуль непрерывные нормированные эрмитовы функции $f_j(y)$ на группе Y, удовлетворяющие уравнению* (A.6), *представимы в виде*

$$(i) \qquad f_j(y) = (x_j, y)\exp\{\varphi_j(y)\}, \quad y \in Y,$$

где $x_j \in X$, а $\varphi_j(y)$ — непрерывная вещественнозначная функция, удовлетворяющая уравнению 2.14(ii);

(b) *группа X регулярно полна.*

Доказательство. $(a) \Rightarrow (b)$. Пусть группа X не регулярно полна. Докажем, что существуют такой автоморфизм $\varepsilon \in \mathrm{Aut}(Y)$, $\varepsilon \neq I$, и не обращающиеся в нуль непрерывные нормированные эрмитовы функции $f_j(y)$ на группе Y, удовлетворяющие уравнению (A.6), и не представимые в виде (i). По условию существует не регулярный автоморфизм $\delta \in \mathrm{Aut}(X)$, $\delta \neq I$. Обозначим $G = \mathrm{Ker}(\delta - I)$, $H = A(Y, G)$. Положим $\varepsilon = \widetilde{\delta}$. Так как $G \neq \{0\}$, то по 1.13(b)

$$H = \overline{(\varepsilon - I)Y} \neq Y. \tag{A.7}$$

Рассмотрим фактор-группу Y/H. Из (A.7) вытекает, что $Y/H \neq \{0\}$. Поскольку $\varepsilon(H) \subset H$, то ε индуцирует некоторый гомоморфизм $\widehat{\varepsilon}$ на фактор-группе Y/H. Так как для любого $y \in Y$ выполнено $\varepsilon y - y \in H$, то $\widehat{\varepsilon}[y] = [y]$ для любого $[y] \in Y/H$, т.е. $\widehat{\varepsilon} = I$. Пусть $h([y])$ — произвольная не обращающаяся в нуль непрерывная нормированная эрмитова функция на фактор-группе Y/H. Положим

$$f_1(y) = h([y]), \quad f_2(y) = 1/h([y]).$$

Очевидно, что $f_j(y)$ – не обращающиеся в нуль непрерывные нормированные эрмитовы функции на группе Y. Так как $\widehat{\varepsilon} = I$, то, очевидно, что функции $f_j(y)$ удовлетворяют уравнению (A.6). Очевидно также, что функцию $h([y])$ можно выбрать таким образом, чтобы функции $f_j(y)$ не были представимы в виде (i).

$(b) \Rightarrow (a)$. Пусть группа X регулярно полна. Возьмем произвольный автоморфизм $\varepsilon \in \mathrm{Aut}(Y)$, $\varepsilon \neq I$. Поскольку автоморфизм $\delta = \widetilde{\varepsilon}$ регулярен, то $G = Ker(\delta - I) = \{0\}$, а значит, в силу 1.13$(b)$

$$A(Y, G) = \overline{(\varepsilon - I)Y} = Y. \tag{A.8}$$

По лемме 12.3 каждая из функций $f_j(y)$ удовлетворяет уравнению 12.3(ii) при $u \in (\varepsilon - I)Y$, $v \in Y$. Так как функция $f_j(y)$ непрерывна, то из (A.8) следует, что функция $f_j(y)$ удовлетворяет уравнению 12.3(ii) при любых $u,\ v \in Y$. Заметим теперь, что $X \neq X_{(2)}$. Действительно, если $X = X_{(2)}$, то по теореме 1.11.5 группа X топологически изоморфна группе

$$\mathbb{Z}(2)^{\mathfrak{n}} \times \mathbb{Z}(2)^{\mathfrak{m}*}, \tag{A.9}$$

где $\mathfrak{n}$ и $\mathfrak{m}$ – произвольное кардинальное число, $\mathbb{Z}(p)^{\mathfrak{n}}$ рассматривается в обычной топологии, а $\mathbb{Z}(p)^{\mathfrak{m}*}$ рассматривается в дискретной топологии. Поскольку $X \ncong \mathbb{Z}(2)$ и X – группа вида (A.9), то такая группа не является регулярно полной. Поскольку $X \neq X_{(2)}$, то $-I \neq I$. Так как группа X регулярно полна, то, в частности, $-I$ – регулярный автоморфизм группы X. Следовательно, $X_{(2)} = \{0\}$. Искомое представление для функции $f_j(y)$ вытекает из предложения A.4. □

Пусть $\varepsilon \in \mathrm{Aut}(Y)$, $\delta = \widetilde{\varepsilon}$. Предположим, что группа X не регулярно полна. Доказательство необходимости в теореме A.11 показывает, что условие регулярности автоморфизма δ является необходимым, для того чтобы все не обращающиеся в нуль непрерывные нормированные эрмитовы решения уравнения $(A.6)$ были представимы в виде A.11(i). Пусть автоморфизм $\delta \in \mathrm{Aut}(X)$ регулярен. Возникает естественный вопрос: для каких групп Y из регулярности δ следует, что все не обращающиеся в нуль непрерывные нормированные эрмитовы решения уравнения (A.6) имеют видA.11(i)? Естественно при изучении этого вопроса ограничиться такими группами Y, которые обладают тем свойством, что на группе X существуют регулярные автоморфизмы. В частности, для таких групп, очевидно, подгруппа $X_{(2)}$ топологически не изоморфна $\mathbb{Z}(2)$. Нам понадобятся несколько лемм.

A.12. Лемма. *Пусть $\varepsilon \in \mathrm{Aut(Y)}$ и $\delta = \widetilde{\varepsilon}$ – регулярный автоморфизм. Предположим, что не обращающиеся в нуль непрерывные нормированные эрмитовы функции $f_j(y)$ удовлетворяют уравнению* (A.6). *Тогда они представимы в виде*

$$(i) \qquad f_j(y) = m_j(y)(x_j, y)\exp\{\varphi_j(y)\},$$

где $m_j(y)$ – $\overline{Y^{(2)}}$-инвариантные непрерывные нормированные эрмитовы функции, удовлетворяющие уравнению (A.6) *и принимающие значения* ± 1, $x_j \in X$, $\varphi_j(y)$ *– вещественнозначные непрерывные функции, удовлетворяющая уравнению* 2.16(ii).

Доказательство. Положим $\varphi_j(y) = \log|f_j(y)|$. Принимая во внимание, что δ — регулярный автоморфизм, и рассуждая так же, как и при доказательстве достаточности в теореме A.11, мы получаем, что каждая из функций $f_j(y)$ удовлетворяет уравнению 12.3(ii) при любых $u,\ v \in Y$. Учитывая эрмитовость функций $f_j(y)$ из уравнения 12.3(ii) следует, что функция $\varphi_j(y)$ удовлетворяют уравнению 2.16(ii). Очевидно, что функция $\varphi_j(y)$ непрерывна.

Положим $l_j(y) = f_j(y)/|f_j(y)|$. Очевидно, что каждая из функций $l_j(y)$ удовлетворяет условиям следствия 9.12. Применяя следствие 9.12, получаем требуемое утверждение. □

Введем следующее обозначение. Пусть $Y = (\mathbb{Z}(2))^n$, $\varepsilon \in \mathrm{Aut}(Y)$, $y \in Y$. Обозначим через $|y|$ такое натуральное k, что элементы $y, \varepsilon y, \dots, \varepsilon^{k-1}y$ независимы, а $\varepsilon^k y \in \langle y, \varepsilon y, \dots, \varepsilon^{k-1}y\rangle$.

A.13. Лемма. *Пусть $Y = (\mathbb{Z}(2))^n$, где $n = 2, 3, 5$. Пусть ε — регулярный автоморфизм группы Y. Тогда существует такой элемент $\zeta \in Y$, что $|\zeta| = n$.*

Доказательство. Заметим вначале, что не существует подгруппы A в Y такой, что $A \cong (\mathbb{Z}(2))^{n-1}$ и A инвариантна относительно автоморфизма ε. Действительно, пусть такая подгруппа

A существует. Возьмем $y_0 \notin A$. Тогда $\varepsilon y_0 = y_0 + a$, где $a \in A$ и $a \neq 0$. Поскольку автоморфизм ε регулярен и группа Y конечна, то $\varepsilon - I \in \mathrm{Aut}(Y)$. С другой стороны $(\varepsilon - I)y_0 = a \in A$, что невозможно, так как ограничение автоморфизма $\varepsilon - I$ на подгруппу A является автоморфизмом подгруппы A. Из этого замечания вытекает существование искомого элемента $\zeta \in Y$ в случае, когда $Y = (\mathbb{Z}(2))^2$ и $Y = (\mathbb{Z}(2))^3$.

Пусть $Y = (\mathbb{Z}(2))^5$. Допустим, что для любого $y \in Y$ выполнено $|y| < 5$, и предположим вначале, что существует такой элемент $y_0 \in Y$, что $|y_0| = 4$. Рассмотрим подгруппу $A = \langle y_0,\ \varepsilon y_0,\ \varepsilon^2 y_0,\ \varepsilon^3 y_0\rangle$. Тогда $A \cong (\mathbb{Z}(2))^4$, и A инвариантна относительно ε, что, как отмечено выше, невозможно. Следовательно, $|y| \leq 3$ для любого $y \in Y$. Предположим, что $|y_1| = 3$ для некоторого $y_1 \in Y$. Тогда элементы $y_1, y_2 = \varepsilon y_1, y_3 = \varepsilon^2 y_1$ независимы, и $\varepsilon y_3 \in \langle y_1, y_2, y_3\rangle = Y_1$. Выберем элемент $y_4 \notin Y_1$. Положим $y_5 = \varepsilon y_4$. Очевидно, что $y_5 \notin Y_1$. Предположим вначале, что $\varepsilon y_5 \notin \langle y_4, y_5\rangle$. Тогда $|y_4| = 3$. Обозначим $Y_2 = \langle y_4, y_5, \varepsilon y_5\rangle$. Подгруппа Y_2 по построению инвариантна относительно ε. Следовательно, подгруппа $Y_3 = Y_1 \cap Y_2$ также инвариантна относительно ε. Поскольку $Y_3 \cong \mathbb{Z}(2)$, то инвариантность подгруппы Y_3 относительно ε противоречит регулярности ε. Следовательно, $\varepsilon y_5 \in \langle y_4, y_5\rangle$, а значит, $\varepsilon y_5 = y_4 + y_5$. Действительно, если $\varepsilon y_5 = y_4$, то $\varepsilon(y_4 + y_5) = y_4 + y_5$, что противоречит регулярности ε. Заметим теперь, что если $\varepsilon y_3 = y_1 + y_2 + y_3$, то $\varepsilon(y_1 + y_3) = y_1 + y_3$, что противоречит регулярности ε. Значит, εy_3 может равняться либо $y_1 + y_2$, либо $y_1 + y_3$. Полагая $\widetilde{y} = y_1 + y_4$, легко видеть, что в каждом из этих случаев $|\widetilde{y}| = 5$, что противоречит предположению. Значит, $|y| \leq 2$ для любого $y \in Y$. Поэтому существуют такие элементы $z_j \in Y, j = 1, 2, 3, 4$, что $\varepsilon z_1 = z_2,\ \varepsilon z_2 = z_1 + z_2,\ \varepsilon z_3 = z_4,\ \varepsilon z_4 = z_3 + z_4$, а следовательно, подгруппа $A = \langle z_1, z_2, z_3, z_4\rangle \cong (\mathbb{Z}(2))^4$ и A инвариантна относительно ε, что, как отмечено выше, невозможно. $\square$

A.14. Лемма. *Пусть $Y = (\mathbb{Z}(2))^n$, где $n \geq 2$. Пусть $e_1, \dots, e_n$ — образующие группы Y и ε — автоморфизм группы Y такой, что $\varepsilon e_i = e_{i+1},\ i = 1, 2, \dots, n-1$. Если функции $f_j(y)$ нормированы, удовлетворяют уравнению* (A.6) *и принимают значения ± 1, то $f_j(y)$ — характеры группы Y.*

Доказательство. Очевидно, что существуют элементы $x_1, x_2 \in X$ такие, что $(x_1, e_i) = f_1(e_i),\ (x_2, e_i) = f_2(e_i),\ i = 1, 2, \dots, n$. Поскольку характеры $(x_1, y),\ (x_2, y)$ удовлетворяют уравнению (A.6), то мы можем рассмотреть новые функции $\widetilde{f}_1(y) = f_1(y)(x_1, y),\ \widetilde{f}_2(y) = f_2(y)(x_2, y)$, также удовлетворяющие уравнению (A.6) и условиям $\widetilde{f}_1(e_i) = \widetilde{f}_2(e_i) = 1,\ i = 1, 2, \dots, n$. Проверим, что в таком случае $\widetilde{f}_1(y) = \widetilde{f}_2(y) = 1$ для всех $y \in Y$. Тем самым, лемма будет доказана.

Обозначим $A_k = \langle e_1, \dots, e_k\rangle$. Доказательство проведем индукцией по k. При $y \in A_1$ утверждение справедливо. Пусть утверждение справедливо при $y \in A_k$. Возьмем произвольный элемент $y \in A_{k+1} \setminus A_k$. Тогда $y = z + e_{k+1}$ при некотором $z \in A_k$. Положим в (A.6) $u = z, v = e_k$. Тогда правая часть в (A.6) равна 1 и $\widetilde{f}_1(u+v) = 1$, так как $u+v \in A_k$. Следовательно, $\widetilde{f}_2(u+\varepsilon v) = \widetilde{f}_2(y) = 1$. Положим теперь в (A.6) $u = e_{k+1},\ v = z$. Так как $\varepsilon v \in A_{k+1}$, то $\widetilde{f}_2(\varepsilon v) = \widetilde{f}_2(u + \varepsilon v) = 1$. Поскольку правая часть в (A.6) равна 1, то следовательно, $\widetilde{f}_1(u + v) = \widetilde{f}_1(y) = 1$. Таким образом, $\widetilde{f}_1(y) = \widetilde{f}_2(y) = 1$ при $y \in A_{k+1}$. $\square$

A.15. Теорема. *Предположим, что группа X удовлетворяет условию*:

(*i*) *либо $X_{(2)} = \{0\}$, либо $X_{(2)} \cong (\mathbb{Z}(2))^n$, где $n = 2, 3, 5$.*

Пусть $\varepsilon \in \mathrm{Aut(Y)}$ и $\delta = \widetilde{\varepsilon}$ – регулярный автоморфизм. Если не обращающиеся в нуль непрерывные нормированные эрмитовы функции $f_j(y)$ удовлетворяют уравнению (A.6), *то они имеют вид* A.11(i).

Доказательство Учитывая лемму A.12, достаточно доказать, что функции $m_j(y)$ в представлении A.12(i) – характеры группы Y. Если $X_{(2)} = \{0\}$, то по теореме 1.9.5 $\overline{Y^{(2)}} = Y$. Поскольку по лемме A.12, функции $m_j(y) = 1$ при $y \in \overline{Y^{(2)}}$, то в этом случае теорема доказана.

Пусть $X_{(2)} \cong (\mathbb{Z}(2))^n$, где $n = 2, 3, 5$. Как доказано в лемме A.12, функции $m_j(y)$ инвариантны относительно подгруппы $\overline{Y^{(2)}}$. Следовательно, функции $m_j(y)$ индуцируют некоторые нормированные функции $\widetilde{m_j}(y)$ на фактор-группе $Y/\overline{Y^{(2)}}$, также удовлетворяющие уравнению (A.6) и принимающие значения ± 1. Заметим, что по теоремам 1.9.2 и 1.9.5 $(Y/\overline{Y^{(2)}})^* \cong X_{(2)}$. Из условия ($i$) тогда следует, что $Y/\overline{Y^{(2)}} \cong (\mathbb{Z}(2))^n$, где $n = 2, 3, 5$. Так как $\varepsilon \in \mathrm{Aut}(\overline{\mathrm{Y}^{(2)}})$, то ε индуцирует некоторый автоморфизм $\widehat{\varepsilon}$ на фактор-группе $Y/\overline{Y^{(2)}}$. Автоморфизм $\widehat{\varepsilon}$ является автоморфизмом, сопряженным к сужению регулярного автоморфизма δ на подгруппу $X_{(2)}$. Поскольку подгруппа $X_{(2)}$ конечна, получаем, что $\widehat{\varepsilon}$ является регулярным автоморфизмом. По лемме A.13 существует элемент $\zeta \in Y/\overline{Y^{(2)}}$ такой, что $|\zeta| = n$. Положим $e_i = \widehat{\varepsilon}^{i-1}\zeta,\ i = 1, 2, \dots, n$. Тогда e_i — образующие группы $Y/\overline{Y^{(2)}}$ и $\widehat{\varepsilon} e_i = e_{i+1},\ i = 1, 2, \dots, n-1$. По лемме A.14, примененной к группе $Y/\overline{Y^{(2)}}$, функции $\widetilde{m_j}(y)$ – характеры фактор-группы $Y/\overline{Y^{(2)}}$, а следовательно, функции $m_j(y)$ – характеры группы Y. □

A.16. Замечание. Условие A.15(i) является существенным для справедливости теоремы A.15. Пусть $Y = (\mathbb{Z}(2))^n$, где либо $n = 4$ либо $n \geq 6$. Тогда $X = X_{(2)} \cong (\mathbb{Z}(2))^n$ и условие A.15(i) не выполнено. Предположим вначале, что $n = 4$. Обозначим через $y = (a_1, a_2, a_3, a_4)$, где $a_i \in \mathbb{Z}(2)$, элементы группы Y. Рассмотрим на группе Y автоморфизм ε вида

$$\varepsilon(a_1, a_2, a_3, a_4) = (a_2, a_1 + a_2, a_4, a_3 + a_4). \tag{A.10}$$

Обозначим $\delta = \widetilde{\varepsilon}$. Очевидно, что автоморфизм ε регулярен. Поскольку группа Y конечна, то и автоморфизм δ также регулярен. Рассмотрим на группе Y функции вида

$$f_1(a_1, a_2, a_3, a_4) = \exp\{\pi i(a_1a_3 + a_1a_4 + a_2a_3\},$$

$$f_2(a_1, a_2, a_3, a_4) = \exp\{\pi i(a_1a_4 + a_2a_3 + a_2a_4\}.$$

Очевидно, что функции $f_j(y)$ не обращаются в нуль, нормированы и эрмитовы. Непосредственно проверяем, что функции $f_j(y)$ удовлетворяют уравнению (A.6). Поскольку функции $f_j(y)$ не являются характерами группы Y, то они не представимы в виде $A.11(i)$. Таким образом, на группе $Y = (\mathbb{Z}(2))^4$ существует автоморфизм $\varepsilon \in \mathrm{Aut}(Y)$, который обладает следующими свойствами:

(a) $\delta = \widetilde{\varepsilon}$ — регулярный автоморфизм;

(b) существуют не обращающиеся в нуль нормированные эрмитовы решения уравнения (A.6), которые не представимы в виде A.11(i).

Пусть теперь $n \geq 6$. Тогда $Y = Y_1 \times Y_2$, где $Y_1 = (\mathbb{Z}(2))^4,\ Y_2 = (\mathbb{Z}(2))^k,\ k \geq 2$. Положим $X_j = Y_j^*,\ j = 1, 2$. Заметим, что существует автоморфизм $\alpha \in \mathrm{Aut}(Y_2)$ такой, что $\widetilde{\alpha}$ — регулярный автоморфизм группы X_2. Стандартные рассуждения показывают, что существование автоморфизма $\varepsilon \in \mathrm{Aut}(Y)$, обладающего свойствами (a) и (b), следует из существования такого автоморфизма в случае $n = 4$.

С другой стороны, пусть $Y=(\mathbb{Z}(2))^n,\ n\geq 2$. Заметим, что если мы положим в лемме A.14 $\varepsilon e_n=e_1+e_n$, то ε – регулярный автоморфизм. Следовательно, и δ — регулярный автоморфизм. Из лемм A.12 и A.14 тогда следует, что существует автоморфизм $\varepsilon\in\mathrm{Aut}((\mathbb{Z}(2))^n)$ такой, что все не обращающиеся в нуль нормированные эрмитовы функции $f_j(y)$, удовлетворяющие уравнению (A.6), имеют вид $A.11(i)$.

Мы дополним замечание A.16 следующим утверждением.

A.17. Предложение. *Существует группа Y, обладающая следующими свойствами:*

(*a*) *существует автоморфизм $\varepsilon\in\mathrm{Aut}(Y)$ такой, что $\delta=\widetilde{\varepsilon}$ — регулярный автоморфизм группы X;*

(*b*) *для любого автоморфизма $\varepsilon\in\mathrm{Aut}(Y)$ у уравнения* (A.6) *существуют не обращающиеся в нуль непрерывные нормированные эрмитовы решения, не представимые в виде* A.11(i).

Доказательство. Следуя [80, § 116, пример 4]), возьмем два непересекающихся множества $\{p_i\}$ и $\{q_i\}$ простых чисел, для которых $p_i\equiv 1 \bmod 4$ и $q_i\equiv 1 \bmod 6$. Выберем целые числа k_i и l_i, удовлетворяющие условиям $k_i^2\equiv 1 \bmod p_i$ и $l_i^2+l_i\equiv -1 \bmod q_i$. Положим

$$Y=\langle a,b,c,d,\ p_i^{-1}(a+k_ib),\ p_i^{-1}(c+k_id),\ q_i^{-1}(a+l_ic),\ q_i^{-1}(d+l_ib)\ \text{для всех } i\rangle.$$

Группа Y счетна. Рассмотрим ее в дискретной топологии. Как показано в [80, § 116] группа $\mathrm{Aut}(Y)$ состоит из следующих автоморфизмов:

$\varepsilon_1=I;$

$\varepsilon_2=-I;$

$\varepsilon_3: a\mapsto b,\ b\mapsto -a,\ c\mapsto b-d,\ d\mapsto c-a;$

$\varepsilon_4=-\varepsilon_3;$

$\varepsilon_5: a\mapsto c,\ b\mapsto d,\ c\mapsto c-a,\ d\mapsto d-b;$

$\varepsilon_6=-\varepsilon_5;$

$\varepsilon_7: a\mapsto d,\ b\mapsto -c,\ c\mapsto b,\ d\mapsto -a;$

$\varepsilon_8=-\varepsilon_7;$

$\varepsilon_9: a\mapsto a-c,\ b\mapsto b-d,\ c\mapsto a,\ d\mapsto b;$

$\varepsilon_{10}=-\varepsilon_9;$

$\varepsilon_{11}: a\mapsto b-d,\ b\mapsto c-a,\ c\mapsto -d,\ d\mapsto c;$

$\varepsilon_{12}=-\varepsilon_{11}.$

Заметим, что Y — группа без кручения конечного ранга. Поэтому из 1.13(b) вытекает, что для любого автоморфизма $\varepsilon\in\mathrm{Aut}(Y)$ утверждения: $(\varepsilon-I)\in\mathrm{Aut}(Y)$ и $\delta=\widetilde{\varepsilon}$ — регулярный топологический автоморфизм группы X – эквивалентны. Отсюда следует, что у группы X существует лишь два регулярных топологических автоморфизма: $\delta_5=\widetilde{\varepsilon}_5$ и $\delta_9=\widetilde{\varepsilon}_9$. Таким образом, утверждение (a) доказано. Докажем (b). Как следует из доказательства необходимости в теореме A.11, для тех автоморфизмов $\varepsilon\in\mathrm{Aut}(Y)$, для которых автоморфизм $\delta=\widetilde{\varepsilon}$ не регулярен, у уравнения (A.6) существуют не обращающиеся в нуль непрерывные нормированные эрмитовы решения, не представимые в виде $A.11(i)$. Осталось доказать, что автоморфизмы ε_5 и ε_9, для которых δ_5 и δ_9 регулярны, также обладают этим свойством. Обозначим через $\widehat{\varepsilon}_5,\ \widehat{\varepsilon}_9$ автоморфизмы, индуцированные автоморфизмами $\varepsilon_5,\ \varepsilon_9$ на фактор-группе $Y/Y^{(2)}$. Очевидно, что $Y/Y^{(2)}\cong(\mathbb{Z}(2))^4$.

Легко проверить, что при подходящем выборе образующих в фактор-группе $Y/Y^{(2)}$ автоморфизмы $\widehat{\varepsilon}_5$, $\widehat{\varepsilon}_9$ действуют на $Y/Y^{(2)}$ по формуле (A.10). Следовательно, как отмечено в замечании A.16, у уравнения (A.6) для $\varepsilon = \widehat{\varepsilon}_5$ и $\varepsilon = \widehat{\varepsilon}_9$ существуют не обращающиеся в нуль нормированные эрмитовы решения, принимающие значения ± 1 и не представимые в виде $A.11(i)$. Эти решения можно рассматривать, как функции на Y, которые обладают теми же свойствами по отношению к автоморфизмам ε_5 и ε_9. $\square$

A.18. Перейдем теперь к изучению не обращающихся в нуль измеримых нормированных эрмитовых решений уравнения (A.6). Очевидно, что любой автоморфизм $\varepsilon \in \mathrm{Aut}(Y)$ можно рассматривать и как автоморфизм группы Y_d. Пусть $\delta \in \mathrm{Aut}(X)$. Рассмотрим сопряженный автоморфизм $\widetilde{\delta} \in \mathrm{Aut}(Y)$, как автоморфизм группы Y_d. Поскольку $bX \cong (Y_d)^*$, то обозначим через $\bar{\delta}$ топологический автоморфизм группы bX, сопряженный к автоморфизму $\widetilde{\delta} \in \mathrm{Aut}(Y_d)$. Группа X является плотной подгруппой в группе bX и легко видеть, что ограничение автоморфизма $\bar{\delta}$ на подгруппу X совпадает с автоморфизмом δ.

Автоморфизм $\delta \in \mathrm{Aut}(X)$ называется *сильно регулярным*, если автоморфизм $\bar{\delta} \in \mathrm{Aut}(bX)$ регулярен.

A.19. Пример. Приведем пример группы X и регулярного, но не сильно регулярного автоморфизма $\delta \in \mathrm{Aut}(X)$. Для этого модифицируем слегка конструкцию [85, (24.44)]. Обозначим через Y множество последовательностей (a_k), где a_k – корень степени 2^p из единицы при каком-нибудь натуральном p, причем $a_k \neq \pm 1$ лишь для конечного числа индексов k. Очевидно, что Y – абелева группа относительно операции умножения. Для конечного множества Λ индексов k пусть U_Λ – множество всех таких (a_k), что $a_k = 1$ при $k \in \Lambda$ и $a_k = \pm 1$ при $k \notin \Lambda$. Систему всех U_Λ будем считать открытой базой единицы (1_k). Относительно введенной топологии Y – локально компактная абелева группа, удовлетворяющая второй аксиоме счетности. Заметим, что $Y^{(2)} \neq Y$ и $\overline{Y^{(2)}} = Y$. Пусть $X = Y^*$, а автоморфизм $\delta \in \mathrm{Aut}(X)$ имеет вид $\delta x = 3x$. Пусть $\varepsilon = \widetilde{\delta}$. Тогда $\varepsilon y = 3y,\ y \in Y$ и $\bar{\delta} x = 3x,\ x \in bX$. Поскольку образ $(\varepsilon - I)Y = Y^{(2)}$ плотен в Y, то по 1.13(b) $X_{(2)} = \{0\}$, а значит, δ – регулярный автоморфизм. Поскольку $(bX)^* \cong Y_d$, то по теоремам 1.9.2 и 1.9.5 $\big((bX)_{(2)}\big)^* \cong Y_d/(Y_d)^{(2)}$. Поэтому, из $Y^{(2)} \neq Y$ вытекает, что $(bX)_{(2)} \neq \{0\}$. Следовательно, автоморфизм $\bar{\delta} \in \mathrm{Aut}(bX)$ не регулярен.

Группа X называется *сильно регулярно полной*, если все ее топологические автоморфизмы, кроме тождественного, сильно регулярны.

A.20. Теорема. *Пусть группа Y топологически не изоморфна $\mathbb{Z}(2)$. Пусть ε – произвольный топологический автоморфизм группы Y, $\varepsilon \neq I$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(a) *любые не обращающиеся в нуль измеримые нормированные эрмитовы функции $f_j(y)$ на группе Y, удовлетворяющие уравнению* (A.6), *представимы в виде* A.11(i)*;*

(a) *группа X сильно регулярно полна.*

Доказательство. (a) $\Rightarrow$ (b). Пусть группа X не сильно регулярно полна. Докажем, что существуют такой автоморфизм $\varepsilon \in \mathrm{Aut}(Y)$, $\varepsilon \neq I$, и не обращающиеся в нуль измеримые нормированные эрмитовы функции $f_j(y)$ на группе Y, удовлетворяющие уравнению (A.6) и не представимые в виде A.11(i). По условию существует не сильно регулярный автоморфизм $\delta \in \mathrm{Aut}(X)$.

Положим $\varepsilon = \widetilde{\delta}$. Обозначим $H = (\varepsilon - I)Y$. Так как δ не сильно регулярен, то $H \neq Y$. Пусть $a \in \mathbb{R},\ a \neq 0,\ a \neq \pm 1$. Рассмотрим на группе Y функции

$$f_1(y) = \begin{cases} 1, \text{ если} & y \in H, \\ a, \text{ если} & y \notin H, \end{cases} \qquad f_2(y) = \begin{cases} 1, \text{ если} & y \in H, \\ 1/a, \text{ если} & y \notin H. \end{cases}$$

Очевидно, что функции $f_j(y)$ не обращаются в нуль, измеримы, нормированы и эрмитовы. Проверим, что функции $f_j(y)$ удовлетворяют уравнению (A.6). Так как $\varepsilon H = H$, то правая часть уравнения (A.6) при любых $u, v \in Y$ равна 1. Предположим, что существуют такие $u, v \in Y$, что левая часть уравнения (A.6) не равна 1. Тогда либо $u + v \in H,\ u + \varepsilon v \notin H$, либо $u + v \notin H,\ u + \varepsilon v \in H$. В каждом из этих случаев получаем, что $(\varepsilon - I)v \notin H$, что невозможно. Итак, функции $f_j(y)$ удовлетворяют уравнению (A.6) и, очевидно, не представимы в виде A.11(i)).

$(b) \Rightarrow (a)$. Рассуждая аналогично доказательству $(b) \Rightarrow (a)$ в теореме A.11, получаем, что из сильной регулярной полноты группы X вытекает, что для любого автоморфизма $\varepsilon \in \mathrm{Aut}(Y),\ \varepsilon \neq I$, выполнено $(\varepsilon - I)Y = Y$. Кроме того, $(bX)_{(2)} = \{0\}$. Утверждение теоремы вытекает теперь из леммы 12.3 и предложения A.8. $\square$

Пусть $\varepsilon \in \mathrm{Aut}(Y),\ \delta = \widetilde{\varepsilon}$. Предположим, что группа X не сильно регулярно полна. Доказательство необходимости в теореме A.20 показывает, что условие сильной регулярности автоморфизма δ является необходимым, для того чтобы все не обращающиеся в нуль измеримые нормированные эрмитовы решения уравнения (A.6), были представимы в виде A.11(i). Пусть автоморфизм $\delta \in \mathrm{Aut}(X)$ сильно регулярен. Возникает естественный вопрос: для каких групп Y из сильной регулярности δ следует, что все не обращающиеся в нуль измеримые нормированные эрмитовы решения уравнения (A.6) имеют видA.11(i)? Естественно, при изучении этого вопроса ограничиться такими группами Y, которые обладают тем свойством, что на группе X существуют сильно регулярные автоморфизмы. В частности, для таких групп, очевидно, подгруппа $(bX)_{(2)}$ топологически не изоморфна $\mathbb{Z}(2)$.

A.21. Теорема. *Предположим, что группа X удовлетворяет условию*:

(i) *либо* $(bX)_{(2)} = \{0\}$, *либо* $(bX)_{(2)} \cong (\mathbb{Z}(2))^n$, *где* $n = 2, 3, 5$.

Пусть $\varepsilon \in \mathrm{Aut(Y)}$ *и* $\delta = \widetilde{\varepsilon}$ *– сильно регулярный автоморфизм. Если не обращающиеся в нуль измеримые нормированные эрмитовы функции $f_j(y)$ удовлетворяют уравнению* (A.6), *то они имеют вид* A.11(i).

Доказательство. Положим $\varphi_j(y) = \log |f_j(y)|$. Рассуждая аналогично доказательству $(b) \Rightarrow (a)$ в теореме A.11, получаем, что из сильной регулярности автоморфизма δ вытекает, что $Y = (\varepsilon - I)Y$. Применяя лемму 12.3, получаем, что функции $f_j(y)$ удовлетворяют уравнению 12.3(ii) при любых $u,\ v \in Y$. Поскольку функции $f_j(y)$ нормированные эрмитовы, то функции $\varphi_j(y)$ удовлетворяют уравнению 2.14(ii). Так как функции $\varphi_j(y)$ измеримы, то по лемме A.5 функции $\varphi_j(y)$ непрерывны.

Рассуждая аналогично доказательству $(b) \Rightarrow (a)$ в предложении A.8, мы видим, что из условия (i) вытекает замкнутость подгруппы $Y^{(2)}$. Далее следуем схеме доказательства теоремы A.15. $\square$

Приложение B

Гауссовские распределения в смысле Бернштейна на топологических неабелевых группах

Пусть X – топологическая неабелева группа, удовлетворяющая второй аксиоме счетности. В этом приложении мы рассмотрим гауссовские распределения в смысле Бернштейна на группе X. Мы изучим случаи дискретных, компактных, нильпотентных, а также некоторых разрешимых групп. Оказывается, что для указанных классов групп носитель гауссовского распределения в смысле Бернштейна содержится в некоторой абелевой подгруппе группы X. Мы будем использовать мультипликативную запись для групповой операции, а нейтральный элемент группы обозначать через e.

B.1. Определение. Распределение μ на группе X называется *гауссовским распределением в смысле Бернштейна*, если из того, что ξ_1 и ξ_2 – независимые одинаково распределенные случайные величины со значениями в группе X и с распределением μ, следует, что случайные векторы $(\xi_1\xi_2, \xi_2\xi_1)$ и $(\xi_1{\xi_2}^{-1}, {\xi_2}^{-1}\xi_1)$ независимы.

Легко видеть, что если группа X абелева, то это определение совпадает с определением 9.1. Докажем вначале некоторые общие свойства гауссовских распределений в смысле Бернштейна. Обозначим через $[x, y]$ коммутатор

$$[x, y] = xyx^{-1}y^{-1},\ x, y \in X.$$

Окрестность W точки e будем называть инвариантной, если $W = xWx^{-1}$ для всех $x \in X$.

B.2. Предложение. *Пусть ξ_1 и ξ_2 – независимые одинаково распределенные случайные величины со значениями в группе X и с распределением μ. Предположим, что μ – гауссовское распределение в смысле Бернштейна. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(I) *Вероятностная мера*

$$P\{\omega \in \Omega : \xi_1(\omega)\xi_2(\omega) = \xi_2(\omega)\xi_1(\omega)\}$$

либо равна 0*, либо* 1.

(II) *Пусть W – симметричная инвариантная окрестность точки e. Тогда вероятностная мера*

$$P\{\omega \in \Omega : [\xi_1(\omega)\xi_2(\omega)] \in W\}$$

либо равна 0*, либо* 1.

Доказательство. (I) Из определения B.1 вытекает что измеримые множества

$$\{\omega \in \Omega : \xi_1(\omega)\xi_2(\omega) = \xi_2(\omega)\xi_1(\omega)\}$$

и

$$\{\omega \in \Omega : \xi_1(\omega){\xi_2}^{-1}(\omega) = {\xi_2}^{-1}(\omega)\xi_1(\omega)\}$$

независимы. С другой стороны, они, очевидно, совпадают. Отсюда следует, что вероятностная мера

$$P\{\omega \in \Omega : \xi_1(\omega)\xi_2(\omega) = \xi_2(\omega)\xi_1(\omega)\}$$

либо равна 0, либо 1. Таким образом, (I) доказано.

(II) Обозначим

$$A = \{\omega \in \Omega : [\xi_1(\omega)\xi_2(\omega)] \in W\} = \{\omega \in \Omega : {\xi_2}^{-1}(\omega)[\xi_1(\omega)\xi_2(\omega)]\xi_2(\omega) \in W\}$$

$$= \{\omega \in \Omega : {\xi_2}^{-1}(\omega)\xi_1(\omega)\xi_2(\omega){\xi_1}^{-1}(\omega) \in W\}$$

и

$$B = \{\omega \in \Omega : \xi_1(\omega){\xi_2}^{-1}(\omega){\xi_1}^{-1}(\omega)\xi_2(\omega) \in W\} = \{\omega \in \Omega : [\xi_1(\omega){\xi_2}^{-1}(\omega)] \in W\}.$$

Поскольку $W = W^{-1}$, то $A = B$.

С другой стороны, так как $[\xi_1\xi_2] = (\xi_1\xi_2)(\xi_2\xi_1)^{-1}$ и $[\xi_1{\xi_2}^{-1}] = (\xi_1{\xi_2}^{-1})({\xi_2}^{-1}\xi_1)^{-1}$, то из определения B.1 вытекает, что измеримые множества A и B независимы. Следовательно, справедливо (II). □

Для дальнейшего нам понадобится также следующая общая лемма.

B.3. Лемма. *Пусть ξ_1 и ξ_2 – независимые одинаково распределенные случайные величины со значениями в группе X и с распределением μ. Если*

$$P\{\omega \in \Omega : \xi_1(\omega)\xi_2(\omega) = \xi_2(\omega)\xi_1(\omega)\} = 1, \tag{B.1}$$

то носитель $\sigma(\mu)$ содержится в некоторой абелевой подгруппе G группы X.

Доказательство. Пусть $x, y \in \sigma(\mu)$ и пусть $U_n, V_n,\ n \in \mathbb{N}$ открытые окрестности x и y соответственно, такие, что $U_{n+1} \subset U_n,\ V_{n+1} \subset V_n$ и $\bigcap\limits_n U_n = \{x\},\ \bigcap\limits_n V_n = \{y\}$. Поскольку $\mu(U_n) > 0,\ \mu(V_n) > 0$, то отсюда следует, что для любого натурального n существуют $s_n \in U_n$ и $t_n \in V_n$ такие, что $s_n t_n = t_n s_n$. Переходя здесь к пределу, когда $n \to \infty$, мы получаем, что $xy = yx$, т.е. элементы носителя перестановочны. Обозначая через G подгруппу, порожденную $\sigma(\mu)$, получаем требуемое утверждение. □

Рассмотрим теперь случай дискретных групп.

B.4. Теорема. *Пусть X – дискретная группа. Пусть ξ_1 и ξ_2 – независимые одинаково распределенные случайные величины со значениями в группе X и с распределением μ. Предположим, что μ – гауссовское распределение в смысле Бернштейна. Тогда $\sigma(\mu)$ содержится в некоторой абелевой подгруппе G группы X и $\mu = m_K * E_x$, где K – конечная подгруппа Корвина группы G и $x \in G$.*

Доказательство. Пусть $x \in X$ такой элемент группы X, что

$$P\{\omega \in \Omega : \xi_1(\omega) = x\} > 0.$$

Отсюда следует, что

$$P\{\omega \in \Omega : \xi_1(\omega)\xi_2(\omega) = \xi_2(\omega)\xi_1(\omega)\} \geq P\{\omega \in \Omega : \xi_1(\omega) = x,\ \xi_2(\omega) = x\} > 0.$$

Из предложения B.2 тогда вытекает (B.1). Применяя лемму B.3 получаем, что $\sigma(\mu) \subset G$, где G – некоторая абелева подгруппа группы X. Поскольку для дискретной группы G выполнено $c_G = \{0\}$, то утверждение теоремы вытекает из теоремы 9.9. □

Рассмотрим теперь случай компактных групп.

B.5. Теорема. *Пусть X – компактная группа. Пусть ξ_1 и ξ_2 – независимые одинаково распределенные случайные величины со значениями в группе X и с распределением μ. Предположим, что μ – гауссовское распределение в смысле Бернштейна. Тогда $\sigma(\mu)$ содержится в некоторой абелевой подгруппе G группы X.*

Доказательство. Поскольку группа X компактна, то существует база в точке e, состоящий из симметричных инвариантных окрестностей. Пусть W – такая окрестность. Отображение $p : X \times X \to X$, определяемое формулой $p(x, y) = [x, y]$, очевидно, непрерывно. Пусть $x_0 \in \sigma(\mu)$. Поскольку $p(x_0, x_0) = e$, то существует открытая окрестность U точки x_0 такая, что если $x, y \in U$, то $[x, y] \in W$. Отсюда вытекает, что

$$0 < P\{\omega \in \Omega : \xi_1(\omega) \in U,\ \xi_2(\omega) \in U\} \leq P\{\omega \in \Omega : [\xi_1(\omega)\xi_2(\omega)] \in W\}.$$

Поэтому, по предложению B.2

$$P\{\omega \in \Omega : [\xi_1(\omega)\xi_2(\omega)] \in W\} = 1.$$

Пусть $\{W_n\}$ – симметричные инвариантные окрестности точки e такие, что $W_{n+1} \subset U_n$ и $\bigcap\limits_n W_n = \{e\}$. Отсюда следует, что

$$P\{\omega \in \Omega : \xi_1(\omega)\xi_2(\omega) = \xi_2(\omega)\xi_1(\omega)\} = 1.$$

Утверждение теоремы вытекает теперь из леммы B.3. □

Учитывая теорему 9.9, мы можем сформулировать такое следствие из теоремы B.5.

B.6. Следствие. *Пусть X – компактная группа, μ – гауссовское распределение в смысле Бернштейна на X. Для того, чтобы $\mu \in \Gamma(G) * I_B(G)$, где G – некоторая компактная абелева подгруппа группы X, необходимо и достаточно, чтобы любая связная компактная абелева подгруппа группы X содержала не более одного элемента порядка 2.*

Перейдем теперь к рассмотрению нильпотентных групп. Нам понадобится следующая общая лемма.

B.7. Лемма. *Пусть ξ_1 и ξ_2 – независимые одинаково распределенные случайные величины со значениями в группе X и с распределением μ. Предположим, что существует такой элемент $x_0 \in X$, что*

$$(i) \qquad P\{\omega \in \Omega : \xi_1(\omega)\xi_2(\omega) = x_0\xi_2(\omega)\xi_1(\omega)\} = 1.$$

Тогда $x_0 = e$.

Доказательство. Пусть $x \in \sigma(\mu)$. Выберем последовательность $\{U_n\}$ окрестностей точки x такую, что $U_{n+1} \subset U_n$ и $\bigcap\limits_n U_n = \{x\}$. Для любого n существуют элементы $y_n, z_n \in U_n$ такие, что

$$y_n z_n = x_0 z_n y_n. \tag{B.2}$$

В противном случае мы бы имели

$$P\{\omega \in \Omega : \xi_1(\omega)\xi_2(\omega) \neq x_0\xi_2(\omega)\xi_1(\omega)\} \geq P\{\omega \in \Omega : \xi_1(\omega) \in U_n,\ \xi_2(\omega) \in U_n\} > 0,$$

что противоречит (i). Переходя в (B.2) к пределу, когда $y_n \to x,\ z_n \to x$ при $n \to \infty$, мы получаем $x^2 = x_0 x^2$. Отсюда, $x_0 = e$. □

B.8. Мы начнем изучение нильпотентного случая с рассмотрения нильпотентных групп X класса 2, т.е. с групп, удовлетворяющих условию

$$[x,y]z = z[x,y] \tag{B.3}$$

для любых элементов $x, y, z \in X$. Заметим, что из (B.3) вытекает равенство

$$y^{-1}[x, y^{-1}] = y^{-1}[y, x], \quad x, y \in X.$$

Отсюда

$$[x, y^{-1}] = [y, x], \quad x, y \in X. \tag{B.4}$$

B.9. Лемма. *Пусть X – нильпотентная группа класса 2. Пусть ξ_1 и ξ_2 – независимые одинаково распределенные случайные величины со значениями в группе X и с распределением μ. Предположим, что μ – гауссовское распределение в смысле Бернштейна. Тогда носитель $\sigma(\mu)$ содержится в некоторой абелевой подгруппе G группы X.*

Доказательство. Для любой группы X мы имеем $[y,x] = [x,y]^{-1}$, $x, y \in X$. Применяя (B.4), мы получаем

$$[x,y]^{-1} = [x, y^{-1}], \quad x, y \in X. \tag{B.5}$$

По условию случайные величины $[\xi_1, \xi_2]$ и $[\xi_1, {\xi_2}^{-1}]$ независимы. Аналогичное утверждение верно и для случайных величин $[\xi_1, \xi_2]^{-1}$ и $[\xi_1, {\xi_2}^{-1}]$. Учитывая (B.5) , отсюда следует, что случайная величина $[\xi_1, \xi_2]$ независима от самой себя. Следовательно, существует такой элемент $x_0 \in X$, что

$$P\{\omega \in \Omega : [\xi_1(\omega)\xi_2(\omega] = x_0\} = 1.$$

По лемме B.7 отсюда получаем $x_0 = e$. Утверждение леммы вытекает теперь из леммы B.3. □

B.10. Теорема. *Пусть X – нильпотентная группа. Пусть ξ_1 и ξ_2 – независимые одинаково распределенные случайные величины со значениями в группе X и с распределением μ. Предположим, что μ – гауссовское распределение в смысле Бернштейна. Тогда носитель $\sigma(\mu)$ содержится в некоторой абелевой подгруппе G группы X.*

Доказательство. Докажем индукцией по n, что утверждение теоремы справедливо для групп класса n. При $n = 2$ теореме верна по лемме B.9.

Пусть X – нильпотентная группа класса n и ξ_1 и ξ_2 – независимые одинаково распределенные случайные величины со значениями в группе X и с распределением μ. Предположим, что μ – гауссовское распределение в смысле Бернштейна. Пусть Z – центр группы X и

$$\pi : X \mapsto X/Z$$

– естественный гомоморфизм. Группа X/Z нильпотентная класса $n-1$. Независимые одинаково распределенные случайные величины $\pi(\xi_1)$ и $\pi(\xi_2)$ со значениями в X/Z имеют распределение $\pi(\mu)$, которое является гауссовским распределением в смысле Бернштейна. Следовательно, по предположению индукции носитель распределения $\pi(\mu)$ содержится в некоторой абелевой подгруппе F группы X/Z. Обозначим $K = \pi^{-1}(F)$. Если $x, y \in K$, то $\pi([x,y]) = [\pi(x), \pi(y)] = [e] \in X/Z$, поскольку $[x,y] \in \mathrm{Ker}\ \pi = Z$. Отсюда вытекает, что K – нильпотентная группа класса 2.

Другими словами, тот факт, что $K/(K \cap Z) \cong F$ – абелева группа, эквивалентен тому факту, что K – нильпотентная группа класса 2.

Поскольку случайные величины ξ_1 и ξ_2 принимают значения в K, утверждение теоремы вытекает из леммы B.9. □

Перейдем теперь к изучению разрешимых групп. Мы докажем, что для некоторых разрешимых групп X носитель гауссовского распределения в смысле Бернштейна также содержится в некоторой абелевой подгруппе группы X.

B.11. Простейший пример разрешимой группы – это так называемая "$ax + b$" группа. Рассмотрим множество $X = \{(a, b) : a > 0,\ b \in \mathbb{R}\}$. Определим на X умножение по формуле

$$(a_1, b_1)(a_2, b_2) = (a_1 a_2, a_1 b_2 + b_1).$$

Другими словами, умножение определяется, как суперпозиция функций $a_1 x + b_1$ и $a_2 x + b_2$. Заметим, что $e = (1, 0)$ и $(a, b)^{-1} = (a^{-1}, -a^{-1} b)$. Относительно так определенной операции X является разрешимой группой.

B.12. Предложение. *Пусть X – "$ax+b$" группа. Пусть ξ_1 и ξ_2 – независимые одинаково распределенные случайные величины со значениями в группе X и с распределением μ. Предположим, что μ – гауссовское распределение в смысле Бернштейна. Тогда носитель $\sigma(\mu)$ содержится в некоторой абелевой подгруппе G группы X.*

Доказательство. Легко проверить, что если $x = (a_1, b_1),\ y = (a_2,\ b_2) \in X$, то

$$[x, y] = (1, a_1 b_2 - a_2 b_1 + b_1 - b_2), \tag{B.6}$$

$$[x, y^{-1}]^{-1} = (1, {a_2}^{-1}(a_1 b_2 - a_2 b_1 + b_1 - b_2)). \tag{B.7}$$

Пусть $\xi_1 = (\alpha_1, \beta_1)$ и $\xi_2 = (\alpha_2, \beta_2)$ – независимые одинаково распределенные случайные величины со значениями в группе X и с распределением μ. Рассмотрим вещественные случайные величины

$$\gamma = \alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1 + \beta_1 - \beta_2$$

и

$$\delta = {\alpha_2}^{-1} \gamma.$$

Очевидно, мы имеем

$$[{\xi_2}^{-1}, \xi_1] = [\xi_1, {\xi_2}^{-1}]^{-1} = (1, {\alpha_2}^{-1} \gamma) = (1, \delta).$$

Случайные величины $[{\xi_1}^{-1}, \xi_2]$ и $[{\xi_2}^{-1}, \xi_1]$ одинаково распределены, поскольку одинаково распределены случайные векторы (ξ_1, ξ_2) и (ξ_2, ξ_1). С другой стороны, из (B.7) следует, что

$$[{\xi_1}^{-1}, \xi_2] = [\xi_2, {\xi_1}^{-1}]^{-1} = (1, {\alpha_1}^{-1}(-\gamma)) = (1, \eta),$$

где $\eta = -{\alpha_1}^{-1} \gamma$. Отсюда следует одинаковая распределенность вещественных случайных величин δ и η. Так как μ – гауссовское распределение в смысле Бернштейна, то вещественные случайные величины γ и δ независимы. Кроме того, из определения B.1 следует, что случайные векторы

$(\xi_1\xi_2, \xi_2\xi_1)$ и $(\xi_2{\xi_1}^{-1}, {\xi_1}^{-1}\xi_2)$ независимы. Отсюда вытекает независимость случайных величин $[\xi_1, \xi_2]$ и $[{\xi_1}^{-1}, \xi_2] = ({\xi_1}^{-1}\xi_2)(\xi_2{\xi_1}^{-1})^{-1}$, а следовательно и независимость вещественных случайных величин γ и η.

По предложению B.2 вероятностная мера

$$P\{\omega \in \Omega : [\xi_1(\omega)\xi_2(\omega)] = (1, 0)\}$$

равна либо 0 либо 1. Предположим, что эта мера равна 0. Учитывая (B.6), это означает, что

$$P\{\omega \in \Omega : \gamma(\omega) \neq 0\} = 1.$$

Заметим теперь, что из независимости γ и δ, независимости γ и η и одинаковой распределенности δ и η следует одинаковая распределенность случайных векторов (γ, δ) и (γ, η) в $\mathbb{R}^2$. Это влечет одинаковую распределенность отношений $\dfrac{\delta}{\gamma}$ и $\dfrac{\eta}{\gamma}$, а следовательно и одинаковую распределенность вещественных случайных величин ${\alpha_1}^{-1}$ и $-{\alpha_2}^{-1}$, что невозможно, так как $\alpha_1 > 0$ и $\alpha_2 > 0$. Таким образом,

$$P\{\omega \in \Omega : [\xi_1(\omega)\xi_2(\omega)] = (1, 0)\} = 1.$$

Применяя лемму B.3, мы заканчиваем доказательство. $\square$

Приложение C

Гауссовские распределения в смысле Полиа

Согласно классической теореме Полиа, если ξ_1 и ξ_2 – независимые одинаково распределенные случайные величины такие, что ξ_1 и $\frac{\xi_1+\xi_2}{\sqrt{2}}$ одинаково распределены, то ξ_1 и ξ_2 – гауссовские. В этом приложении мы рассмотрим групповой аналог характеризационной теоремы Полиа. Пусть X – локально компактная абелева группа, удовлетворяющая второй аксиоме счетности, Y – ее группа характеров. Пусть $\xi_j,\ j = 1, 2, 3, 4,$ – независимые одинаково распределенные случайные величины со значениями в группе X, имеющие распределение μ, которые обладают тем свойством, что $2\xi_1$ и $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4$ одинаково распределены. Такие распределения μ называются гауссовскими распределениями в смысле Полиа. Мы описываем группы X, на которых любое гауссовское распределение в смысле Полиа инвариантно относительно некоторой компактной подгруппы K группы X и при естественном гомоморфизме $X \mapsto X/K$ индуцирует на фактор-группе X/K гауссовское распределение.

C.1. Определение. Распределение μ на группе X называется *гауссовским распределением в смысле Полиа*, если из того, что $\xi_j,\ j = 1, 2, 3, 4,$ – независимые одинаково распределенные случайные величины со значениями в группе X, имеющие распределение μ, следует, что случайные величины $2\xi_1$ и $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4$ одинаково распределены.

Множество гауссовских распределений в смысле Полиа на группе X обозначим через $\Gamma_P(X)$.

C.2. Лемма. *Распределение $\mu \in \mathrm{M}^1(X)$ принадлежит классу $\Gamma_P(X)$ тогда и только тогда, когда характеристическая функция $\widehat{\mu}(y)$ удовлетворяет уравнению*

$$(i) \qquad \widehat{\mu}(2y) = \widehat{\mu}^4(y), \quad y \in Y.$$

Доказательство. В силу 2.7(b), одинаковая распределенность $2\xi_1$ и $\xi_1+\xi_2+\xi_3+\xi_4$ равносильна тому, что

$$\mathbf{E}[(2\xi_1, y)] = \mathbf{E}[(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4, y)]. \tag{C.1}$$

Поскольку $\widehat{\mu}(y) = \mathbf{E}[(\xi_1, y)]$, то

$$\widehat{\mu}(2y) = \mathbf{E}[(2\xi_1, y)]. \tag{C.2}$$

С другой стороны, из (2.1) и 2.7(c) получаем, что

$$\widehat{\mu}^4(y) = \mathbf{E}[(\xi_1, y)]\ \mathbf{E}[(\xi_2, y)]\ \mathbf{E}[(\xi_3, y)]\ \mathbf{E}[(\xi_4, y)] =$$

$$= \mathbf{E}[(\xi_1, y)(\xi_2, y)(\xi_3, y)(\xi_4, y)] = \mathbf{E}[(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4, y)]. \tag{C.3}$$

Утверждение леммы вытекает из (C.1)– (C.3). $\square$

C.3. Из леммы C.2 следует включение $\Gamma^s(X) \subset \Gamma_P(X)$. Обозначим $I_P(X) = \Gamma_P(X) \cap I(X)$. Пусть K – компактная подгруппа группы X. Заметим, что по предложению 7.4 K является группой Корвина тогда и только тогда, когда из $2y \in A(Y, K)$ следует, что $y \in A(Y, K)$. Учитывая это, из представления 2.14 (i) характеристической функции $\widehat{m}_K(y)$ и леммы C.2 вытекает, что $m_K \in I_P(X)$ тогда и только тогда, когда K – компактная группа Корвина. Из 2.7(c) и леммы

C.2 следует, что множество $\Gamma_P(X)$ является подполугруппой в $\mathrm{M}^1(X)$. Поэтому имеет место включение

$$\Gamma^s(X) * I_P(X) \subset \Gamma_P(X). \tag{C.4}$$

Основная задача, решаемая в этом приложении, состоит в полном описании групп X, для которых имеет место равенство

$$\Gamma^s(X) * I_P(X) = \Gamma_P(X). \tag{C.5}$$

Очевидно, что если $\mu \in \Gamma^s(X) * I_P(X)$, то μ инвариантно относительно некоторой компактной подгруппы Корвина K группы X и при естественном гомоморфизме $X \mapsto X/K$ индуцирует на фактор-группе X/K симметричное гауссовское распределение. Для решения указанной задачи нам понадобится ряд лемм.

C.4. Определение. Распределения на группе X, образующие треугольную последовательность $\{\mu_{nj}\}$, $j = 1, 2, \ldots, j_n$, $n = 1, 2, \ldots$, называются *равномерно бесконечно малыми*, если для любого компакта $K \subset Y$ выполнено

$$(i) \qquad \lim_{n\to\infty} \sup_{1\le j\le j_n} \sup_{y\in K} |\widehat{\mu}_{nj}(y) - 1| = 0.$$

C.5. Лемма ([104, гл. 4, §5], [105]). *Пусть $\{\mu_{nj}\}$, $j = 1, 2, \ldots, j_n$, $n = 1, 2, \ldots$, – равномерно бесконечно малые распределения, $\mu_n = \mu_{n1} * \cdots * \mu_{nj_n}$ и $\mu_n \Rightarrow \mu$. Тогда μ – безгранично делимое распределение.*

C.6. Лемма. *Пусть X и Y группы Корвина и $\mu \in \Gamma_P(X)$. Тогда если $\widehat{\mu}(y_0) = 0$ в некоторой точке $y_0 \in Y$, то μ имеет невырожденный идемпотентный делитель.*

Доказательство. Поскольку X и Y группы Корвина, то из теоремы 1.9.5 следует, что отображение f_2 является топологическим автоморфизмом групп X и Y, т.е. X и Y – группы с однозначным делением на два. Функция $\widehat{\mu}(y/2^n)$ по теореме Бохнера является характеристической функцией некоторого распределения μ_n на группе X. По лемме C.2 характеристическая функция $\widehat{\mu}(y)$ удовлетворяет уравнению C.2(i). Из уравнения C.2(i) вытекает, что

$$\widehat{\mu}(y) = (\widehat{\mu}(y/2^n))^{4^n} = (\widehat{\mu}_n(y))^{4^n}, \quad y \in Y. \tag{C.6}$$

Отсюда по 2.7(b) и 2.7(c) следует, что $\mu = \mu_n^{*4^n}$.

Как известно, любая последовательность делителей заданного распределения сдвиг-компактна, т.е. содержит подпоследовательность, которая сходится после подходящих сдвигов (см. [104, гл. 3, §5], [105]). Так как μ_n – делитель μ, то последовательность μ_n сдвиг-компактна. Пусть ν какой-нибудь предел сдвигов μ_n. Очевидно, что любая степень ν – снова является делителем μ. Следовательно, последовательность ν^{*n} также является сдвиг-компактной. Обозначим через λ какой-нибудь предел сдвигов ν^{*n}. Очевидно, что λ – идемпотентный делитель μ. Если $\widehat{\mu}(y_0) = 0$ в некоторой точке $y_0 \in Y$, то $\widehat{\mu}_n(y_0) = 0$, $n = 1, 2, \ldots$, и поэтому $\widehat{\lambda}(y_0) = 0$. Следовательно, λ – невырожденное распределение. □

C.7. Лемма. *Пусть X и Y группы Корвина и $\mu \in \Gamma_P(X)$. Тогда множество $N = \{y \in Y : \widehat{\mu}(y) \neq 0\}$ – открытая подгруппа в Y.*

Доказательство. По лемме C.2 характеристическая функция $\widehat{\mu}(y)$ удовлетворяет уравнению C.2(i). Обозначим через H открытую подгруппу в Y, порожденную N, и рассмотрим ограничение $f(y)$ характеристической функции $\widehat{\mu}(y)$ на H. Так как по теореме 1.9.2

$$H \cong (X/A(X,H))^*, \tag{C.7}$$

то по лемме C.2 $f(y)$ является характеристической функцией некоторого распределения $\lambda \in \Gamma_P(X/A(X,H))$. Заметим теперь, что если некоторое распределение $\delta \in \mathrm{M}^1(X)$ имеет невырожденный идемпотентный делитель, то группа Y не может быть порождена множеством $\{y \in Y : \widehat{\delta}(y) \neq 0\}$. Следовательно, распределение λ не имеет невырожденных идемпотентных делителей.

Поскольку Y – группа Корвина, то и H – группа Корвина. Действительно, пусть $h \in H$. Тогда $h = k_1y_1 + \cdots + k_ly_l,\ k_j \in \mathbb{Z},\ y_j \in N$. Так как Y – группа Корвина, то $y_j = 2z_j,\ j = 1, 2, \ldots, l$. Из уравнения C.2$(i)$ следует, что $z_j \in N,\ j = 1, 2, \ldots, l$. Поэтому $h = 2(k_1z_1 + \cdots + k_lz_l) \in H^{(2)}$. Заметим теперь, что так как X – группа Корвина, то и $X/A(X,H)$ – группа Корвина. Учитывая (C.7), применим лемму C.6 к группе $X/A(X,H)$. Получаем, что $\widehat{\lambda}(y) \neq 0$ при $y \in H$. Поскольку $\widehat{\mu}(y) = \widehat{\lambda}(y)$ при $y \in H$, то $N = H$. □

C.8. Лемма. *Пусть X и Y группы Корвина, $\mu \in \Gamma_P(X)$ и $\widehat{\mu}(y) > 0$ для любого $y \in Y$. Тогда μ – безгранично делимое распределение.*

Доказательство. Также, как и при доказательстве леммы C.6, рассмотрим распределения μ_n с характеристическими функциями $\widehat{\mu}_n(y) = \widehat{\mu}(y/2^n)$. Как следует из (C.6),

$$\widehat{\mu}(y/2^n) = (\widehat{\mu}(y))^{1/4^n}, \quad y \in Y.$$

Отсюда следует, что распределения $\{\mu_{nj}\},\ \mu_{nj} = \mu_n,\ j = 1, 2, \ldots, 4^n,\ n = 1, 2, \ldots$ образуют треугольную последовательность, удовлетворяющую условиям леммы C.5. Мы имеем

$$\mu = \nu_n = \mu_{n1} * \cdots * \mu_{n4^n}.$$

По лемме C.5 μ – безгранично делимое распределение.

C.9. Лемма. *Пусть X и Y группы Корвина, $\mu \in \Gamma_P(X)$ и $\widehat{\mu}(y) \geq 0$ для любого $y \in Y$. Тогда μ – безгранично делимое распределение.*

Доказательство. Рассмотрим множество $N = \{y \in Y : \widehat{\mu}(y) > 0\}$. По лемме C.7 N – открытая подгруппа Y. Следовательно, по теореме 1.9.4 аннулятор $K = A(X,N)$ – компактная группа. По теореме 1.9.1 $N = A(Y,K)$. По лемме C.2 характеристическая функция $\widehat{\mu}(y)$ удовлетворяет уравнению C.2(i). Из уравнения C.2(i) вытекает, что если $2y \in N$, то $y \in N$. Следовательно, по предложению 7.4 K – компактная группа Корвина. Так как Y – группа Корвина, то из уравнения C.2(i) следует, что N – также группа Корвина.

Обозначим через $f(y)$ ограничение характеристической функции $\widehat{\mu}(y)$ на N. Так как по теореме 1.9.2 $N \cong (X/A(X,N))^*$, то по лемме C.2 $f(y)$ является характеристической функцией некоторого распределения $\lambda \in \Gamma_P(X/A(X,N))$. Поскольку $X/A(X,N)$ и N – группы Корвина, то по лемме C.8 λ – безгранично делимое распределение. Следовательно, для любого натурального n существуют распределение $\lambda_n \in \mathrm{M}^1(X/A(X,N))$ и элемент $[x_n] \in X/A(X,N)$ такие, что $\lambda = \lambda_n^{*n} * E_{[x_n]}$. Учитывая теорему 1.9.2 и 2.7(c), отсюда следует, что

$$\widehat{\lambda}(y) = \widehat{\lambda}_n^n(y)(x_n, y), \quad y \in N.$$

Положим

$$f_n(y) = \begin{cases} \widehat{\lambda}_n(y), & \text{если} \quad y \in N, \\ 0, & \text{если} \quad y \notin N. \end{cases}$$

Поскольку подгруппа N открыта, функция $f_n(y)$ непрерывна. По предложению 2.12 функция $f_n(y)$ положительно определена. Следовательно, по теореме Бохнера существует такое распределение $\mu_n \in \mathrm{M}^1(X)$, что $\widehat{\mu}_n(y) = f_n(y)$. Мы имеем

$$\widehat{\mu}(y) = \widehat{\mu}_n^n(y)(x_n, y), \quad y \in Y.$$

Из 2.7(b) и 2.7(c) отсюда следует, что $\mu = \mu_n^{*n} * E_{x_n}$. Тем самым, безграничная делимость μ доказана. $\square$

C.10. Лемма. *Пусть μ – безгранично делимое распределение на группе X, имеющее характеристическую функцию, которая не обращается в нуль. Пусть $\nu = \mu * \bar{\mu}$. Тогда справедливо неравенство*

$$(i) \qquad \widehat{\nu}(2y) \geq \widehat{\nu}^4(y), \quad y \in Y.$$

Если же в (i) имеет место равенство, т.е. ν – гауссовское распределение в смысле Полиа, то ν – гауссовское распределение.

Доказательство. Поскольку характеристическая функция $\widehat{\mu}(y)$ не обращается в нуль, то μ не имеет идемпотентных делителей. Следовательно, для характеристической функции $\widehat{\mu}(y)$ имеет место представление 2.16(i)

$$\widehat{\mu}(y) = (x_0, y) \exp\left\{ \int\limits_{X \setminus \{0\}} [(x,y) - 1 - ig(x,y)]dF(x) - \varphi(y) \right\}. \tag{C.8}$$

Учитывая 2.16(c), 2.7(c) и 2.7(d), из (C.8) получаем

$$\widehat{\nu}(y) = \widehat{\mu}(y)\widehat{\mu}(-y) = \exp\left\{ \int\limits_{X \setminus \{0\}} [2\mathrm{Re}(x,y) - 2 - 2ig(x,0)]dF(x) - 2\varphi(y) \right\}. \tag{C.9}$$

Из 2.16(a), 2.16(d) и 2.16(e) вытекает, что $g(x,0) = 0$ при $x \in U$, где U – некоторая окрестность нуля группы X. Принимая во внимание, что мера F конечна на дополнении U, а функция $g(x,0)$ в силу 2.16(b) ограничена на дополнении U, мы имеем

$$\exp\left\{ -i \int\limits_{X \setminus \{0\}} 2g(x,0)dF(x) \right\} = C. \tag{C.10}$$

Поскольку $\widehat{\nu}(0) = 1$, из (C.9) и (C.10) получаем, что $C = 1$. Учитывая это, из (C.9) находим

$$\widehat{\nu}(y) = \exp\left\{2\int\limits_{X\setminus\{0\}}[\mathrm{Re}(x,y)-1]dF(x) - 2\varphi(y)\right\}. \tag{C.11}$$

Полагая в неравенстве (2.3) $y_1 = y_2$, получаем

$$\mathrm{Re}(x,2y) - 1 \geq 4(\mathrm{Re}(x,y) - 1). \tag{C.12}$$

Причем знак равенства в (C.12) имеет место тогда и только тогда, когда $(x,y) = 1$. Из (C.12) следует, что

$$\int\limits_{X\setminus\{0\}}[\mathrm{Re}(x,2y)-1]dF(x) \geq 4\int\limits_{X\setminus\{0\}}[\mathrm{Re}(x,y)-1]dF(x). \tag{C.13}$$

Заметим также, что

$$\varphi(2y) = 4\varphi(y), \quad y \in Y. \tag{C.14}$$

Очевидно, что неравенство (i) вытекает из (C.11), (C.13) и (C.14).

Если же в (i) имеет место равенство при любом $y \in Y$, то это означает, что мера F сосредоточена на множестве, где $\mathrm{Re}(x,2y) - 1 = 4(\mathrm{Re}(x,y) - 1)$ при всех $y \in Y$, т.е. где $(x,y) = 1$ при всех $y \in Y$. Следовательно, мера F вырождена в нуле, что полностью доказывает лемму. $\square$

C.11. Лемма. $\Gamma_P(\mathbb{R}) = \Gamma^s(\mathbb{R})$.

Доказательство. Пусть $X = \mathbb{R}$. Учитывая (C.4), достаточно доказать, что $\Gamma_P(\mathbb{R}) \subset \Gamma^s(\mathbb{R})$. Пусть $\gamma \in \Gamma_P(\mathbb{R})$. Поскольку X и $Y \cong \mathbb{R}$ – группы Корвина, то из (C.6) следует, что характеристическая функция $\widehat{\gamma}(s)$ не обращается в нуль. Положим $\mu = \gamma * \bar{\gamma} \in \Gamma_P(\mathbb{R})$. Из 2.7$(c)$ и 2.7(d) следует, что $\widehat{\mu}(s) > 0,\ s \in \mathbb{R}$. Поэтому по лемме C.8 μ – безгранично делимое распределение. Положим $\nu = \mu * \bar{\mu}$. Поскольку $\nu \in \Gamma_P(\mathbb{R})$, то в C.10$(i)$ имеет место знак равенства. По лемме C.10 $\nu \in \Gamma(\mathbb{R})$. По теореме Крамера отсюда следует, что $\gamma \in \Gamma(\mathbb{R})$. Очевидно, что тогда $\gamma \in \Gamma^s(\mathbb{R})$. $\square$

C.12. Лемма. *Пусть X – дискретная группа без кручения. Тогда* $\Gamma_P(X) = \{E_0\}$.

Доказательство. По теореме 1.6.2 Y – связная компактная группа. Предположим вначале, что $Y \ncong \mathbb{T}$. Тогда, как известно, существует непрерывный мономорфизм $p : \mathbb{R} \mapsto Y$ такой, что образ $p(\mathbb{R})$ плотен в Y ([85, (25.18)]). Пусть $\mu \in \Gamma_P(X)$. Рассмотрим ограничение характеристической функции $\widehat{\mu}(y)$ на $p(\mathbb{R})$. Положим $f(t) = \widehat{\mu}(p(t)),\ t \in \mathbb{R}$. По лемме C.2 характеристическая функция $\widehat{\mu}(y)$ удовлетворяет уравнению C.2(i). Поэтому $f(t)$ – характеристическая функция на $\mathbb{R}$, также удовлетворяющая уравнению C.2(i). Из лемм C.2 и C.11 вытекает, что

$$f(t) = \exp\{-\sigma t^2\}, \quad \sigma \geq 0.$$

Поскольку p – мономорфизм и $\overline{p(\mathbb{R})} = Y$, то для любой окрестности нуля V группы Y мы можем выбрать такую последовательность вещественных чисел $t_n \to \infty$, что $p(t_n) \in V$ при всех n. Если $\sigma > 0$, то

$$f(t_n) = \widehat{\mu}(p(t_n)) = \exp\{-\sigma t_n^2\} \to 0$$

при $t_n \to \infty$. Виду произвольности окрестности V, это противоречит непрерывности в нуле функции $\widehat{\mu}(y)$. Следовательно, $\sigma = 0$, а значит $\widehat{\mu}(p(t)) = 1$ при $t \in \mathbb{R}$. Поскольку $\overline{p(\mathbb{R})} = Y$, то $\widehat{\mu}(y) = 1$ при $y \in Y$. Утверждение леммы вытекает теперь из 2.7(b).

Если, $Y \cong \mathbb{T}$, то $X \cong \mathbb{Z}$. Поскольку $\mathbb{Z}$ – подгруппа в $\mathbb{R}$, то $\Gamma_P(\mathbb{Z}) \subset \Gamma_P(\mathbb{R})$. Так как единственным симметричным гауссовским распределением на группе $\mathbb{R}$ с носителем в $\mathbb{Z}$ является E_0, утверждение леммы вытекает из леммы C.11. □

Из теоремы 1.6.2, леммы C.2 и леммы C.12 непосредственно вытекает следующее утверждение.

C.13. Следствие. *Пусть Y – связная компактная группа, $f(y)$ – характеристическая функция на группе Y, удовлетворяющая уравнению* C.2(i). *Тогда $f(y) = 1$ при $y \in Y$.*

C.14. Лемма. *Пусть Y – компактная группа. Пусть непрерывная функция $f(y)$ на Y удовлетворяет уравнению* C.2(i) *и $|f(y)| \leq 1$ при $y \in Y$. Тогда либо $|f(y)| = 1$ при $y \in Y$, либо $f(y_0) = 0$ в некоторой точке $y_0 \in Y$.*

Доказательство. Предположим, что существует такой элемент $y \in Y$, что

$$|f(y)| < 1. \tag{C.15}$$

Так как группа Y компактна, то последовательность $\{2^n y\}$ содержит сходящуюся подпоследовательность, т.е.

$$2^{n_j} y \to y_0, \tag{C.16}$$

где y_0 – некоторый элемент группы Y. Из уравнения C.2(i) следует, что

$$f(2^{n_j} y) = (f(y))^{4^{n_j}}. \tag{C.17}$$

Из (C.15)–(C.17) получаем, что $f(y_0) = 0$. □

C.15. Лемма. *Пусть $\mu \in \Gamma_P(X)$ и $\widehat{\mu}(y) = 1$ лишь при $y = 0$. Если H – такая подгруппа в Y, на которой $|\widehat{\mu}(y)| \equiv 1$, то либо $H = \{0\}$, либо $H \cong \mathbb{Z}(2)$.*

Доказательство. Из 2.7(e) вытекает, что существует такой элемент $x \in X$, что

$$\widehat{\mu}(y) = (x, y) \tag{C.18}$$

при $y \in H$. По лемме C.2 характеристическая функция $\widehat{\mu}(y)$ удовлетворяет уравнению C.2(i). Подставляя (C.18) в C.2(i), получаем, что $2x \in A(X, H)$. Рассмотрим гомоморфизм $p : H \mapsto \mathbb{T}$ определенный формулой $p(y) = (x, y)$. Поскольку $2x \in A(X, H)$, то $p(H) \subset \mathbb{Z}(2) \subset \mathbb{T}$. По предположению p – мономорфизм. Следовательно, группа H топологически изоморфна подгруппе в $\mathbb{Z}(2)$, откуда и вытекает утверждение леммы. □

C.16. Предложение. *Пусть распределение $\mu \in \Gamma_P(X)$. Тогда существует элемент $x \in X$, такой что $2x = 0$ и $\sigma(\mu * E_x) \subset M$, где M – подгруппа в X, топологически изоморфная группе вида $\mathbb{R}^m \times K$, где $m \geq 0$, а K – компактная группа Корвина.*

Доказательство. Рассмотрим множество $E = \{y \in Y : \widehat{\mu}(y) = 1\}$ и положим $B = A(X, E)$. Как следует из предложения 2.13, $\sigma(\mu) \subset B$. Поэтому μ можно рассматривать, как распределение на B. Обозначим $L = B^*$. Характеристическая функция $\widehat{\mu}(y),\ y \in L$, обладает тем свойством, что

$$\{y \in L : \widehat{\mu}(y) = 1\} = \{0\}. \tag{C.19}$$

По теореме 1.11.1 группа B топологически изоморфна группе вида $\mathbb{R}^m \times G$, где $m \geq 0$, а группа G содержит компактную открытую подгруппу. По теореме 1.7.1 $L \cong \mathbb{R}^m \times H$, где $H = G^*$. Чтобы не вводить дополнительных обозначений, будем считать, что $B = \mathbb{R}^m \times G$ и $L = \mathbb{R}^m \times H$. По лемме C.2 характеристическая функция $\widehat{\mu}(y)$ удовлетворяет уравнению C.2(i). Так как, очевидно, c_H – связная компактная группа, то по следствию C.13 $\widehat{\mu}(y) = 1$ при $y \in c_H$. Из (C.19) тогда следует, что $c_H = \{0\}$, т.е. группа H – вполне несвязна. Докажем, что группа H дискретна.

Пусть N – какая-нибудь компактная открытая подгруппа группы H. Пусть V – такая окрестность нуля группы группы N, что $\widehat{\mu}(y) \neq 0$ при $y \in V$. По теореме 1.12.2 можно выбрать такую компактную подгруппу P, содержащуюся в V, что $N/P \cong \mathbb{T}^n \times F$, где $n \geq 0$, а F – конечная группа. Так как группа L вполне несвязна, то $n = 0$, т.е.

$$N/P \cong F. \tag{C.20}$$

По лемме C.14 $|\widehat{\mu}(y)| = 1$ при $y \in P$. По лемме C.15 либо $P = \{0\}$, либо $P \cong \mathbb{Z}(2)$. Поскольку группа F конечна, то из (C.20) вытекает, что группа N также конечна, а значит, дискретна. Так как подгруппа N открыта, то группа H также дискретна. По теореме 1.6.1 отсюда следует, что группа G компактна.

Для группы H имеются две возможности.

1. H не содержит элементов порядка 2. Из предложения 7.4 тогда вытекает, что G – группа Корвина. В этом случае предложение доказано.

2. H содержит элементы порядка 2. Пусть $\zeta \in H,\ \zeta \neq 0,\ 2\zeta = 0$. Из уравнения C.2$(i)$ следует, что $|\widehat{\mu}(\zeta)| = 1$. Из леммы C.15 тогда вытекает, что такой элемент ζ единственный. Из (C.19) следует, что $\widehat{\mu}(\zeta) = -1$. Легко видеть, что $\zeta \notin H^{(2)}$. Действительно, если $\zeta = 2h,\ h \in H$, то из уравнения C.2(i) следует, что $|\widehat{\mu}(y)| = 1$ на подгруппе, порожденной h, что, в силу леммы C.15, невозможно.

Легко видеть, что существует элемент $x \in A(G, H^{(2)})$ такой, что $(x, \zeta) = -1$. Из теоремы 1.9.5 вытекает, что $2x = 0$. Обозначим через S подгруппу, порожденную элементом ζ. По теореме 1.9.4 подгруппа $A(B, S)$ открыта в B, а следовательно, $A(B, S) \cong \mathbb{R}^m \times K$, где K – некоторая открытая группа. Следовательно, K замкнута, а значит, компактна. По теореме 1.9.1 $S = A(L, \mathbb{R}^m \times K)$. Поскольку $\zeta \notin H^{(2)}$, то $\zeta \notin L^{(2)}$. Так как существует единственный элемент порядка 2 в H, то существует единственный элемент порядка 2 в L. Очевидно, что подгруппа S удовлетворяет условию: если $2y \in S$, то $y \in S$. По лемме 7.2 отсюда следует, что

$$\overline{(\mathbb{R}^m \times K)^{(2)}} = \mathbb{R}^m \times K. \tag{C.21}$$

Поскольку $\overline{(\mathbb{R}^m \times K)^{(2)}} = (\mathbb{R}^m \times K)^{(2)}$, то из (C.21) вытекает, что K – группа Корвина.

Рассмотрим распределение $\lambda = \mu * E_x \in \Gamma_P(X)$. Из 2.7$(c)$ следует, что $\widehat{\lambda}(y) = 1$ при $y \in S$. Отсюда по предложению 2.13 $\sigma(\lambda) \subset A(B, S) = \mathbb{R}^m \times K$. $\square$

C.17. Замечание. Пусть $\mu \in \Gamma_P(X)$. Предположим, что характеристическая функция $\widehat{\mu}(y)$ не обращается в нуль и выполнено условие:

$$\{y \in Y : |\widehat{\mu}(y)| = 1\} = \{0\}. \tag{C.22}$$

Поскольку $\widehat{\mu}(y) \neq 0$, то по лемме C.14 $|\widehat{\mu}(y)| = 1$, если $y \in b_Y$. Из (C.22) вытекает тогда, что $b_Y = \{0\}$. По теореме 1.9.3 отсюда следует, что X – связная группа.

Сказанное выше позволяет усилить предложение C.16 в случае, если характеристическая функция $\widehat{\mu}(y)$ не обращается в нуль. Именно, можно утверждать, что существует элемент $x \in X$, такой что $2x = 0$ и $\sigma(\mu * E_x) \subset M$, где M связная группа.

Докажем теперь основную теорему.

C.18. Теорема. *Для того чтобы на группе X имело место равенство* (C.5) *необходимо и достаточно, чтобы связная компонента нуля группы X не содержала элементов порядка* 2.

Доказательство. Необходимость. Из того, что c_X содержит элементы порядка 2, по лемме 7.6 вытекает, что существует такая компактная подгруппа Корвина G группы X, что $(G^*)^{(2)} \neq G^*$. Обозначим $H = G^*$ и рассмотрим подгруппу $\widetilde{H}$ в H, состоящую из элементов, неограниченно делимых на два, т.е.

$$\widetilde{H} = \bigcap_{l=1}^{\infty} H^{(2^l)}.$$

Как установлено при доказательстве леммы 7.6, фактор-группа $L = H/\widetilde{H}$ – дискретная группа без кручения, не содержащая отличных от нуля элементов, неограниченно делимых на два. Поскольку $H^{(2)} \neq H$, то $L \neq \{0\}$. Очевидно, что для каждого элемента $u \in L,\ u \neq 0$ существует такое целое неотрицательное число $p(u)$, что уравнение $2^{p(u)}v = u$ имеет решение в L, а уравнение $2^{p(u)+1}v = u$ уже не имеет решения в L. Каждому элементу $u \in L,\ u \neq 0$ сопоставим множество $B_u = \{2^p u\}_{p=-p(u)}^{\infty}$ и представим группу L в виде объединения непересекающихся множеств

$$L = \{0\} \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{u_k}.$$

Определим на множестве B_{u_k} функцию

$$\psi(u) = 2^{2p} a_k, \quad u = 2^p u_k,\ p = -p(u_k),\ p = -p(u_k) + 1,\ \ldots,$$

где числа a_k выбраны таким образом, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{p=-p(u_k)}^{\infty} \exp\{-4^p a_k\} < 1.$$

По теореме 1.9.2 $L^* \cong A(G, \widetilde{H})$. Обозначим $K = A(G, \widetilde{H})$ и рассмотрим на группе K непрерывную неотрицательную функцию

$$\rho(g) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{p=-p(u_k)}^{\infty} \exp\{-4^p a_k\} \overline{(g, 2^p u_k)}, \quad g \in K.$$

Очевидно, что $\rho(g) > 0$ и

$$\int_K \rho(g) dm_K(g) = 1.$$

Пусть μ – распределение на K с плотностью $\rho(g)$ относительно m_K. Мы имеем

$$\widehat{\mu}(u) = \begin{cases} 1, & \text{если } u = 0, \\ \exp\{-\psi(u)\}, & \text{если } \ u \neq 0. \end{cases}$$

Очевидно, что характеристическая функция $\widehat{\mu}(u)$ удовлетворяет уравнению C.2(i). Следовательно, по лемме C.2 $\mu \in \Gamma_P(K)$. Очевидно, что числа a_k можно выбрать таким образом, чтобы $\mu \notin \Gamma(K)$. Так как $K \subset G \subset X$, то распределение μ можно рассматривать, как распределение на X. Необходимость, таким образом, доказана.

Достаточность. Пусть $\mu \in \Gamma_P(X)$. Заметим, что если $x \in X$ и $2x = 0$, то $\mu * E_x \in \Gamma_P(X)$. Поэтому, учитывая предложение C.16, мы можем считать с самого начала, что $X = \mathbb{R}^m \times G$, где $m \geq 0$, а G – компактная группа Корвина. Предположим, что c_X не содержит элементов порядка 2. Тогда из лемм 7.6 и 7.7 вытекает, что Y – также группа Корвина. Положим $\nu = \mu * \bar{\mu} \in \Gamma_P(X)$. По лемме C.7 множество $N = \{y \in Y : \widehat{\nu}(y) \neq 0\}$ – открытая подгруппа в Y. По теореме 1.9.4 отсюда следует, что $K = A(X, N)$ – компактна группа. Отметим, что по теореме 1.9.4 $N = A(Y, K)$. По лемме C.2 характеристическая функция $\widehat{\nu}(y)$ удовлетворяет уравнению C.2(i). Из уравнения C.2(i) вытекает, что если $2y \in N$, то $y \in N$. По лемме 7.2 отсюда следует, что K – группа Корвина. Отметим также, что так как Y – группа Корвина, то из уравнения C.2(i) следует, что и N – группа Корвина.

Из 2.7(c) и 2.7(d) вытекает, что $\widehat{\nu}(y) = |\widehat{\mu}(y)|^2 \geq 0, \ y \in Y$. По лемме C.9 отсюда следует, что ν – безгранично делимое распределение. Положим $\lambda = \nu * \bar{\nu}$. Тогда λ – также безгранично делимое распределение и $\lambda \in \Gamma_P(X)$. Обозначим через $f(y)$ ограничение характеристической функции $\widehat{\lambda}(y)$ на N. Так как по теореме 1.9.2 $N \cong (X/K)^*$, то по лемме C.10 $f(y)$ является характеристической функцией некоторого гауссовского распределения распределения на фактор-группе X/K. Из лемм 7.6 и 7.7 вытекает, что фактор-группа X/K не содержит подгруппы, топологически изоморфной $\mathbb{T}$. По теореме 4.6 любой делитель гауссовского распределения на фактор-группе X/K является также гауссовским распределением. Из сказанного вытекает, что ограничение на N характеристической функции $\widehat{\mu}(y)$ является характеристической функцией некоторого гауссовского распределения на фактор-группе X/K.Следовательно, имеет место представление

$$\widehat{\mu}(y) = ([x], y) \exp\{-\varphi_0(y)\}, \quad y \in N,$$

где $[x] \in X/K, \ \varphi_0(y)$ – непрерывная неотрицательная функция на N, удовлетворяющая уравнению 2.16(ii). По лемме C.2 характеристическая функция $\widehat{\mu}(y)$ удовлетворяет уравнению C.2(i). Очевидно, что функция $\exp\{-\varphi_0(y)\}$ также удовлетворяет уравнению C.2(i). Поэтому и функция $([x], y)$ удовлетворяет уравнению C.2(i). Отсюда следует, что $2[x] = 0$. Поскольку $N \cong (X/K)^*$ и N – группа Корвина, то из $2[x] = 0$ следует, что $[x] = 0$. В результате получаем представление

$$\widehat{\mu}(y) = \begin{cases} \exp\{-\varphi_0(y)\}, & \text{если } \ y \in N, \\ 0, & \text{если } \ y \notin N. \end{cases} \tag{C.23}$$

По лемме 3.18 существует функция $\varphi(y)$, продолжающая функцию $\varphi_0(h)$ сохранением ее свойств с подгруппы N на Y. Пусть γ – гауссовского распределение на группе X с характеристической функцией $\widehat{\gamma}(y) = \exp\{-\varphi(y)\}$. Из (C.23) получаем $\widehat{\mu}(y) = \widehat{\gamma}(y)\widehat{m}_K(y), \ y \in Y$. Учитывая 2.7($b$) и 2.7($c$), отсюда вытекает, что $\mu = \gamma * m_K$. □

C.19. Замечание. Как следует из доказательства теоремы C.18, условие: c_X не содержит элементов порядка 2, является необходимым и достаточным условием для того, чтобы из того, что распределение $\mu \in \Gamma_P(X)$ и $\widehat{\mu}(y) \neq 0$, при всех $y \in Y$, вытекало, что $\mu \in \Gamma(X)$ (ср. с леммами 7.8, 7.9 и теоремой 7.10, а также с леммами 9.6, 9.7 и теоремой 9.9).

C.20. Замечание. Доказательство достаточности в теореме C.18 опирается на леммы C.8–C.10 и использует, в частности, групповой аналог формулы Леви–Хинчина 2.16(i). Мы докажем ниже утверждение, которое позволяет дать принципиально другое доказательство достаточности в теореме C.18, не использующее группового аналога формулы Леви–Хинчина.

C.21. Предложение. *Пусть группа X такова, что Y – группа Корвина. Тогда, если распределение $\mu \in \Gamma_P(X)$ и $\widehat{\mu}(y) \neq 0$, при всех $y \in Y$, то $\mu \in \Gamma(X)$.*

Доказательство. Замечание C.17 позволяет заменить распределение μ его сдвигом $\lambda = \mu * E_x \in \Gamma_P(X)$ таким образом, что носитель $\sigma(\lambda)$ содержится в некоторой связной подгруппе группы X. Поэтому мы можем с самого начала предполагать, что X – связная группа. Тогда по теореме 1.9.6 X – группа Корвина. В силу теоремы 1.9.2 условие: Y – группа Корвина, при этом сохраняется. Таким образом, X и Y – группы с однозначным делением на два. Кроме того, по теореме 1.9.3 Y – группа без кручения.

Положим $\nu = \mu * \bar{\mu} \in \Gamma_P(X)$. Из 2.7($c$) и 2.7($d$) вытекает, что $\widehat{\nu}(y) = |\widehat{\mu}(y)|^2 > 0, \ \ y \in Y$. Так как X – группа с однозначным делением на два, то X не содержит подгруппы, топологически изоморфной $\mathbb{T}$. Поэтому, если мы докажем, что $\nu \in \Gamma(X)$, то применяя теорему 4.6, получим, что и $\mu \in \Gamma(X)$. Сказанное позволяет с самого начала предполагать, что характеристическая функция $\widehat{\mu}(y) > 0$ при всех $y \in Y$.

Зафиксируем элемент $y_0 \in Y, \ y_0 \neq 0$, и рассмотрим подгруппу

$$L(y_0) = \left\{\frac{m}{2^n} y_0\right\}_{m,n=-\infty}^{\infty}.$$

Вложим подгруппу $L(y_0)$ в $\mathbb{R}$ естественным образом

$$\frac{m}{2^n} y_0 \to \frac{m}{2^n}.$$

Обозначим через H образ подгруппы $L(y)$ при этом отображении. Положим $f(r) = \widehat{\mu}(ry_0), \ r \in H$. По теореме Бохнера $f(r)$ – положительно определенная функция на H. Проверим, что функция $f(r)$ равномерно непрерывна на H в топологии, индуцированной на H обычной топологией $\mathbb{R}$. Обозначим $f(1) = \widehat{\mu}(y_0) = a$. По лемме C.2 характеристическая функция $\widehat{\mu}(y)$ удовлетворяет уравнению C.2(i), а следовательно, и уравнению (C.6). Из уравнения (C.6) находим

$$f(2^{-n}) = a^{4^{-n}}. \tag{C.24}$$

Заметим, что при $0 < x \leq 1$, $\alpha > 0$, выполнено неравенство

$$1 - x^{\alpha} \leq \frac{1-x}{x}\alpha. \tag{C.25}$$

Из (C.24) и (C.25) получаем

$$1 - f(2^{-n}) \leq c\, 4^{-n}, \tag{C.26}$$

где $c = \frac{1-a}{a}$.

Заметим теперь, что для любых $x \in X$ и $y \in Y$ и любого натурального m выполнено неравенство

$$1 - \mathrm{Re}(x, my) \leq m^2(1 - \mathrm{Re}(x, y)).$$

Отсюда следует, что для произвольного распределения $\lambda \in \mathrm{M}^1(X)$ справедливо неравенство

$$1 - \mathrm{Re}\ \widehat{\lambda}(my) \leq m^2(1 - \mathrm{Re}\ \widehat{\lambda}(y)), \quad y \in Y. \tag{C.27}$$

Поскольку $\widehat{\mu}(y) > 0$ при всех $y \in Y$, мы получаем из (C.27)

$$1 - \widehat{\mu}(my) \leq m^2(1 - \widehat{\mu}(y)), \quad y \in Y. \tag{C.28}$$

Положим теперь в (C.28) $y = \dfrac{y_0}{2^n}$ и воспользуемся неравенством (C.26). Мы находим

$$1 - f\,(m/2^n) \leq m^2(1 - f(2^{-n})) \leq c\,(m/2^n)^2\,. \tag{C.29}$$

Из неравенства (C.29) вытекает равномерная непрерывность функции $f(r)$ в топологии индуцированной на H обычной топологией $\mathbb{R}$. Следовательно, функция $f(r)$ продолжается до непрерывной положительно определенной функции $f(s)$ на $\mathbb{R}$. По теореме Бохнера существует такое распределение $\gamma \in \mathrm{M}^1(\mathbb{R})$, что $\widehat{\gamma}(s) = f(s)$.

Заметим теперь, что из равенства $f(2r) = f(r)^4,\ r \in H$, вытекает, что $f(2s) = f(s)^4,\ s \in \mathbb{R}$, т.е.

$$\widehat{\gamma}(2s) = \widehat{\gamma}^4(s), \quad s \in \mathbb{R}.$$

Отсюда по лемме C.2 $\gamma \in \Gamma_P(\mathbb{R})$. Следовательно, по лемме C.11 $\gamma \in \Gamma^s(\mathbb{R})$. Таким образом, мы доказали, что,

$$f(s) = \widehat{\gamma}(s) = \exp\{-\sigma s^2\},\ \sigma \geq 0.$$

Отсюда, в частности следует, что при $n = 2, 3, \ldots$ выполнено

$$f(ns) = (f(s))^{n^2}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Подставляя сюда $s = 1$ и возвращаясь к характеристической функции $\widehat{\mu}(y)$, находим

$$\widehat{\mu}(ny_0) = (\widehat{\mu}(y_0))^{n^2}. \tag{C.30}$$

Поскольку y_0 – произвольный элемент группы Y, то из (C.30) следует, что $\mu \in \Gamma_U(X)$. Поскольку Y – группа Корвина, то очевидно, выполнено условие (i) теоремы 6.6. По теореме 6.6 $\mu \in \Gamma(X)$. $\square$

Комментарии и нерешенные задачи

ГЛАВА II

Общепринятое сейчас определение гауссовского распределения на локально компактной абелевой группе было впервые предложено Партасарати, Рао и Варадханом в [105]. Они определяют гауссовское распределение γ, как распределение, удовлетворяющее условиям предложения 3.16 и доказывают, что распределение γ является гауссовским тогда и только тогда, когда его характеристическая функция представима в виде 3.1(i). В статье [105] установлены и основные свойства гауссовских распределений. Отметим, что наряду с другими результатами, в [105] получено представление для характеристической функции безгранично делимого распределения на локально компактной абелевой группе (формула Леви–Хинчина). Результаты статьи [105] вошли затем в монографии [89] и [104].

Предложения 3.6, 3.16, 3.17 и замечания 3.3, 3.4 и 3.12 принадлежат Партасарати, Рао и Варадхану ([105]). При доказательстве леммы 3.18, утверждения 3.19(b) и изложении примера 3.15 мы следуем монографии Хейера [89]. При доказательстве предложения 3.6 мы следуем обзорной статье Сазонова и Тутубалина [22]. Отметим также, что в [89] ряд результатов статьи [105] перенесен на локально компактные абелевы группы, не обязательно удовлетворяющие второй аксиоме счетности.

Гауссовские распределения на конечномерном торе $\mathbb{T}^n$ изучались Зибертом в [110] (см. также [89, §5.5]). Гауссовские распределения на бесконечномерном торе $\mathbb{T}^{\aleph_0}$, которым отвечает диагональная матрица в предложении 3.11, были изучены Бендиковым в [1], [2], Зибертом в [110] и Бергом в [50] (см. также [44], [46], [51]). Предложения 3.8, 3.11 и 3.14 доказаны Фельдманом в [26]. В связи с предложениями 3.11 и 3.14 см. также статью Бендикова и Салов-Косте [47]. Отметим, что Зиберт в [110] доказал, что если на связной локально компактной абелевой группе X существуют абсолютно непрерывные гауссовские распределения, то группа X локально связна и удовлетворяет второй аксиоме счетности. Существование абсолютно непрерывных гауссовских распределений для таких групп было доказано независимо Бендиковым ([1]), Зибертом ([110]) и Бергом ([50]). Утверждение 3.19(c) принадлежит Фельдману. Гауссовские полугруппы на бесконечномерных локально компактных группах, не обязательно абелевых, были в последние годы изучены Бендиковым, а также Бендиковым и Салов-Косте в связи с построенной ими теорией потенциала на таких группах (см. напр. монографию Бендикова [45], а также статьи [48] и [49], где можно найти дальнейшие ссылки).

Классическая теорема Крамера о разложении гауссовского распределения на вещественной прямой была доказана в [59]. Этот результат был первым, относящимся к арифметике вероятностных распределений. Отметим, что все известные доказательства теоремы Крамера используют теорию функций комплексного переменного. Арифметике вероятностных распределений на вещественной прямой и в пространстве $\mathbb{R}^m$ посвящены монографии [11], [12], [60] и обзорные статьи [9], [103]. Этим же вопросам посвящена значительная часть монографий [96], [108]. Основные результаты, относящиеся к арифметике вероятностных распределений на локально компактных абелевых группах, содержатся в [65].

Марцинкевич в [97] заметил, что любое гауссовское распределение на группе $\mathbb{T}$ имеет негауссовские делители. Этот результат Марцинкевича передоказывался затем Мартин-Лефом ([84, замечание 4.5.1]) и Карналем ([56]). Разложение 4.1(i) отмечено Хейером в [88]. Фельдман в [25] доказал, что если распределение γ на компактной абелевой группе X топологически не изоморфной $\mathbb{Z}(2)$, удовлетворяет условию 4.1(i), то γ имеет неразложимый делитель. Леммы 4.2 и 4.3 доказаны Фельдманом в [24] и [26]. Предложения 4.4 и 4.5 доказаны Фельдманом и Фрынтовым в [73]. Теорема 4.6 и предложение 4.10 были доказаны Фельдманом в [24]. При доказательстве теоремы 4.6 мы следуем [26].

Существует несколько различных неэквивалентных определений многочленов на абелевых группах (см. напр. [95], где эти определения сравниваются и устанавливаются алгебраические условия на группу, при выполнении которых эти определения эквивалентны). Результаты 5.1–5.5 принадлежат Дьоковичу ([62]). Лемма 5.10 доказана Фельдманом в [24]. Утверждения 5.11–5.14 принадлежат Фельдману ([29]).

Урбаник в [112] определил гауссовское распределение на локально компактной абелевой группе как распределение γ, которое можно включить в непрерывную однопараметрическую подгруппу $(\gamma_t)_{t\geq 0}$, $\gamma_0 = E_0$, $\gamma_1 = \gamma$, и удовлетворяющее условию 3.17(ii). В [112] был построен также пример негауссовского распределения на двумерном торе $\mathbb{T}^2$, удовлетворяющего условию 3.17(ii). Результаты §6 принадлежат Фельдману ([63]).

Задачи

II.1. Гауссовские распределения на связных не локально связных локально компактных абелевых группах в силу предложения 3.14 сингулярны. Если X – связная локально связная локально компактная абелева группа конечной размерности, т.е. $X \cong \mathbb{R}^m \times \mathbb{T}^n$, где $m \geq 0$, $n \geq 0$, то структура гауссовского распределения на X хорошо известна. Оно либо абсолютно непрерывно, либо сингулярно (см. 3.15). Невыясненной остается структура гауссовского распределения на связных локально связных локально компактных абелевых группах X бесконечной размерности, т.е. когда $X \cong \mathbb{R}^m \times \mathbb{T}^{\aleph_0}$, $m \geq 0$.

II.2. Хорошо известно, что два гауссовских распределения в пространстве $\mathbb{R}^{\aleph_0}$ либо взаимно абсолютно непрерывны, либо взаимно сингулярны ([81]). Сазонов и Тутубалин в [22] сформулировали задачу доказательства аналогичного утверждения для гауссовских распределений на локально компактных абелевых группах. В [26] Фельдман дал решение этой задачи для связных локально компактных абелевых групп конечной размерности, а также связных локально компактных абелевых групп бесконечной размерности, не содержащих подгруппы, топологически изоморфной $\mathbb{T}$. Нерешенной остается задача Сазонова–Тутубалина для связных локально компактных абелевых групп бесконечной размерности, содержащих подгруппу, топологически изоморфную $\mathbb{T}$. Отметим, что из положительного решения этой задачи вытекает решение задачи II.1.

ГЛАВА III

Теорема о том, что из независимости суммы и разности независимых случайных величин вытекает, что эти величины гауссовские, была независимо открыта Кацом ([91]) и Бернштейном ([3]). Этот результат – одна из наиболее известных характеризационных теорем. Классическим характеризационным теоремам математической статистики посвящено огромное число публикаций. Отметим, в частности, фундаментальную монографию [7].

В ситуации, когда случайные величины принимают значения в локально компактной абелевой группе X, аналоги теоремы Каца–Бернштейна были впервые рассмотрены Рухиным в [20] и [21] и Хейером и Роллом в [90]. Рухин в [20] доказал следующее утверждение. Пусть X и Y являются группами Корвина, ξ_1 и ξ_2 – независимые случайные величины со значениями в группе X и с распределениями μ_1 и μ_2. Если $\xi_1 + \xi_2$ и $\xi_1 - \xi_2$ независимы, то $\mu_j \in \Gamma(X) * I(X)$ (ср. с теоремой 7.10). Отметим, что работа Рухина [20] была первой статьей, в которой классическая характеризационная теорема, именно теорема Каца–Бернштейна, была изучена на произвольных локально компактных абелевых группах. Предложение 7.4 доказано Рухиным ([20]) и Хейером и Роллом ([90]). Леммы 7.5, 7.8 и 7.9, а также основной результат §7 – теорема 7.10, доказаны Фельдманом в [27]. Лемма 7.6 доказана Фельдманом в [32]. Лемма 7.7 доказана Фельдманом в [65, предложене 9.20]. Результаты 7.13–7.16 принадлежат Миронюк ([13]).

Пусть ξ_1 и ξ_2 – независимые случайные величины со значениями в локально компактной абелевой группе X и с распределениями μ_1 и μ_2, имеющие независимую сумму и разность. Если связная компонента нуля группы X не содержит элементов порядка 2, то согласно теореме 7.10 распределения μ_j являются свертками гауссовских и идемпотентных распределений. Первой работой, в которой описаны распределения μ_j в ситуации, когда связная компонента нуля группы X содержит элементы порядка 2, была работа Барышникова, Эйзенберга и Стадье [43]. Они описали возможные распределения μ_j в случае, когда $X = \mathbb{T}$. Лемма 8.2 доказана в [43]. Приведенное нами доказательство принадлежит Миронюк ([98]). Теоремы 8.5 и 8.8 доказаны Миронюк в [98].

Леммы 9.4, 9.6 и 9.7 доказаны Фельдманом в [27]. Лемма 9.5 доказана Фельдманом в [66]. Основной результат §9 – полное описание групп X, для которых имеет место равенство (9.2) (теорема 9.9), был доказан Фельдманом в [27] и [66]. Отметим, что Рухин в [20] доказал равенство (9.2) в предположении, что Y – группа Корвина. Хейер и Ролл в [90] доказали равенство (9.2) для групп X, удовлетворяющих следующим условиям:

(i) X – группа Корвина;

(ii) либо $Y = \overline{Y^{(2)}}$, либо $Y/\overline{Y^{(2)}} \cong \mathbb{Z}(2)$.

Предложение 9.8 и лемма 9.10 принадлежат Фельдману. Учитывая леммы 7.5 и 9.10, легко видеть, что результаты Рухина и Хейера и Ролла вытекают из теоремы 9.9. Результаты 9.11 – 9.14 принадлежат Миронюк ([13]).

Отметим, что гауссовские распределения в смысле Бернштейна на произвольных сепарабельных метрических топологических абелевых группах, не обязательно локально компактных, были изучены Бычковским в [54], [55] и Бычковской и Бычковским в [53]. В частности, для широкого класса таких групп X в [54] и [55] было доказано, что если μ – гауссовское распределение в смысле Бернштейна без идемпотентных делителей на X и G – борелевская подгруппа X, то либо $\mu(G) = 0$, либо $\mu(G) = 1$ (закон нуля или единицы).

Лемма 9.17 доказана в [7, лемма 1.1.1] для группы $X = \mathbb{R}$. Это доказательство без изменений переносится на локально компактные абелевы группы. Теорема 9.18 принадлежит Г.М. Фельдману ([37]). Она обобщает один результат А.Л. Рухина ([21]).

Задачи

III.1. Пусть ξ_1 и ξ_2 – независимые случайные величины со значениями в связной локально компактной абелевой группе X конечной размерности l и с распределениями μ_1 и μ_2, имеющие независимую сумму и разность. Описать возможные распределения μ_j. Заметим, что если $l = 1$, то либо $X = \mathbb{R}$, либо $X = \mathbb{T}$, либо $X = \Sigma_{\mathbf{a}}$, и описание возможных распределений μ_j в этом случае вытекает соответственно из теоремы Каца–Бернштейна, следствия 8.6 и теоремы 8.8.

III.2. Задача III.1 в предположении, что X – связная локально компактная абелева группа бесконечной размерности.

III.3. Задача III.1 для произвольной локально компактной абелевой группы X. Учитывая лемму 7.5, задача сводится к случаю, когда $X = \mathbb{R}^m \times K$, $m \geq 0$, а K – компактная группа Корвина.

III.4. Описать носители гауссовских распределений в смысле Бернштейна. Принимая во внимание лемму 7.5, можно предположить, что носителями являются классы смежности подгрупп G вида $G \cong \mathbb{R}^m \times K$, где $m \geq 0$, а K – компактная группа Корвина.

ГЛАВА IV

Пусть ξ_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, $n \geq 2$, – независимые случайные величины, α_j, β_j – ненулевые вещественные числа. Теорема о том, что из независимости линейных форм $L_1 = \alpha_1\xi_1 + \cdots + \alpha_n\xi_n$ и $L_2 = \beta_1\xi_1 + \cdots + \beta_n\xi_n$ вытекает, что все случайные величины ξ_j – гауссовские, была доказана независимо Скитовичем ([23]) и Дармуа ([61]). Этот результат подвел итог серии исследований, обобщающих теорему Каца–Бернштейна. Теорема Скитовича–Дармуа была обобщена Гурье и Олкиным ([82]) на случай, когда вместо случайных величин рассматриваются случайные векторы ξ_j в пространстве $\mathbb{R}^m$, а коэффициентами линейных форм L_1 и L_2 являются невырожденные матрицы. И в этом случае из независимости L_1 и L_2 вытекает, что все случайные векторы ξ_j – гауссовские.

Групповой аналог теоремы Скитовича–Дармуа был впервые рассмотрен Фельдманом в [31]. При этом предполагалось, что независимые случайные величины принимают значения в локально компактной абелевой группе, коэффициенты линейных форм – целые числа, а характеристические функции случайных величин не обращаются в нуль. Групповой аналог теоремы Скитовича–Дармуа в ситуации, когда коэффициентами линейных форм являются топологические автоморфизмы группы, был впервые рассмотрен Фельдманом в [33].

Теорема 10.3 и предложение 10.5 доказаны Фельдманом в [67]. Отметим, что теорема 10.3 для произвольного **a**-адического соленоида $\Sigma_{\mathbf{a}}$ была доказана ранее в [33]. Предложение 10.8 доказано Фельдманом в [31]. Приведенное нами доказательство принадлежит Миронюк. Теорема 10.12 принадлежит Шмидту ([109]). Доказательство Шмидта опиралось на формулу Леви–Хинчина 2.16(i). Приведенное нами доказательство принадлежит Фельдману ([71]). Оно отличается от доказательства Шмидта и не использует формулы Леви–Хинчина. Теорема 10.16, предложения 10.17 и 10.18 принадлежат Фельдману ([67]). Утверждение, сформулированное в замечании 10.19 о равносильности утверждения (α) в замечании 10.19 и теоремы Крамера о делителях гауссовского распределения, принадлежит Линнику ([10]). Доказательство Линника без изменений переносится на локально компактные абелевы группы. Результаты §11 принадлежат Миронюк и Фельдману ([16], [18]). Леммы 12.2 и 12.10 и теоремы 12.6 и 12.11 принадлежат Миронюк и Фельдману ([19]). Лемма 12.4 принадлежит Фельдману ([72]). Отметим, что лемма 12.3 по существу принадлежит Лайко ([94]), который доказал ее в случае $Y = \mathbb{R}$. Доказательство леммы 12.3

для локально компактных абелевых групп следует схеме ее доказательства для вещественной прямой.

Задачи

IV.1. Дать описание возможных распределений μ_j в теореме 11.5 в случае (II), аналогичное полученному в теоремах 12.6 и 12.11.

IV.2. Пусть X – связная локально компактная абелева группа конечной размерности l. Пусть $\delta \in \mathrm{Aut}(X)$, ξ_1 и ξ_2 – независимые случайные величины со значениями в группе X и с распределениями μ_1 и μ_2, имеющие не обращающиеся в нуль характеристические функции. Предположим, что линейные формы $L_1 = \xi_1 + \xi_2$ и $L_2 = \xi_1 + \delta\xi_2$ независимы. Дать описание возможных распределений μ_j.

Из теоремы Скитовича–Дармуа, следствия 8.6 и теоремы 10.3 вытекает полное решение этой задачи при $l = 1$. Из теорем 10.3, 11.5 и 12.6 вытекает частичное решение этой задачи при $l = 2$ (случай, когда $X = \mathbb{T}^2$ до конца не исследован). Случай, когда $l \geq 3$, а группа X содержит подгруппу, топологически изоморфную $\mathbb{T}$, остается вообще не исследованным.

ГЛАВА V

Групповой аналог теоремы Скитовича–Дармуа в ситуации, когда независимые случайные величины ξ_j, $j = 1, 2, \dots, n$, $n \geq 2$, с распределениями μ_j принимают значения в конечной абелевой группе X, а коэффициентами линейных форм являются автоморфизмы группы, был рассмотрен Фельдманом в [33]. В [33] были доказаны леммы 14.1 и 14.3. Из лемм 14.1 и 14.3 вытекает описание класса конечных абелевых групп, на которых при любом $n \geq 2$ независимость линейных форм $L_1 = \alpha_1\xi_1 + \cdots + \alpha_n\xi_n$ и $L_2 = \beta_1\xi_1 + \cdots + \beta_n\xi_n$ влечет, что либо все μ_j – вырожденные распределения, либо по крайней мере два распределения μ_{j_1} и μ_{j_2} идемпотентны. В [33] было доказано также, что полученное описание класса конечных абелевых групп является полным в следующем смысле: если X – конечная абелева группа, не принадлежащая указанному классу, то либо при $n = 4$, либо при $n = 6$ существуют независимые случайные величины ξ_j, $j = 1, 2, \dots, n$, со значениями в группе X и с распределениями $\mu_j \notin I(X)$ и автоморфизмы α_j, β_j группы X такие, что линейные формы $L_1 = \alpha_1\xi_1 + \cdots + \alpha_n\xi_n$ и $L_2 = \beta_1\xi_1 + \cdots + \beta_n\xi_n$ независимы. Аналогичные результаты были получены затем Фельдманом для компактных абелевых групп ([35]) и дискретных периодических абелевых групп ([36]). Лемма 14.9 была доказана в [35], а теорема 13.8 в [33]. Леммы 13.13, 14.15, 14.16 и 14.18 доказаны в [36]. Предложение 13.11 принадлежит Фельдману. Лемма 14.22 принадлежит Миронюк ([14]) и является модификацией предложения 1, доказанного в [33]. Предложения 14.23 и 14.25 также принадлежат Миронюк ([14]) и уточняют результаты, полученные ранее Фельдманом (см. соответственно [35, теорема 2] и [36, теорема 2]). Теорема 14.27 принадлежит Миронюк ([14]).

В работе [38] на примере конечных абелевых групп Фельдман обнаружил, что классы групп, на которых справедлива теорема Скитовича–Дармуа для $n = 2$ независимых случайных величин и для $n \geq 3$ независимых случайных величин, существенно различны. Теоремы 13.1 и 13.6 были доказаны Фельдманом в [38]. Затем Фельдман и Грачик в [74] изучили теорему Скитовича–Дармуа для двух независимых случайных величин на компактных вполне несвязных абелевых группах и связных компактных абелевых группах. Им принадлежат результаты 13.22–13.26 и 13.31–13.32. Теорема Скитовича–Дармуа для двух независимых случайных величин на дискретных абелевых группах была изучена Фельдманом и Грачиком в [41]. Им принадлежат результаты 13.14–13.20. Лемма 13.21 доказана Фельдманом. Результаты 13.27–13.30 принадлежат Фельдману и Грачику ([75]). Интересно отметить, что доказательство теоремы Скитовича–Дармуа для дискретных абелевых групп при $n = 2$ (теорема 13.16), в отличие от доказательства теоремы Скитовича–Дармуа для дискретных абелевых групп при $n \geq 3$, (теорема 14.20 и предложение 14.25) не опирается на теорию Ульма.

Случаи, когда число независимых случайных величин $n = 3$ и $n \geq 4$ несколько отличаются друг от друга. Теорема Скитовича–Дармуа для конечных абелевых групп и трех независимых случайных величин была изучена Фельдманом и Грачиком в [6]. Им принадлежат результаты 14.4–14.7 ([6]). Следуя схеме доказательства теоремы 14.7, теорема Скитовича–Дармуа в случае трех независимых случайных величин для компактных вполне несвязных абелевых групп и дискретных периодических абелевых групп была изучена Миронюк в [14]. Ей принадлежат леммы 14.12 и 14.19 ([14]).

Результаты §15 принадлежат Фельдману ([39], [40]).

Задачи

V.1. Существует ли компактная абелева группа X, не являющаяся ни связной, ни вполне несвязной и обладающая следующим свойством: если ξ_1 и ξ_2 – независимые случайные величины со значениями в группе X и с распределениями μ_1 и μ_2 и $\alpha_j, \beta_j \in \mathrm{Aut}(X)$, то из независимости линейных форм $L_1 = \alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2$ и $L_2 = \beta_1\xi_1 + \beta_2\xi_2$ следует, что $\mu_1, \mu_2 \in \Gamma(X) * I(X)$?

V.2. Задача V.1 при дополнительном предположении $c_X \cong \Sigma_{\mathbf{a}}$, где $\mathbf{a} = (2, 3, 4, \dots)$.

V.3. Пусть $X = \mathbb{T}^2$. Существует ли автоморфизм $\delta \in \mathrm{Aut}(X)$ такой, что если ξ_1 и ξ_2 – независимые случайные величины со значениями в группе X и с распределениями μ_1 и μ_2, то из независимости линейных форм $L_1 = \xi_1 + \xi_2$ и $L_2 = \xi_1 + \delta\xi_2$ следует, что $\mu_1, \mu_2 \in \Gamma(X) * I(X)$? Отметим, что из рассуждений, проведенных в п. **1** доказательства теоремы 11.5, вытекает, что если $\delta = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, где $ad - bc = 1,\ a + d = 2$, то μ_1, μ_2 – вырожденные распределения.

V.4. На каких связных компактных абелевых группах X существует автоморфизм $\delta \in \mathrm{Aut}(X)$ такой, что если ξ_1 и ξ_2 – независимые случайные величины со значениями в группе X и с распределениями μ_1 и μ_2, то из независимости линейных форм $L_1 = \xi_1 + \xi_2$ и $L_2 = \xi_1 + \delta\xi_2$ следует, что $\mu_1, \mu_2 \in \Gamma(X) * I(X)$?

Если $f_2 \in \mathrm{Aut}(X)$, то по теореме 7.10 из независимости линейных форм $L_1 = \xi_1 + \xi_2$ и $L_2 = \xi_1 - \xi_2$ вытекает, что $\mu_1, \mu_2 \in \Gamma(X) * I(X)$. Как следует из теоремы 15.7 для $\mathbf{a}$-адических соленоидов $X = \Sigma_{\mathbf{a}}$ условие: $f_2 \in \mathrm{Aut}(X)$ является не только достаточным, но и необходимым для существования автоморфизма $\delta \in \mathrm{Aut}(X)$ с указанным свойством. Для произвольных связных компактных абелевых групп, как следует из примера, построенного в замечании 15.9, это уже не так.

V.5. Существует ли локально компактная абелева группа X, топологически не изоморфная группе вида 14.27(i), и обладающая следующим свойством: для любых независимых случайных величин $\xi_j,\ j = 1, 2, \dots, n,\ n \geq 2$, со значениями в группе X и с распределениями μ_j и любых автоморфизмов $\alpha_j, \beta_j \in \mathrm{Aut}(X)$ из независимости линейных форм $L_1 = \alpha_1\xi_1 + \dots + \alpha_n\xi_n$ и $L_2 = \beta_1\xi_1 + \dots + \beta_n\xi_n$ следует, что все $\mu_j \in \Gamma(X)$.

ГЛАВА VI

Теорема о характеризации гауссовского распределения на вещественной прямой симметрией условного распределения одной линейной формы при фиксированной второй была доказана Хейде в [87].

Групповые аналоги теоремы Хейде были впервые рассмотрены Фельдманом в [68]. Результаты 16.1–16.10 доказаны Фельдманом в [69], а результаты 16.11–16.16 в [72]. Результаты 17.1–17.5 принадлежат Фельдману ([68]). Предложение 17.7, леммы 17.15, 17.16 и теорема 17.17 доказаны Фельдманом в [68]. Результаты 17.8–17.14 принадлежат Миронюк и Фельдману ([15]). Теорема 17.14 для конечных абелевых групп, не содержащих элементов порядка 2 была доказана в [68]. Предложение 17.6 и утверждения 17.19–17.32 доказаны Фельдманом в [70]. Предложение 17.25 и теорема 17.33 принадлежат Миронюк ([99]).

Задачи

Теоремы 16.2, 16.8 и 16.14 позволяют предположить, что справедливо следующее утверждение.

Гипотеза. *Пусть G – подгруппа в X порожденная всеми элементами порядка 2. Пусть ξ_1 и ξ_2 — независимые случайные величины со значениями в группе X и с такими распределениями μ_1 и μ_2, что их характеристические функции не обращаются в нуль. Пусть α_j, β_j – топологические автоморфизмы группы X такие, что $\beta_1\alpha_1^{-1} \pm \beta_2\alpha_2^{-1} \in \mathrm{Aut}(X)$. Предположим, что условное распределение линейной формы $L_2 = \alpha_2\xi_1 + \beta_2\xi_2$ при фиксированной $L_1 = \alpha_1\xi_1 + \beta_1\xi_2$ симметрично. Тогда $\mu_j = \gamma_j * \rho_j$, где $\gamma_j \in \Gamma(X)$, $\sigma(\rho_j) \subset G$, $j = 1, 2$.*

VI.1. Доказать сформулированную гипотезу для следующих групп: $X = \mathbb{T}^3$; $X = \mathbb{T}^n$, $n \geq 4$; $X = \mathbb{T}^{\aleph_0}$; X – произвольная связная группа; X – произвольная группа.

VI.2. Доказать аналог теоремы Хейде для компактных вполне несвязных групп (ср. с теоремой 13.26).

VI.3. Доказать аналог теоремы Хейде для **a**-адических соленоидов (ср. с теоремой 15.7).

ПРИЛОЖЕНИЕ A

Результаты приложения A принадлежат Миронюк и Фельдману ([17], [76]).

Пусть X – локально компактная абелева группа с однозначным делением на два, т.е. $f_2 \in \mathrm{Aut}(X)$. Пусть $\tau : X^2 \mapsto X^2$ — отображение, определяемое равенством $\tau(t,s) = (t+s,\ t-s)$. В работах [57] и [58] Корвин изучил комплексные меры μ_j и ν_j на X, удовлетворяющие условию: $(\mu_1 \otimes \mu_2)(\tau(E)) = (\nu_1 \otimes \nu_2)(E)$ для любого борелевского множества $E \subset X^2$. В предположении, что меры μ_j и ν_j абсолютно непрерывны относительно меры Хаара m_X, производные $f_j(t)$ и $g_j(t)$ мер μ_j и ν_j удовлетворяют уравнению

$$f_1(t+s)f_2(t-s) = g_1(t)g_2(s)$$

для почти всех $(t,s) \in X^2$. Очевидно, что функциональное уравнение Каца–Бернштейна A.2(i) является частным случаем этого уравнения.

Задачи

A.1. Пусть Y – локально компактная абелева группа не удовлетворяющая второй аксиоме счетности, $\varepsilon \in \mathrm{Aut}(Y)$. Будет ли подгруппа $(I-\varepsilon)Y$ измерима? В частности, будет ли измерима подгруппа $Y^{(2)}$?

A.2. Существуют ли регулярно полные локально компактные абелевы группы, удовлетворяющие второй аксиоме счетности, не являющиеся сильно регулярно полными?

A.3. Является ли условие A.15(i) необходимым, для того чтобы не обращающиеся в нуль непрерывные нормированные эрмитовы функции $f_j(y)$, удовлетворяющие уравнению $(A.6)$, имели вид $A.11(i)$?

Заметим следующее. Предположим, что Y – счетная дискретная абелева группа, обладающая следующими свойствами:

(a) $Y/Y^{(2)} \cong (\mathbb{Z}(2))^n$, где либо $n=4$, либо $n \geq 6$;

(b) любой автоморфизм $\varepsilon \in \mathrm{Aut}(Y)$ такой, что $I-\varepsilon \in \mathrm{Aut}(Y)$, удовлетворяет условию: при подходящем выборе образующих e_i в фактор-группе $Y/Y^{(2)}$ автоморфизм $\widehat{\varepsilon}$, индуцированный автоморфизмом ε в фактор-группе $Y/Y^{(2)}$, имеет вид $\widehat{\varepsilon}e_i = e_{i+1},\ i=1,2,\dots,n-1$.

Из лемм A.12 и A.14 вытекает, что если группа Y со свойствами (a) и (b) существует, то условие A.15(i) не является необходимым.

ПРИЛОЖЕНИЕ B

Пусть X – топологическая неабелева группа, удовлетворяющая второй аксиоме счетности. Определение B.1 гауссовских распределений в смысле Бернштейна для неабелевых групп было предложено Ноеншвандером в [100]. В этой же статье Ноеншвандер доказал, что в случае, когда X – группа Гейзенберга $X=\mathcal{H}$, носитель гауссовского распределения в смысле Бернштейна содержится в некоторой абелевой подгруппе группы X. Затем Ноеншвандер, Ройнет и Шот обобщили этот результат на односвязные нильпотентные группы Ли ([101]). В статье Грачика и Лёба [83] эти результаты обобщаются и усиливаются. Отметим, что в отличие от [101], доказательство Грачика и Лёба для нильпотентных групп X не использует ни того факта, что X – группа Ли, ни формулы Кемпбелла-Хаусдорфа.

Результаты приложения B принадлежат Грачику и Лёбу ([83]). В своем изложении мы следуем статье ([83]).

Задачи

B.1. Описать разрешимые группы X, на которые может быть перенесено предложение B.12.

B.2. Построить пример топологической неабелевой группы X и гауссовского распределения в смысле Бернштейна на X, носитель которого не содержится в абелевой подгруппе группы X.

ПРИЛОЖЕНИЕ C

В 1923 году Полиа доказал, что если ξ_1 и ξ_2 – независимые одинаково распределенные случайные величины такие, что ξ_1 и $\frac{\xi_1+\xi_2}{\sqrt{2}}$ одинаково распределены, то ξ_j – гауссовские ([106]). По-видимому, эта статья Полиа была первой публикацией, посвященной характеризационным теоремам. В ситуации, когда случайные величины принимают значения в локально компактной абелевой группе X, аналоги теоремы Полиа и ее обобщений изучались Фельдманом в [28], [30], [32] и [64]. Результаты приложения C принадлежат Фельдману ([28], [64]). Отметим, что лемма C.11 вытекает из характеризационной теоремы Полиа. Доказательство леммы C.10 для группы X не отличается от его доказательства для вещественной прямой и хорошо известно.

Литература

1. *Бендиков А. Д.* Пространственно однородные, непрерывные марковские процессы на абелевых группах и гармонические структуры // УМН. – 1974. – **29**, № 5. – С. 215, 216.

2. *Бендиков А. Д.* О функциях, гармонических для одного класса диффузионных просессов на группе // Теория вероятностей и ее применения. – 1975. – **20**, вып. 4. – С. 773–784.

3. *Бернштейн С.Н.* Об одном свойстве, характеризующим закон Гаусса // Труды Ленинградского политехнического института. – 1941. – **217**, № 3. – С. 21,22.

4. *Габриелян С.С.* О характеризации распределения Коши на группах равнораспределенностью одночлена и линейной статистики // Математическая физика, анализ, геометрия. – 1994. – **1**, вып. 3/4. – С. 410–415.

5. *Гельфонд А.О.* Исчисление конечных разностей. – М.: Физматгиз, 1959.

6. *Грачик П., Фельдман Г.М.* Независимые линейные статистики на конечных абелевых группах // Укр. мат. журнал. – 2001. – **53**, № 4. – С. 441–448.

7. *Каган А.М., Линник Ю.В., Рао С.Р.* Характеризационные задачи математической статистики. – М.: Наука, 1972.

8. *Кожухов С.В.* Регулярно полные абелевы группы // Известия вузов. Математика. – 1980. – № 12 (223). – С. 14–19.

9. *Лившиц Л.З., Островский И.В., Чистяков Г.П.* Арифметика вероятностных законов // Итоги науки и техники. Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика. – М.: Всесоюзный институт научной и технической информации. – 1975. – **12**. – С. 5–42.

10. *Линник Ю.В.* Замечание к теореме Крамера о разложении нормального закона // Теория вероятностей и ее применения. – 1956. – **1**, вып. 4. – С. 479, 480.

11. *Линник Ю.В.* Разложения вероятностных законов. – Ленинград: Издательство Ленинградского университета, 1960.

12. *Линник Ю.В., Островский И.В.* Разложения случайных величин и векторов. – М.: Наука, 1972.

13. *Миронюк М.В.* О функциональном уравнении С.Н. Бернштейна // Математическая физика, анализ, геометрия. – 2004. – **11**, вып. 2. – С. 177–188.

14. *Миронюк М.В.* До теореми Скитовича–Дармуа на абелевих групах // Укр. мат. журнал. – 2004. – **56**, № 10. – С. 1342–1356.

15. *Миронюк М.В., Фельдман Г.М.* Об одной характеризационной теореме на конечных абелевых группах // Сиб. мат. журнал. – 2005. – **46**, № 2. – С. 403–415.

16. *Миронюк М.В., Фельдман Г.М.* К теореме Скитовича–Дармуа на двумерном торе // Доклады академии наук. – 2005. – **401**, № 6. – С. 741–743.

17. *Миронюк М.В., Фельдман Г.М.* Уравнение Скитовича–Дармуа в классах непрерывных и измеримых функций // Там же. – 2006. – **410**, № 4. – С. 453–456.

18. *Миронюк М.В., Фельдман Г.М.* Независимые линейные статистики на двумерном торе // Теория вероятностей и ее применения. – 2007. – **52**, вып. 1. – С. 3–20.

19. *Миронюк М.В., Фельдман Г.М.* Теорема Скитовича–Дармуа на связных абелевых группах // Доклады академии наук. – 2009. – **424**, № 1. – С. 12–15.

20. *Рухин А.Л.* Об одной теореме С.Н. Бернштейна // Мат. заметки. – 1969. – **6**, № 3. – С. 301–307.

21. *Рухин А.Л.* Некоторые статистические и вероятностные задачи на группах // Труды Математического института им. В.А. Стеклова АН СССР. – 1970. – **111**. – С. 52–109.

22. *Сазонов В.В., Тутубалин В.Н.* Распределения вероятностей на топологических группах // Теория вероятностей и ее применения. – 1966. – **11**, вып. 1. – С. 3–55.

23. *Скитович В.П.* Об одном свойстве нормального распределения // Докл. АН СССР. – 1953. – **89**, № 2. – С. 217–219.

24. *Фельдман Г.М.* О разложении гауссовского распределения на группах // Теория вероятностей и ее применения. – 1977. – **22**, вып. 1. – С. 136–143.

25. *Фельдман Г.М.* Об обобщенном распределении Пуассона на группах // Записки научных семинаров ЛОМИ им. В.А. Стеклова АН СССР. – 1977. – **72**. – С. 161–185.

26. *Фельдман Г.М.* О гауссовских распределениях на локально компактных абелевых группах // Теория вероятностей и ее применения. – 1978. – **23**, вып. 3. – С. 548–563.

27. *Фельдман Г.М.* Гауссовские распределения в смысле Бернштейна на группах // Там же. – 1986. – **31**, вып. 1. – С. 47–58.

28. *Фельдман Г.М.* Об одной характеризации гауссовского распределения на абелевых группах // Там же. – 1987. – **32**, вып. 3. – С. 623–626.

29. *Фельдман Г.М.* Теоремы Мацинкевича и Лукача на абелевых группах // Там же. – 1989. – **34**, вып. 2. – С. 330–339.

30. *Фельдман Г.М.* К характеризации гауссовского распределения на группах равнораспределенностью одночлена и линейной статистики // Укр. мат. журнал. – 1989. – **41**, № 8. – С. 1112–1118.

31. *Фельдман Г.М.* Характеризация гауссовского распределения на группах независимостью линейных статистик // Сиб. мат. журнал. – 1990. – **31**, № 2. – С. 180–190.

32. *Фельдман Г.М.* О группах, допускающих характеризацию гауссовского распределения равнораспределенностью одночлена и линейной статистики // Укр. мат. журнал. – 1990. – **42**, № 1. – С. 139–142.

33. *Фельдман Г.М.* К теореме Скитовича–Дармуа на абелевых группах // Теория вероятностей и ее применения. – 1992. – **37**, вып. 4. – С. 695–708.

34. *Фельдман Г.М.* Об одной характеризационной теореме для распределения Коши на абелевых группах // Сиб. мат. журнал. – 1995. – **36**, № 1. – С. 215–221.

35. *Фельдман Г.М.* Теорема Скитовича–Дармуа для компактных групп // Теория вероятностей и ее применения. – 1996. – **41**, вып. 4. – С. 901–906.

36. *Фельдман Г.М.* Теорема Скитовича–Дармуа для дискретных периодических абелевых групп // Там же. – 1997. – **42**, вып. 4. – С. 747–756.

37. *Фельдман Г.М.* К харатеризации гауссовских распределений на абелевых группах постоянством регрессии // Там же. – 1998. – **43**, вып. 3. – С. 606–610.

38. *Фельдман Г.М.* К теореме Скитовича–Дармуа для конечных абелевых групп // Там же. – 2000. – **45**, вып. 3. – С. 603–607.

39. *Фельдман Г.М.* Независимые линейные статистики на a-адических соленоидах // Доклады академии наук. – 2007. – **417**, № 4. – С. 464–467.

40. *Фельдман Г.М.* Независимые линейные статистики на a-адических соленоидах // Теория вероятностей и ее применения. – 2009. – **54**, вып. 3. – С. 515–532.

41. *Фельдман Г.М., Грачик П.* К теореме Скитовича–Дармуа для дискретных абелевых групп // Там же. – 2004. – **49**, вып. 3. – С. 596–601.

42. *Armacost D.L.* The structure of locally compact abelian groups. Monographs Textbooks Pure Appl. Math. – **68**. – New York – Basel: Marcel Dekker, Inc., 1981.

43. *Baryshnikov Y., Eisenberg B., Stadje W.* Independent variables with independent sum and difference: S^1-case // J. Multivariate Anal. – 1993. – **45**, N 2. – P. 161–170.

44. *Bendikov A.* Symmetric stable semigroups on the infinite-dimensional torus // Exposition. Math. – 1995. – **13**, N 1. – P. 39–79.

45. *Bendikov A.* Potential theory on infinite-dimensional abelian groups. De Gruyter Studies in Math. – **21**. – Berlin: Walter de Gruyter & Co., 1995.

46. *Bendikov A., Saloff-Coste L.* Elliptic diffusions on infinite products // J. Reine Angew. Math. – 1997. – **493**. – P. 171–220.

47. *Bendikov A., Saloff-Coste L.* On the absolute continuity of Gaussian measures on locally compact groups // J. Theoret. Probab. – 2001. – **14**, N 3. – P. 887–898.

48. *Bendikov A., Saloff-Coste L.* Central Gaussian convolution semigroups on compact groups: a survey // Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top. – 2003. – **6**, N 4. – P. 629–659.

49. *Bendikov A., Saloff-Coste L.* On the sample paths of diagonal Brownian motions on the infinite dimensional torus // Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist. – 2004. – **40**, N 2. – P. 227–254.

50. *Berg Ch.* Fonctions harmoniques sur T^∞ // C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. A. – 1975. – **280**, N 22, Aii. – P. A1519–A1521.

51. *Berg Ch.* Potential theory on the infinite dimensional torus // Invent. Math. – 1976. – **32**, N 1. – P. 49–100.

52. *Bourbaki N.* General topology. Chapters 5–10. – Berlin: Springer–Verlag, 1989.

53. *Byczkowska H., Byczkowski T.* A generalization of the zero-one law for Gaussian measures on metric abelian groups // Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. – 1981. – **29**, N 3–4. – P. 187–191.

54. *Byczkowski T.* Gaussian measures on metric abelian groups // Probability measures on groups. Proc. Fifth Conf., Oberwolfach, 1978. Lect. Notes Math. – 1979. – **706**. – Berlin: Springer. – P. 41–53,

55. *Byczkowski T.* Zero-one laws for Gaussian measures on metric abelian groups // Studia Math. – 1980/81. – **69**, N 2. – P. 159–189.

56. *Carnal H.* Non-validite du theoreme de Levy-Cramer sur le cercle // Publ. Inst. Statist. Univ. Paris. – 1964. – **13**. – P. 55–56.

57. *Corwin L.* Generalized Gaussian measure and a "functional equation". I // J. Funct. Anal. – 1970. – **5**. – P. 412–427.

58. *Corwin L.* Generalized Gaussian measure and a "functional equation". 2 // J. Funct. Anal. – 1970. – **6**. – P. 481–505.

59. *Cramer H.* Uber eine Eigenschaft der normalen Verteilungsfunktion // Math. Z. – 1936. – **41**, N 1. – P. 405–414.

60. *Cuppens R.* Decomposition of multivariate probabilities. Probab. Math. Statist. – **29**. – New York–London: Academic Press, 1975.

61. *Darmois G.* Analyse générale des liaisons stochastiques. Etude particuliere de l'analyse factorielle linéaire // Rev. Inst. Internat. Statist. – 1953. – **21**. – P. 2–8.

62. *Djoković D. Ž.* A representation theorem for $(X_1-1)(X_2-1)\cdots(X_n-1)$ and its applications // Ann. Polon. Math. – 1969/1970. – **22**. – P. 189–198.

63. *Feldman G.M.* On Urbanik's characterization of Gaussian measures on locally compact abelian groups // Studia Math. – 1982. – **73**. – P. 81–86.

64. *Feldman G.M.* The Polya characterization of a Gaussian measure on groups // Studia Math. – 1987. – **87**. – P. 9–21.

65. *Feldman G.M.* Arithmetic of probability distributions and characterization problems on Abelian groups. Transl. Math. Monographs. – **116**. – Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1993.

66. *Feldman G.M.* On groups for which the Bernstein characterization of a Gaussian distribution is valid // Доповіді Національної академії наук України. Математика. Природознавство. Технічні науки. – 2001. – № 8. – С. 29–32.

67. *Feldman G.M.* A characterization of the Gaussian distribution on Abelian groups // Probab. Theory Relat. Fields. – 2003. – **126**. – P. 91–102.

68. *Feldman G.M.* On the Heyde theorem for finite Abelian groups // J. Theoret. Probab. – 2004. – **17**. – P. 929–941.

69. *Feldman G.M.* On a characterization theorem for locally compact abelian groups // Probab. Theory Relat. Fields. – 2005. – **133**. – P. 345–357.

70. *Feldman G.M.* On the Heyde theorem for discrete Abelian groups // Studia Math. – 2006. – **177**, N 1. – P. 67–79.

71. *Feldman G.M.* On a theorem of K. Schmidt // B. London Math. Soc. – 2009. – **41**, N 1. – P. 103–108.

72. *Feldman G.M.* The Heyde theorem for locally compact Abelian groups // J. Funct. Anal. – 2010. – **258**, N 12. – P. 3977–3987.

73. *Feldman G.M., Fryntov A.E.* On the decomposition of the convolution of a Gaussian and Poisson distribution on locally compact abelian groups // J. Multivariate Anal. – 1983. – **13**, N 1. – P. 148–166.

74. *Feldman G.M., Graczyk P.* On the Skitovich-Darmois theorem on compact Abelian groups // J. Theoret. Probab. – 2000. – **13**. – P. 859–869.

75. *Feldman G.M., Graczyk P.* The Skitovich–Darmois theorem for locally compact Abelian groups // J. Australian Math. Soc. – 2010. –

76. *Feldman G., Myronyuk M.* The Skitovich-Darmois equation in the classes of continuous and measurable functions // Aequationes Math. – 2008. – **75**, N 1–2. – P. 75–92.

77. *Feller W.* An introduction to probability theory and its applications. – **1**. – New York–London–Sydney: John Wiley & Sons, 1968.

78. *Franz U., Neuenschwander D., Schott R.* Gauss laws in the sense of Bernstein and uniqueness of embedding into convolution semigroups on quantum groups and braided groups // Probab. Theory Relat. Fields. – 1997. – **109**. – P. 101–127.

79. *Fuchs L.* Infinite Abelian groups. – **1**. – Pure Applied Math. – **36-I**. – New York – San Francisco – London: Academic Press, 1970.

80. *Fuchs L.* Infinite Abelian groups. – **2**. – Pure Applied Math. – **36-II**. – New York – London: Academic Press, 1973.

81. *Gaek Ya.* On a property of normal distribution of any stochastic process // Czechoslovak Math. J. – 1958. – **8**. – P. 610–618.

82. *Ghurye S. G., Olkin I.* A characterization of the multivariate normal distribution // Ann. Math. Statist. – 1962. – **33**. – P. 533–541.

83. *Graczyk P., Loeb J.-J.* A Bernstein property of measures on groups and symmetric spaces // Probab. Math. Statist. – 2000. – **20**, N 1. – P. 141–149.

84. *Grenander U.* Probability on algebraic structures. – New York: Joun Wiley & Sons, 1963.

85. *Hewitt E, Ross K.A.* Abstract Harmonic Analysis. – **1**. – Grundlehren Math. Wiss. – **115**. – Berlin – Gottingen – Heildelberg: Springer–Verlag, 1963.

86. *Hewitt E, Ross K.A.* Abstract Harmonic Analysis. – **2**. – Grundlehren Math. Wiss. – **152**. – New York – Berlin: Springer–Verlag, 1970.

87. *Heyde C.C.* Characterization of the normal low by the symmetry of a certain conditional distribution // Sankhyā, Ser. A. – 1970. – **32**. – P. 115–118.

88. *Heyer H.* Factorization of probability measures on locally compact groups // Z. Wahrscheinlichkeitstheorie Verw. Gebiete. – 1967. – **8**. – P. 231–258.

89. *Heyer H.* Probability measures on locally compact groups. – Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. – **94**. – Berlin–Heidelberg–New York: Springer–Verlag, 1977.

90. *Heyer H., Rall Ch.* Gauss'she Wahrscheinlichkeitmasse auf Corwinschen Gruppen // Math. Z. – 1972. – **128**, N 4. – P. 343–361.

91. *Kac M.* On a characterization of the normal distribution // Amer. J. Math. – 1939. – **61**. – P. 726–728.

92. *Kakutani S.* On equivalence of infinite product measures // Ann. Math. – 1948. – **49**. – P. 214–224.

93. *Kuratowski K.* Topology. – **1**. – New York – London: Academic Press, 1966.

94. *Lajko K.* On a functional equation $f(x)g(y) = h(ax + by)k(cx + dy)$ // Period. Math. Hungar. – 1980. – **11**, N 3. – P. 187–195.

95. *Laczkovich M.* Polynomial mappings on abelian groups // Aequationes Math. – 2004. – **68**, N 3. – P. 177–199.

96. *Lukacs E.* Characteristic functions. – New York: Hafner Publishing Co., 1970.

97. *Marcinkiewicz J.* Sur les variables aléatoires enroulées // C. R. Soc. Math. France annee 1938. – 1939. – P. 34–36.

98. *Myronyuk M.* An analogue of the Bernstein theorem for the cylinder // Aequationes Math. – 2006. – **71**. – P. 54–69.

99. *Myronyuk M. V.* Heyde's characterization theorem for discrete Abelain groups // J. Australian Math. Soc. – 2010. – **88**. – P. 93–102.

100. *Neuenschwander D.* Gauss measures in the sense of Bernstein on the Heisenberg group // Probab. Math. Statist. – 1993. – **14**, N 2. – P. 253–256.

101. *Neuenschwander D., Roynette B., Schott R.* Charactarization of Gauss measures on nilpotent Lie groups and symmetric spaces // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I. – 1997. – **324**. – P. 87–92.

102. *Neuenschwander D., Schott R.* The Bernstein and Skitovich-Darmois characterization theorems for Gaussian distributions on groups, symmetric spaces, and quantum groups // Exposition. Math. – 1997. – **15**, N 4. – P. 289–314.

103. *Ostrovskii I.V.* The arithmetic of probability distributions // J. Multivariate Anal. – 1977. – **7**. – P. 475–490.

104. *Parthasarathy K.R.* Probability measures on metric spaces. Probab. Math. Statist. – **3**. – New York – London: Academic Press, 1967.

105. *Parthasarathy K.R., Ranga Rao R., Varadhan S. R. S.* Probability distributions on locally compact abelian groups // Illinois J. Math. – 1963. – **7**. – P. 337–369.

106. *Pólya G.* Herleitung des Gauss'schen Fehlergesetzes aus einer Funktionalgleichung // Math. Z. – 1923. – **18**. – P. 96–108.

107. *Prakasa Rao B.L.S.* A characterization of Gaussian measures on locally compact abelian groups // Math. Notes. – 1968. – **22**. – P. 914–916.

108. *Ramachandran B.* Advanced theory of characteristic functions. – Calcutta: Statistical Publishing Society, 1967.

109. *Schmidt K.* On a characterisation of certain infinitely divisible positive definite functions and measures // J. London Math. Soc. (2). – 1972. – **4**. – P. 401–407.

110. *Siebert E.* Einige Bemerkungen zu den Gauss-Verteilungen auf lokalkompakten abelschen Gruppen // Manuscripta Math. – 1974. – **14**. – P. 41–55.

111. *Székelyhidi L.* Convolution type functional equations on topological abelian groups. – Teaneck, NJ: World Scientific Publishing, 1991.

112. *Urbanik K.* Gaussian measures on locally compact abelian groups // Studia Math. – 1960. – **19**. – P. 77–88.

Указатель обозначений

Предметный указатель